

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич

Должность: ректор

Дата подписания: 25.09.2022 16:32:12

Уникальный программный ключ:

9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)**

Кафедра высшей математики



## **ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Методические указания по выполнению модуля 2  
для студентов технических специальностей

Курск 2013

УДК 514.12

Составители: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина

Рецензент

Старший преподаватель кафедры высшей математики *А.В. Бойков*

**Векторная алгебра и аналитическая геометрия:**  
методические указания по выполнению модуля 2 / Юго-Зап. гос.  
ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина. Курск, 2013. 18 с.

Содержит краткую теорию в форме справочного материала и образцы решения всех заданий модуля 2 и имеют своей целью оказание помощи студентам очного отделения технических специальностей при выполнении заданий.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать \_\_\_\_\_ . Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Содержание

Задание 1 .....	4
Задание 2 .....	6
Задание 3 .....	8
Задание 4 .....	8
Задание 5 .....	9
Задание 6 .....	10
Задание 7 .....	10
Задание 8 .....	11
Задание 9 .....	12
Задание 10 .....	16
Задание 11 .....	18
Задание 12 .....	22
Библиографический список .....	25

### Задание 1

Груз весом  $|\vec{P}| = 100\text{кГ}$  поддерживается двумя стержнями АВ и СВ. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол АСВ равен  $90^\circ$ , угол АВС равен  $\alpha = 3^\circ \cdot ([n/4] + 1)$ .

### Решение

Пусть  $n = 101$ . Тогда  $P_4 = 1$  и номер задачи из табл. 1.1 равен 2. Тогда  $[n/4] = 25$  и  $\alpha = 78^\circ$ .

По условию груз поддерживается стержнями (находится в покое). Следовательно, вес груза – сила  $\vec{P} = \vec{BK}$  (см. рис. 1) уравнивается результирующей  $\vec{R} = \vec{BL}$  сил, возникающих в стержнях под действием силы  $\vec{P}$ , т.е.  $\vec{P} = -\vec{R}$  ( $|\vec{P}| = |\vec{R}|$  и эти силы направлены противоположно).

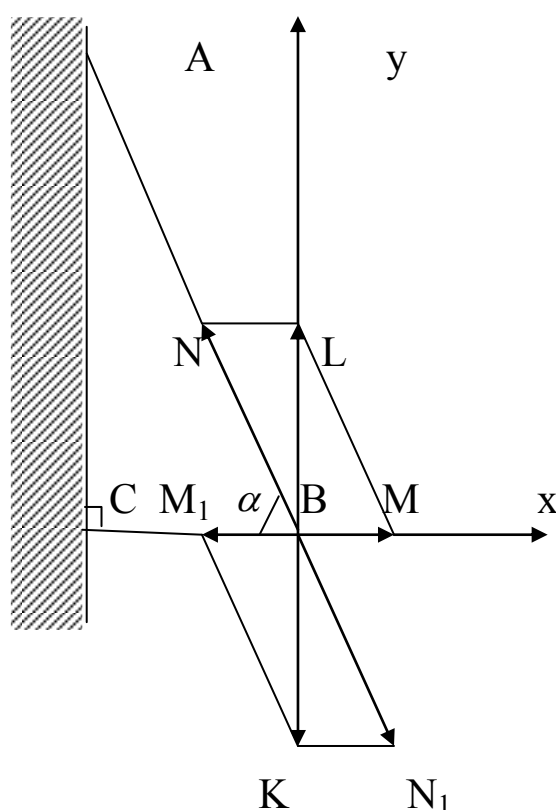


Рис. 1. Разложение веса груза по направлениям стержней

Разложим силу  $\vec{R}$  по направлениям стержней ВА и ВС. Для этого через точку L проведём прямые LM и LN, параллельные стержням ВА и ВС, до их пересечения с прямыми, содержащими стержни, в точках М и N. Очевидно, что

$$\vec{R} = \vec{BL} = \vec{BM} + \vec{BN}.$$

Аналогично, раскладывается по направлениям стержней вес груза

$$\vec{P} = \vec{BK} = \vec{BM}_1 + \vec{BN}_1,$$

и

$$\vec{BM} = -\vec{BM}_1, \quad \vec{BN} = -\vec{BN}_1, \quad (|\vec{BM}| = |\vec{BM}_1|, |\vec{BN}| = |\vec{BN}_1|).$$

Сила  $\vec{BN}_1$  вызывает растяжение стержня ВА и порождает силу  $\vec{BN}$ , возникающую в этом стержне, уравновешивающую силу растяжения  $\vec{BN}_1$ . Аналогично, сила  $\vec{BM}_1$  вызывает сжатие стержня ВС и порождает силу  $\vec{BM}$ , возникающую в стержне ВС, уравновешивающую силу сжатия  $\vec{BM}_1$ .

Найдём  $|\vec{BM}|$  и  $|\vec{BN}|$ , обозначив  $|\vec{BM}| = a$ ,  $|\vec{BN}| = b$ ,  $|\vec{P}| = P$ .

Введём декартову систему координат, как показано на рис. 3.1, и разложим векторы  $\vec{BM}$  и  $\vec{BN}$  по базису  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$  этой системы координат.

