МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе
______________ О.Г. Локтионова
«3» 05 ______________ 2018 г.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И МНОГОЧЛЕНЫ

Методические указания и индивидуальные задания к модулю

Курск 2018

УДК 512.64

Составитель *Т.В. Шевцова*

Рецензент
Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры высшей математики Студеникина Л.И.

Комплексные числа и многочлены: методические указания и индивидуальные задания к модулю /Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Т.В. Шевцова. Курск, ЮЗГУ, 2018. 30 с. Библиогр.: с. 30.

В работе содержатся теоретические упражнения, практические задания по теме «Комплексные числа и многочлены», а также рекомендации по их выполнению. Индивидуальные задания разбиты на три уровня сложности.

Предназначено для студентов всех направлений подготовки.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 3.05.18. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 1,7. Уч.-изд. л. 1,6. Тираж 100 экз. Заказ 1983. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Данная методическая разработка предназначена для организации и контроля индивидуальной самостоятельной работы студентов и является аналогом изданной ранее учебно-методической разработки «Комплексные числа».

Разработка подготовлена для студентов всех направлений подготовки, изучающих в рамках математической дисциплины темы «Комплексные числа» и «Многочлены одной переменной». Она содержит как индивидуальные задания, так и методические указания по их выполнению. Студентам предлагается выполнить теоретические упражнения и практические задания на действия с комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и экспоненциальной формах записи, представление комплексных чисел точками комплексной плоскости, нахождение корней многочленов второй, третьей и четвертой степени во множестве комплексных чисел, вывод свойств комплексных чисел и многочленов.

В каждом задании предложено 20 вариантов задач, выбор варианта осуществляется согласно номеру n в журнале.

Выполнение работы разделяется по трем уровням сложности.

Уровень сложности	Теоретические упражнения	Практические задания
Первый	1 под номером n	1, 3, 4, 5, 7
Второй	1, 2 под номером n	1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9
Третий	1,2 под номером n	Все

Выбранный уровень влияет на общее количество баллов, получаемых за модуль.

Разработку можно использовать при выполнении домашних заданий и при подготовке к экзамену.

Список литературы отражает некоторые учебные пособия, которые рекомендуется использовать при выполнении модуля.

Индивидуальные задания

Теоретические упражнения

Упражнение 1

1. Доказать, что модуль суммы комплексных чисел меньше или равен сумме модулей этих чисел:
$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$
2. Доказать, что для комплексных чисел z_1 и z_2 верно неравенство:
$$|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|.$$
3. Доказать, что сложение комплексных чисел коммутативно:
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1.$$
4. Доказать, что сложение комплексных чисел ассоциативно:
$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3.$$
5. Доказать, что умножение комплексных чисел коммутативно:
$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$
6. Доказать, что сложение и умножение комплексных чисел удовлетворяют закону дистрибутивности:
$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$
7. Доказать, что для комплексного числа $z \ne -1$ справедливо утверждение:
$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = 0 \Leftrightarrow |z| = 1.$$
8. Доказать формулу Муавра в тригонометрической форме:
если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
9. Доказать, что сумма комплексно-сопряженных чисел является действительным числом.
10. Доказать, что произведение комплексно-сопряженных чисел является действительным числом.
11. Доказать, что разность комплексно-сопряженных чисел в общем виде не является действительным числом.

12. Доказать, что модули комплексно-сопряженных чисел равны.

13. Доказать, что комплексное число, сопряженное сумме комплексных чисел, равно сумме чисел, сопряженных слагаемым:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \,.$$

14. Доказать, что комплексное число, сопряженное произведению комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных сомножителям:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \,.$$

15. Доказать, что модуль произведения комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2| .$$

16. Доказать, что модуль частного комплексных чисел равен частному модулей этих чисел:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} .$$

17. Доказать, что комплексное число, сопряженное частному двух данных комплексных чисел, равно частному чисел, сопряженных данным:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} .$$

18. Доказать формулу Эйлера:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} .$$

19. Доказать формулу Эйлера:

$$\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} .$$

20. Доказать верность равенства:

$$e^{i\pi} = -1.$$

Упражнение 2

1. Доказать, что многочлен с положительными коэффициентами не может иметь положительных корней.
2. Доказать, что если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами
$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$
то число p есть делитель свободного члена a_0, а число q есть делитель старшего коэффициента a_n.
3. Доказать, что если $z = a + bi$ – комплексный корень многочлена с действительными коэффициентами, то $\bar{z} = a - bi$ также корень этого многочлена.
4. Доказать, что комплексно сопряженные корни $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ многочлена с действительными коэффициентами имеют одинаковую кратность.
5. Доказать, что любой целый корень уравнения с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена.
6. Доказать, что если старший коэффициент уравнения с целыми коэффициентами равен 1, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, – целые.
7. Доказать, что любой многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет хотя бы один действительный корень.
8. Доказать, что число -1 тогда и только тогда является корнем многочлена, когда сумма коэффициентов многочлена, стоящих на четных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на нечетных местах.
9. Доказать, что сумма коэффициентов многочлена $P(x)$ равна $P(1)$.
10. Доказать, что любой многочлен степени $n \geq 1$ с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с отрицательным дискриминантом.

