МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«_30_» _04_________ 2019 г.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Высшая математика»
для направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность»

Курск 2019

2

УДК 51

Составитель: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова

Рецензент
Доктор физико-математических наук, доцент,
и.о. заведующего кафедрой высшей математики
Н.А. Хохлов

Высшая математика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Высшая математика» для направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова. – Курск, 2019. – 21с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность». Материал предназначен для бакалавров очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 20.03.01 «Техносферная безопасность», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Высшая математика».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 30.04.19. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1,1. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 426. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задания по работам

1. Тема «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

2. Тема «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия».

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5(P_3+2);P_3^2+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

3. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0 = m$ к параболе $y = nx^2 + (n-1)x + m$, где m – число гласных букв в фамилии, n - число согласных букв в фамилии.

4. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ $и$ $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x = $\frac{\pi}{6}$, y = 25.

5. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения».

Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$. Сделать проверку.

6. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $xy^2dx + ydy = xdx$.

7. Тема «Числовые и функциональные ряды».

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$.

8. Тема «Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления».

Восстановить аналитическую функцию $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ по её известной действительной части $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$, $W(0) = 5$.

9. Тема «Элементы теории вероятностей».

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

10. Тема «Элементы математической статистики».

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочное среднее $\bar{x} = 2{,}3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1{,}4$.

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

1. Тема «Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Метод Крамера

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель квадратной системы,

а Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Решить СЛУ методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

Матричный метод

В матричной форме СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение этого уравнения в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$.

Решить СЛУ матричным методом $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Введём матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Найдём A^{-1}.

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15$.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5;$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30;$ $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2;$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24;$ $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5;$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5;$ $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10;$

3. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \frac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислим X: $X = \frac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецеидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.
4. Вычёркивание из системы уравнения вида: $0\cdot x_1+0\cdot x_2+\ldots+0\cdot x_n=0$.
5. Перенумерация неизвестных.

Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6;\\ 4x_2-5x_3=-7;\\ 6x_1-7x_2+8x_3=16.\end{cases}$

Решение.

$$\underset{3стр-6\cdot 1стр}{\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&4&-5&-7\\6&-7&8&16\end{pmatrix}}\sim\underset{3стр:5}{\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&4&-5&-7\\0&5&-10&-20\end{pmatrix}}\sim\underset{2стр\leftrightarrow 3стр}{\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&4&-5&-7\\0&1&-2&-4\end{pmatrix}}$$

$$\sim\underset{3стр-4\cdot 2стр}{\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&1&-2&-4\\0&4&-5&-7\end{pmatrix}}\sim\underset{3стр:3}{\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&1&-2&-4\\0&0&3&9\end{pmatrix}}\sim\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&1&-2&-4\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\underset{\substack{1стр-3\cdot 3стр\\ 1стр+2\cdot 3стр}}{\begin{pmatrix}1&-2&3&6\\0&1&-2&-4\\0&0&1&3\end{pmatrix}}\sim\underset{1стр+2\cdot 2стр}{\begin{pmatrix}1&-2&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

Отсюда получаем решение системы: $\begin{cases} x_1=1;\\ x_2=2;\\ x_3=3.\end{cases}$

2. Тема «Векторная алгебра. Аналитическая геометрия».

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\,(P_3+2);P_3^{\,2}+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_4=1$, $P_5=1$, $P_7=3$, $P_8=5$.

Точки A, B, C образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix}$.

$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{j}$ $\boldsymbol{k}$

Тогда $\overrightarrow{AB}=(1+1;2+2;0-2)$, $\overrightarrow{AC}=(4+1;14+2;-1-2)$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix}=20\vec{i}-4\vec{j}-12\vec{k}$, следовательно точки A, B, C образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{20^2+(-4)^2+12^2}=4\sqrt{35}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35}=2\sqrt{35}$.

3. Тема «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Составить уравнения касательной и нормали в точке $x_0=m$ к параболе $y=nx^2+(n-1)x+m$, где m – число гласных букв в фамилии, n - число согласных букв в фамилии.

Пусть $m=8$ и $n=10$, тогда $x_0=8$, $y=10x^2+9x+8$. Найдём значение функции в точке x_0: $y(8)=10\cdot 64+9\cdot 8+8=720$. Производная y' равна: $y'=20x+9$, а значение производной функции в точке x_0 равно: $y'(8)=20\cdot 8+9=169$.

Дальнейшее решение задачи удобнее записать в виде таблицы.

Уравнение касательной к функции $y=f(x)$ в точке x_0: $y=y(x_0)+y'(x_0)\cdot(x-x_0)$	Уравнение нормали к функции $y=f(x)$ в точке x_0: $y=y(x_0)-\frac{x-x_0}{y'(x_0)}$
$y=720+169(x-8)$, $y=169x-632$, общий вид: $169x-y-632=0$	$y=720-\frac{x-8}{169}$, $169y=121680-x+8$, общий вид: $x+169-121688=0$

4. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции $z=\cos x\cdot\log_5 y$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x = $\frac{\pi}{6}$, y = 25.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\log_5 y\cdot(-\sin x)$, тогда $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)}=-\log_5 25\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{1}{2}=-1$;

$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5}$, тогда $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\, 25\right)} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}$.

5. Тема «Интегрирование функций. Определенные интегралы и их приложения».

Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx$. Сделать проверку.

$$\int \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} dx = \int \left(\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}} - \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} \right) dx = \int \left(\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{(5-x^2)(5+x^2)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{(5-x^2)(5+x^2)}} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} \right) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}} =$$

$$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \ln\left| x + \sqrt{5+x^2} \right| + C.$$

Проверка

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} - \ln\left| x + \sqrt{5+x^2} \right| + C \right)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{x + \sqrt{5+x^2}} \cdot \left(1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{5+x^2}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{5+x^2}} = \frac{\sqrt{5+x^2} - \sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}} = f(x).$$

6. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $xy^2dx + ydy = xdx$.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид $P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0$ или $y' = f(x) \cdot g(y)$.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1) Если в уравнении присутствует y', то заменим $y' = \frac{dy}{dx}$.

2) Разделим переменные, используя свойство пропорции.

3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения.

$$xy^2dx + ydy = xdx,$$

$$xy^2dx - xdx = -ydy,$$

$$(y^2 - 1)xdx = -ydy,$$

$$xdx = -\frac{y}{y^2 - 1}dy,$$

$$\int xdx = -\int \frac{y}{y^2 - 1}dy.$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

$$-\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{1}{y^2-1}\cdot y dy = \left[\begin{array}{l} t = y^2-1 \\ dt = (y^2-1)' dy = 2y dy \\ y dy = \frac{dt}{2} \end{array}\right] = -\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \Rightarrow \frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln|y^2-1| + C.$$

Вернёмся к нашему уравнению: $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln|y^2-1| + C$.

Заменим $C = \frac{C_1}{2}$, получим $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln|y^2-1| + \frac{C_1}{2}$.

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $x^2 = C_1 - \ln|y^2-1|$.

7. Тема «Числовые и функциональные ряды».

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$.

Решение задачи основано на использовании признака Даламбера. Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то при $L > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится; при $L < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится; при $L = 1$ требуется дальнейшее исследование.

Общий член ряда $a_n = \frac{3^n}{2n+1}$, тогда $a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2(n+1)+1} = \frac{3\cdot 3^n}{2n+3}$. По признаку Даламбера: $L = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n}{2n+3} : \frac{3^n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3^n\cdot(2n+1)}{(2n+3)\cdot 3^n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{6n+3}{2n+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(6+\frac{3}{n}\right)}{n\cdot\left(2+\frac{3}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{3}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{6+0}{2+0} = 3.$$

Так как $L > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2n+1}$ расходится.

8. Тема «Теория функций комплексного переменного. Элементы операционного исчисления».

Восстановить аналитическую функцию $W = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ по её известной действительной части $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$, $W(0) = 5$.

Найдём частные производные первого порядка функции $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 + 5$: $u'_x = 6x$ и $u'_y = -6y$.

Тогда мнимая часть функции $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ рассчитывается по формуле: $v(x,y) = -\int\limits_{x_0}^{x} u'_y(x, y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} u'_x(x,y)dy$.

Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, тогда $v(x,y) = -\int\limits_{x_0}^{x} -6y_0 dx + \int\limits_{y_0}^{y} 6x dy =$

$$= 6y_0 \int\limits_{x_0}^{x} dx + 6x \int\limits_{y_0}^{y} dy = 6y_0 x \Big|_{x_0}^{x} + 6xy \Big|_{y_0}^{y} = 6y_0 x - 6y_0 x_0 + 6xy - 6x$$

$$= 6xy + C, \quad где \quad C = -6x_0 y_0.$$

$u(x,y) + i \cdot v(x,y) = \left(3x^2 - 3y^2 + 5\right) + i \cdot (6xy + C) =$

$= 3 \cdot \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (i \cdot y) + (i \cdot y)^2\right) + 5 + C \cdot i = 3 \cdot (x + i \cdot y)^2 + 5 + C \cdot i.$

Поскольку комплексное число $z = x + i \cdot y$, то функция $W = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ примет вид: $W(z) = 3z^2 + 5 + C \cdot i$. Постоянную C можно найти из условия: $W(0) = 5$. Решая уравнение $3 \cdot 0^2 + 5 + C \cdot i = 5$, получаем $C = 0$.

Таким образом, найденная функция комплексного переменного имеет вид: $W = 3z^2 + 5$.

9. Тема «Элементы теории вероятностей».

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

Фраза «шары разного цвета» подразумевает два исхода: белый и чёрный шары или чёрный и белый шары.

а) $P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7}$;

б) $P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}$.

10. Тема «Элементы математической статистики».

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочное среднее $\bar{x} = 2{,}3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1{,}4$.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, среднеквадратическое отклонение σ известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}$.

В данном случае в качестве случайной величины $Y(\Theta)$ берётся величина $Y(\Theta) = \dfrac{\bar{X} - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, которая при достаточно больших объёмах выборки приближённо распределена по нормальному закону $N(0,1)$.

Поэтому с заданной надёжностью γ доверительный интервал имеет вид $\left(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Таким образом, если исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону с известным среднеквадратическим отклонением σ, то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством:

$$\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\tilde{\Theta} = \bar{x}$ - точечная оценка математического ожидания ($\bar{x}$ - выборочное среднее);

$\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ - точность оценки;

n - объём выборки;

t - квантиль нормального распределения или значение аргумента функции Лапласа (приложение 2 [5]), при котором $2\Phi(t) = \gamma \Rightarrow \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$.

Воспользуемся формулой: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, далее по таблице приложения 2 [5] находим $t = 1{,}96$. Искомый доверительный интервал:

$$2{,}3 - \frac{1{,}96 \cdot 1{,}4}{\sqrt{49}} < a < 2{,}3 + \frac{1{,}96 \cdot 1{,}4}{\sqrt{49}} \text{ или } 1{,}908 < a < 2{,}692.$$

Смысл полученного результата: если произведено достаточно большое количество выборок по 49 элементов в каждой, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых a заключено, и лишь в 5% случаев значение a может выйти за границы доверительного интервала.

Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.

2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?

3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?

4. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.

5. В чём заключается правило треугольников?

6. Перечислить свойства определителей.

7. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?

8. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?

9. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?

10. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.

11. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?

12. Как записать и решить систему в матричной форме?

13. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.

14. Написать формулы Крамера.

15. Что такое элементарные преобразования матрицы?

16. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?

17. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

18. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?

19. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах.

20. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек «начала» и «конца» вектора.

21. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.

22. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.

23. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.

24. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.

25. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.

26. Понятие об уравнении линии на плоскости.

27. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

28. Уравнение прямой «с угловым коэффициентом» (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями «с угловым коэффициентом»).

29. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).

30. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.

31. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

32. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.

33. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия

параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениям).

34. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).

35. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

36. Сформулируйте определение предела функции.

37. Какая величина называется бесконечно малой?

38. Сформулируйте теоремы о пределах.

39. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.

40. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.

41. Дайте определение производной функции.

42. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.

43. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.

44. Сформулируйте лемму Ферма.

45. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.

46. Сформулируйте теорему Коши о среднем.

47. Сформулируйте правило Лопиталя.

48. Что называется функцией нескольких переменных?

49. Что такое частная производная?

50. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?

51. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.

52. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

53. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?

54. Дайте определение первообразной функции.

55. Что называется неопределенным интегралом?

56. Дайте определение операции интегрирования. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.

57. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.

58. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.

59. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

60. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.

61. Понятие определенного интеграла.

62. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла?

63. Перечислите свойства определенного интеграла.

64. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.

65. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется решением дифференциального уравнения?
66. Дайте определение порядка дифференциального уравнения.
67. Что называется общим решением дифференциального уравнения, частным решением?
68. Укажите общий вид дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, а также алгоритм их решения.
69. Укажите общий вид линейных дифференциальных уравнений. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
70. Укажите общий вид дифференциальных уравнений Бернулли. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
71. Дайте определение дифференциальных уравнений высших порядков.
72. Укажите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и методы его решения.

73. Дайте определение числового ряда.
74. Дайте определение частичной суммы числового ряда, суммы ряда.
75. Дайте определение числового расходящегося ряда.
76. Сформулируйте свойства числового ряда.
77. Дайте определение ряда геометрической прогрессии.
78. Запишите формулу вычисления суммы ряда геометрической прогрессии.
79. Дайте определение знакочередующегося числового ряда.
80. Сформулируйте признак Лейбница.
81. Дайте определение функционального ряда.
82. Укажите формулы для нахождения радиуса сходимости степенного ряда.
83. Дайте определение функции комплексного переменного.
84. Сформулируйте условия Коши-Римана.
85. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
86. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
87. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
88. Дайте определение полной группы событий.
89. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
91. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
92. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
93. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
94. Какие виды случайных величин вы знаете?
95. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.
96. Какие важнейшие распределения случайных величин вы знаете?
97. Какие виды вариационных рядов вы знаете?
98. Какие графики используются для изображения дискретных вариационных рядов?
99. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
100. Дайте понятие доверительного интервала.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. -М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007. -416 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник. -М.: Физматлит, 2009.-224 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2012.-479 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2011.-404 с.
6. Бойцова Е.А. Практикум по математике [Текст]: учебное пособие. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -160 с.
7. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие/ Е.А.Бойцова. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -156 с.
8. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В.Журавлева и др. −Курск: ЮЗГУ, 2015. -175, [3] с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -432 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3 [Текст] / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -544 с.
12. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебное пособие / Д. В. Клетеник. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2010. -224 с.
13. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойцова Е.А., Шевцова Т.В. − Курск: ЮЗГУ, 2016. -26 с.
14. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойков А.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -30с.
15. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос.

ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2013. -18 с.
16. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: индивидуальные задания / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. –Курск: ЮЗГУ, 2014.-52 с.
17. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1 для студентов технических специальностей / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -15 с.
18. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания по выполнению лабораторной работы №15 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И. Студеникина, Т.В. Шевцова. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
19. Расчёт вероятностей случайных событий [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлёва, Е.А.Панина. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
20. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: КурскГТУ, 2012. -35 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г.Локтионова
«___» __________ 2014г.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Индивидуальные задания и методические указания
по выполнению модуля

Курск 2014

УДК 519.24.001.5

Составитель Е.В. Скрипкина

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики *Карачевцева Л.В.*

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Скрипкина. Курск, 2014. 52 с. табл. 4. Библиогр.: с.52.

В данном пособии содержатся индивидуальные задания, предназначенные для выполнения модуля или контрольной работы по теме «Исследование функций».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л.3,0. Уч.-изд. л.2,7. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развивать логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Содержание настоящего пособия соответствует разделам «Пределы», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» курса математики. Пособие включает в себя как теоретические, так и практические задания соответствующей тематики.

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студента.

Настоящее пособие предназначено студентам очной формы обучения, но может использоваться также и студентами дистанционной формы обучения. Для студентов заочной формы обучения пособие представляет собой задачник по тематическому модулю «Математический анализ функций одной переменной» с разбором отдельных заданий. Студентам дистанционной формы обучения пособие может служить собранием тренинговых упражнений обучающего характера. Студентам очной формы обучения может быть рекомендовано для выполнения модуля.

Выбор варианта производится соответственно номеру студента в списке группы.

1. Индивидуальные задания

1.1. Теоретические задания

1. Доказать теорему о сумме бесконечно-малых функций.
2. Доказать теорему о произведении бесконечно-малых функций на ограниченную функцию.
3. Доказать теорему о пределе суммы нескольких функций.
4. Доказать теорему о пределе произведения нескольких функций.
5. Доказать теорему о пределе частного.
6. Вывод формулы I замечательного предела.
7. Доказать теорему о II замечательном пределе.
8. Определения непрерывности функции.
9. Свойства непрерывных функций.
10. Производная. Геометрический смысл производной.
11. Доказать теорему о производной степенной функции.
12. Доказать теорему о производной тригонометрических функций y=sinx, y=cosx.
13. Доказать теорему о производной произведения двух функций.
14. Доказать теорему о производной сложной функции.
15. Доказать теорему о производной тригонометрических функций y = tgx, y = ctgx.
16. Доказать теорему о производной обратных тригонометрических функций y = arcsin x, y = arccos x.
17. Производная функции, заданной параметрически. Пример.
18. Производная функции, заданной неявно. Пример.
19. Уравнения касательной и нормали.
20. Определение и нахождение асимптот.
21. Лемма Ферма и ее доказательства.
22. Теорема Лагранжа о среднем.
23. Теорема Коши о среднем.
24. Правило Лопиталя.
25. Формула Тейлора.
26. Метод нахождения интервалов монотонности. Точки экстремума.
27. Интервалы выпуклости (вогнутости). Точки перегиба.

1.2. Практические задания

1.2.1. Задание 1

Вычислить пределы функций. Задания представлены в табл.1.1.

1.2.2. Задание 2

Задана функция $f(x) = \begin{cases} x+n, & x \le -n; \\ x^2+n, & -n < x \le n;. \\ -x+m, & x > n \end{cases}$ Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертёж.

m – число гласных букв в фамилии,
n - число согласных букв в фамилии

1.2.3. Задание 3

Вычислить производные функций, заданных явно. Задания представлены в табл.1.2.

1.2.4. Задание 4

Вычислить производные различных функций. Задания представлены в табл.1.3.

1.2.5. Задание 5

Исследовать функцию методом дифференциального исчисления и построить график. Задания представлены в табл.1.4.

Индивидуальные задачи к заданию 1

Таблица 1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{x\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x-\sin 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x-\sin 3x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{tg} x}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-8x+5}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x+1}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{x^3+2}$	$\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-12x+6}{3x^2-2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^3-6x^2+12}{x^3+4x}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin x}{\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x^3+7x^2+5x}{12x^3+4x}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+4x^4+2}{6x^5+12x^4-2}$	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2-1}{6x^2-6x}$	$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{4x}{x^2-9}-\frac{2}{x-3}\right)$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{x^3+4x+4}$	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x^2}{x-x^2}-\frac{2}{1-x}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

Продолжение табл. 1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2+3x^5}{x^5+6x+8}$	$\lim\limits_{y\to 2}\left(\dfrac{4+y^2}{2y-y^2}-\dfrac{4}{2-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{x^2-3x+6}$	$\lim\limits_{y\to 3}\left(\dfrac{9+y^2}{3y-y^2}-\dfrac{6}{3-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
17	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$	$\lim\limits_{y\to 4}\left(\dfrac{16+y^2}{4y-y^2}-\dfrac{8}{4-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$
18	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^2+4}{2x^4+3x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}-\dfrac{x}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x+\cos x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x+2}\right)^{2x}$
20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{x-1}$
21	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6x}{x^2-4}-\dfrac{3}{x-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\log_4 x-1}{x-4}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$	$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{6x}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}\right)$	$\lim\limits_{x\to81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x-\sin x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$
23	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$	$\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{6x}{x^2-16}-\frac{3}{x-4}\right)$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}2x}-\frac{1}{\sin 2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$
24	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{6-x}-\sqrt{6+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-7x+3}{3x^3-x-4}$	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{4-x^2}{x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}2x-\sin 2x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$
26	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+3x}{9-x^2}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{2x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sin 2x+\sin 8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x-4}\right)^{4x+2}$
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+7}{2x^2-x+10}$	$\lim\limits_{x\to-2}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2x}{x+2}\right]$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^{-5x}$
28	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$	$\lim\limits_{x\to-3}\left[\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{3x}{x+3}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 3x}-\frac{1}{\mathrm{tg}3x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x-3}$
29	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$	$\lim\limits_{x\to2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{2}{x-2}\right]$	$\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 7x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3^x-3}{x-1}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
30	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to3}\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{2}{x-3}\right]$	$\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\log_2 x-2}{x-2}$
31	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+4x}{x^3-4x+2}$	$\lim\limits_{x\to2}\left[\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x}{2-x}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2\cos 3x}{tg^2 3x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{5^x-5}{2(x-1)}$
32	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-4x^3+3}{2x^2+x-7}$	$\lim\limits_{x\to4}\left[\left(\frac{4}{x}-\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{x}{4-x}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+25}-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-2}$
33	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}-\frac{x}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^{x+1}$
34	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{5x}}{2x}$
35	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{2-6x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{7x}{\sin x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x+1}\right)^{-x+2}$
36	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\frac{5x^2-12x+4}{6-15x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{4x+1}\right)^{\frac{3x}{2}}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
37	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(6-3x)^2}{3x^2+3x-18}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2x+1}$
38	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2+2x-24}{6-2x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x-\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\log_7 x-1}{x-7}$
39	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-4x^3+3}{2x^2+x-7}$	$\lim\limits_{y\to 4}\left(\frac{16+y^2}{4y-y^2}-\frac{8}{4-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{\sqrt{2x}-x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$
40	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{7x+5}$	$\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\frac{(2-5x)-(6-15x)}{10x^2-9x+2}$	$\lim\limits_{x\to 16}\frac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin^2 5x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{7^x-7}{x-1}$
41	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-7}{x-3x^2}$	$\lim\limits_{x\to -2}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2x}{2+x}\right]$	$\lim\limits_{x\to 10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{\cos 2x-\cos 4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+4}$
42	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-x}{\sqrt{6x+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 10x}{2x^2-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+2}{7x+3}\right)^{2x+4}$
43	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-x^5}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+2x}{-3+2x}\right)^{\frac{2}{7}x}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
44	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x^3+64}$	$\lim\limits_{x\to81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+2x}{2x-4}\right)^{x+4}$
45	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{2x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{7x}}{4x}$
46	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$	$\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 3x}{\sin 5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
47	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{2x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin x}{\arcsin 2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{5^x-5}{x-1}$
48	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+7}{2x^3+8x^2+5}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$	$\lim\limits_{x\to16}\frac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos^3 3x}{4x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$
49	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}2x}-\frac{1}{\sin 2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+2}$
50	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-4x}$