Очевидно, что

$$\vec{BM} = a \cdot \vec{i}, \quad \vec{BN} = -b \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + b \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j}, \quad \vec{P} = -P \cdot \vec{j}.$$

Поскольку груз находится в покое, то результирующая этих сил равна нулевому вектору  $\vec{0}$ , т.е.

$$\begin{aligned} \vec{BM} + \vec{BN} + \vec{P} &= \vec{0}, \\ a \cdot \vec{i} - b \cdot \cos \alpha \cdot \vec{i} + b \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} - P \cdot \vec{j} &= \vec{0}, \\ (a - b \cdot \cos \alpha) \cdot \vec{i} + (b \cdot \sin \alpha - P) \cdot \vec{j} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Это векторное равенство равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases} a - b \cdot \cos \alpha = 0, \\ b \cdot \sin \alpha - P = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$b = \frac{P}{\sin \alpha}, \quad a = b \cdot \cos \alpha = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Эти формулы можно получить и иначе. Треугольник  $BML$  прямоугольный,  $BM = a$ ,  $BL = P$ ,  $ML = b$ , угол  $BML$  равен  $\alpha$ , и

$$\frac{BM}{BL} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{BL}{ML} = \sin \alpha,$$

$$\frac{a}{P} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \frac{P}{b} = \sin \alpha,$$

откуда

$$a = P \cdot \operatorname{ctg} \alpha, \quad b = \frac{P}{\sin \alpha}.$$

Учитывая условия задачи получим

$$a = 100 \cdot \operatorname{ctg} 78^\circ = 100 \cdot 0.2126 = 21.26 \text{ (кГ)}, \quad b = \frac{100}{\sin 78^\circ} = \frac{100}{0.9781} = 102.24 \text{ (кГ)}.$$

## Задание 2

### 1 способ.

Точка  $O$  – точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .  
Найти координаты точки  $B$ , если  $\overrightarrow{AB} = (-1; P_3; 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1; P_5; -2)$ ,  $O(2; -1; P_7)$ .

Решение

Пусть  $n=101$ . Тогда  $P_3 = 2$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_7 = 3$ .

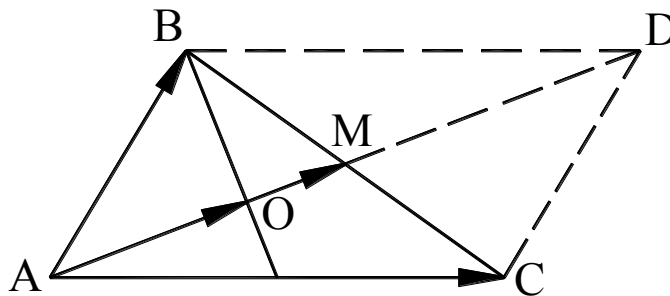


Рис. 2. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (1 способ)

Используя свойство сложения векторов по правилу параллелограмма, имеем:  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то  $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \left(0; \frac{P_3 + P_5}{2}; -1\right) = (0; 1,5; -1)$ .

Зная, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении  $2:1$ , начиная от вершины, имеем:  $\frac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{2}{3}$ .

Таким образом,  $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{P_3 + P_5}{3}; -\frac{2}{3}\right) = \left(0; 1; -\frac{2}{3}\right)$ .

$$\overrightarrow{AO} = (2 - x_A; -1 - y_A; P_7 - z_A) = (2 - x_A; -1 - y_A; 3 - z_A).$$

Так как координаты вектора задаются единственным образом, то составим систему:

$$\begin{cases} 2 - x_A = 0; \\ -1 - y_A = \frac{P_3 + P_5}{3}; \\ P_7 - z_A = -\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_A = 0; \\ -1 - y_A = 1; \\ 3 - z_A = -\frac{2}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 2; \\ y_A = -2; \\ z_A = 3\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решив данную систему, нашли координаты точки  $A$ . Составим аналогичную систему для координат  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\begin{cases} x_B - x_A = -1; \\ y_B - y_A = P_3; \\ z_B - z_A = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B - 2 = -1; \\ y_B + 2 = 2; \\ z_B - 3\frac{2}{3} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 1; \\ y_B = 0; \\ z_B = 3\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Решением данной системы являются координаты искомой точки  $B\left(1; 0; 3\frac{2}{3}\right)$ .

## 2 способ.

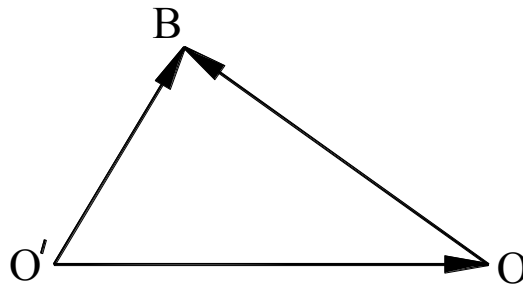


Рис. 3. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (2способ)

Пусть  $O'$  – начало отсчёта системы координат, т.е. координаты точки  $O'$ :  $x = 0, y = 0, z = 0$ .

Вектор  $\overrightarrow{O'B}$  и точка  $B$  имеют одинаковые координаты.

$$\overrightarrow{O'B} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OB}; \quad \overrightarrow{O'O} = (2; -1; 3) \quad (P_7 = 3)$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} \cdot ((-1; 2; 0) + (1; 1; -2)) = \frac{1}{3} \cdot (0; 3; -2) = \left(0; 1; -\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OB} = (-1; 2; 0) - \left(0; 1; -\frac{2}{3}\right) = \left(-1; 1; \frac{2}{3}\right)$$

$$\vec{OB} = (2; -1; 3) + \left(-1; 1; \frac{2}{3}\right) = \left(1; 0; \frac{11}{3}\right)$$

$$B\left(1; 0; \frac{11}{3}\right).$$

### Задание 3

Даны три силы:  $\vec{F}_1 = P_2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k}$ ,  $\vec{F}_2 = 3 \cdot \vec{i} + P_3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$  и  $\vec{F}_3 = -2 \cdot \vec{j} + P_5 \cdot \vec{k}$ . Найти равнодействующую  $\vec{R}$  сил  $(-\vec{F}_1)$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$  и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения  $M_0 (0; 1; P_7)$  в положение  $M (P_6; 0; 1)$ .

