МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« » ____________ 2014г.

Интегрирование функций одной переменной. Приложения.

Методические указания по выполнению модуля-5

Курск 2014

УДК 517

Составители: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *К.В.Жилина*

Интегрирование функций одной переменной. Приложения: методические указания по выполнению модуля 5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап; Курск, 2014. 51 с., табл. 1. Рис.13. Библиогр.: с.55

Излагаются краткие методические рекомендации по темам математического анализа: неопределенные интегралы и методы их решения, определенный интеграл и его вычисления, несобственные интегралы, приложения определенных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Цель настоящего методического пособия – научить студента технике интегрирования и умению решать различные задачи на приложения определенных интегралов.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, где приводятся основные определения, формулы, теоремы без доказательств. При подборе задач авторы прежде всего исходили из учета тех трудностей, с которыми могут встретиться студенты на пути овладения методами интегрирования.

В работе приведены 52 примера с подробными решениями по указанной тематике. При вычислении площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объемов тел вращения решения иллюстрировались для наглядности рисунками и подробными пояснениями.

Данное пособие является приложением к модулю 5 «Интегрирование функций», в котором приведены индивидуальные задания по темам «Неопределенные интегралы», «Несобственные интегралы» и «Определенные интегралы и их приложения». Методическое пособие предназначено для студентов первого курса технических и экономических специальностей.

Авторы надеются, что это методическое издание поможет студентам в самостоятельной работе по выполнению модуля и изучению данного материала.

1. Неопределенный интеграл

1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем несколько определений, свойств интегралов, формул.

Функция F(x) называется *первообразной* для функции f(x) на отрезке [a,b], если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция имеет первообразную, то функции вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также являются первообразными.

Неопределенным интегралом от функции f(x) называется совокупность (или семейство) всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции и основывается на следующих правилах интегрирования:

а) $\int dF(x) = F(x) + C$;

б) $(\int f(x)dx)' = f(x)$;

в) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$;

г) $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$ где C – постоянная;

д) $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$

е) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$;

ж) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $t = \varphi(x)$, то $\int f(t)dt = F(t) + C$.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t;

2) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

$u = g(x)$, u – новая переменная.

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

5) $\int e^{x} dx = e^{x} + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$;

10) $\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch} x + C$;

11) $\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh} x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth} x + C$;

13) $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \mathrm{th} x + C$;

14) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C$;

15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16) $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\, dx = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C$;

17) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\, dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

18) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$;

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

20) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$;

21) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$;

22) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| + C;$

23) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C;$

24) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

25) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8) dx$.

Решение. Используя свойства степеней и правила интегрирования, получим

$$\int\left(2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7 \cdot \int x^{-2}dx + 3\int x dx - 8\int dx =$$

$$= 2 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} - 7 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \frac{x^2}{2} - 8 \cdot x + C =$$

$$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Решение. Правило ж) позволяет найти интеграл с помощью метода подведения функции под знак дифференциала. Исходный интеграл можно привести к формуле 2 из таблицы интегралов, преобразовав его следующим образом

$$\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot d(\ln x), \quad \text{где} \quad d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

Далее в качестве переменной выберем $t = \ln x$, тогда получим интеграл от степенной функции

$$\int \ln^3 x d(\ln x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx$.

Решение. Применяя тот же прием, что и в предыдущем примере, получим

$$\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx = \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x + 8) = \{t = \sin x + 8\} = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(\sin x + 8)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\sin x + 8) \cdot \sqrt{\sin x + 8} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (3x+10)^{15} dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 3x + 10$, тогда $x = \frac{1}{3}(t-10)$, $dx = \frac{1}{3}(t-10)' dt = \frac{1}{3} dt$.

Отсюда получаем

$$\int (3x+10)^{15} dx = \int t^{15} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{48} \cdot (3x+10)^{16} + C.$$

Замечание. Можно было воспользоваться формулой e).

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{7x+1}} dx$.

Решение. Выполним подстановку $t = \sqrt{7x+1}$, тогда $7x + 1 = t^2$, $x = \frac{1}{7}(t^2 - 1)$, $dx = \frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1)' dt = \frac{2}{7} \cdot t dt$.

Применив формулу 17, имеем:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{7x+1}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1) \cdot t} \cdot \frac{2}{7} \cdot t \cdot dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1^2} dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{7x+1} - 1}{\sqrt{7x+1} + 1} \right| + C.$$

1.2. Формула интегрирования по частям

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение данной формулы целесообразно в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение разных по смыслу функций – степенной и показательной, степенной и тригонометрической, показательной и тригонометрической, логарифмической и степенной и т.п.

При этом за u(x) обозначают такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден.

К таким интегралам, например, относятся

$\int P_n(x)\ln x\,dx$, $\int P_n(x)\cdot\sin\alpha x dx$,

$\int P_n(x)\cdot\cos\beta x dx$, $\int a^{kx}\cdot\sin\beta x dx$, $\int P_n(x)\cdot\arcsin x dx$ и т.д.,

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Пример 6. Найти интеграл $\int(2x+3)\cdot\sin x dx$.

Решение. Пусть $u=2x+3$, тогда $du=2\cdot dx$; $dv=\sin x dx$, тогда $v=-\cos x$.

По формуле интегрирования по частям находим

$$\int(2x+3)\cdot\sin x dx=-(2x+3)\cdot\cos x-\int(-\cos x)\cdot 2\cdot dx=$$

$$=-(2x+3)\cdot\cos x+2\sin x+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int x^3\cdot\ln x dx$.

Решение. Используя тот же прием интегрирования, что и в примере 6, получим

$$\int x^3\cdot\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x, & du=\dfrac{1}{x}\cdot dx \\ dv=x^3\cdot dx, & v=\dfrac{x^4}{4}\end{matrix}\right\}=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C.$$

При отыскании некоторых интегралов формулу интегрирования по частям нужно применить несколько раз, прежде чем сведем его к табличному или получим исходный интеграл.

Пример 8. Найти интеграл $J=\int 3^x\cdot\cos 5x\cdot dx$.

Решение. Используем дважды формулу интегрирования по частям.

$$J=\int 3^x\cdot\cos 5x\cdot dx=\left\{\begin{aligned}&u=3^x,\ \ du=3^x\cdot\ln 3\cdot dx\\&dv=\cos 5xdx,\ \ v=\frac{\sin 5x}{5}\end{aligned}\right\}=$$

$$=3^x\cdot\frac{1}{5}\cdot\sin 5x-\int\frac{1}{5}\cdot\sin 5x\cdot 3^x\cdot\ln 3dx=\left\{\begin{aligned}&u=3^x,\ \ du=3^x\cdot\ln 3dx\\&dv=\sin 5xdx,\ \ v=-\frac{\cos 5x}{5}\end{aligned}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x-\frac{1}{5}\cdot\ln 3\cdot\left(3^x\cdot\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)+\int\frac{\cos 5x}{5}\cdot 3^x\cdot\ln 3dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x-\frac{\ln^2 3}{25}\cdot\int 3^x\cdot\cos 5xdx.$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом J:

$$J=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x-\frac{\ln^2 3}{25}\cdot J\quad \text{или}$$

$$J+\frac{\ln^2 3}{25}\cdot J=\frac{3^x}{5}\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x,$$

$$\frac{25+\ln^2 3}{25}\cdot J=\frac{3^x}{25}(5\sin 5x+\ln 3\cdot\cos 5x),$$

$$J=\frac{3^x}{25+\ln^2 3}\cdot(5\sin 5x+\ln 3\cdot\cos 5x)+C.$$

1.3. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,\quad k\neq 1;$

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx;$

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}dx,$

где A, B, p, q, a – действительные числа.