Индивидуальные задачи к заданию 3

Таблица 1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
1	$y=\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x+2}}}$	$y=e^{x^2-4x}$	$y=\lg^3(x+5)^2$	$y=\cos^2(2x^2+1)$	$y=\arcsin^2\dfrac{x^2}{2x+x^2}$
2	$y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+2)}}$	$y=5^{x+\frac{1}{x^2}}$	$y=\ln^2(x^2+4)$	$y=\mathrm{tg}^2(2x+4)$	$y=\mathrm{arctg}^2\dfrac{x}{3}$
3	$y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\right)^{-3}$	$y=2^{x+\cos^2 x}$	$y=\log_3^3(x^2+x)$	$y=\mathrm{ctg}^3(2x^2+7)$	$y=\mathrm{arcctg}^2\dfrac{2x}{x+4}$
4	$y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$	$y=e^{x^2+\sin x}$	$y=\ln^3\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)$	$y=\sin^2(2x^2+1)$	$y=\arccos\dfrac{x^2-3}{x+2}$
5	$y=\sqrt[4]{\dfrac{x}{2x^2+2}}$	$y=7^{x^2-2\ln x}$	$y=\ln^3\left(\dfrac{2x}{\sin x}\right)$	$y=\cos^3(3x^2-4)$	$y=\mathrm{arctg}^2\dfrac{x+2}{2\sqrt{x}}$
6	$y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$	$y=e^{x^2-\cos 2x}$	$y=\log_7^2(x^2+16x)$	$y=\mathrm{tg}^2\dfrac{x+1}{2\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\dfrac{x^3}{4}$
7	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+7x^2}}$	$y=e^{x^2+\frac{1}{x}}$	$y=\lg^3\left(\dfrac{x}{3x^2+2}\right)$	$y=\mathrm{ctg}^3\dfrac{x}{x+1}$	$y=\arccos\dfrac{x^2}{x-1}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
8	$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$	$y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$	$y=\log_5^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$	$y=\sin^3\frac{2x}{\sqrt{x}+5}$	$y=\mathrm{arctg}\frac{x^2-4}{x+1}$
9	$y=\frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$	$y=e^{x^2+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$	$y=\lg^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$	$y=\cos^2\frac{x}{2x^2+4}$	$y=\mathrm{arcctg}^2\frac{2x}{x+2}$
10	$y=\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}$	$y=8^{x+\sqrt{x^3}}$	$y=\log_2^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2x}\right)$	$y=\mathrm{tg}^3\frac{x}{x^2+4\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^3\sqrt{x+2}$
11	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+x^2+3}}$	$y=e^{\frac{x}{\sqrt{x}+4}}$	$y=\lg^3\left(x^2+2x\right)$	$y=\mathrm{ctg}^2\frac{1}{x^2+4}$	$y=\arccos^2\frac{x}{2+\sqrt{x}}$
12	$y=\frac{1}{\sqrt[5]{2x^2+4x}}$	$y=3^{x^2-7\sqrt{x}}$	$y=\log_2^2\left(\sqrt{x}+4x\right)$	$y=\sin^3(2x+4)$	$y=\mathrm{arctg}^2\frac{\sqrt{x}}{x+4x^2}$
13	$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}+2}$	$y=2^{x^2-\frac{4}{x}}$	$y=\ln^3\left(\frac{x}{x^2+3x\sqrt{x}}\right)$	$y=\cos^2\left(2x^2+4\right)$	$y=\mathrm{arctg}^3\frac{x}{4+x}$
14	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}+4}}$	$y=2^{x^2-4\ln x}$	$y=\log_3^2\left(x+\frac{1}{x}\right)$	$y=\mathrm{tg}^3\frac{x}{x^2+2\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\frac{x}{x^2+4}$
15	$y=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+2}}$	$y=e^{x^4-2x^3}$	$y=\lg^3\left(2x+\sqrt{x}\right)$	$y=\mathrm{ctg}^2\frac{x+4}{2\sqrt{x}-7}$	$y=\arccos^3\frac{2x}{\sqrt{x}+1}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
16	$y=\sqrt[3]{2x+\frac{1}{x}+3}$	$y=2^{2x-4\cos 2x}$	$y=\log_5^2\left(x+\frac{4}{x^2}\right)$	$y=\cos^3\left(x+\sqrt{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2\sqrt{x}+7x}$
17	$y=\sqrt[5]{2x-\frac{7}{\sqrt{x}}}$	$y=4^{x^2-2x+7}$	$y=\lg^2\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(2x+4\sqrt{x}\right)$	$y=\arcsin\frac{x+4\sqrt{x}}{2x+3}$
18	$y=\frac{x}{2\sqrt{2x+4\sqrt{x}}}$	$y=e^{3x^2-\frac{7}{x}}$	$y=\lg^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$	$y=\arccos^2\frac{2x}{x+4}$
19	$y=\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}$	$y=4^{x^3+\sqrt{x}}$	$y=\ln^2\left(2x^4+\sqrt{x}\right)$	$y=\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$
20	$y=\sqrt[4]{2x+\frac{1}{x}}$	$y=6^{3x^2-\sqrt{x}}$	$y=\lg^3\left(x+\frac{\sqrt{x}}{4}\right)$	$y=\cos^3\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\arcsin^2\frac{2x}{x+3}$
21	$y=\sqrt[3]{\frac{3}{x}+\frac{x}{3}}$	$y=e^{2x^2-\frac{\sqrt{x}}{4+x}}$	$y=\lg^2\left(x+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$	$y=\operatorname{tg}^3\left(\sqrt{x}+4x\right)$	$y=\arccos^2\frac{x}{1+x}$
22	$y=\sqrt[4]{2x+4\sqrt{x}}$	$y=8^{2x+3\sqrt[3]{x}}$	$y=\log_7^3\left(x^2+\frac{7}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt[3]{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{x}{x^2+4}$
23	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+4\sqrt{x}+2}}$	$y=9^{\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}}$	$y=\ln^2\left(\sqrt{x+4}\right)$	$y=\sin^2\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
24	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{x}{2}}}$	$y=e^{4x+2\sqrt{x}}$	$y=\lg^3\left(x+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\cos^3\left(\frac{2x+1}{x+4}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}^3\frac{2x}{x+4}$
25	$y=\frac{x}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$	$y=2^{x^2+4\sqrt{x}}$	$y=\ln^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\frac{x+4}{\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\frac{x}{2+x}$
26	$y=\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+4}}$	$y=3^{\sqrt{x}+4x}$	$y=\log_4^2\left(x+\frac{3}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)$	$y=\arccos^2\frac{2}{x+4}$
27	$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x\frac{1}{\sqrt{x}}}}$	$y=e^{\sin^2 x+4x}$	$y=\lg^3\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x+1}\right)$	$y=\sin^3\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}\frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+4x^2}$
28	$y=\sqrt[3]{x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$y=5^{\sin 2x}$	$y=\log_7\left(1+\frac{7x}{\sqrt{x}+1}\right)$	$y=\cos^2\left(x+\frac{4}{x+2}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}\frac{x+5}{\sqrt{x}+3x^2}$
29	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}+3}}$	$y=3^{2+x^2\cdot\sin x}$	$y=\ln^2\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$	$y=\operatorname{tg}^3\frac{x}{x+4}$	$y=\arcsin^2\frac{2}{\sqrt{x+5}}$
30	$y=\sqrt[4]{x-\frac{2}{\sqrt{x}}}$	$y=e^{2x^2-\sqrt{x}}$	$y=\lg^2(x+2x^2)$	$y=\operatorname{ctg}^2\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$	$y=\arccos^3\left(x\cdot\sin^2 x\right)$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
31	$y=\sqrt[5]{x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}}$	$y=3^{e+4\sin^2 x}$	$y=\log_3^2\left(x+\frac{5}{x^2+4}\right)$	$y=\sin^3\frac{x+1}{2x}$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2x+1}$
32	$y=\sqrt{\frac{1}{x}+2\sqrt{x}+x}$	$y=e^{3x^2+4x}$	$y=\lg^2\left(\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right)$	$y=\cos^2\left(x+\sqrt{x}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{4+x}$
33	$y=\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	$y=5^{3\sqrt{x}+\sin x}$	$y=\log_2^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(\frac{x+4}{2x}\right)$	$y=\arcsin\frac{\sqrt{x+3}}{x^2}$
34	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{x}+\frac{3}{x}}}$	$y=e^{\cos^2 2x+4x}$	$y=\log_5\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}\frac{x^2+4x+2}{x+2}$	$y=\arccos^2\left(\frac{2}{2+x}\right)$
35	$y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}-1}$	$y=e^{\sqrt{x}+4x}$	$y=\lg\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x}\right)$	$y=\sin^2\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$
36	$y=\sqrt{x+4}\cdot 2x$	$y=5^{\sqrt{x}+\frac{4}{x}}$	$y=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{4}{\sqrt{x}+2}\right)$	$y=\cos^3\left(\sqrt{x}(2x+1)\right)$	$y=\operatorname{arcctg}^2\left(2\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)$
37	$y=x\sqrt[3]{x+4}$	$y=3^{\sin^2 2x+4}$	$y=\lg\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x+2}\right)$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
38	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$	$y=e^{\sin^2 3x+\frac{4}{x}}$	$y=\log_3^2\left(\frac{x}{\sqrt{x}+4}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\frac{x+2}{4}$	$y=\arccos^2\frac{x+4}{x^2+1}$
39	$y=\frac{\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$	$y=3^{\sqrt{x}+\frac{17x}{x+4}}$	$y=\ln^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right)$	$y=\sin^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	$y=\operatorname{arctg}\frac{x^2+4+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$
40	$y=\frac{1}{\sqrt{2x+\sqrt{x+2}}}$	$y=e^{\ln 3+\frac{x}{\sqrt{x}}}$	$y=\lg_2\left(\frac{x+4}{x}\right)$	$y=\cos^3\frac{x^2+\sqrt{x}}{2x+1}$	$y=\operatorname{arcctg}^3\frac{x+4}{\sqrt{x}+1}$
41	$y=\sqrt[3]{\frac{x+\sqrt{x}}{2x}}$	$y=7^{\sin^2 x+\sqrt{x}}$	$y=\ln^2\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(x\cdot(\sqrt{x}+1)\right)$	$y=\arcsin^2\frac{x}{2+x}$
42	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}}$	$y=e^{3x^2+\frac{1}{x}}$	$y=\log_2^2\left(\frac{x+4}{1+\frac{1}{x}}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^3\left(\frac{7}{x}+\frac{\sqrt{x}}{7}\right)$	$y=\arccos^2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
43	$y=\frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt[3]{x}}$	$y=3^{2x^2+\sqrt{x}}$	$y=\ln^3\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x+4}\right)$	$y=\sin^3\left(2\sqrt{x}+4x\right)$	$y=\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+4}{\sqrt{x}+x^2+7}\right)$
44	$y=\sqrt{2x+\sqrt{x+1}}$	$y=4^{\sin 3x+\frac{\sqrt{x}}{4}}$	$y=\log_3^2\left(\frac{7}{x}+\frac{(\sqrt{x}+2)}{2}\right)$	$y=\cos^2\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x+4}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{2x+7}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
45	$y=\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}$	$y=4^{\sin 3x+\frac{\sqrt{x}}{4}}$	$y=\log_3^2\left(\frac{7}{x}+\frac{\sqrt{x}+2}{2}\right)$	$y=\cos^2\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x+4}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{2x+7}$
46	$y=\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}$	$y=e^{\ln 7+\frac{2\sqrt{x}}{x+2}}$	$y=\log_4^2\left(\frac{2\sqrt{x}+4x+3}{x+1}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}$	$y=\arcsin^2\frac{\sqrt{x}}{x+3}$
47	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x+7)^2}}$	$y=e^{2x+\frac{1}{\sqrt{x}}+3}$	$y=\log_3^2\left(\frac{\sqrt{x}+4}{2}+\sqrt[3]{x}\right)$	$y=\sin^2((x+4)\cdot 2x)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{3x+4}{\sqrt{x}+7x+1}$
48	$y\frac{\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt{x}}$	$y=3^{3x^2+\sin^2 3x}$	$y=\ln^3\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}+4}{x}\right)$	$y=\cos^2\left(\frac{x+4}{2x}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right)$
49	$y=\frac{\sqrt{x+1}}{2x}$	$y=e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+3x}$	$y=\log_2^3\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{2x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(x\cdot\sqrt{x+7}\right)$	$y=\arcsin\frac{x+\sin^2 3x}{\sqrt{x}}$
50	$y=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+4}{x}}$	$y=6^{\ln 3x+\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$y=\lg^3\left(3x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{\sqrt{x+7}}$	$y=\arccos\frac{\sqrt{x}}{x+4}$

Индивидуальные задачи к заданию 4

Таблица 1.3

№ пп	а)	б)	в)
1	$y=(\ln x)^x$	$\cos(x\cdot y)+x-y=0$	$\begin{cases} x=\sin^2 t+t \\ y=\cos t+2 \end{cases}$
2	$y=(x^2+7)^{\sin x}$	$e^{x-y}-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\mathrm{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}$
3	$y=(\sin 2x)^{\cos\frac{x}{2}}$	$e^{x+2y}-x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\arcsin(\sin t) \\ y=\mathrm{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}$
4	$y=x^{2^x}\cdot 2^x$	$\cos(x-y)+x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \\ y=t\sqrt{t^2+1} \end{cases}$
5	$y=(\cos\sqrt{x})^{\mathrm{tg}x}$	$\ln(2x+y)+x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\arcsin(t-1) \end{cases}$
6	$y=\left(\sqrt{x+1}\right)^{2\sin^2 x}$	$\ln(2x-y)+\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\ln\mathrm{ctg}\, t \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$
7	$y=\left(\ln\dfrac{x}{2}\right)^{2e^x}$	$\cos(x+y)+\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\, e^{t/2} \\ y=e^t+1 \end{cases}$
8	$y=(\sin x)^{\ln \mathrm{tg}x}$	$\arcsin(x^2-y)-\sqrt{y}=0$	$\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
9	$y=(\mathrm{ctg}3x)^{3^x}$	$\arccos(x^2+y)+\sqrt{xy}=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
10	$y=\left(x^3+1\right)^{\sin x}$	$\cos^2(x+y)+x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y=(\arccos t)^2 \end{cases}$
11	$y=(2x)^{\cos x^2}$	$\cos^2(x-y)-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
12	$y=(\mathrm{tg}x)^x$	$e^{x+y}-\dfrac{y}{x^2}=0$	$\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{t} \\ y=\sqrt{t^2-1}-\arcsin\dfrac{1}{t} \end{cases}$
13	$y=x^{5x}\cdot 5^x$	$e^{x-y}+\dfrac{x^2}{y}=0$	$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t} \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$
14	$y=(\ln x)^{\cos x^2}$	$2^{x-y}+\mathrm{tg}\,y=0$	$\begin{cases} x=\ln\left(1-t^2\right) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
15	$y=(\sin x^3)^{x^2}$	$\mathrm{ctg}(y-x)-x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=(\arcsin t)^2 \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$
16	$y=\left(5-x^2\right)^{2\cos x}$	$\ln\left(x+y^2\right)+\sqrt{y}=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{ctg}\sqrt{1+t} \\ y=2\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
17	$y=(\ln 5x)^{e^x}$	$x^2\cdot y-e^{xy}=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}t \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases}$
18	$y=x^{e^x}(2x)^5$	$\mathrm{tg}(x+y)+\sqrt{xy}=0$	$\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
19	$y=\left(x^4-2\right)^{ctgx}$	$3^{x+y}+ctg(x\cdot y)=0$	$\begin{cases}x=\cos^2 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$
20	$y=x^{3^x}\cdot 5^x$	$e^{2x+y}+tg(x+y)=0$	$\begin{cases}x=t^3+8t\\ y=t^5+2t\end{cases}$
21	$y=(\mathrm{arctg}\ x)^{e^x}$	$\ln(x+y)+tg\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases}x=7(t-\sin t)\\ y=7(1-\cos t)\end{cases}$
22	$y=(5x+4)^{\mathrm{arctg}\ x}$	$e^{2x+2y^2}+y\sin x=0$	$\begin{cases}x=\ln tg\ t\\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}\end{cases}$
23	$y=(\sin 3x)^{\ln\sin 3x}$	$tg\dfrac{x}{y}+x^2+y^2=0$	$\begin{cases}x=3t-t^3\\ y=3t^2\end{cases}$
24	$y=\left(\arcsin x^2\right)^x$	$2^{x+y}-\dfrac{y^2}{x^2}=0$	$\begin{cases}x=t+\ln\cos t\\ y=t-\ln\sin t\end{cases}$
25	$y=\left(3-x^4\right)^{\cos x}$	$tg(x\cdot y)-x^2-y^2=0$	$\begin{cases}x=2t-t^3\\ y=2t^2\end{cases}$
26	$y=x^{\arcsin x}$	$2^{x-y}-\dfrac{x}{y^2}=0$	$\begin{cases}x=\ln t\\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$
27	$y=x^{\ln x}\cdot 2^x$	$\ln\left(x^2-y\right)+\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases}x=t-\ln t\\ y=3t^2-2t^3\end{cases}$
28	$y=(3\sin x)^{3^x}$	$ctg(y+2x)-xy=0$	$\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=3t-t^3\end{cases}$
29	$y=(2x)^{2^x}$	$tg\left(y+x^2\right)-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases}x=2t-\sin 2t\\ y=8\sin^3 t\end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
30	$y=\left(\sin x^3\right)^{e^x}$	$e^{y-x^3}+x^3-y=0$	$\begin{cases}x=\operatorname{arctg}3t\\ y=\ln\left(1+9t^2\right)\end{cases}$
31	$y=(\arccos x)^{\cos x}$	$3^{x\cdot y^2}-\frac{1}{x}+y=0$	$\begin{cases}x=2(\sin t-t\cos t)\\ y=2(\cos t+t\sin t)\end{cases}$
32	$y=\left(x^3\right)^{\operatorname{ctg}x^3}$	$e^{2x-y^2}+y^2-x=0$	$\begin{cases}x=a\ \operatorname{tg}^2 t\\ y=b\sec^2 t\end{cases}$
33	$y=x^{2\cos x}$	$2^{x^2+y}-\frac{y}{x}=0$	$\begin{cases}x=2(\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$
34	$y=(x\cos x)^{2\sin x}$	$2^{x^2-y}+\frac{y^2}{x}-y=0$	$\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{cases}$
35	$y=(\operatorname{tg}\ x)^{\cos x}$	$5^{x\cdot y}+x^2+xy=0$	$\begin{cases}x=t^2+\ln t\\ y=3t^3+3t\end{cases}$
36	$y=\left(5x^3\right)^{\cos x^2}$	$\operatorname{tg}\left(x+y^2\right)-x\cdot y=0$	$\begin{cases}x=\arcsin(1-t)\\ y=\ln\left(1-t^2\right)\end{cases}$
37	$y=\left(\ln^2 x\right)^{\ln x^2}$	$e^{x^2+y^2}-2x+y=0$	$\begin{cases}x=\sec^2 t\\ y=\ln\operatorname{tg}\ t\end{cases}$
38	$y=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{2^x}$	$e^{x^2-y}+x-y^2=0$	$\begin{cases}x=\sqrt{1+t}\\ y=\operatorname{arctg}\sqrt[4]{t}\end{cases}$
39	$y=(\ln\operatorname{tg}x)^{e^x}$	$e^{2y+\sin x}+y=0$	$\begin{cases}x=(\arcsin t)^3\\ y=\arccos\sqrt{1-t^2}\end{cases}$
40	$y=x^{5^x}\ln x$	$\sin(x\cdot y)+\frac{y^2}{x^2}=0$	$\begin{cases}x=2-\cos 2t\\ y=2t+\sin 2t\end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
41	$y=\left(3x^2+2\right)^{\cos x^2}$	$\sin\left(x^2+y^2\right)-\dfrac{x}{y^2}=0$	$\begin{cases} x=\arcsin(\cos t) \\ y=\arccos(\sin t) \end{cases}$
42	$y=(\cos\ln x)^{5x^3}$	$\cos\left(x^2y\right)+x-y^2=0$	$\begin{cases} x=2^{\cos^2 t} \\ y=2^{\sin^2 t} \end{cases}$
43	$y=x^{\cos^3 x}$	$\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}+x\cdot y+y^2=0$	$\begin{cases} x=\ln(\mathrm{arctg}\ t) \\ y=\ln(\mathrm{arcctg}\ t) \end{cases}$
44	$y=x^{\ln\sin^2 x}$	$\sin\left(x^2+y^2\right)-x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}(\ln t) \\ y=\mathrm{arcctg}(\ln t) \end{cases}$
45	$y=x^{2^x}\cdot 5^x$	$\mathrm{tg}\left(x^2+y^2\right)-x\cdot y+y=0$	$\begin{cases} x=t-\mathrm{arctg}\ t \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$
46	$y=(\arccos x)^{5x}$	$\cos\left(x^2+x\cdot y\right)-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\arccos\sqrt{1-t^2} \\ y=\mathrm{arctg}\left(t^2-1\right) \end{cases}$
47	$y=\left(\sin x^2\right)^{\ln x}$	$\cos\left(x+x^2y\right)-x^2+y=0$	$\begin{cases} x=\arcsin e^{2t} \\ y=\arccos e^{2t} \end{cases}$
48	$y=x^{\sqrt{\arccos x}}$	$e^{x+y^3}+2x+y=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\, e^t \\ y=\ln\left(1+e^{2t}\right) \end{cases}$
49	$y=x^{3\sin x}$	$e^{x^2+y}-2x\cdot y-y=0$	$\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=t+\cos t \end{cases}$
50	$y=5^{x^5}\cdot x^5$	$5^{x\cdot y}-y^2+x^2=0$	$\begin{cases} x=e^{3t}\sin 2t \\ y=e^{3t}\cos 2t \end{cases}$