11. Доказать, что любое кубическое уравнение $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ можно свести к неполному уравнению вида $x^3 + px + q = 0$.

12. Доказать, что если для кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ выражение $-27q^2 - 4p^3$ положительно, то уравнение имеет 3 различных действительных корня.

13. Доказать, что если для кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ выражение $-27q^2 - 4p^3$ отрицательно, то уравнение имеет 1 действительный и 2 комплексно сопряженных корня.

14. Доказать, что если для кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$ выражение $-27q^2 - 4p^3$ равно 0, то уравнение имеет 3 действительных корня, причем как минимум 2 из них совпадают.

15. Доказать, что если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, то $x_1x_2x_3 = -a_0$.

16. Доказать, что если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, то $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a_1$.

17. Доказать, что если x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, то $x_1 + x_2 + x_3 = -a_2$.

18. Доказать, что любое уравнение четвертой степени $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ можно свести к неполному уравнению вида $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

19. Доказать, что число c тогда и только тогда является корнем многочлена $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$, когда $P(x)$ делится на $x - c$.

20. Доказать, что $(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = -27q^2 - 4p^3$, где

x_1, x_2, x_3 – корни уравнения $x^3 + px + q = 0$.

Практические задания

Задание 1

Выполнить указанные действия

Таблица 1

n	Задание	n	Задание
1.	$(1+4i)\cdot(2-3i)+\dfrac{2i(5+2i)}{1+2i}$	2.	$\dfrac{(2-6i)\cdot i}{-4+2i}-(1-i)^2$
3.	$\dfrac{5+i}{-1-2i}+\dfrac{2+3i}{i}$	4.	$\dfrac{(1-5i)\cdot(2+i)}{-1+i}-i^{7}(2-3i)$
5.	$(2-i)^2+\dfrac{3+i}{1-2i}$	6.	$\dfrac{4-5i^3}{1+i}-3i(5+2i)$
7.	$\dfrac{(1-2i)(1+i)}{3-i}-2i(2-i)$	8.	$\dfrac{5+3i}{1+3i}-i(2+3i)$
9.	$(3-2i)^2+\dfrac{9-8i}{4+2i}-i^5$	10.	$(-1+i)\cdot(3+2i)+\dfrac{i(6-4i)}{2+2i}$
11.	$5-3i+\dfrac{i^3(2-i)}{2+i}$	12.	$(4-i)^2+\dfrac{1+8i^3}{4-2i}$
13.	$\dfrac{(1-2i)^2}{3+i}-1+i$	14.	$\dfrac{5i+2i^6}{1-i}-3+2i$
15.	$\dfrac{i^5(6-i)}{-2+i}-2+3i$	16.	$\dfrac{(1+2i)\cdot(3-i)}{2-i}-i(5+3i)$
17.	$\dfrac{i}{-1+3i}-1+4i^5$	18.	$\dfrac{(1-i)\cdot(5+i)}{-3+i}-i^{3}(1+i)$
19.	$\dfrac{(1+5i)\cdot(1-i)}{-1+2i}-3i$	20.	$\dfrac{2+4i}{1-3i}-i^3(1+3i)$

Задание 2

Найти действительные решения уравнения

Таблица 2

n	Задание
1.	$(2-i)^2 x+(3-2i)y=-2i$
2.	$(5+2i)x+(1-3i)y=x+y+8-5i$
3.	$(1+4i)x+(5-2i)y=(3+i)x-(2+3i)y+3+7i$
4.	$(3+5i)x+(1-2i)y=(3-4i)i$
5.	$(5+i)^2 x-y=(1+i)x+9i$
6.	$(2+i)ix+(4-i)y=y+5i$
7.	$(5+i)x+(4-2i)y=ix-(2+i)y+4+i$
8.	$(2-i)x+(-5+2i)y=1-i$
9.	$(1+3i)x+(2-i)^2 y=(-1-4i)i$
10.	$(3-i)x+(2+2i)y=(1+2i)x-iy$
11.	$(2+3i)x+(1-i)y=1+9i$
12.	$(3-2i)x+(1+4i)y=5+6i$
13.	$(6-i)x+(3+2i)y=x-13i+13$
14.	$(5-2i)x+(1+4i)y=7+6i$
15.	$(-4+i)x+(3-2i)y=-7+3i$
16.	$\dfrac{2+i}{i}x-(4+2i)y=3+4i$
17.	$(5+i)x-(1+i)y=-7-3i$
18.	$(2+i)x+(3-2i)y=(1-i)x+(4+i)y$
19.	$(7-i)x+(-2+4i)y=11+x$
20.	$x+(-1+3i)y=1-6i$

Задание 3

Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих указанному условию[1]