На конкретных примерах покажем, как интегрируются простейшие дроби III и IV типов.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Решение. В квадратном трехчлене, содержащемся в знаменателе подынтегральной функции, выделим полный квадрат:

$$x^2-6x+18=(x^2-2\cdot 3\cdot x+9)+9=(x-3)^2+3^2.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18}=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+3^2}=\{t=x-3\}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{3}\cdot \text{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}\text{arctg}\frac{x-3}{3}+C.$$

Использована формула 16 из таблицы интегралов.

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби такую линейную функцию, которая равнялась бы производной знаменателя:

$$(x^2+4x-1)'=2x+4,$$

$$5x+1=\frac{5}{2}(2x+4)-10+1=\frac{5}{2}(2x+4)-9.$$

Имеем

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-9}{x^2+4x-1}\,dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-1}-9\cdot \int \frac{dx}{x^2+4x-1}=J.$$

Заметим, что в первом из полученных интегралов $(2x+4)dx=d(x^2+4x-1)$. Введем новую переменную $t=x^2+4x-1$, получим табличный интеграл 3. Во втором интеграле в квадратном трехчлене выделим полный квадрат: $x^2 + 4x - 1 = (x+2)^2 - 5$, а интеграл сведем к табличному (формула 17). Тогда

$$J = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2+4x-1)}{x^2+4x-1} - 9\cdot\int \frac{d(x+2)}{(x+2)^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \{t = x^2+4x-1, z = x+2\} =$$

$$= \frac{5}{2}\int\frac{dt}{t} - 9\int\frac{dz}{z^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{5}{2}\ln|t| - 9\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}}\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2}\cdot\ln|x^2+4x-1| - \frac{9}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right| + C.$$

При интегрировании рациональных дробей IV типа необходимо воспользоваться, так называемой, рекуррентной формулой:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = J_n;$$

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot J_{n-1}.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+4)^2} = J_2$

Решение. Здесь $n = 2$; $a^2 = 4$. После применения рекуррентной формулы получим

$$J_2 = \int\frac{dx}{(x^2+4)^2} = \frac{x}{2\cdot4\cdot(2-1)\cdot(x^2+4)^{2-1}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot J_1 =$$

$$= \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{8}\cdot\int\frac{dx}{x^2+4} = \frac{x}{8(x^2+4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Если $n > 2$, то рекуррентной формулой нужно пользоваться несколько раз, пока интеграл не будет сведен к табличному.

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}dx.$

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала в числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, далее разобьем интеграл на сумму двух, один из которых легко свести к табличному, а другой найдем по рекуррентной формуле:

$$d(x^2+4x+5)=(2x+4)dx.$$

$$\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{\frac{1}{2}(2x+4)+3}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}+\frac{3}{(x^2+4x+5)^2}.$$

Имеем

$$\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}\,dx+\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}+3\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+1)^2}=$$

$$=\{x^2+4x+5=t;\quad x+2=z\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+3\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+3\cdot\left(\frac{z}{2\cdot1\cdot(z^2+1)}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot\int\frac{dz}{z^2+1}\right)=$$

$$=\frac{-1}{2t}+\frac{3z}{2(z^2+1)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}z+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+\frac{3(x+2)}{2(x^2+4x+5)}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}(x+2)+C.$$

Если под знаком интеграла стоит сложная рациональная функция, то с ней предварительно выполняют следующие преобразования:

1) если рациональная дробь неправильная, то сначала представляют ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби $\frac{Q(x)}{P(x)}$;

2) многочлен, стоящий в знаменателе рациональной функции, следует разложить на линейные и квадратичные множители в зависимости от того, каковы корни этого многочлена

$$P(x)=(x-a)^m\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^n\cdot\ldots,$$

где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, а p и q – действительные числа;

3) правильную рациональную дробь $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ (степень многочлена

на

$P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$) раскладывают на простейшие дроби:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q};$$

4) вычисляют неопределенные коэффициенты $A_1, A_2,\ldots,$ $B_1, C_1,\ldots,$ B_n, C_n.

В конечном итоге интегрирование рациональной функции сводится к отысканию интеграла от суммы многочлена и простейших рациональных дробей.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Поясним это на примерах.

Пример 13. $$\frac{5x^2+14}{(x-1)(x+3)(x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x+5}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некратному корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа.

Пример 14. $$\frac{7x^2+8x-1}{(x+3)^4}=\frac{A}{(x+3)^4}+\frac{B}{(x+3)^3}+\frac{C}{(x+3)^2}+\frac{D}{x+3}.$$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

Пример 15. $$\frac{5x^2+2x+4}{(x^2+x+1)(x^2+x+5)}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+5}.$$

Дробь правильная, множители знаменателя неприводимые, т.к. $D_1 = 1 - 4 < 0$, $D_2 = 1 - 20 < 0$, многочлен 4-ой степени в знаменателе имеет две пары комплексно-сопряженных различных корней.

Пример 16. $\dfrac{3x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$.

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет комплексные корни, является кратной парой комплексно-сопряженных корней.

Пример 17.

$$\frac{3x^4 + 7x - 1}{(x + 2)x^2(x^2 + x + 5)^2(x^2 - x + 2)} =$$

$$= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + F}{(x^2 + x + 5)^2} + \frac{Cx + E}{x^2 + x + 5} + \frac{Lx + M}{x^2 - x + 2}.$$

Данное представление правильной рациональной дроби вытекает из анализа примеров 13–16.

Коэффициенты A, B, C, D, … в разложении правильных рациональных дробей на простейшие дроби можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. Суть его в следующем. Приводя дроби к общему знаменателю, получим равные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Пример 18. Найти $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} = \frac{x(x + 2) + 5}{x + 2} = x + \frac{5}{x + 2}.$$

$$\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx = \int (x + \frac{5}{x + 2}) dx = \frac{x^2}{2} + 5\ln|x + 2| + C.$$

Пример 19. Найти $\int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие:

$$\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{7x-3}{(x^3-x^2)+(x-1)}=\frac{7x-3}{x^2(x-1)+(x-1)}=$$

$$=\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Сравним четвертую дробь и последнюю. Два многочлена считаются равными, если будут равны коэффициенты при одинаковых сте-
пенях x:

$$7x-3=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(x^2+1)$$

$$7x-3=(A+C)x^2+(-A+B)x+C-B.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0, \\ x & -A+B=7, \\ x^0 & C-B=-3 \end{array}\right\}$$

Складывая все три равенства, получим

$2C=4$ или $C=2$.