Индивидуальные задачи к заданию 5

Таблица 1.4

№п	f(x)	№п	f(x)
1	$y = \dfrac{x^3}{x-1}$	2	$y = \dfrac{x^3}{x^4-1}$
3	$y = \dfrac{x^2-2}{x^2+2}$	4	$y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
5	$y = \dfrac{x^2}{x^3+1}$	6	$y = \sin x + \cos x$
7	$y = e^{2x-x^2}$	8	$y = \dfrac{x^3+4}{x^3}$
9	$y = \dfrac{4-x^3}{x^2}$	10	$y = \dfrac{(x-1)^2}{x^2}$
11	$y = x^3 \cdot e^{-x}$	12	$y = (x-2)\cdot e^{3-x}$
13	$y = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$	14	$y = (3-x)\cdot e^{x-2}$
15	$y = \dfrac{1}{x^4-1}$	16	$y = \dfrac{e^x}{x}$
17	$y = \dfrac{4x}{(x+1)^2}$	18	$y = -\dfrac{8x}{x^2+4}$
19	$y = \dfrac{4}{x^2+2x-3}$	20	$y = \dfrac{2x+1}{x^2}$
21	$y = \dfrac{x}{x^2+4}$	22	$y = \dfrac{3x-2}{x^3}$
23	$y = xe^x$	24	$y = (x+2)^2(x-1)$
25	$y = \dfrac{3}{x^2+9}$	26	$y = 2 + x^2 - \dfrac{x^4}{2}$
27	$y = \dfrac{x^2}{x+1}$	28	$y = (x+1)^3(2x-3)$

Продолжение табл.1.4

№№	f(x)	№№	f(x)
29	$y=-\frac{(1+2x)}{(1+x)^2}$	30	$y=\frac{x}{x^2+4}$
31	$y=\frac{2x}{1+x^2}$	32	$y=x+\frac{4}{x+2}$
33	$y=x-\frac{1}{x^3}$	34	$y=\frac{x^2+8}{4-x^2}$
35	$y=\frac{1}{x(x-8)}$	36	$y=\frac{1}{x(x-8)}$
37	$y=(x-1)(x+2)^2$	38	$y=\frac{3}{9+x^2}$
39	$y=(2x-3)(x+1)^3$	40	$y=\frac{\lvert x-1\rvert}{x^2}$
41	$y=\frac{x^2}{x+1}$	42	$y=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}$
43	$y=\frac{2x}{x^2+1}$	44	$y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$
45	$y=\frac{x^4-1}{x^3}$	46	$y=\frac{x^2+8}{4-x^2}$
47	$y=x^3-9x^2+15x-3$	48	$y=2x^3+3x^2-36x+15$
49	$y=\frac{4+2x^2-x^4}{2}$	50	$y=x^3-9x^2+15x-3$

2. Образцы выполнения заданий

2.1. Основные теоретические положения

При вычислении пределов необходимо помнить их свойства:

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A + B,$

т.е. предел суммы равен сумме пределов.

Замечание: Если $A = +\infty, \quad B = -\infty$, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[\infty - \infty]$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\cdot B,$

т.е. предел произведения равен произведению пределов.

Замечание: Если $A = \infty, \quad B = 0$, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[\infty \cdot 0]$.

Если $f(x) = C$, где $C = \text{const}$, то

$\lim\limits_{x\to a}(C\cdot g(x)) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x),$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0),$

т.е. предел частного есть частное пределов.

Замечание: Если $A = \infty, \quad B = \infty$ или A=0, B=0, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[\frac{\infty}{\infty}]$ или $[\frac{0}{0}]$.

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = A^B.$

Замечание: Если $A = 1, B = \infty$, или $A = 0, B = 0$, или $A = \infty$ $B = 0$, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[1^\infty]$, или $[0^0]$, или $[\infty^0]$.

Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, неопределенность $[\frac{0}{0}]$.

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$,
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=1$,
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{tg}x}=1$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$,
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}x}{x}=1$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\mathrm{arctg}x}=1$,
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Второй замечательный предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$, неопределенность $[1^\infty]$, $e\approx 2{,}7$.

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$,
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$,
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m$.

Замечание: Если $P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+...+a_1\cdot x+a_0$, $P_m(x)=b_m x^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+...+b_1\cdot x+b_0$, причем $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$, тогда при вычислении предела вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ можно выделить 3 случая.

1 случай: степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя (n < m), то такой предел равен 0;

2 случай: степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя (n > m), то такой предел равен ∞;

3 случай: степени многочленов числителя и знаменателя равны (n=m), то такой предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, т.е. равен $\dfrac{a_n}{b_m}$.

Задание 1. Вычислить пределы функций

а) Вычисление пределов, исключающих неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

При раскрытии этой неопределенности следует помнить, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0,\ n>0$. Разделив числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, можно свести вычисление предела к упрощенному виду.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2x+4}{3x+8}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Способ 1. Разделив числитель и знаменатель на x^2, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{2x}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}}{\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{8}{x^2}}=\left[\frac{1+2\cdot 0+4\cdot 0}{3\cdot 0+8\cdot 0}\right]=\infty$$

Способ 2. Используя замечание (случай 2) вычисление предела можно заменить вычислением эквивалентного ему предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{3x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}=\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+2x+1}{5x^3+4x^2+1}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Способ 1. Разделив числитель и знаменатель на x^3, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}+\dfrac{4x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\frac{3+2\cdot 0+0}{5+4\cdot 0+0}\right]=\frac{3}{5}.$$

Способ 2. Используя замечание (случай 3) вычисление предела можно заменить вычислением эквивалентного ему предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{5x^3+4x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{5x^3}=\frac{3}{5}.$$

б) Вычисление пределов, исключающих неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ можно исключить, используя формулы сокращенного умножения:

1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

4) $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 - действительные корни уравнения, уравнения $ax^2+bx+c=0$, причем

$$D=b^2-4ac,\qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Применение формул позволяет разложить многочлены на множители, тем самым приводя к сокращению одинаковых множителей.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=[\infty-\infty]$.

Преобразуем выражение в скобках

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1\cdot(1+x+x^2)-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2+x-2=0,$

$$D=1-4\cdot1\cdot(-2)=9,\quad x_1=\frac{-1+3}{2}=1;\qquad x_2=\frac{-1-3}{2}=-2,$$

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2),$$
$$1-x^3=(1-x)(1+x+x^2).$$

Выражение в скобках примет вид

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)}=-\frac{x+2}{1+x+x^2}.$$

тогда

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)=-\frac{1+2}{1+1+1}=-\frac{3}{3}=-1.$$

в) Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в пределах, связанных с вычислениями, основанными на домножении числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Сопряженным для выражения $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ является выражение вида $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ и наоборот.

Кроме того, если неопределенность создается квадратным трехчленом ax^2+bx+c его нужно разложить, используя формулу (4) (см.пункт б). Так же возможно использование формул (1) – (3) пункта б).

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Сопряженным выражением к числителю будет выражение вида $\left(\sqrt{5x+1}+4\right)$. Знаменатель разложим на множители. Для этого решим уравнение

$$x^2+2x-15=0 \qquad D=4+4\cdot15=64$$
$$x_1=\frac{-2+8}{2}=3; \qquad x_2=\frac{-2-8}{2}=-5$$
$$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$$

Имеем:

$$\lim_{x\to3}\frac{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)}=\lim_{x\to3}\frac{(\sqrt{5x+1})^2-4^2}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)}=$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5x+1-16}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)} = \lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5(x-3)}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)} = \lim_{x\to 3}\frac{5}{(\sqrt{5x+1}+4)(x+5)}.$$

Выражение не содержит неопределенность и значение предела равно

$$\lim_{x\to 3}\frac{5}{(\sqrt{5x+1}+4)(x+5)} = \frac{5}{(\sqrt{5\cdot 3+1}+4)(3+5)} = \frac{5}{(4+4)8} = \frac{5}{8\cdot 8} = \frac{5}{64}.$$

г) Вычисление пределов, приводящихся к первому замечательному пределу или его следствиям.

При вычислении пределов необходимо помнить:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\qquad \cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^2-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Введем новую переменную $y = x+2$, то при $x\to -2$, $y\to 0$.

Имеем

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{(y-2)^2-4} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y^2-4y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y(y-4)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Используем формулы тригонометрии:

$$\cos 3x-\cos 5x=-2\sin\frac{3x+5x}{2}\cdot\sin\frac{3x-5x}{2}=-2\sin 4x\cdot\sin(-x)=$$

$$=2\sin 4x\cdot\sin x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin x}{x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right]=2\cdot 0\cdot 1=0.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x-\sin 5x}{8x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right].$

Преобразуем числитель, учитывая, что $\mathrm{tg}5x=\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}-\sin 5x}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\left(\dfrac{1}{\cos 5x}-1\right)}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x(1-\cos 5x)}{8x^2\cos 5x}.$$

Выделяя первый замечательный предел и его следствие $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{8x^2\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cdot\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot(5x)^2}{8x^2\cdot 1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 5x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 25x^2}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{125x^3}{16x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{125x}{16}=0$$

д) Вычисление пределов, исключающих неопределенность вида $[1^\infty]$.

Пределы сводятся ко второму замечательному пределу или его следствиям

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-4}\right)^{x-2}=[1^\infty].$

Выражение в скобках преобразуем, выделив целую часть:

$$\frac{2x+5}{2x-4}=1+\frac{2x+5}{2x-4}-1=1+\frac{2x+5-2x+4}{2x-4}=1+\frac{9}{2x-4}=1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}.$$

Аргумент в выражении второго замечательного предела равен $\frac{2x-4}{9}$. Такой же аргумент нужно создать и в степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}\right)^{x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}\right)^{\frac{2x-4}{9}\cdot\frac{9}{2x-4}\cdot(x-2)},$$

Применим теорему о пределе степенно-показательной функции: если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=A^B$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}\right)^{\frac{2x-4}{9}}=e.$$

Причем $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{2x-4}\cdot(x-2)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-18}{2x-4}=\frac{9}{2}.$

Окончательно $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{x-2}=e^{\frac{9}{2}}=\sqrt{e^9}=e^4\sqrt{e}.$

2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Для вычисления предела используем свойство 4. Сделаем замену:

$x-1=y \quad x=y+1$, то $\quad x\to1;\ y\to0$, $\quad$ т.е.

$$\lim_{y\to0}\frac{2^{y+1}-2}{y}=\lim_{y\to0}\frac{2^y\cdot2-2}{y}=\lim_{y\to0}\frac{2(2^y-1)}{y}=2\cdot\lim_{y\to0}\frac{2^y-1}{y}=2\cdot\ln2.$$

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{7x}-e^{8x}}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем свойство 3. В числителе e^{7x} вынесем за скобки

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}(e^{-x}-1)}{6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}(e^{-x}-1)}{-6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=$$

$$=-\frac{e^{0}}{6}\cdot 1=-\frac{1}{6}.$$

Задание 2.

Основные теоретические положения

Для непрерывности функции f(x) в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение трех условий:

1. функция f(x) должна быть определена в точке x_0, т.е. можно вычислить значение $f(x_0)$;

2. должны существовать и быть конечными односторонние пределы

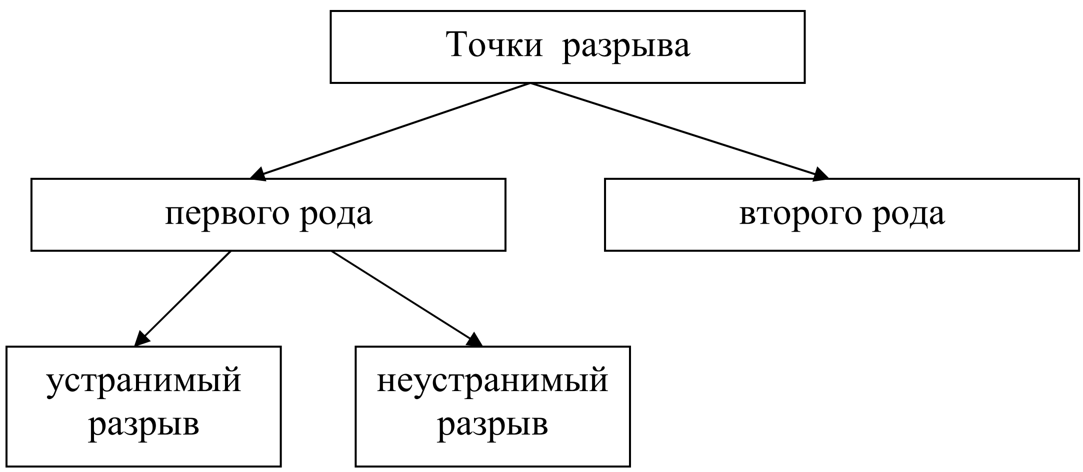
$$A=\lim_{x\to x_0-0} f(x),\quad B=\lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3.A = B= f (x_0).

Если все эти три условия выполнены, то x_0 – точка непрерывности функции f(x).

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то x_0 – точка разрыва функции f(x).

Точки разрыва функции можно разделить на точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода. Причем точки разрыва первого рода так же делятся на точки устранимого и неустранимого разрывов. Т. е. можно рассматривать следующую схему



Дадим определения всех этих точек разрыва.

Устранимый разрыв: односторонние пределы A и B существуют и конечны, $A = B$, но f(x) неопределена при $x = x_0$ или $A = B \neq f(x_0)$.

Неустранимый разрыв: односторонние пределы A и B существуют и конечны, но $A \neq B$. При этом f(x) может быть как определена, так и не определена при $x = x_0$.

Таким образом, у точек разрыва первого рода односторонние пределы должны существовать и быть конечными.

Все точки разрыва, не являющиеся точками разрыва первого рода, есть точки разрыва второго рода. Т.е. если хотя бы один из односторонних пределов A или B не существует или равен ∞, то x_0 есть точка разрыва второго рода.

Пример выполнения задания

Задана функция $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq -1; \\ x^2+1, & -1 < x \leq 1; \\ -x+2, & x > 1. \end{cases}$ Найти точки разрыва функции, если они существуют, определить их тип. Схематично сделать чертеж.

Функции $y_1(x) = x+1$, $y_2(x) = x^2+1$, $y_3(x) = -x+2$ непрерывны при $x \in (-\infty;+\infty)$. Следовательно, f(x) может иметь точки разрыва при $x = -1$, $x = 1$. Исследуем:

1) при $x = -1$ имеем:

$$f(-1) = -1+1 = 0$$

$$A = \lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x+1) = -1+1 = 0$$

$$B = \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (x^2+1) = ((-1)^2+1) = 2$$

Так как односторонние пределы A и B существуют и конечны, то точка $x = -1$ разрыв I рода. Т.к. $A \neq B$, то это неустранимый разрыв.

2) при $x = 1$ имеем:

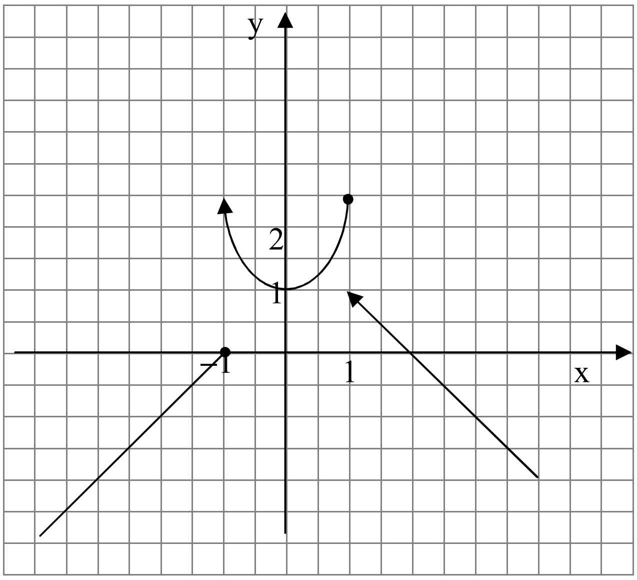
$f(x)$ определена при $x = 1$, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(1)=2\cdot 1=2$

$A=\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(x^2+1)=2$

$B=\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}(-x+2)=-1+2=1$

Так как односторонние пределы A и B существуют и конечны, то точка $x=-1$ разрыв I рода. Т.к. $A\neq B$, то это неустранимый разрыв.



Задание 3. Вычислить производные функций, заданных явно

Правила дифференцирования

1) $(u_1\pm u_2\pm u_3\pm\ldots\pm u_n)'=u_1'\pm u_2'\pm u_3'\pm\ldots\pm u_n'$,

2) $(uv)'=u'v+uv'$,

3) $(c\cdot u(x))'=c\cdot u'(x)$,

4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$,

5) $\left(\frac{c}{v}\right)'=-\frac{cv'}{v^2}$,

6) $(c)'=0$,

7) $(u(v(x)))'=u'\cdot v'$, где $u(v(x))$ – сложная функция.

Таблица производных

Тип функции	Вид производной	Частные случаи
Степенная $y = x^n$ $y = (u(x))^n$	$(x^n)' = u \cdot x^{n-1}$ $((u(x))^n)' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$	$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$ Пример: $(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ Пример: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Показательная $y = a^x$ $y = a^{u(x)}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$	$(e^x)' = e^x$
Логарифмическая $y = \log_a x$ $y = \log_a u(x)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Тригонометрическая	$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$ $(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$ $(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x)$
Обратные тригонометрические функции	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$;	$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(u(x))^2}} \cdot u'(x)$ $(\arccos u(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-(u(x))^2}} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+(u(x))^2} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{arcctg} u(x))' = \frac{-1}{1+(u(x))^2} \cdot u'(x)$

Примеры:

1) $y = 2x \cdot \sqrt[3]{x^5 + 3x}$.

Для нахождения производной используем правила:

$$y' = (2x \cdot (x^5 + 3x)^{1/3})' = (2x)' \cdot (x^5 + 3x)^{1/3} + 2x((x^5 + 3x)^{1/3})' =$$

$$= 2(x^5 + 3x)^{1/3} + 2x \cdot \frac{1}{3}(x^5 + 3x)^{1/3-1} \cdot (x^5 + 3x)' = 2(x^5 + 3x)^{1/3} +$$

$$+ \frac{2}{3}x(x^5 + 3x)^{-2/3} \cdot (5x^4 + 3) = 2(x^5 + 3x)^{1/3} \cdot \left(1 + \frac{5x^4 + 3}{3(x^5 + 3x)}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{x^5 + 3x} + \frac{2x}{3\sqrt{(x^5 + 3x)^2}} = \frac{3 \cdot 2(x^5 + 3x) + 2x}{3\sqrt[3]{(x^5 + 3x)^2}} = \frac{6x^5 + 20x}{3\sqrt[3]{(x^5 + 3x)^2}}.$$

2) $y = e^{x^3 - 4x}$.

Используем правила нахождения производной

$$y' = (e^{x^3 - 4x})' = e^{x^3 - 4x} \cdot (x^3 - 4x)' = e^{x^3 - 4x} \cdot (3x - 4).$$

3) $y = 7^{x^2 + \frac{1}{x}}$. Используем правила нахождения производной

$$y' = (7^{x^2 + \frac{1}{x}})' = 7^{x^2 + \frac{1}{x}} \ln 7 \left(x^2 + \left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 7^{x^2 + \frac{1}{x}} \ln 7 (2x + (-1)x^{-1-1}) =$$

$$= 7^{x^2 + \frac{1}{x}} \ln 7 \left(2x - \frac{1}{x^2}\right).$$

4) $y = \ln^3(x^2 + 2x)$.

Преобразуем к виду $y = (\ln(x^2 + 2x))^3$.

Используем правила нахождения производной

$$y' = (\ln^3(x^2 + 2x))' = 3\ln^2(x^2 + 2x) \cdot (\ln(x^2 + 2x))' =$$

$$= 3\ln^2(x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (x^2 + 2x)' =$$

$$= 3\ln^2(x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2) = \frac{6(x + 1)\ln^2(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x}.$$

5) $y=\cos^3\left(2x+\dfrac{x}{x^2+1}\right).$

$$y=\left(\cos\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^3$$

Используем правила нахождения производной

$$y'=\left(\cos^3\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^{/}=3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\left(\cos\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^{/}=$$

$$=2\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\left(-\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\right)\cdot\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)^{/}=$$

$$=-3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\cdot\left(2+\frac{x'(x^2+2)-x(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}\right)=$$

$$=-3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\cdot\left(2+\frac{x^2+2-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}\right)=$$

$$=-3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\cdot\left(2+\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}\right).$$

6) $y=\mathrm{ctg}^2\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)$.