Таблица 3

n	Задание	*n*	Задание
1.	$\operatorname{Im}(\bar{z}) > -1$	2.	$-1 \le \operatorname{Re}(z) \le 3$
3.	$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$	4.	$1 \le \lvert z-3 \rvert \le 3$
5.	$\lvert z-i \rvert < 5$	6.	$\lvert z \rvert^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + 9$
7.	$\operatorname{Im}(z-4i) > 0$	8.	$\lvert z+4i \rvert < 4$
9.	$\operatorname{Re}(z \cdot i) > 3$	10.	$\operatorname{Im}(z^2) \le 2$
11.	$\dfrac{\pi}{2} \le \dfrac{\pi}{2} + \arg z \le \pi$	12.	$\operatorname{Re}(z+2) \ge 0$
13.	$\operatorname{Re}(z-2) \le 1$	14.	$\operatorname{Im}(z \cdot i) < -1$
15.	$2 < \operatorname{Im}(z) \le 4$	16.	$\operatorname{Re}(z^2) = 0$
17.	$\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}$	18.	$\operatorname{Im}(z+i) \le 3$
19.	$\lvert z+1-2i \rvert \le 2$	20.	$\lvert z \rvert > (\operatorname{Re} z)^2 - 4$

[1] В вариантах 2, 6, 9, 12, 13, 16, 20 считать, что $\operatorname{Re}(a+bi) = a$

В вариантах 1, 7, 10, 14, 15, 18 считать, что $\operatorname{Im}(a+bi) = b$.

Задание 4.

Представить комплексные числа z_1 и z_2 в тригонометрической и экспоненциальной формах и изобразить точками на комплексной плоскости

Таблица 4

n	Задание	*n*	Задание
1.	$z_1 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 3 - 3i$	2.	$z_1 = -4\sqrt{3} + 4i$, $z_2 = 0{,}5 + 0{,}5i$
3.	$z_1 = -3 + 3i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$	4.	$z_1 = -7 + 7\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 3\sqrt{3} + 3i$
5.	$z_1 = -\sqrt{3} - i$, $z_2 = -5i$	6.	$z_1 = 4 - 4\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 0{,}5i$
7.	$z_1 = -2 - 2i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$	8.	$z_1 = 6\sqrt{3} + 6i$, $z_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
9.	$z_1 = -3 - 3\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2i$	10.	$z_1 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -0{,}5i$
11.	$z_1 = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}i$, $z_2 = 2\sqrt{3} + 2i$	12.	$z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$, $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$
13.	$z_1 = 1 - \sqrt{3}\,i$, $z_2 = 4 + 4i$	14.	$z_1 = 5 + 5\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -2\sqrt{3} + 2i$
15.	$z_1 = 2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$	16.	$z_1 = -2\sqrt{3} + 2i$, $z_2 = 4i$
17.	$z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 6\sqrt{3} + 6i$	18.	$z_1 = \sqrt{3} - i$, $z_2 = 4 + 4i$
19.	$z_1 = -3 - 3i$, $z_2 = 4\sqrt{3} + 4i$	20.	$z_1 = -3 + 3\sqrt{3}\,i$, $z_2 = 3\sqrt{3} - 3i$

Задание 5

Для комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в тригонометрической форме, из задания 4, выполнить указанные действия.

Таблица 5

n	Задание	n	Задание
1.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_2}$	2.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^5}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$
3.	$z_1 \cdot z_2^5,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2^5}$	4.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2^5},\ \sqrt[3]{z_1}$
5.	$z_1^7 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_2}$	6.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^4}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1}$
7.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^8}{z_2},\ \sqrt[4]{z_2}$	8.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^5}$
9.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^3}{z_2},\ \sqrt[5]{z_2}$	10.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^3}$
11.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$	12.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2^3},\ \sqrt[5]{z_1}$
13.	$z_1 \cdot z_2^6,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1}$	14.	$z_1 \cdot z_2^7,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$
15.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1^5}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^5}$	16.	$z_1^3 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[4]{z_1^3}$
17.	$z_1 \cdot z_2^5,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_1}$	18.	$z_1 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2^7},\ \sqrt[4]{z_1}$
19.	$z_1^5 \cdot z_2,\ \dfrac{z_1}{z_2},\ \sqrt[3]{z_2}$	20.	$z_1 \cdot z_2,\ z_1 : z_2^3,\ \sqrt[4]{z_2^3}$

Задание 6

Решить задачу, используя формулу Муавра (в вариантах 1–10) или формулы Эйлера (в вариантах 11–20)