Из первого уравнения системы $A=-C$ или $A=-2$.

Из второго уравнения системы получим

$B=7+A$ или $B=7-2=5$.

Следовательно,

$$\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}.$$

В результате получаем

$$\int\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{2x}{x^2+1}dx+5\int\frac{dx}{x^2+1}+2\ln|x-1|=$$

$$=-\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+5\mathrm{arctg}x+2\ln|x-1|=$$

$$= -\ln(x^2+1) + 5\operatorname{arctg}x + 2\ln|x-1| + C =$$

$$= 5\operatorname{arctg}x + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + C.$$

Пример 20. Найти $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы целой части и правильной дроби. Предварительно поделим эту дробь «уголком»

$$\begin{array}{r|l} x^5 + 1 & x^4 - 8x^2 + 16 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5 - 8x^3 + 16x} & x \\ 8x^3 - 16x + 1 & \end{array}$$

Получим

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x^2-4)^2} =$$

$$= x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = x + \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Дроби с равными знаменателями будут равны, если равны и их числители.

$$8x^3 - 16x + 1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем комбинированным методом: A и C – методом подстановки, а B и D – методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $x = -2$, тогда

$$8\cdot(-2)^3 + 16\cdot 2 + 1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 16 + D\cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16C = -31; \qquad C = -\frac{31}{16}.$$

Пусть $x = 2$, тогда

$$8\cdot 2^3-16\cdot 2+1=16A+B\cdot 0+C\cdot 16+D\cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16A=33; \qquad A=\frac{33}{16}.$$

Преобразуем выражение

$$A(x-2)^2+B(x-2)(x+2)^2+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2)=$$

$$=A(x^2-4x+4)+B(x^3+2x^2-4x+8)+C(x^2-4x+4)+$$

$$+D(x^3-2x^2-4x+8)=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$

$$+(-4A-4B-4C-4D)x+(4A+8A+4C+8D)$$

или

$$8x^3-16x+1=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$

$$+(-4A-4B-4C-4D)x+4A+8B+4C+8D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B, C и D.

$$\begin{array}{l|l} x^3 & B+D=8, \\ x^2 & A+2B+C-2D=0, \\ x & -4A-4B-4C-4D=-16, \\ x^0 & 4A+8B+4C+8D=1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} 1\\1\\1\\1 \end{array}}\right\}$$

Учитывая, что $A=\frac{33}{16}$, $C=-\frac{31}{16}$, воспользуемся только первым и вторым уравнениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} D=8-B, \\ \frac{33}{16}+2B-\frac{31}{16}-2(8-B)=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D=\frac{129}{32}, \\ B=\frac{127}{32}. \end{cases}$$

Далее найдем исходный интеграл

$$\int\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx=$$

$$=\int(x+\frac{33}{16}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{127}{32}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{31}{16}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{129}{32}\cdot\frac{1}{x+2})\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\cdot\frac{1}{x+2}+C.$$

Пример 21. Найти $\int\frac{x^3}{(x+5)^5}\,dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной: $x+5=t;\ x=t-5;\ dx=dt$.

Тогда

$$\int\frac{x^3}{(x+5)^5}\,dx=\int\frac{(t-5)^3}{t^6}dx=\int\frac{t^3-15t^2+75t-125}{t^6}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^3}-15\cdot\frac{1}{t^4}+75\cdot\frac{1}{t^5}-125\cdot\frac{1}{t^6}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{15}{-3t^3}+\frac{75}{-4t^4}-\frac{125}{-5t^5}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x+5)^2}-\frac{5}{(x+5)^3}-\frac{75}{4(x+5)^4}+\frac{25}{(x+5)^5}+C.$$

1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t=\omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x.

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения.*

1) ***Интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$,

где R означает рациональную функцию от двух аргументов,

$m \in N, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные.

Полагаем,

$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \ x = \varphi(x) = \dfrac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$

Интеграл приводится к виду

$$\int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

здесь $R, \varphi(t), \varphi'(t)$ – рациональные функции.

Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \ldots\right) dx,$$

где показатели r, s,… – рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и радикала $\sqrt[m]{\dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$.

Пример 22. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}, \\ x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}, \ dx = \dfrac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{t \cdot (-6t^2) dt}{\left(\dfrac{t^3+1}{t^3-1} + 1\right)(t^3-1)^2} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \frac{-3dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

2) ***Интегралы вида*** $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы сводятся к табличному, если в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

Пример 23. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен

$x^2-6x+8=(x-3)^2-1;\quad x-3=t,\quad x=t+3,\quad dx=dt$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\left\{\begin{matrix}\text{табличный}\\ \text{интеграл 19}\end{matrix}\right\}$$

$$=\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C=\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}|+C.$$

3) ***Интегралы вида*** $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$**.**

Для отыскания этого интеграла в числителе необходимо выделить такую линейную функцию, которая равнялась бы производной квадратного трехчлена. Далее разбиваем интеграл на сумму двух, один из которых табличный, а второй рассмотрен в предыдущем пункте.

Пример 24. Найти $\int\frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$(-x^2+4x+5)'=-2x+4$.

$$7x+2=-\frac{7}{2}(-2x+4-4)+2=-\frac{7}{2}(-2x+4)+16.$$

Тогда

$$\int \frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = \int \frac{-7/2(-2x+4)+16}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{(-2x+4)dx}{-x^2+4x+5} + 16\cdot\int \frac{dx}{-x^2+4x+5} =$$

$$= \left\{\begin{aligned}&(-2x+4)dx = d(-x^2+4x+5)\\&-x^2+4x+5 = -(x^2-4x+4-4)+5 = -(x-2)^2+9\end{aligned}\right\} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{d(-x^2+4x+5)}{\sqrt{-x^2+4x+5}} + 16\cdot\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} =$$

$$= \left\{-x^2+4x+5 = t;\ \ x-2 = z\right\} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 16\int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = -7\sqrt{t} + 16\arcsin\frac{z}{3} + C =$$

$$= -7\sqrt{-x^2+4x+5} + 16\arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

4) *Интегралы вида* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\ (a \neq 0)$

Эти интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

I –я подстановка Эйлера. Если $a > 0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x + t$.

Для определенности рассмотрим случай

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$. Тогда

$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\cdot x\cdot t + t^2,\quad x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}$, то

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t = \sqrt{a}\cdot\dfrac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t$ – рациональная функция от t, dx также выражается рационально через t.

II-я подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Для определенности считаем, что перед c стоит знак «+». Тогда

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c, \quad x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

При этом dx и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ выражаются рационально через t, поэтому $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ сводится к интегралу рациональной функции зависящей от t.