Используем правила нахождения производной

$$y'=\mathrm{ctg}^2\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{/}=2\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\left(\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\right)^{/}=$$

$$=2\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\dfrac{x+1}{x^2+1}}\right)\cdot\frac{(x+1)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'(x+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=-2\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\dfrac{x+1}{x^2+1}}\cdot\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$= -2\frac{\cos\frac{x+1}{x^2+1}}{\sin^3\frac{x+1}{x^2+1}} \cdot \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Задание 4. Вычислить производные различных функций

а) Функция $y=[f(x)]^{g(x)}$ называется степенно-показательной. Для вычисления производных таких функций можно предварительно прологарифмировать обе части. Производные находить учитывая, что функция y-сложная функция переменной x.

Примеры.

1) $y = (\cos x^2)^x$

Прологарифмируем обе части, по основанию e имеем

$\ln y = \ln(\cos x^2)^x$.

Учитывая свойство логарифма $\log_a b^c = c\log_a b$ преобразуем выражение

$\ln y = x \cdot \ln(\cos x^2)$.

Найдем производные от обеих частей по переменной x:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x' \cdot \ln(\cos x^2) + x \cdot (\ln(\cos x^2))',$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(\cos x^2) + x \cdot \frac{1}{\cos x^2} \cdot (-\sin x^2) \cdot 2x,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(\cos x^2) - \frac{2x^2 \cdot \sin x^2}{\cos x^2},$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(\cos x^2) - 2x^2 \mathrm{tg} x^2,$$

$$y' = (\ln(\cos x^2) - 2x^2 \cdot \mathrm{tg} x^2) \cdot y.$$

Подставляя $y = (\cos x^2)^x$, имеем

$$y' = (\ln(\cos x^2) - 2x^2 \cdot \mathrm{tg} x^2)(\cos x^2)^x.$$

2) $y = x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x$.

Логарифмируя обе части, имеем

$\ln y = \ln(x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x)$

Учитывая свойства логарифмов

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,

$\log_a b^c = c\log_a b$, получим

$\ln y = \ln x^{\sqrt{\ln x^2}} + \ln 5^x$,

$\ln y = \sqrt{\ln x^2} \cdot \ln x + x \cdot \ln 5$.

Найдем производные от обеих частей по переменной x

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot \ln x + \sqrt{\ln x^2} \cdot \frac{1}{x} + \ln 5,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x^2}} + \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} + \ln 5,$$

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x^2}} + \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} + \ln 5\right) \cdot y.$$

Или, подставляя $y = x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x$, получаем

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x^2}} + \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} + \ln 5\right) \cdot x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x.$$

б) Производные функции, заданных неявно находятся по общим правилам нахождения производных с учетом того, что функция y−сложная функция переменной x.

Примеры.

1) $\cos(x^2 \cdot y) + \dfrac{y^2}{x} + e^{x+y} = 0$.

$$\left(\cos(x^2 \cdot y) + \frac{y^2}{x} + e^{x+y}\right)^{/} = 0,$$

$$-\sin(x^2 \cdot y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') + \frac{2y \cdot y' \cdot x - y^2}{x^2} + e^{x+y} \cdot (1 + y') = 0.$$

Преобразуем выражение так, чтобы можно было выразить y'

$$-2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)-x^2\cdot y'\cdot\sin(x^2\cdot y)+\frac{2y\cdot y'}{x}-\frac{y^2}{x^2}+e^{x+y}+e^{x+y}\cdot y'=0,$$

$$\frac{2y\cdot y'}{x}-x^2\cdot y'\cdot\sin(x^2\cdot y)+e^{x+y}\cdot y'=2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)+\frac{y^2}{x^2}-e^{x+y},$$

$$y'\left(\frac{2y}{x}-x^2\cdot\sin(x^2\cdot y)+e^{x+y}\right)=2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)+\frac{y^2}{x^2}-e^{x+y}.$$

Тогда y'

$$y'=\frac{2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)+\dfrac{y^2}{x^2}-e^{x+y}}{\dfrac{2y}{x}-x^2\cdot\sin(x^2\cdot y)+x^2\cdot e^{x+y}}.$$

$$y'=\frac{2x^3y\cdot\sin(x^2\cdot y)+y^2-x^2\cdot e^{x+y}}{2xy-x^4\cdot\sin(x^2\cdot y)+x^2\cdot e^{x+y}}.$$

в). Производные функций, заданных параметрически $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ находятся следующим образом

$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, где y'_t, x'_t - производные, определяемые по общим правилам нахождения производных.

Примеры.

1) $\begin{cases}x=2-\sin 2t,\\ y=2t+\cos 2t.\end{cases}$

$$y'_t=(2t+\cos 2t)'=2+(-\sin 2t)\cdot 2=2-2\sin 2t=2(1-\sin 2t).$$

$$x'_t=(2-\sin 2t)'=-\cos 2t\cdot 2=-2\cos 2t.$$

$$y'_x=\frac{2(1-\sin 2t)}{-2\cos 2t}=\frac{\sin 2t-1}{\cos 2t}=\mathrm{tg}2t-\frac{1}{\cos 2t}.$$

2) $\begin{cases}x=\mathrm{arctg}\, e^{3t},\\ y=\ln(1+e^{6t}).\end{cases}$

$$x'_t = (\operatorname{arctg} e^{3t})' = \frac{1}{1+e^{6t}} \cdot e^{3t} \cdot 3 = \frac{3e^{3t}}{1+e^{6t}}.$$

$$y'_t = (\ln(1+e^{6t}))' = \frac{1}{1+e^{6t}} \cdot e^{6t} \cdot 6 = \frac{6e^{6t}}{1+e^{6t}}.$$

$$y'_x = \frac{6e^{6t}}{1+e^{6t}} \cdot \frac{1+e^{6t}}{3e^{3t}} = 2e^{3t}.$$

$$y'_x = 2e^{3t}.$$

Задание 5. Исследовать функцию методом дифференциального исчисления и построить график

Пример 1. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Решение.

1. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$, при котором знаменатель обращается в нуль.

$D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Так как D(y) несимметричное множество относительно x=0, то функция является функцией общего вида (ни четная, ни нечетная).

2. Точка $x = 1$ является точкой разрыва, при этом

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = \left[\frac{1+1}{1+0-1} = \frac{2}{+0}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = \left[\frac{1+1}{1-0-1} = \frac{2}{-0}\right] = -\infty.$$

В остальных точках числовой оси функция непрерывна.

3. $x = 1$ − вертикальная асимптота

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот.

Если $x \to +\infty (x \to -\infty)$, то $y \to +\infty (y \to -\infty)$, следовательно, горизонтальных асимптот у графика нет. Наклонные асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{x-1} - x \right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} = .$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y = x + 1$.

4. Найдем производную

$$y' = \frac{(x^2+1)'(x-1) - (x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2};$$

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Стационарными точками являются корни уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$, т.е. точки $x_1 = 1 - \sqrt{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$ (в этих точках $y' = 0$). Исследуем знак производной в интервалах $(-\infty, 1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2}, 1)$, $(1, 1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2}, +\infty)$.

x	$(-\infty;1-\sqrt{2}]$	$1-\sqrt{2}$	$[1-\sqrt{2};1)$	1	$(1;1+\sqrt{2}]$	$1+\sqrt{2}$	$[1+\sqrt{2};\infty)$
y'	+	0	–		–	0	+
y	возрастает	максимум $y_{max}(1-\sqrt{2}) = 2(1-\sqrt{2})$	убывает		убывает	минимум $y_{min}(1+\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2})$	возрастает

5. Найдем вторую производную функции:

$$y'' = \frac{(x^2-2x-1)'(x-1)^2 - ((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Видно, что в области определения функции $(x \neq 1)$ y'' не обращается в нуль, а значит, график функции не имеет точек перегиба.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	не входит в область определения	+
y	график выпуклый		график вогнутый

6. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

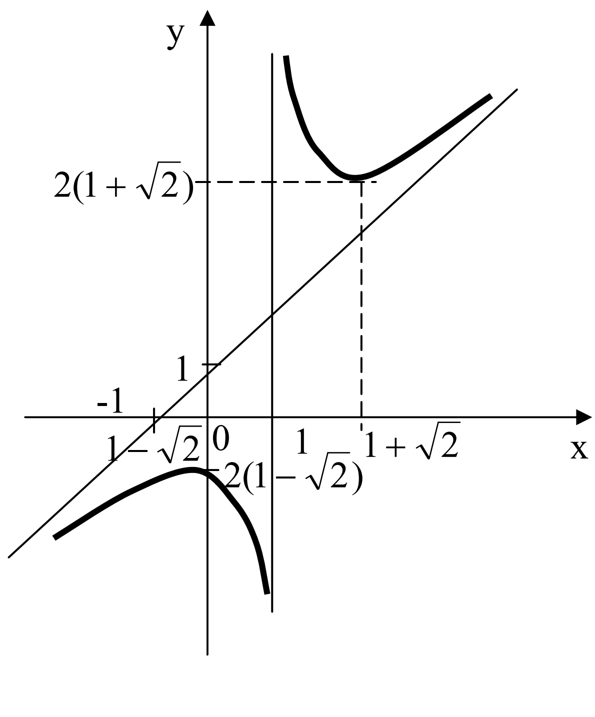
$x = 0, \quad y(x_0) = \frac{1}{-1} = -1,$

$(0;-1)$ − точка пересечения графика с осью Oy.

$y = 0$, x − не существует, т.к уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней. С осью Ox график не пересекается.

На основании полученных данных строим график функции

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}.$$



Пример 2. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение.

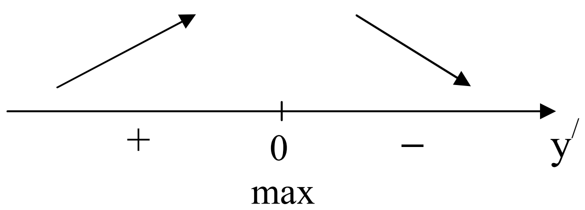
1. Область определения (-∞, +∞).

Функция четная, график симметричен относительно оси Oy т.к. $y(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = y(x)$. Точек разрыва и вертикальных асимптот нет, т.к. $1+x^2 \neq 0$.

С осью Ox не пересекается: $y \neq 0$ при всех x. С осью Oy пересечение при x = 0, y(0) = 1.

2. Найдем производные. Решим уравнение $y' = 0$. $y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Стационарная точка x=0. Интервалы (-∞,0), (0,+∞). Знаки производной $y' : (-\infty,0), y' > 0$; функция y–возрастает, (0,+∞), $y' < 0$; функция y –убывает.



При x=0 – максимум

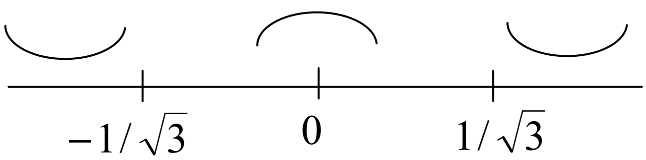
$y(0) = 1 - \max$ функции

3. Находим $y'' = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. $y'' = 0$, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Интервалы:

$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}})$, $y'' > 0$ вогнутость

$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{3})$, $y'' < 0$ выпуклость

$(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$, $y'' > 0$ вогнутость



В точках $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y'' меняет знак $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, следовательно,

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ – точки перегиба.

4. Найдем наклонные асимптоты. Уравнение асимптот ищем в виде $y = kx + b$, где

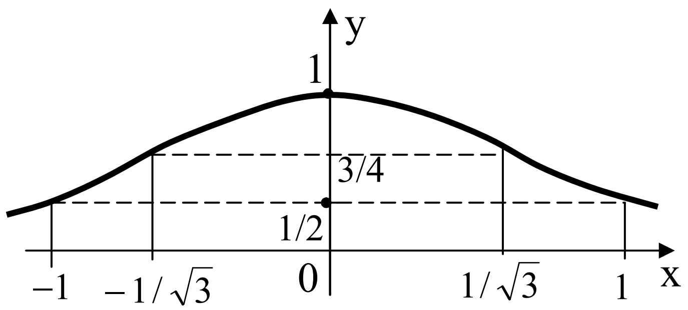
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(1+x)^2 x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[y(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}[y(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to \pm\infty$.

5. Построение графика.

Найдем дополнительные точки: $y(\pm 1) = \dfrac{1}{2}$



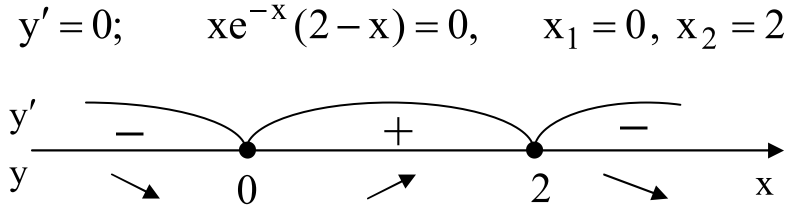
Пример 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = x^2 \cdot e^{-x}$ и, используя результаты исследования, построить её график.

1. $D(y) = R$

2. $y(-x) = (-x)^2 \cdot e^{x} = x^2 e^{x}$ – функция не является ни четной, ни нечетной.

3. $y'(x) = (x^2 \cdot e^{-x})' = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (e^{-x})' =$
$= 2xe^{-x} - e^{-x} \cdot x^2 = xe^{-x}(2 - x)$

$y' = 0;\qquad xe^{-x}(2 - x) = 0,\qquad x_1 = 0,\ x_2 = 2$



при $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$ – функция убывает,

$x \in [0;2]$ – функция возрастает

$x = 0$ – точка минимума, $y(0) = 0$ – минимум,

$x = 2$ – точка максимума, $y(2) = \dfrac{4}{e^2}$ – максимум.

4. $y'' = (xe^{-x}(2-x))' = (e^{-x}(2x - x^2))' =$

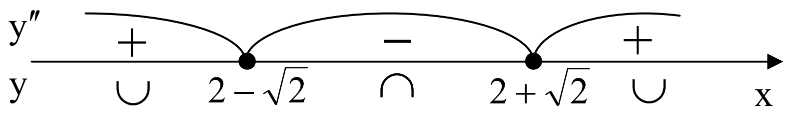
$= -e^{-x}(2x - x^2) + (2 - 2x) \cdot e^{-x} =$

$= e^{-x}(x^2 - 2x - 2x + 2) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$.

$y'' = 0$, $e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0$, ёё $x^2 - 4x + 2 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$, $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4$; $x_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$.



на $(-\infty;2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2};+\infty)$ – функция вогнута,

на $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ – функция выпукла,

Точки перегиба графика функции:

$(2-\sqrt{2};\ (2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}})$

$(2+\sqrt{2};\ (2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}})$

5. Асимптоты

Найдем асимптоты при $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Т.к.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 = \text{const}$, то

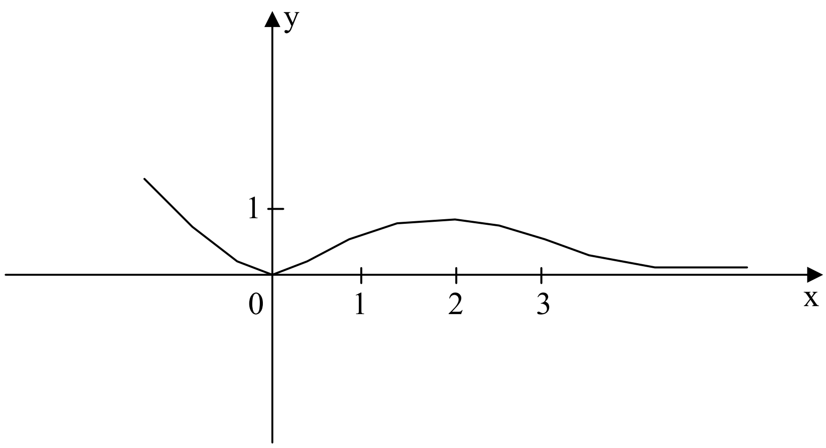
$y = 0$ – горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot e^{-x}}{x}=[\infty-\infty]=\infty.$$

Следовательно, наклонных асимптот при $x\to-\infty$ нет.

6. По результатам исследований строим график



Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение предела функции.
2. Какая величина называется бесконечно малой?
3. Сформулируйте теоремы о пределах.
4. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.
5. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.
6. Дайте определение производной функции.
7. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.
8. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
9. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.
10. Сформулируйте лемму Ферма.
11. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.

12. Сформулируйте теорему Коши о среднем.
13. Сформулируйте правило Лопиталя.
14. Запишите формулу Тейлора.

Список рекомендуемой литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. [Текст] : учебное пособие − М.: Интеграл-Пресс, Т.1. 2007. − 416с.
2. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. [Текст] : учебник − М.: Проспект, 2011. − 608с.
3. Сборник задач по математике для втузов. [Текст] : учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. Ч.1. 2009. − 288с.
4. Сборник задач по математике для втузов. [Текст] : учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. Ч.2 2009. − 432с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«19» июня 2013 г.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания по выполнению модуля 2
для студентов технических специальностей

Курск 2013

УДК 514.12

Составители: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина

Рецензент

Старший преподаватель кафедры высшей математики *А.В. Бойков*

Векторная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания по выполнению модуля 2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина. Курск, 2013. 18 с.

Содержит краткую теорию в форме справочного материала и образцы решения всех заданий модуля 2 и имеют своей целью оказание помощи студентам очного отделения технических специальностей при выполнении заданий.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ___________. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Задание 1

Груз весом $\left|\vec{P}\right|$ = 100кГ поддерживается двумя стержнями AB и CB. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол ACB равен 90˚, угол ABC равен α = 3˚·([n/4] + 1).

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_4 = 1$ и номер задачи из табл. 1.1 равен 2. Тогда [n/4] = 25 и α =78˚.

По условию груз поддерживается стержнями (находится в покое). Следовательно, вес груза – сила $\vec{P}=\overrightarrow{BK}$ (см. рис. 1) уравновешивается результирующей $\vec{R}=\overrightarrow{BL}$ сил, возникающих в стержнях под действием силы $\vec{P}$, т.е. $\vec{P}=-\vec{R}$ ($\left|\vec{P}\right|=\left|\vec{R}\right|$ и эти силы направлены противоположно).

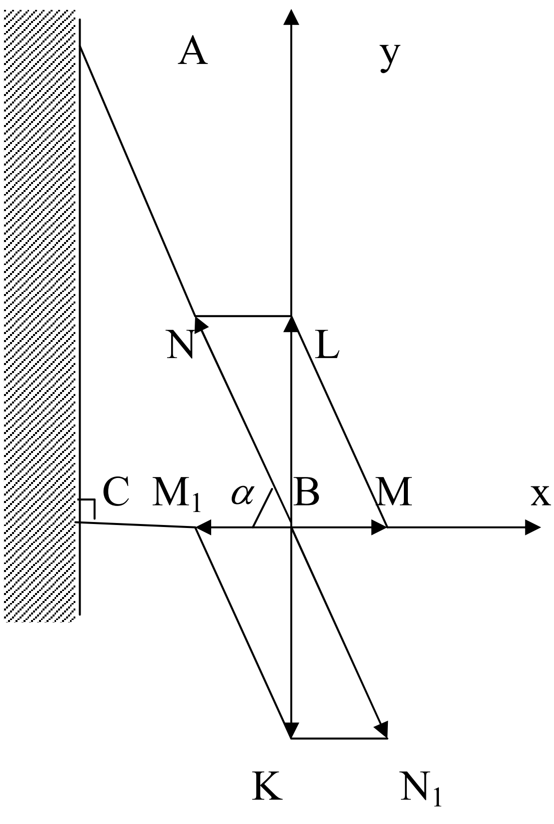


Рис. 1. Разложение веса груза по направлениям стержней

Разложим силу $\vec{R}$ по направлениям стержней BA и BC. Для этого через точку L проведём прямые LM и LN, параллельные стержням BA и BC, до их пересечения с прямыми, содержащими стержни, в точках M и N. Очевидно, что

$$\vec{R} = \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN}.$$

Аналогично, раскладывается по направлениям стержней вес груза

$$\vec{P} = \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{BN_1},$$

и

$$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BM_1},\ \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BN},\ \left(\left|\overrightarrow{BM}\right| = \left|\overrightarrow{BM_1}\right|,\ \left|\overrightarrow{BN}\right| = \left|\overrightarrow{BN_1}\right| \right).$$

Сила $\overrightarrow{BN_1}$ вызывает растяжение стержня ВА и порождает силу $\overrightarrow{BN}$, возникающую в этом стержне, уравновешивающую силу растяжения $\overrightarrow{BN_1}$. Аналогично, сила $\overrightarrow{BM_1}$ вызывает сжатие стержня ВС и порождает силу $\overrightarrow{BM}$, возникающую в стержне ВС, уравновешивающую силу сжатия $\overrightarrow{BM_1}$.

Найдём $\left|\overrightarrow{BM}\right|$ и $\left|\overrightarrow{BN}\right|$, обозначив $\left|\overrightarrow{BM}\right| = a$, $\left|\overrightarrow{BN}\right| = b$, $\left|\vec{P}\right| = P$. Введём декартову систему координат, как показано на рис. 3.1, и разложим векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ по базису $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ этой системы координат.