#### Решение

Пусть  $n = 101$ . Тогда  $P_2 = 1$ ,  $P_3 = 2$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_6 = 5$ ,  $P_7 = 3$ ,

$\vec{F}_1 = (1; 2; -7)$ ,  $(-\vec{F}_1) = (-1; -2; 7)$ ,  $\vec{F}_2 = (3; 2; 4)$ ,  $\vec{F}_3 = (0; -2; 1)$  и  $\vec{R} = (-\vec{F}_1) + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2; -2; 12)$ . Если точка перемещается прямолинейно, а сила  $\vec{R}$ , действующая на точку постоянна, то работа  $A$  силы равна скалярному произведению силы на вектор-перемещение точки. Вектор-перемещение имеет вид:

$$\vec{M_0M} = (P_6 - 0; 0 - 1; 1 - P_7) = (5; -1; -2).$$

Тогда работа  $A$  будет равна

$$A = \left(\vec{R}; \vec{M_0M}\right) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 12 \cdot (-2) = -12.$$

### Задание 4

Сила  $\vec{F} = (P_3; P_5; -2)$  приложена к точке  $C(P_4; -2; P_7)$ . Определите величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

#### Решение

Пусть  $n = 101$ . Тогда  $P_3 = 2$ ,  $P_4 = 1$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_7 = 3$ .

Момент силы, приложенной к точке относительно начала координат, определяется по формуле:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ , где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $C$  относительно начала координат.

$$\vec{r} = \vec{OC} = (P_4 - 0; -1 - 0; P_7 - 0) = (P_4; -1; P_7) = (1; -1; 3)$$



$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_4 & -1 & P_7 \\ P_3 & P_5 & -2 \end{vmatrix} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}.$$

Величина момента силы:

$$|\vec{M}| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{74}.$$

Направляющие косинусы:  $\cos \alpha = \frac{M_x}{|\vec{M}|}$ ,  $\cos \beta = \frac{M_y}{|\vec{M}|}$ ,  $\cos \gamma = \frac{M_z}{|\vec{M}|}$ .

Получаем:  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{74}}{74}$ ,  $\cos \beta = -\frac{4\sqrt{74}}{37}$ ,  $\cos \gamma = \frac{3\sqrt{74}}{74}$ .

### Задание 5

Найти ненулевой вектор, ортогональный векторам  $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -1)$  и  $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$ . Сделайте проверку.

#### Решение

Пусть  $n=101$ . Тогда  $P_3=2$ ,  $P_4=1$ ,  $P_5=1$ ,  $P_7=3$ . По условию  $\vec{a} = (0; 2; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 1)$ .

Векторное произведение двух векторов является вектором ортогональным к этим векторам. Это векторное произведение будет ненулевым вектором, тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы неколлинеарны.

Данные векторы неколлинеарны, поэтому их векторное произведение будет ненулевым вектором ортогональным им обоим.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - P_4 & P_5 + 1 & -1 \\ P_3 - 1 & 1 & 4 - P_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j} - 2 \cdot \vec{k},$$

$$\vec{c} = (3; 1; -2).$$

Проверка: Два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю, тогда

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = x_c \cdot x_a + y_c \cdot y_a + z_c \cdot z_a = 0;$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = x_c \cdot x_b + y_c \cdot y_b + z_c \cdot z_b = 0.$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 0, \text{ следовательно } \vec{c} \perp \vec{a},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0, \text{ следовательно } \vec{c} \perp \vec{b}.$$

### Задание 6

Даны точки  $A(-1; -P_3; 2)$ ,  $B(P_5; 2; 0)$  и  $C(P_5 \cdot (P_3 + 2); P_3^2 + 3P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1))$ .

Образуют ли эти точки треугольник?

Если да, то чему равна его площадь?

Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

### Решение

Пусть  $n=101$ . Тогда  $P_3 = 2$ ,  $P_4 = 1$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_7 = 3$ ,  $P_8 = 5$ .

Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix} = x_i \vec{i} + y_j \vec{j} + z_k \vec{k}$$

$$\vec{AB} = (1+1; 2+2; 0-2)$$

$$\vec{AC} = (4+1; 14+2; -1-2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k} \neq \vec{0},$$

следовательно точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле:  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}|$ , где

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{20^2 + (-4)^2 + 12^2} = 4\sqrt{35}.$$

$$\text{Таким образом, } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}.$$

### Задание 7

Даны точки:  $A(1; -P_2; -1)$ ,  $B(1-P_3; 0; 1)$ ,  $C(-1; 1; P_5-2)$ ,  $D(P_2; P_4; P_8)$ . Образуют ли эти точки пирамиду? Если да, то чему равен объём пирамиды?

Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

**Решение**

Пусть  $n = 101$ . Тогда  $P_2 = 1, P_3 = 2, P_4 = 1, P_5 = 1, P_8 = 5$ . Точки  $A, B, C, D$  образуют пирамиду тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  некопланарные, т.е. когда их смешанное произведение не равно нулю. Найдем координаты этих векторов

$$\overrightarrow{AB} = (1 - P_3 - 1; 0 - (-P_2); 1 - (-1)) = (-2; 1; 2),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1 - 1; 1 - (-P_2); P_5 - 2 - (-1)) = (-2; 2; 0),$$

$$\overrightarrow{AD} = (P_2 - 1; P_4 - (-P_2); P_8 - (-1)) = (0; 2; 6),$$

и их смешанное произведение

$$\left( \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \right) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -20.$$

Итак, точки  $A, B, C, D$  образуют пирамиду и её объём можно найти по формуле

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left( \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD} \right) \right|.$$

Подставляя в формулу значение смешанного произведения, получим  $V = \frac{10}{3}$ .

**Задание 8**

Даны точки  $A(-1 - P_7; P_5 - 2)$  и  $B(P_5 - 2; P_5 + 4)$ . Найти:

а) точку  $C(x_1; y_1)$  – середину отрезка  $AB$ ;

б) точку  $D(x_2; y_2)$ , которая делит отрезок  $AB$  в отношении  $\frac{P_9 + 1}{9 - P_9}$ .

**Решение**

Пусть  $n = 101$ . Тогда  $P_5 = 1, P_7 = 3, P_9 = 2$ . Значит  $A(-4; -1), B(-1; 5)$ .

а)  $x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 - 1}{2} = -2,5;$

$y_1 = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2$ . Получили  $C(-2,5; 2)$ .