Таблица 6

n	Задание
1.	Выразить $\cos 3\varphi$ через $\cos\varphi$
2.	Выразить $\cos 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$
3.	Выразить $\cos 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$
4.	Выразить $\sin 3\varphi$ через $\sin\varphi$
5.	Выразить $\sin 4\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$
6.	Выразить $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$
7.	Выразить $tg3\varphi$ через $tg\varphi$
8.	Выразить $ctg3\varphi$ через $ctg\varphi$
9.	Выразить $tg5\varphi$ через $tg\varphi$
10.	Выразить $ctg4\varphi$ через $ctg\varphi$
11.	Выразить $\cos^3\varphi$ через косинусы кратных дуг
12.	Выразить $\sin^3\varphi$ через синусы кратных дуг
13.	Выразить $\cos^4\varphi$ через косинусы и синусы кратных дуг
14.	Выразить $\sin^4\varphi$ через косинусы и синусы кратных дуг
15.	Вычислить сумму $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\ldots+\cos n\varphi$
16.	Вычислить сумму $\cos 2\varphi+\cos 4\varphi+\ldots+\cos 2n\varphi$
17.	Вычислить сумму $\cos\varphi+\cos 3\varphi+\cos 5\varphi+\ldots+\cos(2n-1)\varphi$
18.	Вычислить сумму $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\ldots+\sin n\varphi$
19.	Вычислить сумму $\sin 2\varphi+\sin 4\varphi+\ldots+\sin 2n\varphi$
20.	Вычислить сумму $\sin\varphi+\sin 3\varphi+\sin 5\varphi+\ldots+\sin(2n-1)\varphi$

Задание 7

Найти корни многочлена второй степени (с комплексными коэффициентами) на множестве комплексных чисел и разложить его на множители.

Таблица 7

n	Задание
1.	$Q(x) = x^2 - 2x - 4ix + 6 + 4i$
2.	$Q(x) = x^2 + x - 6ix - 11 - 3i$
3.	$Q(x) = ix^2 + 2x - 5ix + 5i - 5$
4.	$Q(x) = x^2 - 4x + 2ix + 7 - 4i$
5.	$Q(x) = x^2 - 2x + 2ix + 9 - 2i$
6.	$Q(x) = x^2 - 6x - ix + 15 + 3i$
7.	$Q(x) = ix^2 - 4ix + 4x - i - 8$
8.	$Q(x) = x^2 - 6x - ix + 11 + 3i$
9.	$Q(x) = x^2 - 7x + 2ix + 9 - 7i$
10.	$Q(x) = x^2 - 4x + 4ix + 9 - 8i$
11.	$Q(x) = x^2 + 2x + 2ix - 4 + 2i$
12.	$Q(x) = x^2 - 4x - ix + 10 + 2i$
13.	$Q(x) = ix^2 + 2x + 2ix + 2 - 4i$
14.	$Q(x) = x^2 - 4x - 4ix + 1 + 8i$
15.	$Q(x) = ix^2 + 4x + 2ix + 4 - 7i$
16.	$Q(x) = x^2 - 2x - 2ix + 4 + 2i$
17.	$Q(x) = x^2 - 4x - 2ix + 7 + 4i$
18.	$Q(x) = x^2 + x + 4ix - 10 + 2i$
19.	$Q(x) = x^2 - 5x - 4ix + 2 + 10i$
20.	$Q(x) = x^2 - x + 6ix - 11 - 3i$

Задание 8

Найти корни многочлена четвертой степени (с действительными коэффициентами) на множестве комплексных чисел и разложить его на множители.

Таблица 8

n	Задание
1.	$P(x)=2x^4+9x^3+13x^2+x-5$
2.	$P(x)=3x^4-4x^3+x^2+6x-2$
3.	$P(x)=2x^4+5x^3+15x^2-35x+13$
4.	$P(x)=3x^4+2x^3-x^2-6x+2$
5.	$P(x)=5x^4-6x^3+6x^2-6x+1$
6.	$P(x)=2x^4+x^3-x^2-4x+2$
7.	$P(x)=2x^4+x^3+5x^2-13x+5$
8.	$P(x)=-3x^4-x^3+6x^2+14x+4$
9.	$P(x)=2x^4+9x^3+9x^2-33x+13$
10.	$P(x)=5x^4+4x^3-x^2-10x+2$
11.	$P(x)=-2x^4-5x^3+x^2+11x-5$
12.	$P(x)=3x^4+2x^3+8x^2-18x+5$
13.	$P(x)=2x^4+11x^3+19x^2-19x-13$
14.	$P(x)=3x^4-10x^3+15x^2-10x+2$
15.	$P(x)=2x^4+11x^3+23x^2+19x+5$
16.	$P(x)=-3x^4+4x^3-4x^2+4x-1$
17.	$P(x)=5x^4+4x^3+4x^2+4x-1$
18.	$P(x)=3x^4+8x^3+18x^2+8x-5$
19.	$P(x)=2x^4+19x^3+41x^2-36x-26$
20.	$P(x)=3x^4+4x^3+25x^2-22x-10$

Задание 9

Составить многочлен по заданным условиям

Таблица 9

<table>
<tr><th>n</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами третьей степени, если $x_1 = 2{,}5$ и $x_2 = -3 + i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = 3$ – корень многочлена кратности 2 и $x_2 = 2 + i$ – один из других корней многочлена</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Многочлен, если все его корни и соответствующие их кратности приведены в таблице:
<table><tr><td>корень</td><td>1</td><td>-2</td><td>$-1+i$</td></tr><tr><td>кратность</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = i$ – корень многочлена кратности 2</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами третьей степени, если $x_1 = -4$ и $x_2 = 1 + 2i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Многочлен, если все его корни и соответствующие их кратности приведены в таблице:
<table><tr><td>корень</td><td>3</td><td>-1</td><td>i</td></tr><tr><td>кратность</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>7.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = 1 - 2i$ и $x_2 = 2 - i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = 1 + 2i$ – корень многочлена кратности 2</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами третьей степени, если $x_1 = -0{,}5$ и $x_2 = 6 - i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>Многочлен, если все его корни и соответствующие их кратности приведены в таблице:
<table><tr><td>корень</td><td>1</td><td>1+i</td><td>1-i</td></tr><tr><td>кратность</td><td>3</td><td>1</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 9