Очевидно, что

$$\overrightarrow{BM} = a \cdot \vec{i}, \qquad \overrightarrow{BN} = -b \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + b \cdot \sin\alpha \cdot \vec{j}, \qquad \vec{P} = -P \cdot \vec{j}.$$

Поскольку груз находится в покое, то результирующая этих сил равна нулевому вектору $\vec{0}$, т.е.

$$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \vec{P} = \vec{0},$$

$$a \cdot \vec{i} - b \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + b \cdot \sin\alpha \cdot \vec{j} - P \cdot \vec{j} = \vec{0},$$

$$(a - b \cdot \cos\alpha) \cdot \vec{i} + (b \cdot \sin\alpha - P) \cdot \vec{j} = \vec{0}.$$

Это векторное равенство равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases} a - b \cdot \cos\alpha = 0, \\ b \cdot \sin\alpha - P = 0, \end{cases}$$

откуда получаем

$$b = \frac{P}{\sin\alpha}, \qquad a = b \cdot \cos\alpha = P \cdot ctg\alpha.$$

Эти формулы можно получить и иначе. Треугольник BML прямоугольный, BM = a, BL = P, ML = b, угол BML равен α, и

$$\frac{BM}{BL} = ctg\alpha , \qquad \frac{BL}{ML} = \sin\alpha ,$$

$$\frac{a}{P} = ctg\alpha , \qquad \frac{P}{b} = \sin\alpha ,$$

откуда

$$a = P \cdot ctg\alpha , \qquad b = \frac{P}{\sin\alpha} .$$

Учитывая условия задачи получим

$$a = 100 \cdot ctg78° = 100 \cdot 0.2126 = 21.26\,(k\Gamma),\ \ b = \frac{100}{\sin 78°} = \frac{100}{0.9781} = 102.24\,(k\Gamma).$$

Задание 2

1способ.

Точка O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки B, если $\overrightarrow{AB} = (-1; P_3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; P_5; -2)$, $O(2; -1; P_7)$.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

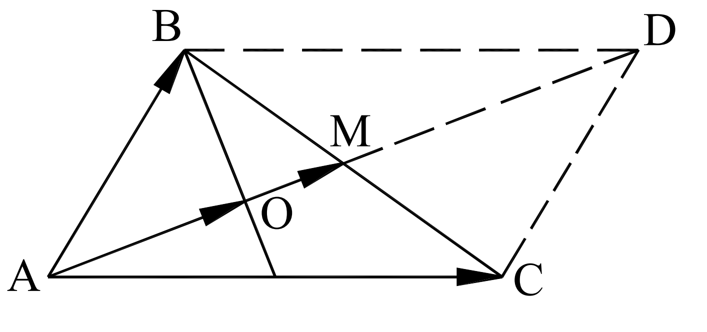


Рис. 2. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (1 способ)

Используя свойство сложения векторов по правилу параллелограмма, имеем: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \left(0; \dfrac{P_3 + P_5}{2}; -1\right) = (0; 1{,}5; -1)$.

Зная, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, начиная от вершины, имеем: $\dfrac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{2}{3}$.

Таким образом, $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\left(0;\frac{P_3+P_5}{3};-\frac{2}{3}\right)=\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AO}=\left(2-x_A;-1-y_A;P_7-z_A\right)=\left(2-x_A;-1-y_A;3-z_A\right)$.

Так как координаты вектора задаются единственным образом, то составим систему:

$$\begin{cases}2-x_A=0;\\ -1-y_A=\frac{P_3+P_5}{3};\\ P_7-z_A=-\frac{2}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_A=0;\\ -1-y_A=1;\\ 3-z_A=-\frac{2}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=2;\\ y_A=-2;\\ z_A=3\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Решив данную систему, нашли координаты точки A. Составим аналогичную систему для координат $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases}x_B-x_A=-1;\\ y_B-y_A=P_3;\\ z_B-z_A=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-2=-1;\\ y_B+2=2;\\ z_B-3\frac{2}{3}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=1;\\ y_B=0;\\ z_B=3\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Решением данной системы являются координаты искомой точки $B\left(1;0;3\frac{2}{3}\right)$.

2 способ.

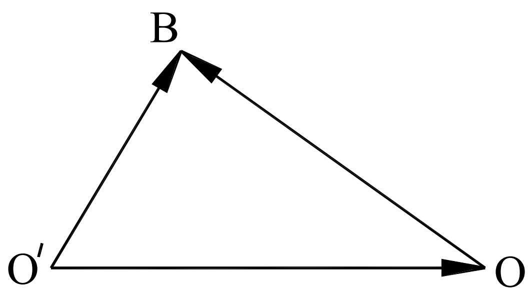


Рис. 3. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (2способ)

Пусть O' – начало отсчёта системы координат, т.е. координаты точки O': $x=0, y=0, z=0.$

Вектор $\overrightarrow{O'B}$ и точка B имеют одинаковые координаты.

$\overrightarrow{O'B}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{O'O}=(2;-1;3)$ $\qquad (P_7=3)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\cdot((-1;2;0)+(1;1;-2))=\frac{1}{3}\cdot(0;3;-2)=\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)$

$\overrightarrow{OB}=(-1;2;0)-\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)=\left(-1;1;\frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{O'B} = (2;-1;3) + \left(-1;1;\frac{2}{3}\right) = \left(1;0;\frac{11}{3}\right)$$

$$B\left(1;0;\frac{11}{3}\right).$$

Задание 3

Даны три силы: $\vec{F}_1 = P_2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3 \cdot \vec{i} + P_3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$ и $\vec{F}_3 = -2 \cdot \vec{j} + P_5 \cdot \vec{k}$. Найти равнодействующую $\vec{R}$ сил $(-\vec{F}_1)$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_0 (0 ; 1 ; P_7) в положение M (P_6 ; 0 ; 1).

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_6 = 5$, $P_7 = 3$,

$\vec{F}_1 = (1; 2;-7)$, $(-\vec{F}_1) = (-1;-2;7)$, $\vec{F}_2 = (3;2;4)$, $\vec{F}_3 = (0;-2;1)$ и $\vec{R} = (-\vec{F}_1) + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2;-2;12)$. Если точка перемещается прямолинейно, а сила $\vec{R}$, действующая на точку постоянна, то работа A силы равна скалярному произведению силы на вектор-перемещение точки. Вектор-перемещение имеет вид:

$$\overrightarrow{M_0M} = (P_6 - 0; 0 - 1; 1 - P_7) = (5; -1; -2).$$

Тогда работа A будет равна

$$A = \left(\vec{R}; \quad \overrightarrow{M_0M}\right) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 12 \cdot (-2) = -12.$$

Задание 4

Сила $\vec{F} = (P_3; P_5; -2)$ приложена к точке $C(P_4; -2; P_7)$. Определите величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

Момент силы, приложенной к точке относительно начала координат, определяется по формуле:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки C относительно начала координат.

$\vec{r} = \overrightarrow{OC} = (P_4 - 0; -1 - 0; P_7 - 0) = (P_4; -1; P_7) = (1; -1; 3)$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \mathrm{P}_4 & -1 & \mathrm{P}_7 \\ \mathrm{P}_3 & \mathrm{P}_5 & -2 \end{vmatrix} = \mathrm{M_x}\cdot\vec{i} + \mathrm{M_y}\cdot\vec{j} + \mathrm{M_z}\cdot\vec{k}\,;$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1\cdot\vec{i} - 8\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k}\,.$$

Величина момента силы:

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{74}\,.$$

Направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{M_x}{\left|\vec{M}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{M_y}{\left|\vec{M}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{M_z}{\left|\vec{M}\right|}$.

Получаем: $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{74}}{74}$, $\cos\beta = -\dfrac{4\sqrt{74}}{37}$, $\cos\gamma = \dfrac{3\sqrt{74}}{74}$.

Задание 5

Найти ненулевой вектор, ортогональный векторам $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -1)$ и $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$. Сделайте проверку.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$. По условию $\vec{a} = (0; 2; -1)$, $\vec{b} = (1; 1; 1)$.

Векторное произведение двух векторов является вектором ортогональным к этим векторам. Это векторное произведение будет ненулевым вектором, тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы неколлинеарны.

Данные векторы неколлинеарные, поэтому их векторное произведение будет ненулевым вектором ортогональным им обоим.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-\mathrm{P}_4 & \mathrm{P}_5+1 & -1 \\ \mathrm{P}_3-1 & 1 & 4-\mathrm{P}_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\vec{i} - \vec{j} - 2\cdot\vec{k}\,,$$

$\vec{c} = (3; 1; -2)$.

Проверка: Два вектора ортогональны, если их скальное произведение равно нулю, тогда

$$\vec{c}\cdot\vec{a} = \mathrm{x_c}\cdot\mathrm{x_a} + \mathrm{y_c}\cdot\mathrm{y_a} + \mathrm{z_c}\cdot\mathrm{z_a} = 0;$$

$$\vec{c}\cdot\vec{b} = \mathrm{x_c}\cdot\mathrm{x_b} + \mathrm{y_c}\cdot\mathrm{y_b} + \mathrm{z_c}\cdot\mathrm{z_b} = 0.$$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=3\cdot 0+(-1)\cdot 2+(-2)\cdot(-1)=0$, следовательно $\vec{c}\perp\vec{a}$,

$\vec{c}\cdot\vec{b}=3\cdot 1+(-1)\cdot 1+(-2)\cdot 1=0$, следовательно $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Задание 6

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\big(P_5\cdot(P_3+2);P_3^2+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\big)$. Образуют ли эти точки треугольник?

Если да, то чему равна его площадь?

Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_4=1$, $P_5=1$, $P_7=3$, $P_8=5$.

Точки *A, B, C* образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB}\\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC}\end{vmatrix}=x_i\vec{i}+y_j\vec{j}+z_k\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}=(1+1;2+2;0-2)$

$\overrightarrow{AC}=(4+1;14+2;-1-2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -2\\ 5 & 16 & -3\end{vmatrix}=20\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}\neq\vec{0},$$

следовательно точки *A, B, C* образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{20^2+(-4)^2+12^2}=4\sqrt{35}.$$

Таким образом, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35}=2\sqrt{35}$.

Задание 7

Даны точки: A(1; $-P_2$; -1), B($1-P_3$; 0; 1), C(-1; 1; P_5-2), D(P_2; P_4; P_8). Образуют ли эти точки пирамиду? Если да, то чему равен объём пирамиды?

Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_8 = 5$. Точки A, B, C, D образуют пирамиду тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ некомпланарные, т.е. когда их смешанное произведение не равно нулю. Найдем координаты этих векторов

$\overrightarrow{AB}$ =(1-P_3-1; 0-(-P_2); 1-(-1)) = (-2; 1; 2),

$\overrightarrow{AC}$ =(-1-1;1-(-P_2);P_5 -2-(-1)) = (-2; 2; 0),

$\overrightarrow{AD}$ = (P_2 - 1; P_4 - (- P_2); P_8 - (-1)) = (0; 2; 6),

и их смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=-20.$$

Итак, точки A, B, C, D образуют пирамиду и её объём можно найти по формуле

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Подставляя в формулу значение смешанного произведения, получим V=$\frac{10}{3}$.

Задание 8

Даны точки $A(-1-P_7;P_5-2)$ и $B(P_5-2;P_5+4)$. Найти:

а) точку $C(x_1;y_1)$ – середину отрезка AB;

б) точку $D(x_2;y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\frac{P_9+1}{9-P_9}$.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_5=1$, $P_7=3$, $P_9=2$. Значит $A(-4;-1)$, $B(-1;5)$.

а) $x_1=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-4-1}{2}=-2{,}5$;

$y_1=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+5}{2}=2$. Получили $C(-2{,}5;2)$.

б) Если $\lambda=\frac{P_9+1}{9-P_9}=\frac{3}{8}$, то $x_2=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}=\frac{-4+\frac{3}{8}\cdot(-1)}{1+\frac{3}{8}}=-\frac{35}{11}$,

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{8}\cdot 5}{1+\frac{3}{8}} = \frac{7}{11}.$$ Получили $D\left(-\frac{35}{11}; \frac{7}{8}\right)$.

Задание 9

На плоскости даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Сделать чертёж треугольника ABC и найти:

а) длину и уравнение стороны BC (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);

б) косинус угла A и угол A (в градусах);

в) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне ВС;

г) высоту, проведённую к стороне BC и её уравнение;

д) уравнение медианы, проведённой к стороне BC;

е) уравнение биссектрисы угла A.

Решение

Даны точки $A(11;-5)$, $B(6;7)$, $C(-10;-5)$.

а) Каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ рассчитывается по формуле: $\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{y-y_2}{y_3-y_2}$ или $\frac{x-x_2}{l} = \frac{y-y_2}{m}$.

Тогда каноническое уравнение прямой BC будет иметь вид: $\frac{x-6}{-10-6} = \frac{y-7}{-5-7}$, или $\frac{x-6}{-16} = \frac{y-7}{-12}$, или $\frac{x-6}{4} = \frac{y-7}{3}$.

Общее уравнение прямой: $m\cdot x - l\cdot y + (l\cdot y_2 - m\cdot x_2) = 0$ или $A\cdot x + B\cdot y + C = 0$.

Тогда общее уравнение прямой BC будет иметь вид: $3(x-6) = 4(y-7)$, $3x - 18 = 4y - 28$, $3x - 4y + 10 = 0$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку В имеют вид: $\begin{cases} x = x_2 + l\cdot t; \\ y = y_2 + m\cdot t. \end{cases}$

В качестве направляющего вектора берем вектор $\overrightarrow{BC} = (4;3)$и параметрические уравнения прямой BC будут иметь вид: $\begin{cases} x = 6 + 4t; \\ y = 7 + 3t. \end{cases}$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y = -\frac{A \cdot x}{B} - \frac{C}{B}$ или y = kx + b.

Тогда уравнение с угловым коэффициентом прямой *BC* будет иметь вид: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$.

б) $\cos A = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{(x_3 - x_1)\cdot(x_2 - x_1) + (y_3 - y_1)\cdot(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = g$.

A=arccos(g).

$\overrightarrow{AC} = (-10 - 11; -5 - (-5)) = (-21; 0)$, тогда $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-21)^2 + 0^2} = 21$,

$\overrightarrow{AB} = (6 - 11; 7 - (-5)) = (-5; 12)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$,

$\cos A = \frac{-21 \cdot (-5) + 0 \cdot 12}{21 \cdot 13} = \frac{5}{13}$, $A = \arccos\frac{5}{13}$.

в) **1 способ.**

Прямая, параллельная *BC* имеет такой же угловой коэффициент *k*, как и *BC*. Подставим координаты точки *A* в уравнение с угловым коэффициентом y = *k*x + b_1 и найдем b_1.

Уравнение с угловым коэффициентом прямой *BC*, полученное в пункте а) имеет вид: $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$. По условию $A(11; -5)$.

При подстановке координат точки *A* в уравнение $y = \frac{3}{4}x + b_1$ получим: $-5 = \frac{3}{4} \cdot 11 + b_1$, откуда $b_1 = -\frac{53}{4}$. Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид: $y = \frac{3}{4}x - \frac{53}{4}$ или $3x - 4y - 53 = 0$.

2 способ.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1; y_1)$ имеют вид $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$, где $(l; m)$- направляющий вектор прямой. В качестве направляющего вектора прямой направляющего вектора прямой параллельной BC можно взять направляющий вектор прямой BC, вектор $\overrightarrow{BC} = (4; 3)$.

Тогда искомое уравнение примет вид: $\frac{x - 11}{4} = \frac{y - (-5)}{3}$, т.е. $3x - 4y - 53 = 0$.

г) **1 способ.**

Уравнение высоты к стороне *BC*: $y = -\frac{1}{k} \cdot x + b_2$.

b_2 находится подстановкой значений x и y точки A в это уравнение.

При подстановке координат точки A в уравнение $y = -\frac{4}{3}x + b_2$ получим: $-5 = -\frac{4}{3} \cdot 11 + b_2$, откуда $b_1 = \frac{29}{3}$. Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид: $y = -\frac{4}{3}x + \frac{29}{3}$ или $4x + 3y - 29 = 0$.

Для нахождения длины высоты, найдём точку пересечения стороны BC и полученной высоты:

$$\begin{cases} 3x - 4y + 10 = 0; \\ 4x + 3y - 29 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x - 16y + 40 = 0; \\ 12x + 9y - 87 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25y + 127 = 0; \\ 3x - 4y + 10 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5{,}08; \\ x = 3{,}44. \end{cases}$$

Получили точку $A_1(3{,}44; 5{,}08)$.

Длина высоты: $h = \left|\overrightarrow{AA_1}\right| = \sqrt{(3{,}44 - 11)^2 + (5{,}08 - (-5))^2} = 12{,}6$.

2 способ.

Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (x_1, y_1) перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = (A, B)$ имеет вид:

$$A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) = 0.$$

В качестве нормального вектора высоты, проведенной к стороне BC можно взять направляющий вектор прямой BC, например вектор $\overrightarrow{BC} = (4;3)$.

Тогда уравнение высоты будет иметь вид:

$4 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - (-5)) = 0$ или $4 \cdot x + 3 \cdot y - 29 = 0.$

Длина высоты– это расстояние от точки A до прямой BC. Расстояние от точки $A(x_1, y_1)$ до прямой a, имеющей общее уравнение $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ можно найти по формуле:

$$h = d(A,(a)) = \frac{|A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Общее уравнение прямой BC имеет вид: $3 \cdot x - 4 \cdot y + 10 = 0.$ Поэтому $h = \frac{|3 \cdot 11 - 4 \cdot (-5) + 10|}{\sqrt{3^2 + 4}} = \frac{63}{5} = 12{,}6.$

д) Если точка M – середина BC, то $x_M = \frac{x_2 + x_3}{2}$; $y_M = \frac{y_2 + y_3}{2}$.

Уравнение медианы: $\frac{x - x_1}{x_M - x_1} = \frac{y - y_1}{y_M - y_1}$.

По условию, $B(6;7)$, $C(-10;-5)$, тогда $x_M=\dfrac{6+(-10)}{2}=-2$, $y_M=\dfrac{7+(-5)}{2}=1$. Значит $M(-2;1)$.

Уравнение медианы, проведённой к стороне BC: $\dfrac{x-11}{-2-11}=\dfrac{y-(-5)}{1-(-5)}$ или $\dfrac{x-11}{-13}=\dfrac{y+5}{6}$.

е) По свойству биссектрисы угла: $\dfrac{A_2B}{A_2C}=\dfrac{AB}{AC}$.

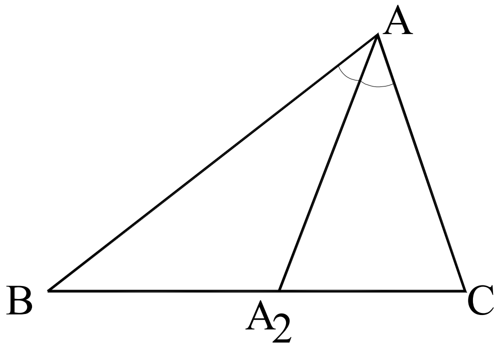


Рис. 4. Вспомогательный чертёж к заданию 9

Пусть $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\lambda$, тогда координаты точки A_2 находяться по формулам: $x_{A_2}=\dfrac{x_2+\lambda\cdot x_3}{1+\lambda}$; $y_{A_2}=\dfrac{y_2+\lambda\cdot y_3}{1+\lambda}$, где $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

Из пункта б) мы имеем: $|\overrightarrow{AC}|=21$, $|\overrightarrow{AB}|=13$, значит $\lambda=\dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{13}{21}$,

тогда $x_{A_2}=\dfrac{6+\frac{13}{21}\cdot(-10)}{1+\frac{13}{21}}=-\dfrac{2}{17}$, $y_{A_2}=\dfrac{7+\frac{13}{21}\cdot(-5)}{1+\frac{13}{21}}=\dfrac{41}{17}$.

Искомое уравнение биссектрисы мы находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(11;-5)$ и $A_2\left(-\dfrac{2}{17};\dfrac{41}{17}\right)$.

$$\frac{x-11}{-\frac{2}{17}-11}=\frac{y-(-5)}{\frac{41}{17}-(-5)} \text{ или } \frac{x-11}{-\frac{189}{17}}=\frac{y+5}{\frac{126}{17}}, \text{ или } \frac{x-11}{-3}=\frac{y+5}{2}.$$

Задание 10

Дана точка (0;2) пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон 5x - 4y + 15 = 0 и 4x + y - 9 =0. Найти координаты вершин треугольника и уравнение третьей стороны.

Решение

Координаты одной вершины найдем как координаты точки пересечения данных сторон, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-4y+15=0, \\ 4x+y-9=0. \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} y=9-4x, \\ 5x-4(9-4x)+15=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

Точка O пересечения медиан треугольника называется его центром. Отметим одно свойство центра треугольника, которое используем для нахождения координат остальных вершин:

$$x_Ц = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad x_Ц = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

где $x_Ц$, $y_Ц$ - координаты центра треугольника;

x_i , y_i - координаты i-ой вершины треугольника, i = 1,2,3.

Для доказательства этих формул рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$, где A (x_i ; y_i), i = 1,2,3 (см. рис. 3.2)

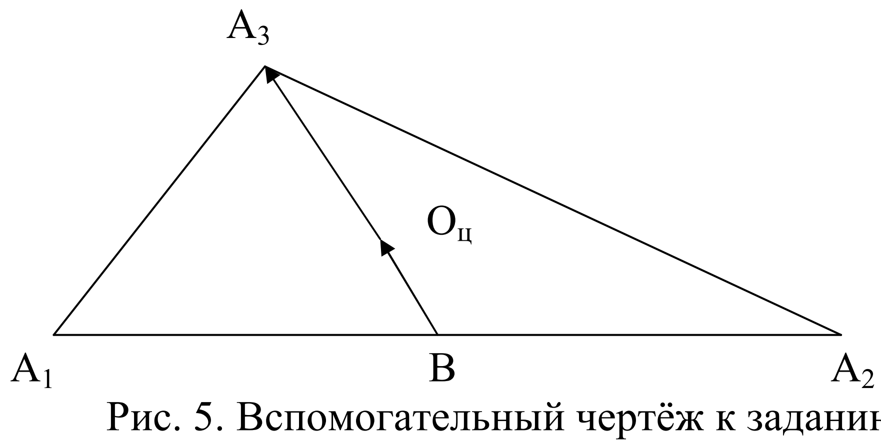


Рис. 5. Вспомогательный чертёж к заданию 10

Пусть B – середина стороны A_1A_2. Тогда A_3B – медиана треугольника $A_1A_2A_3$. По известному из элементарной геометрии свойству медиан треугольника $A_3O_ц = 2 \cdot BO_ц$. Тогда координаты точки В найдем по формулам:

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad и \qquad y_B = \frac{y_1 + y_2}{2} \ ,$$

а координаты центра $O_ц$ из векторного соотношения $\overrightarrow{O_Ц A_3} = 2 \cdot \overrightarrow{BO_Ц}$, которое в координатной форме записывается так:

$$x_3 - x_Ц = 2 \cdot (x_Ц - \frac{x_1 + x_2}{2}), \qquad y_3 - y_Ц = 2 \cdot (y_Ц - \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

Отсюда, выражая $x_Ц$ и $y_Ц$ через x_i, x_i, получим требуемые формулы.