б) Если  $\lambda = \frac{P_9 + 1}{9 - P_9} = \frac{3}{8}$ , то  $x_2 = \frac{x_A + \lambda \cdot x_B}{1 + \lambda} = \frac{-4 + \frac{3}{8} \cdot (-1)}{1 + \frac{3}{8}} = -\frac{35}{11},$

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1 + \lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{8} \cdot 5}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{7}{11}. \text{ Получили } D\left(-\frac{35}{11}; \frac{7}{8}\right).$$

### Задание 9

На плоскости даны точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ . Сделать чертёж треугольника  $ABC$  и найти:

- длину и уравнение стороны  $BC$  (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);
- косинус угла  $A$  и угол  $A$  (в градусах);
- уравнение прямой, проходящей через точку  $A$  параллельно стороне  $BC$ ;
- высоту, проведённую к стороне  $BC$  и её уравнение;
- уравнение медианы, проведённой к стороне  $BC$ ;
- уравнение биссектрисы угла  $A$ .

### Решение

Даны точки  $A(11; -5)$ ,  $B(6; 7)$ ,  $C(-10; -5)$ .

а) Каноническое уравнение прямой, проходящей через точки  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$  рассчитывается по формуле:  $\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}$  или

$$\frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m}.$$

Тогда каноническое уравнение прямой  $BC$  будет иметь вид:

$$\frac{x - 6}{-10 - 6} = \frac{y - 7}{-5 - 7}, \text{ или } \frac{x - 6}{-16} = \frac{y - 7}{-12}, \text{ или } \frac{x - 6}{4} = \frac{y - 7}{3}.$$

Общее уравнение прямой:  $m \cdot x - l \cdot y + (l \cdot y_2 - m \cdot x_2) = 0$  или  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ .

Тогда общее уравнение прямой  $BC$  будет иметь вид:  $3(x - 6) = 4(y - 7)$ ,  $3x - 18 = 4y - 28$ ,  $3x - 4y + 10 = 0$ .

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку

В имеют вид: 
$$\begin{cases} x = x_2 + l \cdot t; \\ y = y_2 + m \cdot t. \end{cases}$$

В качестве направляющего вектора берем вектор  $\overrightarrow{BC} = (4; 3)$  и параметрические уравнения прямой  $BC$  будут иметь вид: 
$$\begin{cases} x = 6 + 4t; \\ y = 7 + 3t. \end{cases}$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом:  $y = -\frac{A \cdot x}{B} - \frac{C}{B}$

или  $y = kx + b$ .

Тогда уравнение с угловым коэффициентом прямой  $BC$  будет иметь вид:  $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ .

$$\text{б) } \cos A = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{AB}}{|\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}|} = \frac{(x_3 - x_1) \cdot (x_2 - x_1) + (y_3 - y_1) \cdot (y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = g.$$

$A = \arccos(g)$ .

$$\overline{AC} = (-10 - 11; -5 - (-5)) = (-21; 0), \text{ тогда } |\overline{AC}| = \sqrt{(-21)^2 + 0^2} = 21,$$

$$\overline{AB} = (6 - 11; 7 - (-5)) = (-5; 12), \text{ тогда } |\overline{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13,$$

$$\cos A = \frac{-21 \cdot (-5) + 0 \cdot 12}{21 \cdot 13} = \frac{5}{13}, \quad A = \arccos \frac{5}{13}.$$

**в) 1 способ.**

Прямая, параллельная  $BC$  имеет такой же угловой коэффициент  $k$ , как и  $BC$ . Подставим координаты точки  $A$  в уравнение с угловым коэффициентом  $y = kx + b_1$  и найдем  $b_1$ .

Уравнение с угловым коэффициентом прямой  $BC$ , полученное в пункте а) имеет вид:  $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ . По условию  $A(11; -5)$ .

При подстановке координат точки  $A$  в уравнение  $y = \frac{3}{4}x + b_1$  получим:  $-5 = \frac{3}{4} \cdot 11 + b_1$ , откуда  $b_1 = -\frac{53}{4}$ . Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид:  $y = \frac{3}{4}x - \frac{53}{4}$  или  $3x - 4y - 53 = 0$ .

**2 способ.**

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $A(x_1; y_1)$  имеют вид  $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$ , где  $(l; m)$  - направляющий вектор прямой. В качестве направляющего вектора прямой направляющего вектора прямой параллельной  $BC$  можно взять направляющий вектор прямой  $BC$ , вектор  $\overline{BC} = (4; 3)$ .

Тогда искомое уравнение примет вид:  $\frac{x - 11}{4} = \frac{y - (-5)}{3}$ , т.е.  $3x - 4y - 53 = 0$ .

**г) 1 способ.**

Уравнение высоты к стороне  $BC$ :  $y = -\frac{1}{k} \cdot x + b_2$ .

$b_2$  находится подстановкой значений  $x$  и  $y$  точки  $A$  в это уравнение.

При подстановке координат точки  $A$  в уравнение  $y = -\frac{4}{3}x + b_2$  получим:  $-5 = -\frac{4}{3} \cdot 11 + b_2$ , откуда  $b_2 = \frac{29}{3}$ . Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид:  $y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$  или  $4x + 3y - 29 = 0$ .

Для нахождения длины высоты, найдём точку пересечения стороны  $BC$  и полученной высоты:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0; \\ 4x + 3y - 29 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 16y + 40 = 0; \\ 12x + 9y - 87 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y + 127 = 0; \\ 3x - 4y + 10 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5,08; \\ x = 3,44. \end{cases}$$

Получили точку  $A_1(3,44; 5,08)$ .

$$\text{Длина высоты: } h = |\overline{AA_1}| = \sqrt{(3,44 - 11)^2 + (5,08 - (-5))^2} = 12,6.$$

## 2 способ.

Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами  $(x_1, y_1)$  перпендикулярно ненулевому вектору  $\vec{n} = (A, B)$  имеет вид:

$$A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) = 0.$$

В качестве нормального вектора высоты, проведенной к стороне  $BC$  можно взять направляющий вектор прямой  $BC$ , например вектор  $\overline{BC} = (4; 3)$ .