<table>
<tr><th>n</th><th>Задание</th></tr>
<tr><td>11.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = -2$ – корень многочлена кратности 2 и $x_2 = 4i$ – один из других корней многочлена</td></tr>
<tr><td>12.</td><td>Многочлен, если все его корни и соответствующие их кратности приведены в таблице:
<table>
<tr><td>корень</td><td>-1</td><td>$3+i$</td><td>$3-i$</td></tr>
<tr><td>кратность</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>13.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = -1$ – корень многочлена кратности 2 и $x_2 = 1-2i$ – один из других корней многочлена</td></tr>
<tr><td>14.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = 2-i$ – корень многочлена кратности 2</td></tr>
<tr><td>15.</td><td>Многочлен, если все его корни и соответствующие их кратности приведены в таблице:
<table>
<tr><td>корень</td><td>5</td><td>-1</td><td>$2i$</td></tr>
<tr><td>кратность</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>16.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = i$ и $x_2 = 2+i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>17.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x_1 = -2+i$ – корень многочлена кратности 2</td></tr>
<tr><td>18.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами третьей степени, если $x_1 = -0{,}5$ и $x_2 = -3+2i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>19.</td><td>Многочлен с действительными коэффициентами третьей степени, если $x_1 = -1{,}5$ и $x_2 = 4+i$ – два из его корней</td></tr>
<tr><td>20.</td><td>Многочлен, если все его корни и соответствующие их кратности приведены в таблице:
<table>
<tr><td>корень</td><td>-4</td><td>i</td></tr>
<tr><td>кратность</td><td>1</td><td>3</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Задание 10

Решить уравнение третьей степени на множестве комплексных чисел, используя формулы Кардано.

Таблица 10

n	Задание	*n*	Задание
1.	$x^3-3x^2-6x+20=0$	2.	$x^3+6x-2=0$
3.	$x^3+3x-2i=0$	4.	$x^3+18x+15=0$
5.	$x^3-6x-2=0$	6.	$x^3-6ix+4(1-i)=0$
7.	$x^3+3x^2-15x-59=0$	8.	$x^3-3x^2-6x-4=0$
9.	$x^3+3x^2-6x+4=0$	10.	$x^3+9x^2+21x+5=0$
11.	$x^3+3x^2-3x+11=0$	12.	$x^3+3x+2i=0$
13.	$x^3+6ix+4-4i=0$	14.	$x^3-3x^2-15x+59=0$
15.	$x^3-9x^2+21x-5=0$	16.	$x^3-3x^2-3x+11=0$
17.	$x^3+6x+2=0$	18.	$x^3+3x^2-6x-20=0$
19.	$x^3-3x^2-6x+4=0$	20.	$x^3+3x^2+3x+11=0$

Примеры выполнения заданий

Пример 1

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1^2, $\dfrac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Решение:

Сложение и умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, производят подобно сложению и умножению многочленов.

$$z_1 + z_2 = 4 - 5i + 2 + 3i = (4 + 2) + (-5 + 3)i = 6 - 2i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 5i) \cdot (2 + 3i) = 8 + 12i - 10i - 15i^2 = 8 + 2i - 15(-1) = 23 + 2i$$

$$z_1^2 = (4 - 5i)^2 = 16 - 40i + 25i^2 = 16 - 40i - 25 = -9 - 40i$$

При делении одного комплексного числа на другое, делимое и делитель умножают на комплексное число, сопряженное делителю.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4 - 5i}{2 + 3i} = \frac{(4 - 5i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} = \frac{8 - 10i - 12i + 15i^2}{2^2 - (3i)^2} = \frac{8 - 22i - 15}{4 + 9} =$$

$$= \frac{-7 - 22i}{13} = -\frac{7}{13} - \frac{22}{13}i.$$

Пример 2

Найти i^9, i^{27}.

Решение:

Для любых $q, r \in N$ имеет место равенство

$$\boxed{i^{4q+r} = i^r}$$

Следовательно,

$$i^9 = i^{4 \cdot 2 + 1} = i^1 = i,$$

$$i^{27} = i^{6 \cdot 4 + 3} = i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i.$$

Пример 3

Найти действительные решения уравнения

$(-2+5i)\,x+2i=(1-2i)\,y+3ix-3$.