Пример 25. Найти интеграл $\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}}\,dx$.

Решение. Применим 2-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1; \; 1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1,$$

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2}\,dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}, \quad 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + 1}{1 - t^2}.$$

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}}\,dx = \int \frac{(-2t^2 + t)^2(1 - t^2)^2 \cdot (1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2(2t - 1)^2(t^2 - t + 1)(1 - t^2)^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1 - t^2}\,dt = -2\int \frac{-t^2 + 1 - 1}{1 - t^2}\,dt = -2\int \left(1 + \frac{2}{1 - t^2}\right)dt =$$

$$= -2t + \ln\left|\frac{t + 1}{1 - t}\right| + C,$$

где $t = \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}$.

III-я подстановка Эйлера. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни α и β. Тогда $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$

сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью замены

$$a \neq 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad \text{или}$$

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t, \qquad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}.$$

1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m,n,p – рациональные числа, a,b – постоянные величины.

Рассмотрим интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$. (1.5)

1) n – целое число. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции от t, если положить $t = \sqrt[\lambda]{x}$, λ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, тогда рационализации подынтегрального выражения можно достигнуть, используя замену

$t = \sqrt[\nu]{a + bx^n}$, ν – знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое.

Замена $t = \sqrt[\nu]{ax^{-n} + b}$, ν – знаменатель дроби p, позволяет рационализировать подынтегральную функцию в исходном интеграле.

Эти случаи интегрируемости были известны еще Ньютону. Однако, только в середине прошлого столетия П.Л.Чебышев установил факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет. Поэтому подстановки 1-3 называют *подстановками Чебышева*.

Пример 26. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx$.

$m=-1,\ n=5,\ p=-\frac{1}{3};\quad \nu=3.$

Применим II подстановку Чебышева, т.к. $\frac{m+1}{n}=0$ – целое число

$$t=\sqrt[3]{1+x^5},\quad 1+x^5=t^3,\quad x=(t^3-1)^{1/5};\quad dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}dt.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int \frac{tdt}{t^3-1} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$=\left\{(t^2+t+1)'=2t+1,\quad t-1=\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}\right\}=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{10}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\cdot\frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 27. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Подынтегральную функцию можно записать в виде $x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}$. Здесь $m=-3;\ \ n=3;\ \ p=-\frac{1}{3}$ и $\frac{(m+1)}{n}+p=\frac{(-3+1)}{3}-\frac{1}{3}=-1$ – целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Произведем замену переменной: $2x^{-3}-1=t^3$, тогда $d(2x^{-3}-1)=dt^3$ или $-6x^{-4}dx=3t^3dt$ или $x^{-4}dx=-\frac{1}{2}t^2dt$.

Преобразуем исходный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=\int x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx=\int x^{-3}\cdot\left(x^3(2x^{-3}-1)\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int x^{-3}\cdot x^{-1}\cdot(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}dx=\int(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}x^{-4}dx=$$

$$=\int(t^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt=-\frac{1}{2}\int tdt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{4}t^2+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x^{-3}-1)^2}+C=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^2}+C=-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$$

1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

1) *Интегралы вида* $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Применим так называемую универсальную тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}=t$, $x=2arctgt$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

С помощью указанной подстановки интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3\sin x+2}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{3\sin x+2}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}+2}=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right|+C.$$

2) *Интегралы вида* $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ или $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx$.

а) $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ приводится к $\int R(t)dt$ с помощью подстановки $\sin x=t, \cos x dx=dt$.

б) $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx$ приводится к $\int(-R(t)dt)$, если $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt$.

3) *Интегралы вида* $\int R(\operatorname{tg}x)dx$, $\int R(\sin^{2k}x,\cos^{2m}x)dx$.

Если подынтегральная функция зависит только от tgx или только от sinx и cosx, входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$\operatorname{tg}x=t,\ \ x=\operatorname{arctg}x,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+t^2};\quad \sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

Пример 29. $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \{tgx = t\} = \int \frac{dt}{\left(3+\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{4t^2+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2tgx}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

4) *Интегралы вида* $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а) m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности n-нечетное. Тогда полагаем $n = 2p+1$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int sim^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \cdot (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \{\sin x = t\} = \int t^m \cdot (1-t^2)^p dt = \int R(t)dt.$$

б) m и n – неотрицательные, четные числа. Полагаем $m = 2p$, $n = 2q$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие $\cos 2x$ как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями cos2x интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней cos2x снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 30. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)\, d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

.

Пример 31. Найти интеграл $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int \ (1-\cos 6x)(1+\cos 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 6x) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1+\cos 12x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin(12x)}{12} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin(12x) + C.$$

в) m и n – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену $\mathrm{tg} x = t$ (или $\mathrm{ctg} x = t$).

Пример 32. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx =$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x \cdot (\mathrm{tg}^2 x + 1)^2 dx = \left\{ \begin{matrix} \mathrm{tg} x = t;\ x = \mathrm{arctg}\, t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 (1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C.$$

5) *Интегралы вида* $\int \cos mx \cdot \sin nx dx; \int \cos mx \cdot \cos nx dx;$ $\int \sin mx \cdot \sin nx dx \quad (m \neq n)$.

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Тогда

$$\int \sin mx \cdot \cos nxdx = \frac{1}{2}\int[\sin(m+n)x + \sin(m-n)]dx =$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично вычисляются два других интеграла.

Пример 33. Найти интеграл $\int \sin 4x \cdot \cos 6xdx$.

Решение:

$$\int \sin 4x \cdot \cos 6xdx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

2. Определенный интеграл

2.1. Определение и свойства определенного интеграла

Пусть на сегменте [a,b] задана функция f(x). Выполним следующие операции:

1. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ разобьем [a,b] на n малых сегментов: $[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; ...; [x_{k-1}, x_k]; ...[x_{n-1}, x_n]$; $x_0 = a$, $x_n = b$.
2. На каждом малом сегменте выберем произвольную точку ξ_k, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.
3. Составим, так называемую, интегральную сумму всех таких произведений

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма J_n, когда $\max \Delta x_k$ стремится к нулю.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами (границами) интегрирования, f(x) – подынтегральной функцией, а интервал [a,b] – областью интегрирования.

Функция f(x), для которой существует конечный $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на промежутке [a,b], причем указанный предел не зависит ни от способа разбиения сегмента [a,b] на части, ни от выбора точек ξ_k в каждой из них.

В теореме существования определенного интеграла указывается на то, что всякая непрерывная на промежутке [a,b] функция f(x) является интегрируемой на нем.

Впредь подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

Без подробных объяснений приведем некоторые свойства определенных интегралов.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

2. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const}.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a, b)$.

4. Если $f(x) \geq 0$ на [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

5. Если $f(x) \leq g(x)$ для $\forall x \in [a, b]$, то

а) $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$

б) $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$

6. Теорема о среднем: $\exists \xi \in [a, b]$,

$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, где $f(x)$ – непрерывна на [a,b].

7. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

8. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

2.2. Методы вычисления определенного интеграла

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано в большими трудностями даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются простыми. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Ниже будет сформулирована теорема Ньютона-Лейбница, позволяющая сводить вычисления определенного интеграла к неопределенному. Эта теорема играет фундаментальную роль в математическом анализе (см.подробнее [1] с.397).

2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть f(x) непрерывна на сегменте [a,b] и F(x) – одна из ее первообразных, тогда справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 34. Вычислить $\int\limits_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$.

Решение. Используя формулу Ньютона-Лейбница, а также табличный интеграл 16, получим

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле

а) Необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$,

где f(x) непрерывная функция на [a,b].

Перейдем к новой переменной t, полагая $x = \varphi(t)$. Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, кроме того, при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы сегмента [a,b]. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta]$, то справедлива следующая формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 35. Вычислить $\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\,dx$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x-2)^2.$$

Введем новую переменную: $x - 2 = \sin t$, тогда $x = 2 + \sin t$,

$dx = d(2 + \sin t)$ или $dx = (2 + \sin t)'dt = \cos t\,dt$.

Найдем пределы интегрирования новой переменной t:

если $x_1 = 2$, то $0 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0$

если $x_2 = 3$, то $1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}dx = \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что в данном случае при применении формулы замены переменной отпадает необходимость возвращения к старой переменной x по сравнению с неопределенным интегралом. Это вполне объяснимо, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число, в то время как неопределенный интеграл от той же самой функции есть некоторая функция.

б) Часто вместо замены переменной $x = \varphi(t)$ употребляют обратную замену переменной $t = g(x)$. На конкретном примере покажем, как это делается.

Покажем это на конкретном примере.

Пример 36. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}$.

Решение. Пусть $t = \ln x$, тогда $\frac{1}{x}dx = d\ln x = dt.$

Если $x_1 = 1$, то $t_1 = \ln 1 = 0$, если $x_2 = e$, то $t_2 = \ln e = 1.$

Следовательно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{5+\ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5+t} = \ln|t+5|\Bigg|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 =$$

$$= \ln\frac{6}{5} = \ln 1{,}2.$$

2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на [a,b], тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 37. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Решение. Применим полученную формулу

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \begin{Bmatrix} u = \ln x, \ \ du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx, \ v = \dfrac{x^3}{3} \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Подробнее о методах интегрирования в определенном интеграле см.[1] с.399-403.

3. Несобственные интегралы

Определение определенного интеграла, его свойства и методы интегрирования рассматривались в предположении, что промежуток интегрирования [a,b] конечен и функция f(x) непрерывна на нем.

Иногда приходится отказываться от одного или обоих этих предположений. В этом случае мы приходим к понятию несобственного интеграла.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$.

Несобственным интегралом от функции f(x) по промежутку $[a;+\infty)$ называется $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если $f(x)>0$ на $[a,+\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx<\infty$, то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, прямой $x=a$ и бесконечным интервалом $[a;+\infty)$.

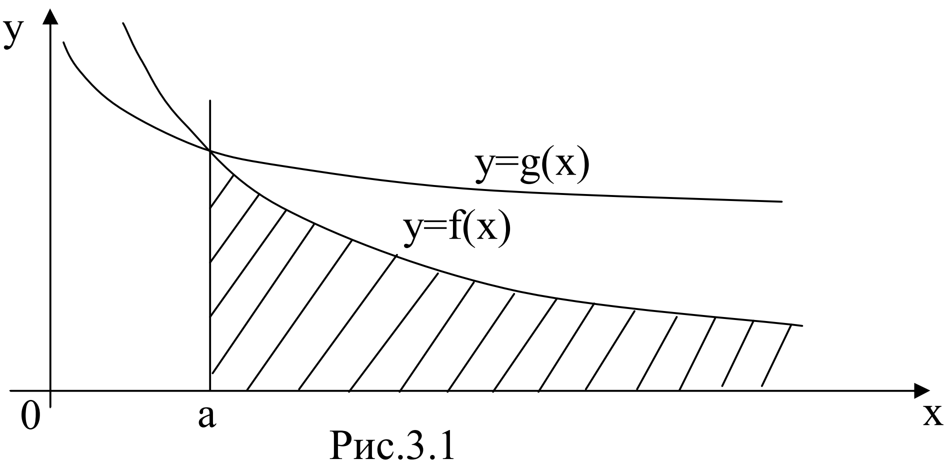


Рис.3.1

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке (–∞; b]:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx,$$

а на интервале $(-\infty;+\infty)$ определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx+\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to +\infty$.

Так, например, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

В этом легко убедится, вычислив $\int\limits_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$, если $A \to +\infty$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\int\limits_1^A \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^A = \ln A - \ln 1 = \ln A \to +\infty$ при $A \to \infty$, поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int\limits_1^A \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^A = -\frac{1}{A} + 1$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$ – несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ и бесконечным промежутком $[1; +\infty)$, является конечной и равна 1.

Пример 38. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^{x}dx=\lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} x\cdot e^{x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^{x}dx, & v=e^{x}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{\beta\to-\infty}\left(x\cdot e^{x}\Big|_{\beta}^{0}-\int_{\beta}^{0} e^{x}dx\right)=\lim_{\beta\to-\infty}(x\cdot e^{x}-e^{x})\Big|_{\beta}^{0}=$$

$$=\lim_{\beta\to-\infty}(0-\beta\cdot e^{\beta}-e^{0}+e^{\beta})=\lim_{\beta\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}}-1+\frac{1}{e^{-\beta}}\right)=-1.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 39. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c=-2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5}=\lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{-2}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5}+\lim_{A\to+\infty}\int_{-2}^{A}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5}=$$

$$=\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt5}\Big|_{B}^{-2}+\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt5}\Big|_{-2}^{A}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\lim_{B\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0-\operatorname{arctg}\frac{B+2}{\sqrt5}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A+2}{\sqrt5}-\operatorname{arctg}0\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt5}\left(0+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5}{5}\pi.$$

Признак сравнения. Пусть в промежутке $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $0\le f(x)\le g(x)$. Если $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty}f(x)dx$ расходится, то и $\int\limits_{a}^{+\infty}g(x)dx$ также расходится.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для несобственных интегралов и по другим бесконечным пределам интегрирования.

Пример 40. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Решение. Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \le x < +\infty).$$

Но $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3$ (см. рассуждения выше). Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

3.2 Несобственные интегралы от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв II рода на [a,b] либо в точках a и b, либо в точке $c \in (a, b)$, тогда несобственные интегралы от разрывной функции определяются следующим образом:

1) $x = a$ – точка разрыва, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

2) $x = b$ – точка разрыва, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

3) $x = c,\ c \in (a, b)$, c – точка разрыва, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае расходящимися.