Тогда уравнение высоты будет иметь вид:

$$4 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - (-5)) = 0 \text{ или } 4 \cdot x + 3 \cdot y - 29 = 0.$$

Длина высоты – это расстояние от точки  $A$  до прямой  $BC$ . Расстояние от точки  $A(x_1, y_1)$  до прямой  $a$ , имеющей общее уравнение  $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$  можно найти по формуле:

$$h = d(A, (a)) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Общее уравнение прямой  $BC$  имеет вид:  $3 \cdot x - 4 \cdot y + 10 = 0$ .

$$\text{Поэтому } h = \frac{|3 \cdot 11 - 4 \cdot (-5) + 10|}{\sqrt{3^2 + 4}} = \frac{63}{5} = 12,6.$$

д) Если точка  $M$  – середина  $BC$ , то  $x_M = \frac{x_2 + x_3}{2}$ ;  $y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}$ .

$$\text{Уравнение медианы: } \frac{x - x_1}{x_M - x_1} = \frac{y - y_1}{y_M - y_1}.$$

По условию,  $B(6;7)$ ,  $C(-10;-5)$ , тогда  $x_M = \frac{6+(-10)}{2} = -2$ ,  
 $y_M = \frac{7+(-5)}{2} = 1$ . Значит  $M(-2;1)$ .

Уравнение медианы, проведённой к стороне  $BC$ :  $\frac{x-11}{-2-11} = \frac{y-(-5)}{1-(-5)}$   
 или  $\frac{x-11}{-13} = \frac{y+5}{6}$ .

е) По свойству биссектрисы угла:  $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$ .

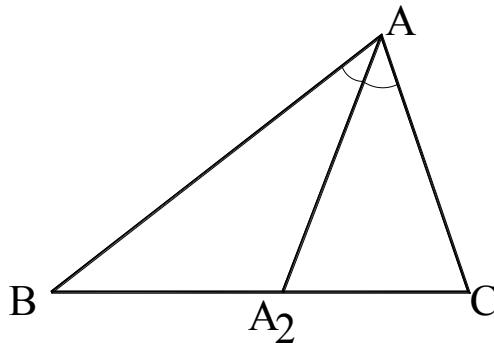


Рис. 4. Вспомогательный чертёж к заданию 9

Пусть  $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \lambda$ , тогда координаты точки  $A_2$  находятся по формулам:  $x_{A_2} = \frac{x_2 + \lambda \cdot x_3}{1 + \lambda}$ ;  $y_{A_2} = \frac{y_2 + \lambda \cdot y_3}{1 + \lambda}$ , где  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ .

Из пункта б) мы имеем:  $|\overrightarrow{AC}| = 21$ ,  $|\overrightarrow{AB}| = 13$ , значит  $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{13}{21}$ ,

тогда  $x_{A_2} = \frac{6 + \frac{13}{21} \cdot (-10)}{1 + \frac{13}{21}} = -\frac{2}{17}$ ,  $y_{A_2} = \frac{7 + \frac{13}{21} \cdot (-5)}{1 + \frac{13}{21}} = \frac{41}{17}$ .

Искомое уравнение биссектрисы мы находим как уравнение прямой, проходящей через точки  $A(11;-5)$  и  $A_2\left(-\frac{2}{17}; \frac{41}{17}\right)$ .

$$\frac{x-11}{-\frac{2}{17}-11} = \frac{y-(-5)}{\frac{41}{17}-(-5)} \quad \text{или} \quad \frac{x-11}{-\frac{189}{17}} = \frac{y+5}{\frac{126}{17}}, \quad \text{или} \quad \frac{x-11}{-3} = \frac{y+5}{2}.$$

**Задание 10**

Дана точка  $(0;2)$  пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон  $5x - 4y + 15 = 0$  и  $4x + y - 9 = 0$ . Найти координаты вершин треугольника и уравнение третьей стороны.

**Решение**

Координаты одной вершины найдем как координаты точки пересечения данных сторон, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 4y + 15 = 0, \\ 4x + y - 9 = 0. \end{cases}$$

$$\text{Получаем } \begin{cases} y = 9 - 4x, \\ 5x - 4(9 - 4x) + 15 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 1, \\ y = 5. \end{cases}$$

Точка  $O$  пересечения медиан треугольника называется его центром. Отметим одно свойство центра треугольника, которое используем для нахождения координат остальных вершин:

$$x_{\text{ц}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_{\text{ц}} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

где  $x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}}$  - координаты центра треугольника;

$x_i, y_i$  - координаты  $i$ -ой вершины треугольника,  $i = 1, 2, 3$ .

Для доказательства этих формул рассмотрим треугольник  $A_1A_2A_3$ , где  $A(x_i; y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. рис. 3.2)

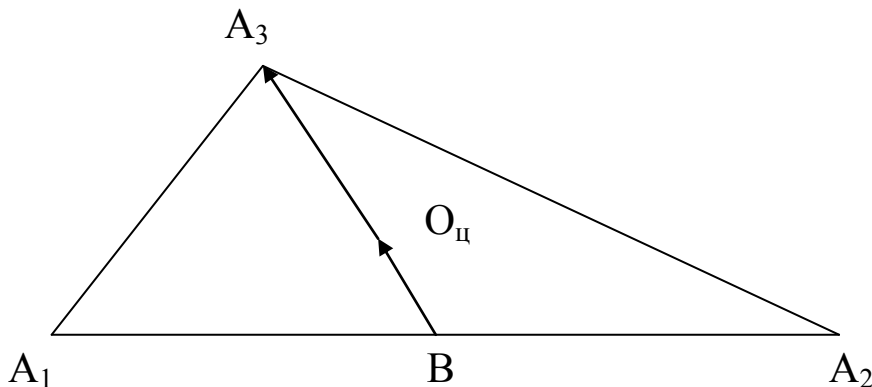


Рис. 5. Вспомогательный чертёж к заданию 10

Пусть  $V$  – середина стороны  $A_1A_2$ . Тогда  $A_3V$  – медиана треугольника  $A_1A_2A_3$ . По известному из элементарной геометрии