Решение:

Представим выражения в левой и правой части уравнения в виде $a+bi$.

$$(-2+5i)\,x+2i=(1-2i)\,y+3ix-3$$

$$-2x+5ix+2i=y-2i\,y+3ix-3$$

$$-2x+(5x+2)i=y-3+(-2y+3x)\,i$$

Комплексные числа $z_1=a+bi$ и $z_2=c+di$ равны, если равны их действительные части и мнимые части, то есть

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow a=c,\ b=d\,.$$

Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases}-2x=y-3,\\5x+2=-2y+3x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3,\\5x+2=-2\,(-2x+3)+3x;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3,\\5x+2=4x-6+3x;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3,\\-2x=-8;\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=-2x+3,\\-2x=-8;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-5,\\x=4.\end{cases}$$

Итак, $x=4$, $y=5$.

Пример 4

Дать геометрическое описание множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $\left|\mathrm{Re}\,(z+3-i)\right|<1$.

Решение:

$\mathrm{Re}\,(z+3-i)$ – действительная часть числа $z+3-i$.

$$z+3-i=a+bi+3-i=(a+3)+(b-1)i$$

$$\mathrm{Re}\,(z+3-i)=a+3$$

Итак, $|a+3|<1$

$|a+3|<1 \Leftrightarrow -1<a+3<1 \Leftrightarrow -4<a<-2$

Изображением множества точек $M(a,b)$ на комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $-4<a<-2$, служит бесконечная полоса, заключенная между прямыми $a=-4$ и $a=-2$, не включая точки этих прямых. (Рис. 1)

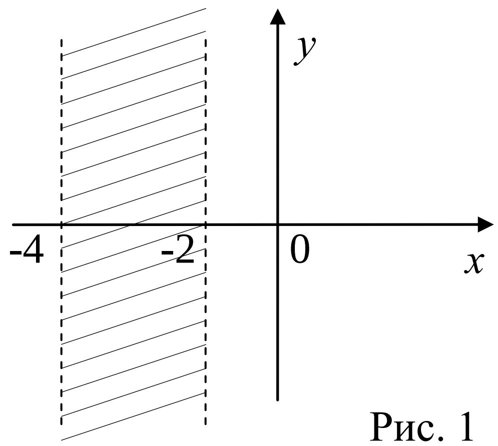

Рис. 1

Пример 5

Представить комплексные числа $z_1 = 1+i$ и $z_2 = 1-\sqrt{3}i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах.

Решение:

Любое комплексное число можно представить в виде:

$$z = a+bi = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bi}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r=\sqrt{a^2+b^2}$ – модуль комплексного числа z (обозначают $|z|$),

φ – аргумент комплексного числа z (обозначают $\arg z$), обычно выбирают $\varphi \in [0, 2\pi)$, реже берут $\varphi \in (-\pi, \pi]$. φ находят из условий:

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Символом $e^{i\varphi}$ обозначают комплексное число $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Поэтому любое комплексное число можно представить в виде:

$$z = a+bi = r\,e^{i\varphi}$$

Для представления комплексного числа $z_1 = 1 + i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах, найдем модуль и аргумент этого числа.

$a_1 = 1,\ b_1 = 1,$

$r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},$

$$\varphi_1 : \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{a_1}{r_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin\varphi_1 = \dfrac{b_1}{r_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}.\ \text{(Рис. 2)}$$

Следовательно,

$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ – тригонометрическая форма записи z_1.

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$ –экспоненциальная форма записи z_1.

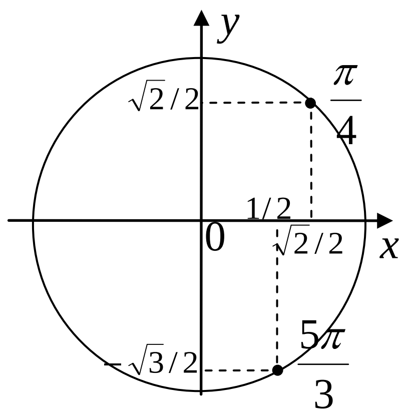

Рис. 2

Представим $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах.

$a_2 = 1,\ b_2 = -\sqrt{3},$

$r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} = \sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2,$

$$\varphi_2:\begin{cases}\cos\varphi_2=\dfrac{a_2}{r_2}=\dfrac{1}{2},\\ \sin\varphi_2=\dfrac{b_2}{r_2}=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi_2=\frac{5\pi}{3}.\ \text{(Рис. 2)}$$

Следовательно,

$z_2=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)$ – тригонометрическая форма записи z_2.

$z_2=2e^{i\frac{5\pi}{3}}$ –экспоненциальная форма записи z_2.

Пример 6

Для комплексных чисел $z_1=1+i$ и $z_2=1-\sqrt{3}i$, записанных в тригонометрической форме, выполнить действия:

1) $z_1\cdot z_2$, 2) $\dfrac{z_1}{z_2}$, 3) z_2^5, 4) $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение:

В примере 4 была получена тригонометрическая форма каждого из данных комплексных чисел:

$$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ z_2=2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

1) Чтобы перемножить два комплексных числа, записанных в тригонометрической форме, нужно перемножить их модули, а аргументы сложить:

$$\boxed{\begin{aligned}&z_1\cdot z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\&=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))\end{aligned}}$$

$$z_1\cdot z_2=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$$

2) Чтобы найти частное от деления двух комплексных чисел, нужно найти частное от деления их модулей и разность их аргументов:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}+2\pi\right)+i\sin\left(-\frac{17\pi}{12}+2\pi\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right).$$

В рассмотренном примере к полученному аргументу добавлено выражение 2π (период тригонометрических функций $\rho=\cos\varphi$ и $\rho=\sin\varphi$) для того, чтобы получить значение аргумента из промежутка $[0,2\pi)$.