Признак сравнения. Пусть функции f(x) и g(x) в промежутках [a,b) непрерывны, а в точке $x = b$ имеют разрыв II рода; кроме того $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int\limits_a^b g(x)$ сходится, то сходится $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Если $\int\limits_a^b f(x)$ расходится, то расходится $\int\limits_a^b g(x)dx$.

Пример 41. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ имеет разрыв II рода, поэтому

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{1+\varepsilon}^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1} + \frac{1}{-1}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-1} + \frac{1}{1+\varepsilon-1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty + \infty = \infty$$

.

Интеграл расходящийся.

Пример 42. Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\int\limits_0^1 \frac{2x + \mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \mathrm{sh}x}}dx.$$

Решение. При $x = 0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка (0;1] подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что $(2x + \mathrm{ch}x)dx = d(x^2 + \mathrm{sh}x)$,

$$\int \frac{2x+\operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\operatorname{sh}x}}dx = \int (x^2+\operatorname{sh}x)^{-\frac{1}{4}}\, d(x^2+\operatorname{sh}x) = \{x^2+\operatorname{sh}x = t\} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\operatorname{sh}x} + C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x+\operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\operatorname{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2x+\operatorname{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\operatorname{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\operatorname{sh}x}\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

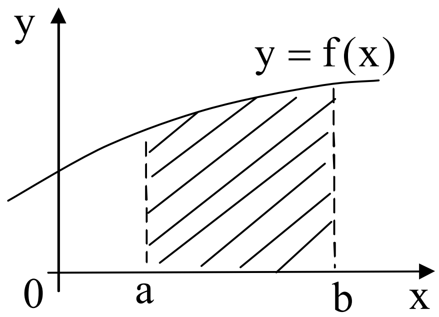
$$= \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[4]{1+\operatorname{sh}1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2+\operatorname{sh}\varepsilon}\right) = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{1+\operatorname{sh}1}.$$

Интеграл сходящийся.

4. Приложения определенного интеграла

4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на [a,b], $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис.4.1).



$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (4.1)$$

Рис.4.1

Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис.4.2), то из соображений симметрии видим, что

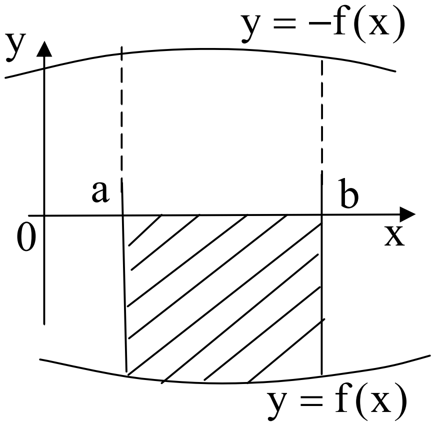


Рис.4.2

$$S=-\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2)$$

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (4.1) или (4.2) (рис.4.3. и 4.4)

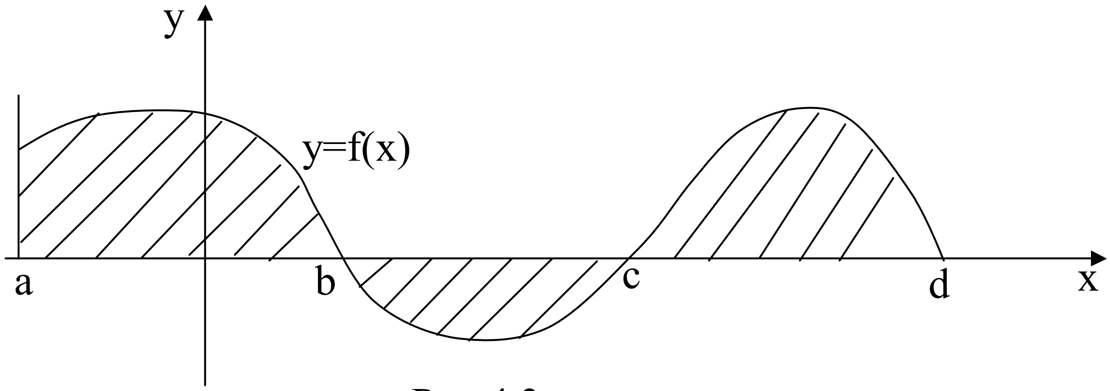


Рис.4.3

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx \qquad (4.3)$$

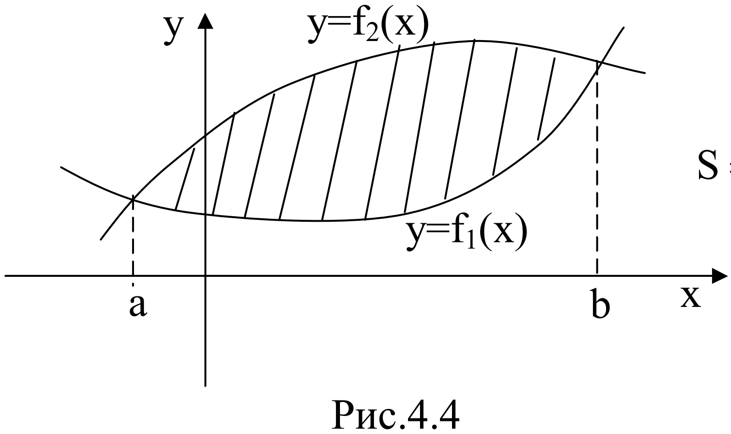


Рис.4.4

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \qquad (4.4)$$

Пример 43. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1;1)$ – вершина параболы.

$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $x = 0$; $x = 2$.

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4.4)

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left.\left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (кв.ед.)}.$$

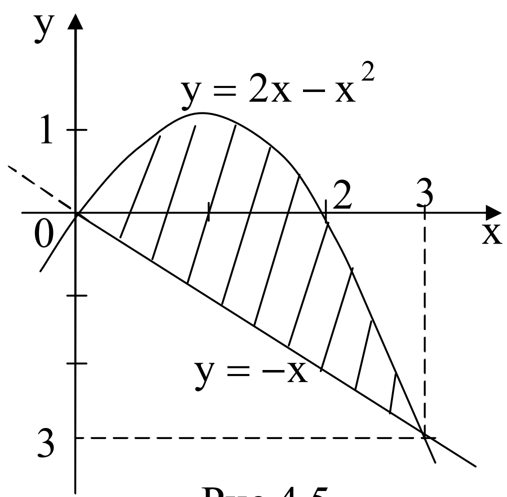


Рис.4.5

Пример 44. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис.4.6)

$x^2 + y^2 = 8$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{8}$.