Используя доказанные формулы, полагая в них $x_1 = 1$ и $y_1 = 5$, $x_Ц = 0$ и $y_Ц = 2$, получим два уравнения, которым должны удовлетворять координаты остальных двух вершин

$$0 = \frac{1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad 2 = \frac{5 + y_2 + y_3}{3}, \text{ откуда}$$

$$x_2 + x_3 = -1, \quad y_2 + y_3 = 1.$$

Еще два уравнения получим если потребуем, чтобы искомые точки, вершины треугольника, принадлежали заданным сторонам, т.е. их координаты удовлетворяли уравнениям этих сторон

$5x - 4y + 15 = 0$, $4x + y - 9 = 0$.

Итак, для определения четырех неизвестных x_2, x_3, y_2, y_3, мы имеем четыре независимых условия:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1, \\ y_2 + y_3 = 1, \\ 5x_2 - 4y_2 + 15 = 0, \\ 4x_3 + y_3 - 9 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_2 = -3$, $y_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_3 = 1$.

Уравнение третьей стороны запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (-3;0) и (2;1)

$$\frac{x - (-3)}{2 - (-3)} = \frac{y - 0}{1 - 0} \text{ или } \frac{x + 3}{5} = y.$$

Итак, уравнение третьей стороны x - 5y + 3 = 0, а вершины треугольника имеют координаты (1;5), (-3;0), (2;1).

Задание 11

В пространстве даны точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$. Сделать чертёж пирамиды *ABCD* и найти:

а) длину и уравнение ребра *AB*;

б) уравнение грани *ABC*;

в) высоту, проведённую из вершины *D* и её уравнение;

г) проекцию вершины *D* на плоскость *ABC*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *D* параллельно ребру *AB*;

е) уравнение плоскости, проходящей через вершину *D* параллельно грани *ABC*;

ж) уравнение плоскости, проходящей через ребро *AD* перпендикулярно грани *ABC*;

з) уравнение проекции ребра *AD* на грань *ABC*;

и) угол между ребрами *AB* и *AD*;

к) угол между ребром *AD* и гранью *ABC*;

л) угол между гранями *ABC* и *ABD*.

Решение

Даны точки $A(1;-5;3)$, $B(4;-1;2)$, $C(-3;3;5)$, $D(2;1;-1)$.

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Тогда прямая AB задаётся уравнением: $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-(-5)}{-1-(-5)}=\frac{z-3}{2-3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

Длина ребра AB может быть рассчитана как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ по формуле: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

$\overrightarrow{AB}=(4-1;-1-(-5);2-3)=(3;4;-1)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ и $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Найдём уравнение грани ABC, используя данную формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ -3-1 & 3-(-5) & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 16x-2y+40z-146$$

Получим уравнение плоскости $16x-2y+40z-146=0$ $\Leftrightarrow$ $8x-y+20z-73=0$.

в) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $D(x_4;y_4;z_4)$ перпендикулярно к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид: $\dfrac{x-x_4}{A}=\dfrac{y-y_4}{B}=\dfrac{z-z_4}{C}$.

Искомая высота проходит через точку $D(2;1;-1)$ перпендикулярно грани ABC, то есть перпендикулярно плоскости, заданной уравнением $8x-y+20z-73=0$. Значит уравнение прямой, содержащей эту высоту имеет вид: $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{20}$.

Расстояние от точки $D(x_4;y_4;z_4)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ рассчитывается по формуле:

$$h=\frac{|A\cdot x_4+B\cdot y_4+C\cdot z_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|8\cdot 2+(-1)\cdot 1+20\cdot(-1)|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{465}}=\frac{\sqrt{465}}{93}.$$

г) Чтобы найти проекцию вершины D на плоскость ABC, необходимо отыскать основание D_1 перпендикуляра, опущенного из точки $D(x_4;y_4;z_4)$ на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Уравнение этого перпендикуляра найдено в пункте в): $\dfrac{x-2}{8}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+1}{20}$. Запишем данное уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=2+8t, \\ y=1-t, \\ z=-1+20t. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения для x, y, z в уравнение плоскости ABC, найденное в пункте б): $8x-y+20z-73=0$.

$8(2+8t)-(1-t)+20(-1+20t)-73=0$, откуда находим t:

$-78+465t=0$, $t=\dfrac{26}{155}$.

Далее необходимо подставить найденное значение t в систему уравнений (1). Получим координаты искомой точки.

$$\begin{cases} x = 2 + 8 \cdot \dfrac{26}{155}, \\ y = 1 - \dfrac{26}{155}, \\ z = -1 + 20 \cdot \dfrac{26}{155}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{518}{155}, \\ y = \dfrac{129}{155}, \\ z = \dfrac{365}{155}. \end{cases}$$

Значит, проекция D_1 вершины D на плоскость ABC имеет координаты $\left(\frac{518}{155}; \frac{129}{155}; \frac{365}{155}\right)$.

д) Уравнение прямой, проходящей через вершину D параллельно ребру AB представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку $D(x_4; y_4; z_4)$ параллельно направляющему вектору $\overrightarrow{AB} = (l; m; n)$ и находится по формуле: $\frac{x - x_4}{l} = \frac{y - y_4}{m} = \frac{z - z_4}{n}$.

По условию $D(2;1;-1)$, а вектор был найден в пункте а) $\overrightarrow{AB} = (3;4;-1)$. Тогда искомая прямая имеет вид: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{-1}$.

е) Плоскость, параллельная плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и проходящая через $D(x_4; y_4; z_4)$ имеет вид: $A(x - x_4) + B(y - y_4) + C(z - z_4) = 0$.

Тогда, искомая плоскость, проходящая через точку $D(2;1;-1)$ параллельно плоскости $8x - y + 20z - 73 = 0$, задаётся уравнением: $8(x-2) - (y-1) + 20(z+1) = 0 \iff 8x - y + 20z + 5 = 0$.

ж) Уравнение плоскости, проходящей через ребро AD перпендикулярно грани ABC находится как уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_4 - z_1}$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Найдём уравнение прямой AD: $\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-(-5)}{1-(-5)} = \frac{z-3}{-1-3}$ $\Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{6} = \frac{z-3}{-4}$.

Уравнение плоскости ABC было получено в пункте б): $8x - y + 20z - 73 = 0$.

Тогда искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 8 & -1 & 20 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 116x - 52y - 49z - 229 = 0.$$

з) Проекция ребра *AD* на грань *ABC* является прямой, проходящей через точки $A(1;-5;3)$ и точку, найденную в пункте г), имеющую координаты $\left(\frac{518}{155};\frac{129}{155};\frac{365}{155}\right)$.

Каноническое уравнение проекции получим используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x-1}{\frac{518}{155}-1} = \frac{y-(-5)}{\frac{129}{155}-(-5)} = \frac{z-3}{\frac{365}{155}-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{363} = \frac{y+5}{904} = \frac{z-3}{-100}.$$

и) Угол φ между ребрами *AB* и *AD* находится как угол между векторами $\overrightarrow{AB} = (l_1;m_1;n_1)$ и $\overrightarrow{AD} = (l_2;m_2;n_2)$:

$$\cos\varphi = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

Имеем: $\overrightarrow{AB} = (3;4;-1)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$,

$\overrightarrow{AD} = (1;6;-4)$, тогда $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{53}$,

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 6 + (-1)\cdot(-4)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{53}} = \frac{31}{\sqrt{1378}},\ \varphi = \arccos\frac{31}{\sqrt{1378}} \approx 37^0.$$

к) Угол ψ между ребром *AD* и гранью *ABC* находится по формуле: $\sin\psi = \dfrac{|A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$,

где $(A;B;C)$ – координаты нормального вектора $\vec{n}$ плоскости ABC,

$(l;m;n)$ – координаты направляющего вектора $\vec{q}$ прямой AD.

Имеем: $\vec{n} = (8;-1;20)$ и $\vec{q} = (1;6;-4)$ – соответственно.

$$\sin\psi = \frac{|8\cdot 1 + (-1)\cdot 6 + 20\cdot(-4)|}{\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 20^2}\cdot\sqrt{1^2 + 6^2 + (-4)^2}} = \frac{78}{\sqrt{24645}},$$

$$\psi = \arcsin\frac{78}{\sqrt{24645}} \approx 33^o.$$

л) Угол θ между гранями *ABC* и *ABD* находится как угол между нормальными векторами плоскостей *ABC* и *ABD*. Нормальный вектор плоскости ABC имеет координаты $(8;-1;20)$.

Найдём уравнение плоскости ABD аналогично пункту б):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ 2-1 & 1-(-5) & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 10x+11y+14z+23$$

Получим уравнение плоскости $10x+11y+14z+23=0$. Для данной плоскости направляющий вектор имеет координаты: $(10;11;14)$.

$$\cos\theta = \frac{A_1\cdot A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = \frac{8\cdot 10+(-1)\cdot 11+20\cdot 14}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}\cdot\sqrt{10^2+11^2+14^2}} = \frac{349}{\sqrt{193905}},$$

$$\theta = \arccos\frac{349}{\sqrt{193905}} \approx 42^o.$$

Задание 12

Дана точка $M(1;0;-2)$. Найти:

а) точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, симметричную М относительно точки $S(-1-P_7;P_5;3-P_3)$;

б) точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, симметричную М относительно прямой $\frac{x+1}{-1-P_7}=\frac{y-2}{P_5}=\frac{z-1}{3-P_3}$

в) точку $M_3(x_3;y_3;z_3)$, симметричную М относительно плоскости $(-1-P_7)\cdot x+P_5\cdot y+(3-P_3)\cdot z=0$

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_5=1$, $P_7=3$.

а) Согласно заданным условиям, $S(-4;1;1)$.

Точки M и M_1 называются симметричными относительно точки S (центр симметрии), если S – середина отрезка MM_1. Общая формула середины отрезка: $x_S=\frac{x_M+x_{M_1}}{2}$. Откуда получаем:

$x_{M_1}=2\cdot x_S - x_M = 2\cdot(-4)-1=-9$,

$y_{M_1}=2\cdot y_S - y_M = 2\cdot 1-0=2$,

$z_{M_1}=2\cdot z_S - z_M = 2\cdot 1-(-2)=4$.

Таким образом, $M_1(-9;2;4)$.

б) Согласно заданным условиям, исходная прямая имеет вид: $\frac{x+1}{-4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{5}$.

Точки M и M_2 называются симметричными относительно прямой a (ось симметрии), если прямая a проходит через середину отрезка MM_2 и перпендикулярна к этому отрезку.

Находим уравнение плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через точку $M(1;0;-2)$. Так плоскость перпендикулярна заданной прямой, то в качестве её вектора нормали можно взять направляющий вектор этой прямой с координатами $(-4;1;5)$.

Следовательно уравнение плоскости имеет вид:

$$-4\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+5\cdot(z-(-2))=0 \;\Leftrightarrow\; -4x+y+5z+6=0.$$

Найдем координаты точки пересечения данной плоскости и нашей прямой. Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме:
$$\begin{cases} x=-1-4\cdot t; \\ y=2+t; \\ z=1+5t. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения x, y, z в уравнение плоскости и вычислить значение *t*.

$-4(-1-4t)-(2+t)+5(1+5t)+6=0$, откуда находим $t=-\frac{17}{42}$.

Затем подставим найденное значение *t* в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} x=-1-4\cdot\left(-\frac{17}{42}\right); \\ y=2-\frac{17}{42}; \\ z=1+5\cdot\left(-\frac{17}{42}\right). \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-\frac{13}{42}; \\ y=\frac{67}{42}; \\ z=-\frac{43}{42}. \end{cases}$$

Получится искомая точка $G\left(-\frac{13}{42};\frac{67}{42};-\frac{43}{42}\right)$ пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_2}=2\cdot x_G-x_M=2\cdot\left(-\frac{13}{42}\right)-1=-\frac{34}{21},$$

$$y_{M_2}=2\cdot y_G-y_M=2\cdot\frac{67}{42}-0=\frac{67}{21},$$

$$z_{M_2}=2\cdot z_G-z_M=2\cdot\left(-\frac{43}{42}\right)-(-2)=-\frac{1}{21}.$$

Таким образом, $M_2\left(-\frac{34}{21};\frac{67}{21};-\frac{1}{21}\right)$.

в) Согласно заданным условиям, исходная плоскость имеет вид: $-4x+y+z+1=0$.

Точка M_3 называется симметричной точке M относительно плоскости α, если плоскость α перпендикулярна отрезку MM_3 и проходит через его середину.

Находим уравнение прямой, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через точку $M(1;0;-2)$. Так как прямая перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве её направляющего вектора можно взять вектор нормали плоскости с координатами $(-4;1;1)$.

Уравнение этой прямой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x = 1-4\cdot t; \\ y = 0+t; \\ z = -2+t. \end{cases} \tag{2}$$

Далее найдём точку пересечения этой прямой с исходной плоскостью. Для этого необходимо подставить данные выражения x, y, z в уравнение плоскости и вычислить значение *t*.

$-4(1-4t)+(0+t)+(-2+t)+1=0$, откуда находим $t=-\dfrac{5}{14}$.

Далее подставить найденное значение *t* в систему уравнений (2).

$$\begin{cases} x = 1-4\cdot\dfrac{5}{14}; \\ y = 0+\dfrac{5}{14}; \\ z = -2+\dfrac{5}{14}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{7}; \\ y = -\dfrac{5}{14}; \\ z = -\dfrac{33}{14}. \end{cases}$$

Получится искомая точка $R\left(\dfrac{17}{7};-\dfrac{5}{14};-\dfrac{33}{14}\right)$ пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_3} = 2\cdot x_R - x_M = 2\cdot\frac{17}{7}-1=\frac{27}{7},$$

$$y_{M_3} = 2\cdot y_R - y_M = 2\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)-0=-\frac{5}{7},$$

$$z_{M_3} = 2\cdot z_R - z_M = 2\cdot\left(-\frac{33}{14}\right)-(-2)=-\frac{19}{7}.$$

Таким образом, $M_3\left(\dfrac{27}{7};-\dfrac{5}{7};-\dfrac{19}{7}\right)$.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2003.-240с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987.-320с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука,1984. 192с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш.шк. ,1996. 304с.
5. Сборник задач по математике для втузов: В 4 частях: Ч.1 / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2003.-288с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004.-240с.
7. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Проспект, 2011. -608с.
8. Гусятников П.Б. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985. -232с.

(12)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
О.Г.Локтионова
«___»__________2014г.

Интегрирование функций одной переменной. Приложения.

Методические указания по выполнению модуля-5

Курск 2014

УДК 517

Составители: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *К.В.Жилина*

Интегрирование функций одной переменной. Приложения: методические указания по выполнению модуля 5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап; Курск, 2014. 53 с., табл. 1. Рис.13. Библиогр.: с.53

Излагаются краткие методические рекомендации по темам математического анализа: неопределенные интегралы и методы их решения, определенный интеграл и его вычисления, несобственные интегралы, приложения определенных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Цель настоящего методического пособия – научить студента технике интегрирования и умению решать различные задачи на приложения определенных интегралов.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, где приводятся основные определения, формулы, теоремы без доказательств. При подборе задач авторы прежде всего исходили из учета тех трудностей, с которыми могут встретиться студенты на пути овладения методами интегрирования.

В работе приведены 52 примера с подробными решениями по указанной тематике. При вычислении площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объемов тел вращения решения иллюстрировались для наглядности рисунками и подробными пояснениями.

Данное пособие является приложением к модулю 5 «Интегрирование функций», в котором приведены индивидуальные задания по темам «Неопределенные интегралы», «Несобственные интегралы» и «Определенные интегралы и их приложения». Методическое пособие предназначено для студентов первого курса технических и экономических специальностей.

Авторы надеются, что это методическое издание поможет студентам в самостоятельной работе по выполнению модуля и изучению данного материала.

1. Неопределенный интеграл

1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем несколько определений, свойств интегралов, формул.

Функция F(x) называется *первообразной* для функции f(x) на отрезке [a,b], если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция имеет первообразную, то функции вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также являются первообразными.

Неопределенным интегралом от функции f(x) называется совокупность (или семейство) всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции и основывается на следующих правилах интегрирования:

а) $\int dF(x) = F(x) + C;$

б) $(\int f(x)dx)' = f(x);$

в) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

г) $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$ где C – постоянная;

д) $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx$

е) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$

ж) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $t = \varphi(x)$, то $\int f(t)dt = F(t) + C.$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t;

2) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

$u = g(x)$, u – новая переменная.

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C;$

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3) $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C;$

4) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C;$

5) $\int e^{x} dx = e^{x} + C;$

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

7) $\int \cos x dx = \sin x + C;$

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C;$

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C;$

10) $\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch} x + C;$

11) $\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh} x + C;$

12) $\int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth} x + C;$

13) $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \mathrm{th} x + C;$

14) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C;$

15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$

16) $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\, dx = \dfrac{1}{a} \mathrm{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$

17) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\, dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

18) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$

20) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C;$

21) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C;$

22) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

23) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

24) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C;$

25) $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C.$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8)dx$.

Решение. Используя свойства степеней и правила интегрирования, получим

$$\int\left(2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\cdot\int x^{-2}dx + 3\int x dx - 8\int dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} - 7\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 8\cdot x + C =$$

$$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

Решение. Правило ж) позволяет найти интеграл с помощью метода подведения функции под знак дифференциала. Исходный интеграл можно привести к формуле 2 из таблицы интегралов, преобразовав его следующим образом

$$\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot d(\ln x), \quad \text{где} \quad d(\ln x) = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx$$

Далее в качестве переменной выберем $t = \ln x$, тогда получим интеграл от степенной функции

$$\int \ln^3 x d(\ln x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sqrt{\sin x + 8}\cdot \cos x dx$.

Решение. Применяя тот же прием, что и в предыдущем примере, получим

$$\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx = \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x + 8) = \{t = \sin x + 8\} = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(\sin x + 8)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\sin x + 8) \cdot \sqrt{\sin x + 8} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (3x + 10)^{15} dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 3x + 10$, тогда $x = \frac{1}{3}(t - 10)$, $dx = \frac{1}{3}(t - 10)' dt = \frac{1}{3} dt$.

Отсюда получаем

$$\int (3x + 10)^{15} dx = \int t^{15} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{48} \cdot (3x + 10)^{16} + C.$$

Замечание. Можно было воспользоваться формулой е).

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{7x + 1}} dx$.

Решение. Выполним подстановку $t = \sqrt{7x + 1}$, тогда $7x + 1 = t^2$, $x = \frac{1}{7}(t^2 - 1)$, $dx = \frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1)' dt = \frac{2}{7} \cdot t dt$.

Применив формулу 17, имеем:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{7x + 1}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1) \cdot t} \cdot \frac{2}{7} \cdot t \cdot dt = 2\int \frac{1}{t^2 - 1^2} dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{7x + 1} - 1}{\sqrt{7x + 1} + 1}\right| + C.$$

1.2. Формула интегрирования по частям

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение данной формулы целесообразно в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение разных по смыслу функций – степенной и показательной, степенной и тригонометрической, показательной и тригонометрической, логарифмической и степенной и т.п.

При этом за u(x) обозначают такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден.

К таким интегралам, например, относятся

$\int P_n(x)\ln x\,dx,\ \int P_n(x)\cdot\sin\alpha x dx,$

$\int P_n(x)\cdot\cos\beta x dx,\ \int a^{kx}\cdot\sin\beta x dx,\ \int P_n(x)\cdot\arcsin x dx$ и т.д.,

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Пример 6. Найти интеграл $\int(2x+3)\cdot\sin x dx$.

Решение. Пусть $u=2x+3$, тогда $du=2\cdot dx$; $dv=\sin x dx$, тогда $v=-\cos x$.

По формуле интегрирования по частям находим

$$\int(2x+3)\cdot\sin x dx=-(2x+3)\cdot\cos x-\int(-\cos x)\cdot 2\cdot dx=$$

$$=-(2x+3)\cdot\cos x+2\sin x+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int x^3\cdot\ln x dx$.

Решение. Используя тот же прием интегрирования, что и в примере 6, получим

$$\int x^3\cdot\ln x dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x, & du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ dv=x^3\cdot dx, & v=\frac{x^4}{4}\end{matrix}\right\}=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C.$$

При отыскании некоторых интегралов формулу интегрирования по частям нужно применить несколько раз, прежде чем сведем его к табличному или получим исходный интеграл.

Пример 8. Найти интеграл $J=\int 3^x\cdot\cos 5x\cdot dx$.