3) Возведение комплексного числа в натуральную степень производится по формуле Муавра:

$$\boxed{z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$$

.

$$z_2^5=2^5\left(\cos\left(5\cdot\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(5\cdot\frac{5\pi}{3}\right)\right)=32\left(\cos\frac{25\pi}{3}+i\sin\frac{25\pi}{3}\right)=$$

$$=32\left(\cos\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right)=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

4) Существует ровно *n* корней *n*-ой степени из комплексного числа:

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\\ \text{где } k=0,1,\ldots,n-1.\end{gathered}}$$

В рассматриваемом примере

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\text{ где } k=0,1,2$$

при k=0 $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi/3}{3}+i\sin\frac{5\pi/3}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{9}+i\sin\frac{5\pi}{9}\right)$,

при k=1 $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{9}+i\sin\frac{11\pi}{9}\right)$,

при k=2 $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+4\pi}{3}\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{9}+i\sin\frac{17\pi}{9}\right)$.

Заметим, что аргументы получившихся комплексных чисел разбивают единичную окружность на три равные дуги. (Рис. 3).

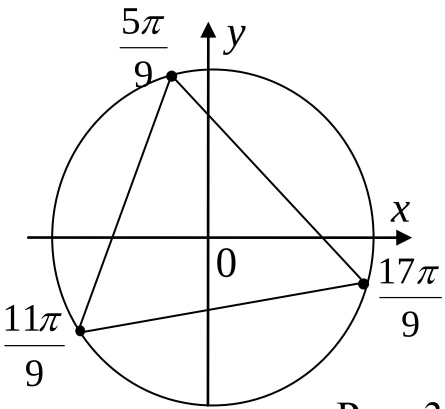

Рис. 3

Пример 7

Найти корни многочлена второй степени (с комплексными коэффициентами) на множестве комплексных чисел и разложить его на множители.

$$Q(x)=ix^2+2ix+x+13i+1$$

Решение:

Так как многочлен второй степени имеет в множестве комплексных чисел ровно 2 корня, то его разложение $Q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ на множители имеет вид:

$$Q(x) = a_2(x - x_1)(x - x_2).$$

Найдем корни многочлена, решив соответствующее квадратное уравнение.

$$ix^2 + 2ix + x + 13i + 1 = 0$$

$$ix^2 + (2i+1)x + (13i+1) = 0$$

$$D = (2i+1)^2 - 4i(13i+1) = 4i^2 + 4i + 1 - 52i^2 - 4i = -4 + 1 + 52 = 49$$

$$x_1 = \frac{-(2i+1)+7}{2i} = \frac{-2i+6}{2i} = -1 - 3i,$$

$$x_2 = \frac{-(2i+1)-7}{2i} = \frac{-2i-8}{2i} = -1 + 4i$$

$$Q(x) = i\,(x - (-1-3i))(x - (-1+4i) = i\ (x+1+3i)(x+1-4i)$$

Пример 8

Найти корни многочлена $P(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2$ на множестве комплексных чисел, разложить $P(x)$ на множители.

Решение:

Если многочлен $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0$ с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $\frac{p}{q}$, то число p есть делитель свободного члена a_0, а число q есть делитель старшего коэффициента a_n.

Найдем рациональные корни данного многочлена (если они существуют). Для этого выпишем все делители свободного члена и старшего коэффициента.

Делители $a_0 = -2 : \pm 1, \pm 2$. Делители $a_n = 3 : \pm 1, \pm 3$.

Следовательно, возможные рациональные корни многочлена:

$$\pm 1,\ \pm\frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm\frac{2}{3}.$$

Проверить, является ли число корнем многочлена, можно непосредственной подстановкой, но удобнее это сделать, воспользовавшись схемой Горнера.

Если требуется разделить многочлен степени n $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0 = 0$ на многочлен первой степени $(x-x_0)$, то получим многочлен степени n-1 $Q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_1 x+b_0$ и остаток R. Тогда имеет место равенство $P(x)=(x-x_0)Q(x)+R$.

Схема Горнера позволяет найти коэффициенты многочлена $Q(x)$ и остаток R. В случае, если x_0 – корень многочлена $P(x)$, остаток R=0. Она представлена в следующей таблице:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_0
x_0	b_{n-1}	$b_{n-2}=a_{n-1}+x_0\cdot b_{n-1}$	$b_{n-3}=a_{n-2}+x_0\cdot b_{n-2}$	$\dots$	R

В первой строке таблицы записывают коэффициенты многочлена $P(x)$. Во второй строке получают коэффициенты многочлена $Q(x)$ и остаток R.