$y^2 = 2x$ – парабола, имеющая вершину в т.O(0,0)

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

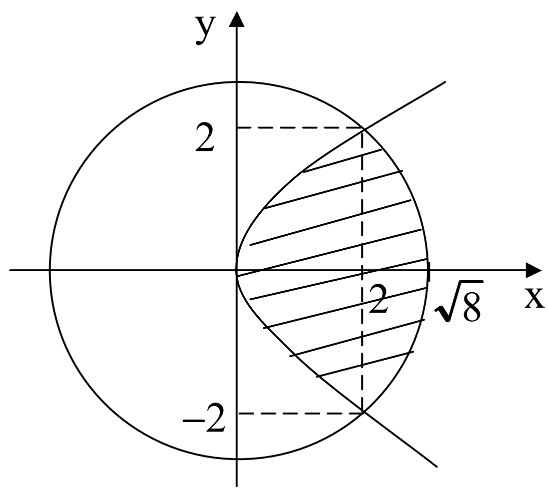


Рис.4.6

$$\begin{cases} y^2 = 8 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \quad 8 - x^2 = 2x \quad \Rightarrow \begin{matrix} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x_1 = -4; x_2 = 2 \end{matrix}$$

$x = -4$ – не удовлетворяет условию $y^2 = 2x$.

Если $x = 2$, то $y^2 = 4$ или $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Найдем площадь заштрихованной области по формуле (4.4), в которой изменены переменные интегрирования:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \sqrt{8 - y^2};$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2\int_{0}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{8}\sin t; \quad dy = \sqrt{8}\cos t\, dt \\ \text{Если } y = 0, \text{ то } \ t = 0 \\ \text{Если } y = 2, \text{ то } \ 2 = \sqrt{8}\, \sin t, \ \ \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \ \ t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$= 2\int_{0}^{2} \sqrt{8 - y^2} dy - \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^2 = 2\int_{0}^{2} \sqrt{8 - y^2} dy - \frac{8}{3} =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cdot \sqrt{8}\cos t dt - \frac{8}{3} = 16\int_{0}^{\pi/4} \cos^2 t dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4} (1 + \cos 2t)dt - \frac{8}{3} = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{кр.} = \pi R^2; \quad S_{кр.} = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{кр.} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $y = b$ и отрезком [a,b] оси OX, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt, \qquad (4.5)$$

где $t_1 \le t \le t_2$, $y(t) \ge 0$, t_1 и t_2 определяются из условий $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример 45. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.5). Предварительно найдем $x'(t)$:

$$x'(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t).$$

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - 0 = 3a^2\pi \text{ (кв.ед.)}$$

4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости $M(\varphi, r)$ определяется двумя координатами: полярным радиусом $r(r \geq 0)$ и полярным углом φ. Связь между декартовыми координатами (x,y) и полярными (φ, r) осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

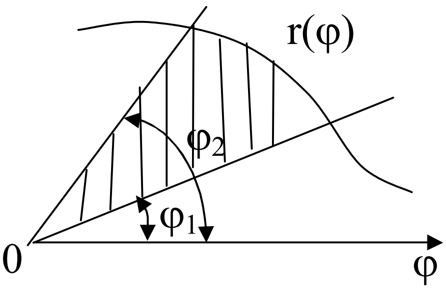


Рис.4.7

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (рис.4.7), выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (4.6)$$

Пример 46. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.6). Чтобы найти пределы интегрирования α и β, необходимо построить чертеж кривой $r = 2 + \cos\varphi$ в полярных координатах. Результаты вычислений занесем в таблицу 1.

Таблица 1

φ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$r = 2 + \cos\varphi$	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Так как функция $\cos\varphi$ – четная, то график функции $r = 2 + \cos\varphi$ строим симметрично относительно горизонтальной оси для значений углов из промежутка $\varphi \in (180^o, 360^o]$. Для построения графика функции при $\varphi \in [0; 180^{o})$ проводим полярную ось r; на лучах, составляющих с осью r углы, значение которых указано в таблице 1, откладываем соответствующее расстояние, затем точки последовательно соединяем. Получаем замкнутую кривую, называемую улиткой Паскаля (рис.4.8).

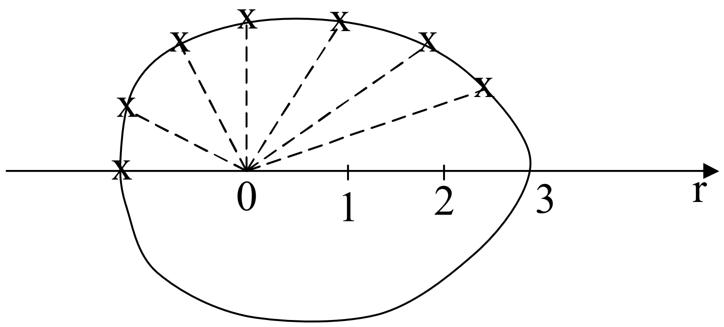


Рис.4.8

Площадь искомой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4{,}5\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4{,}5\pi \quad \text{(кв.ед.)}$$

4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть функция f(x) непрерывно дифференцируема на [a,b], тогда длина дуги кривой $y = f(x)$ на указанном промежутке вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{4.7}$$

Если кривая гладкая и задана параметрически, то длина дуги этой кривой при $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \tag{4.8}$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ и $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина ее дуги равна

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4.9)$$

Пример 47. Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x=a(\cos t-t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Решение. В нашем случае кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой (4.8), предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

$$x'(t)=a(\cos t+t\sin t)'=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$$

$$y'(t)=a(\sin t-t\cos t)'=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}a\cdot\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}tdt=a\cdot\frac{t^2}{2}\bigg|_0^{2\pi}=a\cdot\frac{4\pi^2}{2}=2a\pi^2 \text{ (ед.длины)}.$$

Пример 48. Найти длину дуги кривой $r=3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

Решение. Кривая $y=3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$ задана в полярных координатах. Воспользуемся формулой (4.9). Находим $r'(\varphi)$

$$r'=\left(3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^{/}=3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}.$$

$$r^2+(r')^2=9\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2+\frac{81}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2=\frac{225}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2$$

$$L=\int_0^{\pi/3}\sqrt{\frac{225}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2}\,d\varphi=\frac{15}{4}\int_0^{\pi/3}e^{\frac{3}{4}\varphi}d\varphi=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}\varphi}\bigg|_0^{\pi/3}=$$

$$=5\cdot e^{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}}-5e^0=5\cdot(e^{\pi/4}-1) \text{ (ед.длины)}.$$

4.5. Вычисление объема тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, может быть выражена функцией от x: $S = S(x)$ при $x \in [a, b]$, тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси OX плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx\,. \qquad (4.10)$$

Если криволинейную трапецию (рис.4.10) вращать вокруг оси OX, то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx\,. \qquad (4.11)$$

Если плоская область, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси OX, то

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \quad (0 \le f_1(x) \le f_2(x)) \qquad (4.12)$$

Аналогично можно записать формулы для вычисления объемов тел вращения вокруг оси OY:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy, \qquad (4.13)$$

$$V_y = 2\pi\int_c^d x \cdot y(x)dx. \qquad (4.14)$$

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам (4.10 - 4.14) следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси (см.рис.5.7), то