Решение. Используем дважды формулу интегрирования по частям.

$$J=\int 3^x\cdot\cos 5x\cdot dx=\left\{\begin{matrix} u=3^x,\ \ du=3^x\cdot\ln 3\cdot dx \\ dv=\cos 5xdx,\ \ v=\dfrac{\sin 5x}{5}\end{matrix}\right\}=$$

$$=3^x\cdot\frac{1}{5}\cdot\sin 5x-\int\frac{1}{5}\cdot\sin 5x\cdot 3^x\cdot\ln 3dx=\left\{\begin{matrix} u=3^x,\ \ du=3^x\cdot\ln 3dx \\ dv=\sin 5xdx,\ \ v=-\dfrac{\cos 5x}{5}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x-\frac{1}{5}\cdot\ln 3\cdot\left(3^x\cdot\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)+\int\frac{\cos 5x}{5}\cdot 3^x\cdot\ln 3dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x-\frac{\ln^2 3}{25}\cdot\int 3^x\cdot\cos 5xdx.$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом J:

$$J=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x-\frac{\ln^2 3}{25}\cdot J\quad\text{или}$$

$$J+\frac{\ln^2 3}{25}\cdot J=\frac{3^x}{5}\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x,$$

$$\frac{25+\ln^2 3}{25}\cdot J=\frac{3^x}{25}(5\sin 5x+\ln 3\cdot\cos 5x),$$

$$J=\frac{3^x}{25+\ln^2 3}\cdot(5\sin 5x+\ln 3\cdot\cos 5x)+C.$$

1.3. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,\quad k\neq 1;$

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx;$

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}dx$,

где A, B, p, q, a – действительные числа.

На конкретных примерах покажем, как интегрируются простейшие дроби III и IV типов.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Решение. В квадратном трехчлене, содержащемся в знаменателе подынтегральной функции, выделим полный квадрат:

$$x^2-6x+18=(x^2-2\cdot 3\cdot x+9)+9=(x-3)^2+3^2.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18}=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+3^2}=\{t=x-3\}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C.$$

Использована формула 16 из таблицы интегралов.

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби такую линейную функцию, которая равнялась бы производной знаменателя:

$$(x^2+4x-1)'=2x+4,$$

$$5x+1=\frac{5}{2}(2x+4)-10+1=\frac{5}{2}(2x+4)-9.$$

Имеем

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-9}{x^2+4x-1}\,dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-1}-9\cdot \int \frac{dx}{x^2+4x-1}=J.$$

Заметим, что в первом из полученных интегралов $(2x+4)dx=d(x^2+4x-1)$. Введем новую переменную $t=x^2+4x-1$, получим табличный интеграл 3. Во втором интеграле в квадратном трехчлене выделим полный квадрат: $x^2+4x-1=(x+2)^2-5$, а интеграл сведем к табличному (формула 17). Тогда

$$J=\frac{5}{2}\int\frac{d(x^2+4x-1)}{x^2+4x-1}-9\cdot\int\frac{d(x+2)}{(x+2)^2-(\sqrt{5})^2}=$$

$$=\{t=x^2+4x-1, z=x+2\}=$$

$$=\frac{5}{2}\int\frac{dt}{t}-9\int\frac{dz}{z^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{5}{2}\ln|t|-9\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{5}}{z+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\ln|x^2+4x-1|-\frac{9}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+2-\sqrt{5}}{x+2+\sqrt{5}}\right|+C.$$

При интегрировании рациональных дробей IV типа необходимо воспользоваться, так называемой, рекуррентной формулой:

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=J_n;$$

$$J_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot J_{n-1}.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=J_2$

Решение. Здесь $n=2$; $a^2=4$. После применения рекуррентной формулы получим

$$J_2=\int\frac{dx}{(x^2+4)^2}=\frac{x}{2\cdot4\cdot(2-1)\cdot(x^2+4)^{2-1}}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot J_1=$$

$$=\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{8}\cdot\int\frac{dx}{x^2+4}=\frac{x}{8(x^2+4)}+\frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$$

Если $n>2$, то рекуррентной формулой нужно пользоваться несколько раз, пока интеграл не будет сведен к табличному.

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала в числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, далее разобьем интеграл на сумму двух, один из которых легко свести к табличному, а другой найдем по рекуррентной формуле:

$$d(x^2+4x+5)=(2x+4)dx.$$

$$\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{\frac{1}{2}(2x+4)+3}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}+\frac{3}{(x^2+4x+5)^2}.$$

Имеем

$$\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}\,dx+\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}+3\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+1)^2}=$$

$$=\{x^2+4x+5=t;\quad x+2=z\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+3\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+3\cdot\left(\frac{z}{2\cdot1\cdot(z^2+1)}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot\int\frac{dz}{z^2+1}\right)=$$

$$=\frac{-1}{2t}+\frac{3z}{2(z^2+1)}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}z+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+\frac{3(x+2)}{2(x^2+4x+5)}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x+2)+C.$$

Если под знаком интеграла стоит сложная рациональная функция, то с ней предварительно выполняют следующие преобразования:

1) если рациональная дробь неправильная, то сначала представляют ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби $\frac{Q(x)}{P(x)}$;

2) многочлен, стоящий в знаменателе рациональной функции, следует разложить на линейные и квадратичные множители в зависимости от того, каковы корни этого многочлена

$$P(x)=(x-a)^m\cdot\ldots\cdot(x^2+px+q)^n\cdot\ldots,$$

где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, а p и q – действительные числа;

3) правильную рациональную дробь $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ (степень многочлена

$P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$) раскладывают на простейшие дроби:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\ldots+$$

$$+\frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}}+\ldots+\frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q};$$

4) вычисляют неопределенные коэффициенты $A_1, A_2,\ldots,$ $B_1, C_1,\ldots,\ B_n, C_n$.

В конечном итоге интегрирование рациональной функции сводится к отысканию интеграла от суммы многочлена и простейших рациональных дробей.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Поясним это на примерах.

Пример 13. $\dfrac{5x^2+14}{(x-1)(x+3)(x+5)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+3}+\dfrac{C}{x+5}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некратному корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа.

Пример 14. $\dfrac{7x^2+8x-1}{(x+3)^4}=\dfrac{A}{(x+3)^4}+\dfrac{B}{(x+3)^3}+\dfrac{C}{(x+3)^2}+\dfrac{D}{x+3}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

Пример 15. $\dfrac{5x^2+2x+4}{(x^2+x+1)(x^2+x+5)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+5}.$

Дробь правильная, множители знаменателя неприводимые, т.к. $D_1 = 1 - 4 < 0$, $D_2 = 1 - 20 < 0$, многочлен 4-ой степени в знаменателе имеет две пары комплексно-сопряженных различных корней.

Пример 16. $\dfrac{3x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$.

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет комплексные корни, является кратной парой комплексно-сопряженных корней.

Пример 17.

$$\frac{3x^4 + 7x - 1}{(x + 2)x^2(x^2 + x + 5)^2(x^2 - x + 2)} =$$

$$= \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + F}{(x^2 + x + 5)^2} + \frac{Cx + E}{x^2 + x + 5} + \frac{Lx + M}{x^2 - x + 2}.$$

Данное представление правильной рациональной дроби вытекает из анализа примеров 13–16.

Коэффициенты A, B, C, D, … в разложении правильных рациональных дробей на простейшие дроби можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. Суть его в следующем. Приводя дроби к общему знаменателю, получим равные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Пример 18. Найти $\int \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} = \frac{x(x + 2) + 5}{x + 2} = x + \frac{5}{x + 2}.$$

$$\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx = \int (x + \frac{5}{x + 2}) dx = \frac{x^2}{2} + 5 \ln|x + 2| + C.$$

Пример 19. Найти $\int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие:

$$\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{7x-3}{(x^3-x^2)+(x-1)}=\frac{7x-3}{x^2(x-1)+(x-1)}=$$

$$=\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Сравним четвертую дробь и последнюю. Два многочлена считаются равными, если будут равны коэффициенты при одинаковых сте-
пенях x:

$$7x-3=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(x^2+1)$$

$$7x-3=(A+C)x^2+(-A+B)x+C-B.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0, \\ x & -A+B=7, \\ x^0 & C-B=-3 \end{array}\Bigg\}$$

Складывая все три равенства, получим

$2C=4$ или $C=2$.

Из первого уравнения системы $A=-C$ или $A=-2$.

Из второго уравнения системы получим

$B=7+A$ или $B=7-2=5$.

Следовательно,

$$\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}.$$

В результате получаем

$$\int\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{2x}{x^2+1}dx+5\int\frac{dx}{x^2+1}+2\ln|x-1|=$$

$$=-\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+5\operatorname{arctg}x+2\ln|x-1|=$$

$$= -\ln(x^2+1) + 5\operatorname{arctg}x + 2\ln|x-1| + C =$$

$$= 5\operatorname{arctg}x + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + C.$$

Пример 20. Найти $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы целой части и правильной дроби. Предварительно поделим эту дробь «уголком»

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5-8x^3+16x} & x \\ 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Получим

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x^2-4)^2} =$$

$$= x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = x + \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Дроби с равными знаменателями будут равны, если равны и их числители.

$$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем комбинированным методом: A и C – методом подстановки, а B и D – методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $x=-2$, тогда

$8\cdot(-2)^3 + 16\cdot 2 + 1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 16 + D\cdot 0$ или

$16C = -31;$ $\quad\quad C = -\frac{31}{16}.$

Пусть $x = 2$, тогда

$$8 \cdot 2^3 - 16 \cdot 2 + 1 = 16A + B \cdot 0 + C \cdot 16 + D \cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16A = 33; \qquad A = \frac{33}{16}.$$

Преобразуем выражение

$$A(x-2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x-2)^2(x+2) =$$

$$= A(x^2 - 4x + 4) + B(x^3 + 2x^2 - 4x + 8) + C(x^2 - 4x + 4) +$$

$$+ D(x^3 - 2x^2 - 4x + 8) = (B + D)x^3 + (A + 2B + C - 2D)x^2 +$$

$$+ (-4A - 4B - 4C - 4D)x + (4A + 8A + 4C + 8D)$$

или

$$8x^3 - 16x + 1 = (B + D)x^3 + (A + 2B + C - 2D)x^2 +$$

$$+ (-4A - 4B - 4C - 4D)x + 4A + 8B + 4C + 8D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B, C и D.

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & B + D = 8, \\ x^2 & A + 2B + C - 2D = 0, \\ x & -4A - 4B - 4C - 4D = -16, \\ x^0 & 4A + 8B + 4C + 8D = 1 \end{array}\right\}$$

Учитывая, что $A = \frac{33}{16}$, $C = -\frac{31}{16}$, воспользуемся только первым и вторым уравнениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} D = 8 - B, \\ \frac{33}{16} + 2B - \frac{31}{16} - 2(8 - B) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D = \frac{129}{32}, \\ B = \frac{127}{32}. \end{cases}$$

Далее найдем исходный интеграл

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^4 - 8x^2 + 16} dx =$$

$$= \int (x + \frac{33}{16} \cdot \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{127}{32} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{31}{16} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{129}{32} \cdot \frac{1}{x+2})\, dx =$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\cdot\frac{1}{x+2}+C.$$

Пример 21. Найти $\int\frac{x^3}{(x+5)^5}\,dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной: $x+5=t;\ x=t-5;\ dx=dt$.

Тогда

$$\int\frac{x^3}{(x+5)^5}\,dx=\int\frac{(t-5)^3}{t^6}dx=\int\frac{t^3-15t^2+75t-125}{t^6}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^3}-15\cdot\frac{1}{t^4}+75\cdot\frac{1}{t^5}-125\cdot\frac{1}{t^6}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{15}{-3t^3}+\frac{75}{-4t^4}-\frac{125}{-5t^5}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x+5)^2}-\frac{5}{(x+5)^3}-\frac{75}{4(x+5)^4}+\frac{25}{(x+5)^5}+C.$$

1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t=\omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x.

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения.*

1) ***Интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$,

где R означает рациональную функцию от двух аргументов,

$m \in N, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные.

Полагаем,

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \; x = \varphi(x) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Интеграл приводится к виду

$$\int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

здесь $R, \varphi(t), \varphi'(t)$ – рациональные функции.

Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \ldots\right) dx,$$

где показатели r, s,… – рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$.

Пример 22. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}, \\ x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}, \; dx = \dfrac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{t \cdot (-6t^2) dt}{\left(\dfrac{t^3+1}{t^3-1} + 1\right)(t^3-1)^2} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \frac{-3dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

2) *Интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы сводятся к табличному, если в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

Пример 23. Найти $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен

$x^2-6x+8=(x-3)^2-1;\quad x-3=t,\quad x=t+3,\quad dx=dt$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\left\{\begin{matrix}\text{табличный}\\ \text{интеграл 19}\end{matrix}\right\}$$

$$=\ln|\,t+\sqrt{t^2-1}\,|+C=\ln|\,x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\,|+C.$$

3) *Интегралы вида* $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$**.**

Для отыскания этого интеграла в числителе необходимо выделить такую линейную функцию, которая равнялась бы производной квадратного трехчлена. Далее разбиваем интеграл на сумму двух, один из которых табличный, а второй рассмотрен в предыдущем пункте.

Пример 24. Найти $\displaystyle\int\frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$(-x^2+4x+5)'=-2x+4$.

$$7x+2=-\frac{7}{2}(-2x+4-4)+2=-\frac{7}{2}(-2x+4)+16.$$

Тогда

$$\int \frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = \int \frac{-7/2(-2x+4)+16}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{(-2x+4)dx}{-x^2+4x+5} + 16\cdot\int \frac{dx}{-x^2+4x+5} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (-2x+4)dx = d(-x^2+4x+5) \\ -x^2+4x+5 = -(x^2-4x+4-4)+5 = -(x-2)^2+9 \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{d(-x^2+4x+5)}{\sqrt{-x^2+4x+5}} + 16\cdot\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} =$$

$$= \left\{ -x^2+4x+5 = t;\ \ x-2 = z \right\} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 16\int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = -7\sqrt{t} + 16\arcsin\frac{z}{3} + C =$$

$$= -7\sqrt{-x^2+4x+5} + 16\arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

4) *Интегралы вида* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\ (a \neq 0)$

Эти интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

I –я подстановка Эйлера. Если $a > 0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x + t$.

Для определенности рассмотрим случай

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$. Тогда

$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\cdot x\cdot t + t^2,\quad x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}$, то

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t = \sqrt{a}\cdot\dfrac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t$ – рациональная функция от t, dx также выражается рационально через t.

II-я подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}.$$

Для определенности считаем, что перед c стоит знак «+». Тогда

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c, \quad x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}.$$

При этом dx и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ выражаются рационально через t, поэтому $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$ сводится к интегралу рациональной функции зависящей от t.

Пример 25. Найти интеграл $\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}}dx.$

Решение. Применим 2-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1; \; 1 + x + x^2 = x^2t^2 + 2xt + 1,$$

$$x = \frac{2t - 1}{1 - t^2}, \quad dx = \frac{2t^2 - 2t + 2}{(1 - t^2)^2}dt;$$

$$\sqrt{1 + x + x^2} = xt + 1 = \frac{t^2 - t + 1}{1 - t^2}, \quad 1 - \sqrt{1 + x + x^2} = \frac{-2t^2 + 1}{1 - t^2}.$$

$$\int \frac{(1 - \sqrt{1 + x + x^2})^2}{x^2\sqrt{1 + x + x^2}}dx = \int \frac{(-2t^2 + t)^2(1 - t^2)^2 \cdot (1 - t^2)(2t^2 - 2t + 2)}{(1 - t^2)^2(2t - 1)^2(t^2 - t + 1)(1 - t^2)^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1 - t^2}dt = -2\int \frac{-t^2 + 1 - 1}{1 - t^2}dt = -2\int \left(1 + \frac{2}{1 - t^2}\right)dt =$$

$$= -2t + \ln\left|\frac{t + 1}{1 - t}\right| + C,$$

где $t = \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{x}.$

III-я подстановка Эйлера. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни α и β. Тогда $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$

сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью замены

$$a \neq 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad \text{или}$$

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t, \qquad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}.$$

1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m,n,p – рациональные числа, a,b – постоянные величины.

Рассмотрим интеграл $\int x^m (a + bx^n)^p dx$. (1.5)

1) n – целое число. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции от t, если положить $t = \sqrt[\lambda]{x}$, λ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, тогда рационализации подынтегрального выражения можно достигнуть, используя замену

$t = \sqrt[\nu]{a + bx^n}$, ν – знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое.

Замена $t = \sqrt[\nu]{ax^{-n} + b}$, ν – знаменатель дроби p, позволяет рационализировать подынтегральную функцию в исходном интеграле.

Эти случаи интегрируемости были известны еще Ньютону. Однако, только в середине прошлого столетия П.Л.Чебышев установил факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет. Поэтому подстановки 1-3 называют *подстановками Чебышева*.

Пример 26. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx$.

$m=-1,\ n=5,\ p=-\frac{1}{3};\quad \nu=3.$

Применим II подстановку Чебышева, т.к. $\frac{m+1}{n}=0$ – целое число

$$t=\sqrt[3]{1+x^5},\quad 1+x^5=t^3,\quad x=(t^3-1)^{1/5};\quad dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}dt.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int \frac{tdt}{t^3-1} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$=\left\{(t^2+t+1)'=2t+1,\quad t-1=\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{dt}{t^2+t+1}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{10}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\cdot\frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 27. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Подынтегральную функцию можно записать в виде $x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}$. Здесь $m=-3;\ \ n=3;\ \ p=-\frac{1}{3}$ и $\frac{(m+1)}{n}+p=\frac{(-3+1)}{3}-\frac{1}{3}=-1$ – целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Произведем замену переменной: $2x^{-3}-1=t^3$, тогда $d(2x^{-3}-1)=dt^3$ или $-6x^{-4}dx=3t^3dt$ или $x^{-4}dx=-\frac{1}{2}t^2dt$.

Преобразуем исходный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=\int x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx=\int x^{-3}\cdot\left(x^3(2x^{-3}-1)\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int x^{-3}\cdot x^{-1}\cdot(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}dx=\int(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}x^{-4}dx=$$

$$=\int(t^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt=-\frac{1}{2}\int tdt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{4}t^2+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x^{-3}-1)^2}+C=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^2}+C=-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$$

1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

1) ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Применим так называемую универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

С помощью указанной подстановки интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3\sin x+2}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{3\sin x+2}=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}+2}=\int \frac{dt}{t^2+3t+1}=\int \frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right|+C=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right|+C.$$

2) *Интегралы вида* $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ или $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx$.

а) $\int R(\sin x)\cdot\cos x dx$ приводится к $\int R(t)dt$ с помощью подстановки $\sin x=t, \cos x dx=dt.$

б) $\int R(\cos x)\cdot\sin x dx$ приводится к $\int(-R(t)dt)$, если $\cos x=t$, $\sin x dx=-dt.$

3) *Интегралы вида* $\int R(\operatorname{tg}x)dx,\quad \int R(\sin^{2k}x,\cos^{2m}x)dx$.

Если подынтегральная функция зависит только от tgx или только от sinx и cosx, входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$\operatorname{tg}x=t,\ \ x=\operatorname{arctg}x,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{1}{1+t^2};\qquad \sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

Пример 29. $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \{tgx = t\} = \int \frac{dt}{\left(3+\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{4t^2+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2tgx}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

4) *Интегралы вида* $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а) m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности n-нечетное. Тогда полагаем $n = 2p + 1$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int sim^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \cdot (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \{\sin x = t\} = \int t^m \cdot (1-t^2)^p dt = \int R(t)dt.$$

б) m и n – неотрицательные, четные числа. Полагаем $m = 2p$, $n = 2q$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие $\cos 2x$ как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями cos2x интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней cos2x снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 30. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)\, d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

.

Пример 31. Найти интеграл $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 6x)(1+\cos 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 6x) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1+\cos 12x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin(12x)}{12} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin(12x) + C.$$

в) m и n – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену $\mathrm{tg}x = t$ (или $\mathrm{ctg}x = t$).

Пример 32. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx =$

$$= \int \mathrm{tg}^2 x \cdot (\mathrm{tg}^2 x + 1)^2 dx = \left\{\begin{matrix} \mathrm{tg}x = t;\ x = \mathrm{arctg}\, t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix}\right\} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2(1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} + C.$$

5) *Интегралы вида* $\int \cos mx \cdot \sin nx dx;\ \int \cos mx \cdot \cos nx dx;$ $\int \sin mx \cdot \sin nx dx \quad (m \neq n)$.

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

Тогда

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)]dx =$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично вычисляются два других интеграла.

Пример 33. Найти интеграл $\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx$.

Решение:

$$\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

2. Определенный интеграл

2.1. Определение и свойства определенного интеграла

Пусть на сегменте [a,b] задана функция f(x). Выполним следующие операции:

1. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ разобьем [a,b] на n малых сегментов: $[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; ...; [x_{k-1}, x_k]; ...[x_{n-1}, x_n]$; $x_0 = a$, $x_n = b$.

2. На каждом малом сегменте выберем произвольную точку ξ_k, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, составим произведение $f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$.

3. Составим, так называемую, интегральную сумму всех таких произведений

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k .$$

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма J_n, когда $\max \Delta x_k$ стремится к нулю.

Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами (границами) интегрирования, f(x) – подынтегральной функцией, а интервал [a,b] – областью интегрирования.

Функция f(x), для которой существует конечный $\int_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на промежутке [a,b], причем указанный предел не зависит ни от способа разбиения сегмента [a,b] на части, ни от выбора точек ξ_k в каждой из них.

В теореме существования определенного интеграла указывается на то, что всякая непрерывная на промежутке [a,b] функция f(x) является интегрируемой на нем.

Впредь подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

Без подробных объяснений приведем некоторые свойства определенных интегралов.

1. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$.

2. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const}.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in (a, b)$.