свойству медиан треугольника  $A_3O_{\text{ц}} = 2 \cdot BO_{\text{ц}}$ . Тогда координаты точки В найдем по формулам:

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{и} \quad y_B = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

а координаты центра  $O_{\text{ц}}$  из векторного соотношения  $\overrightarrow{O_{\text{ц}}A_3} = 2 \cdot \overrightarrow{BO_{\text{ц}}}$ , которое в координатной форме записывается так:

$$x_3 - x_{\text{ц}} = 2 \cdot \left(x_{\text{ц}} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right), \quad y_3 - y_{\text{ц}} = 2 \cdot \left(y_{\text{ц}} - \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Отсюда, выражая  $x_{\text{ц}}$  и  $y_{\text{ц}}$  через  $x_i, y_i$ , получим требуемые формулы.

Используя доказанные формулы, полагая в них  $x_1 = 1$  и  $y_1 = 5$ ,  $x_{\text{ц}} = 0$  и  $y_{\text{ц}} = 2$ , получим два уравнения, которым должны удовлетворять координаты остальных двух вершин

$$0 = \frac{1 + x_2 + x_3}{3}, \quad 2 = \frac{5 + y_2 + y_3}{3}, \quad \text{откуда}$$

$$x_2 + x_3 = -1, \quad y_2 + y_3 = 1.$$

Еще два уравнения получим если потребуем, чтобы искомые точки, вершины треугольника, принадлежали заданным сторонам, т.е. их координаты удовлетворяли уравнениям этих сторон

$$5x - 4y + 15 = 0, \quad 4x + y - 9 = 0.$$

Итак, для определения четырех неизвестных  $x_2, x_3, y_2, y_3$ , мы имеем четыре независимых условия:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1, \\ y_2 + y_3 = 1, \\ 5x_2 - 4y_2 + 15 = 0, \\ 4x_3 + y_3 - 9 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим  $x_2 = -3$ ,  $y_2 = 0$ ,  $x_3 = 2$ ,  $y_3 = 1$ .

Уравнение третьей стороны запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки  $(-3;0)$  и  $(2;1)$

$$\frac{x - (-3)}{2 - (-3)} = \frac{y - 0}{1 - 0} \quad \text{или} \quad \frac{x + 3}{5} = y.$$

Итак, уравнение третьей стороны  $x - 5y + 3 = 0$ , а вершины треугольника имеют координаты  $(1;5)$ ,  $(-3;0)$ ,  $(2;1)$ .

### Задание 11

В пространстве даны точки  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x_3; y_3; z_3)$  и  $D(x_4; y_4; z_4)$ . Сделать чертёж пирамиды  $ABCD$  и найти:

- длину и уравнение ребра  $AB$ ;
- уравнение грани  $ABC$ ;
- высоту, проведённую из вершины  $D$  и её уравнение;
- проекцию вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ ;
- уравнение прямой, проходящей через вершину  $D$  параллельно ребру  $AB$ ;
- уравнение плоскости, проходящей через вершину  $D$  параллельно грани  $ABC$ ;
- уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AD$  перпендикулярно грани  $ABC$ ;
- уравнение проекции ребра  $AD$  на грань  $ABC$ ;
- угол между ребрами  $AB$  и  $AD$ ;
- угол между ребром  $AD$  и гранью  $ABC$ ;
- угол между гранями  $ABC$  и  $ABD$ .

### Решение

Даны точки  $A(1; -5; 3)$ ,  $B(4; -1; 2)$ ,  $C(-3; 3; 5)$ ,  $D(2; 1; -1)$ .

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$  имеет вид:  $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ .

Тогда прямая  $AB$  задаётся уравнением:  $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-(-5)}{-1-(-5)} = \frac{z-3}{2-3} \Leftrightarrow$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-3}{-1}.$$

Длина ребра  $AB$  может быть рассчитана как модуль вектора  $\overline{AB}$  по формуле:  $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ .

$$\overline{AB} = (4-1; -1-(-5); 2-3) = (3; 4; -1), \text{ тогда } |\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}.$$

б) Уравнение плоскости, проходящей через три точки  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$  и  $C(x_3; y_3; z_3)$  имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Найдём уравнение грани  $ABC$ , используя данную формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ -3-1 & 3-(-5) & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 16x - 2y + 40z - 146$$

Получим уравнение плоскости  $16x - 2y + 40z - 146 = 0 \Leftrightarrow 8x - y + 20z - 73 = 0$ .

в) Уравнение прямой, проходящей через данную точку  $D(x_4; y_4; z_4)$  перпендикулярно к плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  имеет вид:  $\frac{x-x_4}{A} = \frac{y-y_4}{B} = \frac{z-z_4}{C}$ .

Искомая высота проходит через точку  $D(2; 1; -1)$  перпендикулярно грани  $ABC$ , то есть перпендикулярно плоскости, заданной уравнением  $8x - y + 20z - 73 = 0$ . Значит уравнение прямой, содержащей эту высоту имеет вид:  $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{20}$ .