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi\,. \qquad (4.15)$$

Пример 49. Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой $y = \mathrm{ch}x$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая $y = \mathrm{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется цепной линией. График ее изображен на рис.4.9. Объем тела вращения (рис.4.10) вычислим по формуле (4.11)

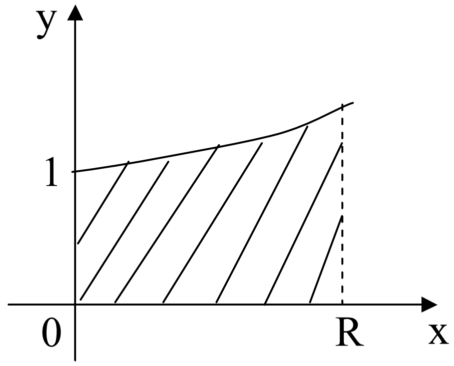


Рис.4.9

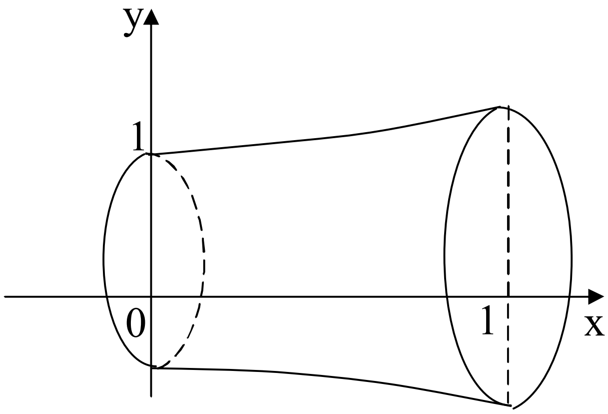


Рис.4.10

$$V_X = \pi\int_0^1 \mathrm{ch}^2 x dx = \pi\int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2\cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^0}{2} + 0 - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(2 - \mathrm{sh}2).$$

Пример 50. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота – H.

Решение. Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси OY параболу $y = kx^2$, $0 \le y \le H$ (рис.4.11; 4.12), где параметр k легко вычислить исходя из данного условия.

Если $x = R$, то $y = H$, поэтому

$$H = kR^2 \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow y = \frac{H}{R^2}\cdot x^2.$$

Далее воспользуемся формулой (4.13)

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H x^2(y)dy.$$

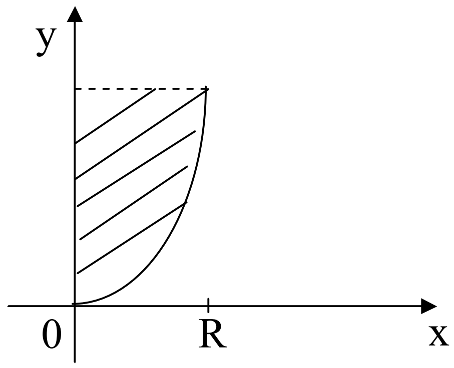


Рис.4.11

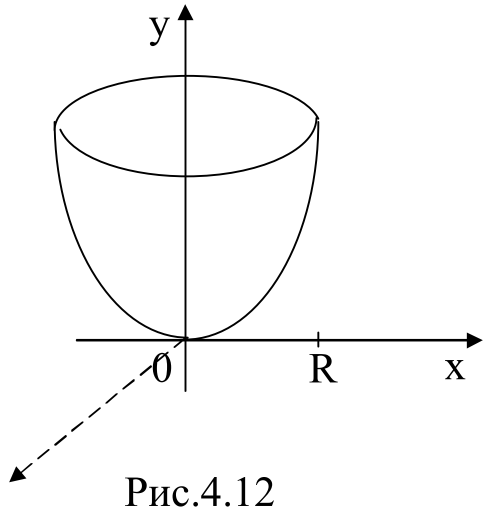


Рис.4.12

Если $y = \dfrac{H}{R^2} \cdot x^2$, то $x^2 = \dfrac{R^2}{H} \cdot y$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot ydy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 H \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Пример 51. Найти объем тела вращения кривой $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая задана в параметрическом виде – это эллипс (рис.4.13). Искомой фигурой вращения является эллипсоид. Найдем V_X по формуле (4.11)

$$V_X = \pi \int_a^b y^2(x)dx.$$

Если $x = -3$, то $3\cos t = -3$, $\cos t = -1$, $t_1 = \pi$.

Если $x = 3$, то $3\cos t = 3$, $\cos t = 1$, $t_2 = 0$.

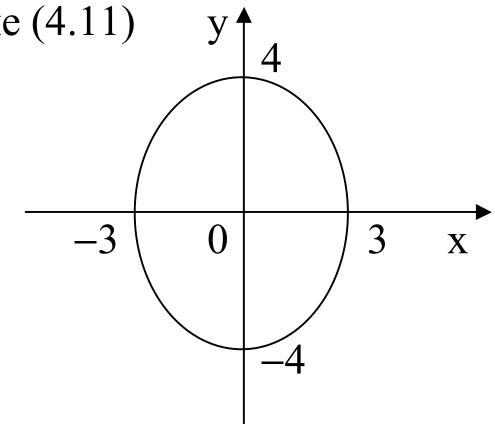


Рис.4.13

$$V_X = \pi \int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi \int_{\pi}^{0} (4\sin t)^2 d(3\cos t) = \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \int_{\pi}^{0} (\sin t)^2 d(\cos t) =$$

$$=48\pi\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t)=48\pi\left(\cos t-\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0}=$$

$$=48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)-48\pi\left(\cos\pi-\frac{\cos^3\pi}{3}\right)=48\pi\cdot\frac{2}{3}-48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 48\pi=64\pi \text{ (куб.ед.).}$$

4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси OX, равна

$$Q_X=2\pi\int_A^B |y|\,d\ell, \text{ где } d\ell - \text{дифференциал дуги кривой.}$$

В зависимости от задания кривой – явное, в параметрическом виде или в полярных координатах – указанную формулу можно расписать так

$$Q_X=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (4.16)$$

$$Q_X=2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (4.17)$$

$$Q_X=2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4.18)$$

Пример 52. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $3y-x^3=0$, $0\le x\le 1$.

Решение. $3y-x^3=0$ или $y=\frac{1}{3}x^3$

$$y'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$$

Воспользуемся формулой (4.16)

$$Q_X = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{1+(x^2)^2}dx = \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} d(1+x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}\pi(2^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить и многие другие геометрические и физические характеристики фигур: статические моменты и моменты инерции плоских фигур, координаты центра тяжести дуг кривых и плоских фигур, работу, давление и пр. Подробнее об этом см. [2], Гл.XII, [2] §§6,7,8,9.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. 464.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. ТТ.1- 2, М.: Интеграл-Пресс, 2001,2002, 2007. - 416с., 544с, 416с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ЧЧ. 1-2. - М.: Высшая школа, 1980-2000. - 304с., 416с.