Старший коэффициент частного (b_{n-1}) равен старшему коэффициенту делимого (a_n). Следующая пустая клетка заполняется так: берут стоящее над ней число первой строки и прибавляют к нему произведение числа x_0 на предыдущий элемент второй строки. Повторяют процедуру до тех пор, пока не дойдут до последнего элемента второй строки, он и равен R.

Составим схему Горнера для рассматриваемого примера и проверим, какой из возможных рациональных корней действительно является корнем многочлена $P(x)=3x^4-4x^3+x^2+6x-2$.

	3	-4	1	6	-2
x_0	3	$-4+1\cdot 3=$ $=-1$	$1+1\cdot(-1)=$ $=0$	$6+1\cdot 0=$ $=6$	$-2+1\cdot 6=$ $=4$
$x_0=-1$	3	$-4+(-3)=$ $=-7$	$1+7=$ $=8$	$6+(-8)=$ $=-2$	$-2+2=$ $=0$

Как видно из таблицы, число $x_0 = 1$ не является корнем многочлена, так как остаток $R \neq 0$. (Кстати, он равен значению многочлена в точке $x_0 = 1$, то есть $R = P(1)$).

Число $x_0 = -1$ является корнем многочлена, так как $R = 0$.

Следовательно, имеет место равенство

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2 = (x+1)(3x^3 - 7x^2 + 8x - 2).$$

Остальные рациональные корни можем искать, используя многочлен $Q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2$.

Так как число $x_0 = 1$ не является корнем исходного многочлена, то оно не может быть и корнем многочлена $Q(x)$.

Проверим остальные возможные корни. При этом число $x_0 = 1$ может еще раз оказаться корнем (тогда его кратность в исходном многочлене будет $\neq 1$).

	3	-7	8	-2
$x_0 = -1$	3	-10	18	-20
$x_0 = \frac{1}{3}$	3	-6	6	0

Число $x_0 = \frac{1}{3}$ является корнем, поэтому имеют место равенства:

$$Q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = (x - 1/3)(3x^2 - 6x + 6),$$

$$P(x) = (x+1)(x - 1/3)(3x^2 - 6x + 6).$$

Далее рассмотрим многочлен $3x^2 - 6x + 6$. Можем и дальше, использовать схему Горнера, но так как заранее неизвестно, есть ли еще рациональные корни и так как полученный многочлен является многочленом второй степени, можем решить обычное квадратное уравнение.

$$3x^2 - 6x + 6 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Итак, исходный многочлен имеет 4 корня: $-1, \frac{1}{3}, 1+i, 1-i$.

Разложение многочлена на множители имеет вид:

$$P(x) = 3x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 2 = 3(x+1)(x-1)(x-(1+i))(x-(1-i)).$$

Пример 9

Составить многочлен с действительными коэффициентами четвертой степени, если $x = -1+2i$ – корень многочлена кратности 2.

Решение:

Так как по условию многочлен имеет действительные коэффициенты, то его комплексные корни являются сопряженными, причем одной и той же кратности.

$x = -1+2i$ – корень кратности 2 $\Rightarrow$ $\overline{x} = -1-2i$ также корень кратности 2.

Следовательно, искомый многочлен может быть представлен в виде

$$M(x) = (x-(-1+2i))^2 (x-(-1-2i))^2 = \left((x-(-1+2i))(x-(-1-2i))\right)^2 =$$

$$= \left((x-(-1+2i))(x-(-1-2i))\right)^2 = \left((x+1-2i)(x+1+2i)\right)^2 =$$

$$= \left((x+1)^2 - 4i^2\right)^2 = \left(x^2+2x+1-4i^2\right)^2 = \left(x^2+2x+1+4\right)^2 = \left(x^2+2x+5\right)^2 =$$

$$= x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 10x^2 + 20x + 25 = x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 20x + 25.$$

Список рекомендуемой литературы

1. Ильин В.А. Линейная алгебра [Текст]: учебник / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. −М.: Наука, 2014. − 280с.
2. Ильин В.А. Линейная алгебра [Текст]: учебник / В.А.Ильин, Э.Г.Позняк. −М.: Наука, 2014. − 280с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру [Текст]: учебник. Ч. 1. Основы алгебры / А.И. Кострикин. – М., Наука, 2004, 272 с.
4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) [Текст]: – СПб: Лань, 2008. – 240 с.
5. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел [Текст]: учеб. пособие / Л.Я. Куликов. – М.: Высшая школа, 2002. – 559 с.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учебник для вузов. / А.Г. Курош. – СПб.: Лань, –2011. – 432 с.
7. Милованов М.В. Алгебра и аналитическая геометрия [Текст]: учебник Ч. I. / М.В. Милованов. – Мн.: Амалфея, 2001. – 400 с.
8. Прасолов В.В. Многочлены [Текст] / В.В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2003. – 336 с.
9. Сборник задач по математике для втузов [Текст]: учебное пособие. Ч.1 / А.В. Ефимов, А.С. Поспелов. – М.: Физматлит, 2009. − 288с.
10. Табачников С.Л. Многочлены [Текст] / С.Л. Табачников. – М: ФАЗИС, 2000. – 200 с.