Расстояние от точки  $D(x_4; y_4; z_4)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  рассчитывается по формуле:

$$h = \frac{|A \cdot x_4 + B \cdot y_4 + C \cdot z_4 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|8 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 20 \cdot (-1)|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 20^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{465}} = \frac{\sqrt{465}}{93}.$$

г) Чтобы найти проекцию вершины  $D$  на плоскость  $ABC$ , необходимо отыскать основание  $D_1$  перпендикуляра, опущенного из точки  $D(x_4; y_4; z_4)$  на плоскость  $Ax + By + Cz + D = 0$ . Уравнение этого перпендикуляра найдено в пункте в):  $\frac{x-2}{8} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{20}$ . Запишем данное уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 2 + 8t, \\ y = 1 - t, \\ z = -1 + 20t. \end{cases} \quad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения для  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в уравнение плоскости  $ABC$ , найденное в пункте б):  $8x - y + 20z - 73 = 0$ .

$$8(2 + 8t) - (1 - t) + 20(-1 + 20t) - 73 = 0, \text{ откуда находим } t:$$

$$-78 + 465t = 0, \quad t = \frac{26}{155}.$$

Далее необходимо подставить найденное значение  $t$  в систему уравнений (1). Получим координаты искомой точки.

$$\begin{cases} x = 2 + 8 \cdot \frac{26}{155}, \\ y = 1 - \frac{26}{155}, \\ z = -1 + 20 \cdot \frac{26}{155}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{518}{155}, \\ y = \frac{129}{155}, \\ z = \frac{365}{155}. \end{cases}$$

Значит, проекция  $D_1$  вершины  $D$  на плоскость  $ABC$  имеет координаты  $\left(\frac{518}{155}; \frac{129}{155}; \frac{365}{155}\right)$ .

д) Уравнение прямой, проходящей через вершину  $D$  параллельно ребру  $AB$  представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку  $D(x_4; y_4; z_4)$  параллельно направляющему вектору  $\overline{AB} = (l; m; n)$  и находится по формуле:  $\frac{x-x_4}{l} = \frac{y-y_4}{m} = \frac{z-z_4}{n}$ .

По условию  $D(2;1;-1)$ , а вектор был найден в пункте а)  $\overline{AB} = (3;4;-1)$ . Тогда искомая прямая имеет вид:  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}$ .

е) Плоскость, параллельная плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  и проходящая через  $D(x_4; y_4; z_4)$  имеет вид:  $A(x-x_4) + B(y-y_4) + C(z-z_4) = 0$ .

Тогда, искомая плоскость, проходящая через точку  $D(2;1;-1)$  параллельно плоскости  $8x - y + 20z - 73 = 0$ , задаётся уравнением:  $8(x-2) - (y-1) + 20(z+1) = 0 \Leftrightarrow 8x - y + 20z + 5 = 0$ .

ж) Уравнение плоскости, проходящей через ребро  $AD$  перпендикулярно грани  $ABC$  находится как уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-x_1}{x_4-x_1} = \frac{y-y_1}{y_4-y_1} = \frac{z-z_1}{z_4-z_1}$  перпендикулярно плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Найдём уравнение прямой  $AD$ :  $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-(-5)}{1-(-5)} = \frac{z-3}{-1-3}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-3}{-4}.$$

Уравнение плоскости  $ABC$  было получено в пункте б):  $8x - y + 20z - 73 = 0$ .

Тогда искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 8 & -1 & 20 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 116x - 52y - 49z - 229 = 0.$$

з) Проекция ребра  $AD$  на грань  $ABC$  является прямой, проходящей через точки  $A(1;-5;3)$  и точку, найденную в пункте г), имеющую координаты  $\left(\frac{518}{155}; \frac{129}{155}; \frac{365}{155}\right)$ .

Каноническое уравнение проекции получим используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x-1}{\frac{518}{155}-1} = \frac{y-(-5)}{\frac{129}{155}-(-5)} = \frac{z-3}{\frac{365}{155}-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{363} = \frac{y+5}{904} = \frac{z-3}{-100}.$$

и) Угол  $\varphi$  между ребрами  $AB$  и  $AD$  находится как угол между векторами  $\vec{AB} = (l_1; m_1; n_1)$  и  $\vec{AD} = (l_2; m_2; n_2)$ :

$$\cos \varphi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

Имеем:  $\vec{AB} = (3; 4; -1)$ , тогда  $|\vec{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$ ,

$\vec{AD} = (1; 6; -4)$ , тогда  $|\vec{AD}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{53}$ ,

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + (-1) \cdot (-4)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{53}} = \frac{31}{\sqrt{1378}}, \quad \varphi = \arccos \frac{31}{\sqrt{1378}} \approx 37^\circ.$$

к) Угол  $\psi$  между ребром  $AD$  и гранью  $ABC$  находится по формуле:  $\sin \psi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$ ,

где  $(A; B; C)$  – координаты нормального вектора  $\vec{n}$  плоскости  $ABC$ ,

$(l; m; n)$  – координаты направляющего вектора  $\vec{q}$  прямой  $AD$ .

Имеем:  $\vec{n} = (8; -1; 20)$  и  $\vec{q} = (1; 6; -4)$  – соответственно.

$$\sin \psi = \frac{|8 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 + 20 \cdot (-4)|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 20^2} \cdot \sqrt{1^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{78}{\sqrt{24645}},$$

$$\psi = \arcsin \frac{78}{\sqrt{24645}} \approx 33^\circ.$$

л) Угол  $\theta$  между гранями  $ABC$  и  $ABD$  находится как угол между нормальными векторами плоскостей  $ABC$  и  $ABD$ . Нормальный вектор плоскости  $ABC$  имеет координаты  $(8; -1; 20)$ .

Найдём уравнение плоскости  $ABD$  аналогично пункту б):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ 2-1 & 1-(-5) & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 10x+11y+14z+23$$

Получим уравнение плоскости  $10x+11y+14z+23=0$ . Для данной плоскости направляющий вектор имеет координаты:  $(10;11;14)$ .

$$\cos \theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{8 \cdot 10 + (-1) \cdot 11 + 20 \cdot 14}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 20^2} \cdot \sqrt{10^2 + 11^2 + 14^2}} = \frac{349}{\sqrt{193905}},$$

$$\theta = \arccos \frac{349}{\sqrt{193905}} \approx 42^\circ.$$

### Задание 12

Дана точка  $M(1;0;-2)$ . Найти:

а) точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричную  $M$  относительно точки  $S(-1-P_7; P_5; 3-P_3)$ ;

б) точку  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ , симметричную  $M$  относительно прямой

$$\frac{x+1}{-1-P_7} = \frac{y-2}{P_5} = \frac{z-1}{3-P_3}$$

в) точку  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ , симметричную  $M$  относительно плоскости  $(-1-P_7) \cdot x + P_5 \cdot y + (3-P_3) \cdot z = 0$

### Решение

Пусть  $n=101$ . Тогда  $P_3 = 2$ ,  $P_5 = 1$ ,  $P_7 = 3$ .

а) Согласно заданным условиям,  $S(-4;1;1)$ .

Точки  $M$  и  $M_1$  называются симметричными относительно точки  $S$  (центр симметрии), если  $S$  – середина отрезка  $MM_1$ . Общая

формула середины отрезка:  $x_S = \frac{x_M + x_{M_1}}{2}$ . Откуда получаем:

$$x_{M_1} = 2 \cdot x_S - x_M = 2 \cdot (-4) - 1 = -9,$$

$$y_{M_1} = 2 \cdot y_S - y_M = 2 \cdot 1 - 0 = 2,$$

$$z_{M_1} = 2 \cdot z_S - z_M = 2 \cdot 1 - (-2) = 4.$$

Таким образом,  $M_1(-9;2;4)$ .

б) Согласно заданным условиям, исходная прямая имеет вид:

$$\frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{5}.$$

Точки  $M$  и  $M_2$  называются симметричными относительно прямой  $a$  (ось симметрии), если прямая  $a$  проходит через середину отрезка  $MM_2$  и перпендикулярна к этому отрезку.

Находим уравнение плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через точку  $M(1;0;-2)$ . Так плоскость перпендикулярна заданной прямой, то в качестве её вектора нормали можно взять направляющий вектор этой прямой с координатами  $(-4;1;5)$ .

Следовательно уравнение плоскости имеет вид:

$$-4 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) + 5 \cdot (z-(-2)) = 0 \Leftrightarrow -4x + y + 5z + 6 = 0.$$

Найдем координаты точки пересечения данной плоскости и нашей прямой. Для этого запишем уравнение прямой в

параметрической форме: 
$$\begin{cases} x = -1 - 4 \cdot t; \\ y = 2 + t; \\ z = 1 + 5t. \end{cases} \quad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в уравнение плоскости и вычислить значение  $t$ .

$$-4(-1-4t) - (2+t) + 5(1+5t) + 6 = 0, \text{ откуда находим } t = -\frac{17}{42}.$$

Затем подставим найденное значение  $t$  в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} x = -1 - 4 \cdot \left(-\frac{17}{42}\right); \\ y = 2 - \frac{17}{42}; \\ z = 1 + 5 \cdot \left(-\frac{17}{42}\right). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{13}{42}; \\ y = \frac{67}{42}; \\ z = -\frac{43}{42}. \end{cases}$$

Получится искомая точка  $G\left(-\frac{13}{42}; \frac{67}{42}; -\frac{43}{42}\right)$  пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_2} = 2 \cdot x_G - x_M = 2 \cdot \left(-\frac{13}{42}\right) - 1 = -\frac{34}{21},$$

$$y_{M_2} = 2 \cdot y_G - y_M = 2 \cdot \frac{67}{42} - 0 = \frac{67}{21},$$

$$z_{M_2} = 2 \cdot z_G - z_M = 2 \cdot \left(-\frac{43}{42}\right) - (-2) = -\frac{1}{21}.$$

Таким образом,  $M_2\left(-\frac{34}{21}; \frac{67}{21}; -\frac{1}{21}\right)$ .

в) Согласно заданным условиям, исходная плоскость имеет вид:  $-4x + y + z + 1 = 0$ .

Точка  $M_3$  называется симметричной точке  $M$  относительно плоскости  $\alpha$ , если плоскость  $\alpha$  перпендикулярна отрезку  $MM_3$  и проходит через его середину.

Находим уравнение прямой, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через точку  $M(1;0;-2)$ . Так как прямая перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве её направляющего вектора можно взять вектор нормали плоскости с координатами  $(-4;1;1)$ .

Уравнение этой прямой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = 1 - 4 \cdot t; \\ y = 0 + t; \\ z = -2 + t. \end{cases} \quad (2)$$

Далее найдём точку пересечения этой прямой с исходной плоскостью. Для этого необходимо подставить данные выражения  $x, y, z$  в уравнение плоскости и вычислить значение  $t$ .

$$-4(1-4t) + (0+t) + (-2+t) + 1 = 0, \text{ откуда находим } t = -\frac{5}{14}.$$

Далее подставить найденное значение  $t$  в систему уравнений (2).

$$\begin{cases} x = 1 - 4 \cdot \frac{5}{14}; \\ y = 0 + \frac{5}{14}; \\ z = -2 + \frac{5}{14}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7}; \\ y = -\frac{5}{14}; \\ z = -\frac{33}{14}. \end{cases}$$

Получится искомая точка  $R\left(\frac{17}{7}; -\frac{5}{14}; -\frac{33}{14}\right)$  пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_3} = 2 \cdot x_R - x_M = 2 \cdot \frac{17}{7} - 1 = \frac{27}{7},$$

$$y_{M_3} = 2 \cdot y_R - y_M = 2 \cdot \left(-\frac{5}{14}\right) - 0 = -\frac{5}{7},$$

$$z_{M_3} = 2 \cdot z_R - z_M = 2 \cdot \left(-\frac{33}{14}\right) - (-2) = -\frac{19}{7}.$$

Таким образом,  $M_3\left(\frac{27}{7}; -\frac{5}{7}; -\frac{19}{7}\right)$ .



### Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2003.-240с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987.-320с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука,1984. 192с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш.шк. ,1996. 304с.
5. Сборник задач по математике для втузов: В 4 частях: Ч.1 / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Пospelова. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2003.-288с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004.-240с.
7. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Проспект, 2011. -608с.
8. Гусятников П.Б. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985. -232с.