4. Если $f(x) \ge 0$ на [a,b], то $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

5. Если $f(x) \le g(x)$ для $\forall x \in [a, b]$, то

а) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

б) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$

6. Теорема о среднем: $\exists \xi \in [a,b]$,

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, где $f(x)$ – непрерывна на [a,b].

7. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

8. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2.2. Методы вычисления определенного интеграла

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано в большими трудностями даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются простыми. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Ниже будет сформулирована теорема Ньютона-Лейбница, позволяющая сводить вычисления определенного интеграла к неопределенному. Эта теорема играет фундаментальную роль в математическом анализе (см.подробнее [1] с.397).

2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть f(x) непрерывна на сегменте [a,b] и F(x) – одна из ее первообразных, тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 34. Вычислить $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$.

Решение. Используя формулу Ньютона-Лейбница, а также табличный интеграл 16, получим

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}1 - \operatorname{arctg}0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле

а) Необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$,

где f(x) непрерывная функция на [a,b].

Перейдем к новой переменной t, полагая $x = \varphi(t)$. Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, кроме того, при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы сегмента [a,b]. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta]$, то справедлива следующая формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 35. Вычислить $\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\,dx$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x-2)^2.$$

Введем новую переменную: $x - 2 = \sin t$, тогда $x = 2 + \sin t$,

$dx = d(2 + \sin t)$ или $dx = (2 + \sin t)'dt = \cos t\,dt$.

Найдем пределы интегрирования новой переменной t:

если $x_1 = 2$, то $0 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0$

если $x_2 = 3$, то $1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}dx = \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что в данном случае при применении формулы замены переменной отпадает необходимость возвращения к старой переменной x по сравнению с неопределенным интегралом. Это вполне объяснимо, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число, в то время как неопределенный интеграл от той же самой функции есть некоторая функция.

б) Часто вместо замены переменной $x = \varphi(t)$ употребляют обратную замену переменной $t = g(x)$. На конкретном примере покажем, как это делается.

Покажем это на конкретном примере.

Пример 36. Вычислить $\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}$.

Решение. Пусть $t = \ln x$, тогда $\frac{1}{x}dx = d\ln x = dt$.

Если $x_1 = 1$, то $t_1 = \ln 1 = 0$, если $x_2 = e$, то $t_2 = \ln e = 1$.

Следовательно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{5+\ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5+t} = \ln|t+5|\Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 =$$

$$= \ln\frac{6}{5} = \ln 1{,}2.$$

2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на [a,b], тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 37. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Решение. Применим полученную формулу

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x, \ \ du = \dfrac{1}{x} dx \\ dv = x^2 dx, \ v = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Подробнее о методах интегрирования в определенном интеграле см.[1] с.399-403.

3. Несобственные интегралы

Определение определенного интеграла, его свойства и методы интегрирования рассматривались в предположении, что промежуток интегрирования [a,b] конечен и функция f(x) непрерывна на нем.

Иногда приходится отказываться от одного или обоих этих предположений. В этом случае мы приходим к понятию несобственного интеграла.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$.

Несобственным интегралом от функции f(x) по промежутку $[a;+\infty)$ называется $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если $f(x) > 0$ на $[a,+\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$, то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$ и бесконечным интервалом $[a;+\infty)$.

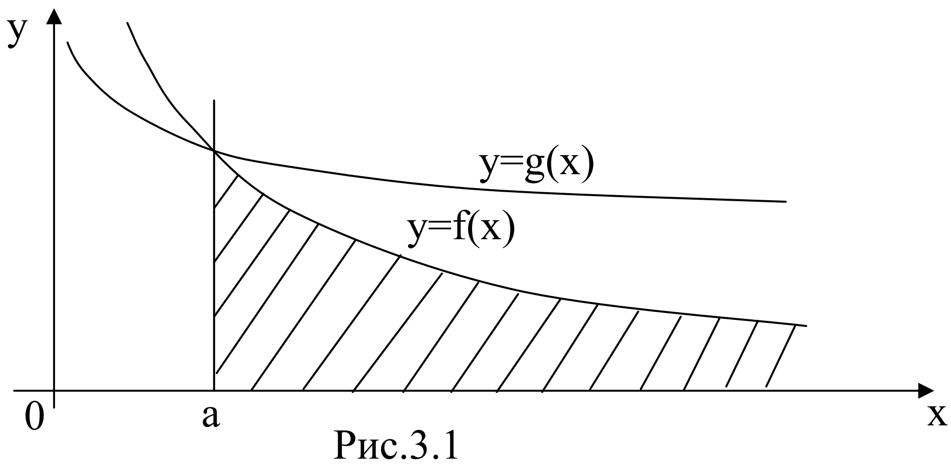


Рис.3.1

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке (–∞; b]:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx,$$

а на интервале $(-\infty;+\infty)$ определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to +\infty$.

Так, например, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

В этом легко убедится, вычислив $\int\limits_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$, если $A \to +\infty$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\int\limits_1^A \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^A = \ln A - \ln 1 = \ln A \to +\infty$ при $A \to \infty$, поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int\limits_1^A \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_1^A = -\frac{1}{A} + 1$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$ – несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ и бесконечным промежутком $[1; +\infty)$, является конечной и равна 1.

Пример 38. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} x\cdot e^x dx = \left\{\begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}\left(x\cdot e^x\Big|_{\beta}^{0} - \int_{\beta}^{0} e^x dx \right) = \lim_{\beta\to-\infty}(x\cdot e^x - e^x)\Big|_{\beta}^{0} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}(0 - \beta\cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}} \right) = -1.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 39. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c = -2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{-2}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_{-2}^{A}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Big|_{B}^{-2} + \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Big|_{-2}^{A} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{B\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}0\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

Признак сравнения. Пусть в промежутке $[a; +\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$. Если интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ также расходится.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для несобственных интегралов и по другим бесконечным пределам интегрирования.

Пример 40. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Решение. Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \le x < +\infty).$$

Но $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3$ (см. рассуждения выше). Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

3.2 Несобственные интегралы от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв II рода на [a,b] либо в точках a и b, либо в точке $c \in (a,b)$, тогда несобственные интегралы от разрывной функции определяются следующим образом:

1) $x = a$ – точка разрыва, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx;$$

2) $x = b$ – точка разрыва, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

3) $x = c,\ c \in (a,b)$, c – точка разрыва, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае расходящимися.

Признак сравнения. Пусть функции f(x) и g(x) в промежутках [a,b) непрерывны, а в точке $x = b$ имеют разрыв II рода; кроме того $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int_a^b g(x)$ сходится, то сходится $\int_a^b f(x)dx$.

Если $\int_a^b f(x)$ расходится, то расходится $\int_a^b g(x)dx$.

Пример 41. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ имеет разрыв II рода, поэтому

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^3 \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^3 = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1}+\frac{1}{-1}\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-1}+\frac{1}{1+\varepsilon-1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right) = \infty + \infty = \infty$$

.

Интеграл расходящийся.

Пример 42. Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\int_0^1 \frac{2x + \mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \mathrm{sh}x}}dx.$$

Решение. При $x = 0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка (0;1] подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что $(2x + \mathrm{ch}x)dx = d(x^2 + \mathrm{sh}x)$,

$$\int \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx = \int (x^2+\mathrm{sh}x)^{-\frac{1}{4}}\, d(x^2+\mathrm{sh}x) = \{x^2+\mathrm{sh}x = t\} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x} + C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

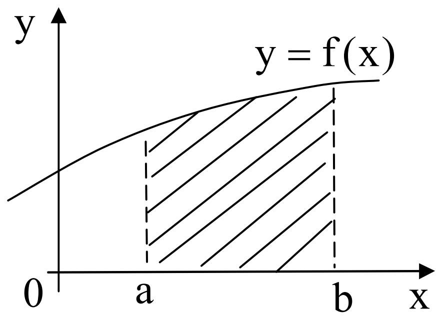
$$= \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[4]{1+\mathrm{sh}1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2+\mathrm{sh}\,\varepsilon}\right) = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{1+\mathrm{sh}1}.$$

Интеграл сходящийся.

4. Приложения определенного интеграла

4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

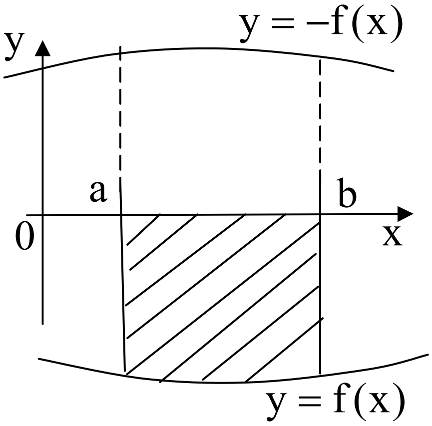
Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на [a,b], $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис.4.1).



$$S = \int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

Рис.4.1

Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис.4.2), то из соображений симметрии видим, что



$$S=-\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2)$$

Рис.4.2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (4.1) или (4.2) (рис.4.3. и 4.4)

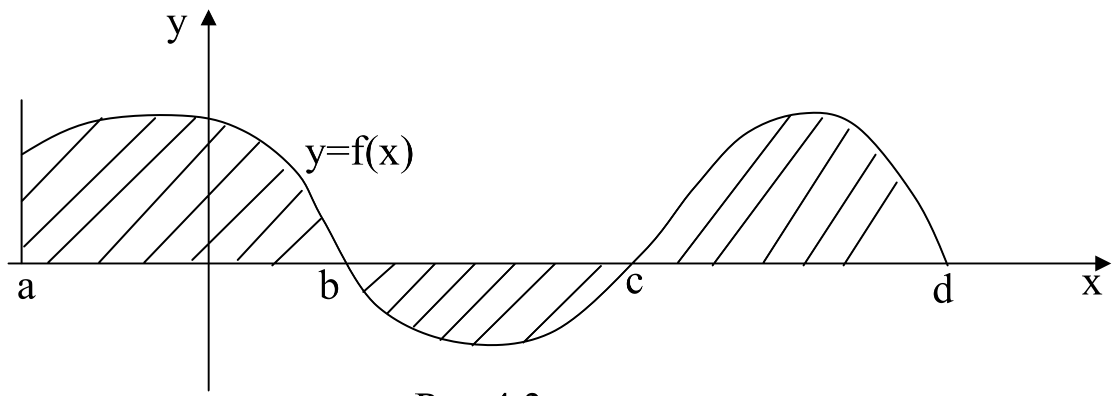
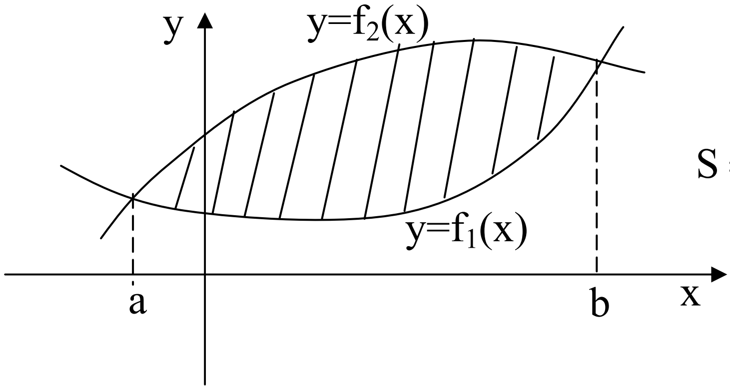


Рис.4.3

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_b^c f(x)dx+\int_c^d f(x)dx \qquad (4.3)$$



$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx \qquad (4.4)$$

Рис.4.4

Пример 43. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1; 1)$ – вершина параболы.

$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $\quad x = 0;\ x = 2$.

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $\quad x_1 = 0;\ x_2 = 3$.

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4.4)

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (кв.ед.)}.$$

Рис.4.5

Пример 44. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис.4.6)

$x^2 + y^2 = 8$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{8}$.

$y^2 = 2x$ – парабола, имеющая вершину в т.O(0,0)

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

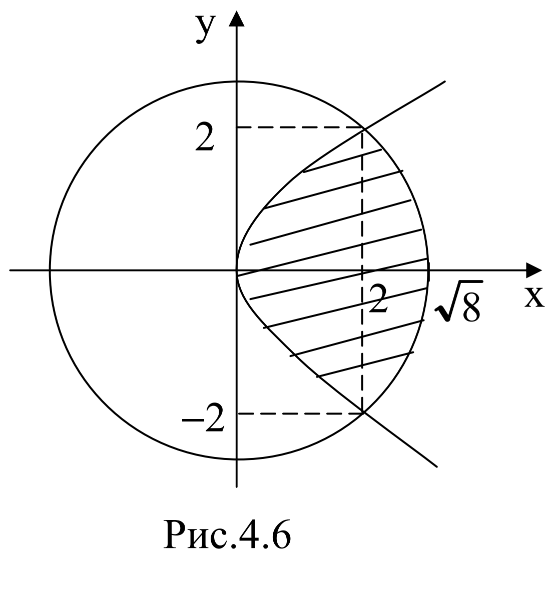


Рис.4.6

$$\begin{cases} y^2 = 8 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \quad 8 - x^2 = 2x \quad \Rightarrow \begin{matrix} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x_1 = -4; x_2 = 2 \end{matrix}$$

$x = -4$ – не удовлетворяет условию $y^2 = 2x$.

Если $x = 2$, то $y^2 = 4$ или $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Найдем площадь заштрихованной области по формуле (4.4), в которой изменены переменные интегрирования:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \sqrt{8 - y^2};$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2\int_{0}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{8}\sin t; \quad dy = \sqrt{8}\cos t\, dt \\ \text{Если } y = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{Если } y = 2, \text{ то } 2 = \sqrt{8}\,\sin t,\ \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$= 2\int_{0}^{2} \sqrt{8 - y^2} dy - \frac{y^3}{3}\bigg|_0^2 = 2\int_{0}^{2} \sqrt{8 - y^2} dy - \frac{8}{3} =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cdot \sqrt{8}\cos t dt - \frac{8}{3} = 16\int_{0}^{\pi/4} \cos^2 t dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4} (1 + \cos 2t) dt - \frac{8}{3} = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\bigg|_0^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{кр.} = \pi R^2; \quad S_{кр.} = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{кр.} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $y = b$ и отрезком [a,b] оси OX, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt, \tag{4.5}$$

где $t_1 \le t \le t_2$, $y(t) \ge 0$, t_1 и t_2 определяются из условий $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример 45. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.5). Предварительно найдем $x'(t)$:

$$x'(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t).$$

$$S = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - 0 = 3a^2\pi \text{ (кв.ед.)}$$

4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости $M(\varphi, r)$ определяется двумя координатами: полярным радиусом $r(r \geq 0)$ и полярным углом φ. Связь между декартовыми координатами (x,y) и полярными (φ, r) осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (рис.4.7), выражается интегралом

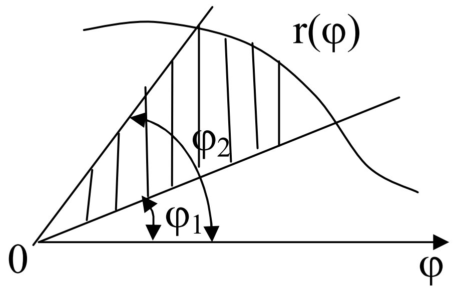


Рис.4.7

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (4.6)$$

Пример 46. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.6). Чтобы найти пределы интегрирования α и β, необходимо построить чертеж кривой $r = 2 + \cos\varphi$ в полярных координатах. Результаты вычислений занесем в таблицу 1.

Таблица 1

φ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$r = 2 + \cos\varphi$	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Так как функция $\cos\varphi$ – четная, то график функции $r = 2 + \cos\varphi$ строим симметрично относительно горизонтальной оси для значений углов из промежутка $\varphi \in (180^o, 360^o]$. Для построения графика функции при $\varphi \in [0; 180^{\circ})$ проводим полярную ось r; на лучах, составляющих с осью r углы, значение которых указано в таблице 1, откладываем соответствующее расстояние, затем точки последовательно соединяем. Получаем замкнутую кривую, называемую улиткой Паскаля (рис.4.8).

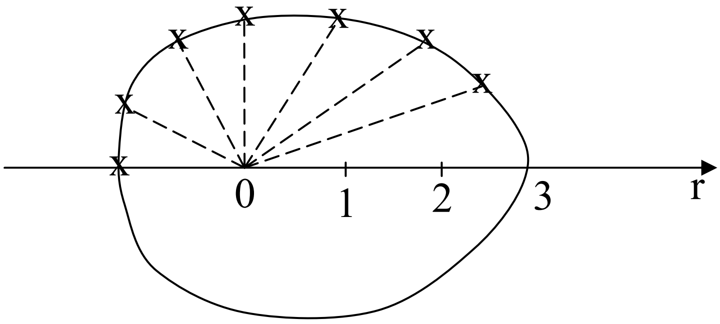


Рис.4.8

Площадь искомой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi}\left(4 + 4\cos\varphi + \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4{,}5\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = 4{,}5\pi \quad \text{(кв.ед.)}$$

4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть функция f(x) непрерывно дифференцируема на [a,b], тогда длина дуги кривой $y = f(x)$ на указанном промежутке вычисляется по формуле:

$$L = \int_{a}^{b}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{4.7}$$

Если кривая гладкая и задана параметрически, то длина дуги этой кривой при $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{4.8}$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ и $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина ее дуги равна

$$L=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4.9)$$

Пример 47. Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x=a(\cos t-t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t), \end{cases} \qquad 0\le t\le 2\pi.$$

Решение. В нашем случае кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой (4.8), предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

$$x'(t)=a(\cos t+t\sin t)'=a(-\sin t+\sin t+t\cos t)=at\cos t$$

$$y'(t)=a(\sin t-t\cos t)'=a(\cos t-\cos t+t\sin t)=at\sin t$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2t^2\cos^2 t+a^2t^2\sin^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}a\cdot\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}tdt=a\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=a\cdot\frac{4\pi^2}{2}=2a\pi^2 \text{ (ед.длины).}$$

Пример 48. Найти длину дуги кривой $r=3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

Решение. Кривая $y=3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$ задана в полярных координатах. Воспользуемся формулой (4.9). Находим $r'(\varphi)$

$$r'=\left(3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^{/}=3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{4}\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}.$$

$$r^2+(r')^2=9\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2+\frac{81}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2=\frac{225}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2$$

$$L=\int_0^{\pi/3}\sqrt{\frac{225}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2}\,d\varphi=\frac{15}{4}\int_0^{\pi/3}e^{\frac{3}{4}\varphi}d\varphi=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}\varphi}\Bigg|_0^{\pi/3}=$$

$$=5\cdot e^{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}}-5e^0=5\cdot(e^{\pi/4}-1) \text{ (ед.длины).}$$

4.5. Вычисление объема тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, может быть выражена функцией от x: $S = S(x)$ при $x \in [a, b]$, тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси OX плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx . \qquad (4.10)$$

Если криволинейную трапецию (рис.4.10) вращать вокруг оси OX, то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx . \qquad (4.11)$$

Если плоская область, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси OX, то

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \qquad (0 \le f_1(x) \le f_2(x)) \qquad (4.12)$$

Аналогично можно записать формулы для вычисления объемов тел вращения вокруг оси OY:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy, \qquad (4.13)$$

$$V_y = 2\pi\int_c^d x \cdot y(x)dx. \qquad (4.14)$$

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам (4.10 - 4.14) следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси (см.рис.5.7), то

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi . \qquad (4.15)$$

Пример 49. Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой $y = \mathrm{ch}x$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая $y = \text{ch}x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ называется цепной линией. График ее изображен на рис.4.9. Объем тела вращения (рис.4.10) вычислим по формуле (4.11)

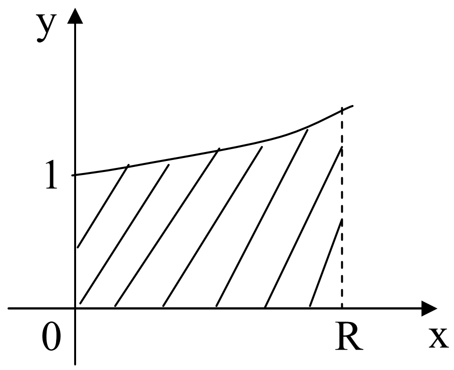


Рис.4.9

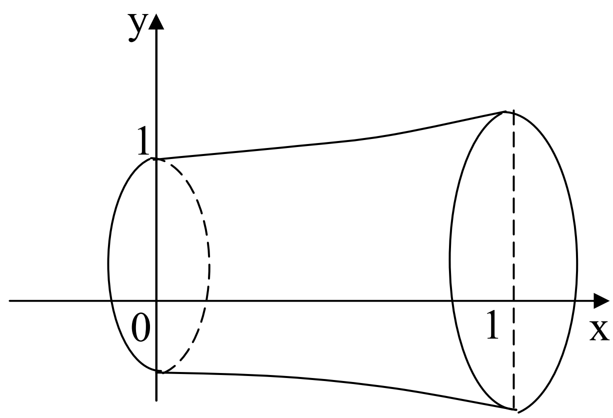


Рис.4.10

$$V_X = \pi\int_0^1 \text{ch}^2 x dx = \pi\int_0^1 \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2\cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})dx = \frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{e^{-2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^0}{2} + 0 - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left(2 + \frac{e^2 - e^{-2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}(2 - \text{sh}2).$$

Пример 50. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота – H.

Решение. Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси OY параболу $y = kx^2$, $0 \le y \le H$ (рис.4.11; 4.12), где параметр k легко вычислить исходя из данного условия.

Если $x = R$, то $y = H$, поэтому

$$H = kR^2 \Rightarrow k = \frac{H}{R^2} \Rightarrow y = \frac{H}{R^2}\cdot x^2.$$

Далее воспользуемся формулой (4.13)

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H x^2(y)dy.$$

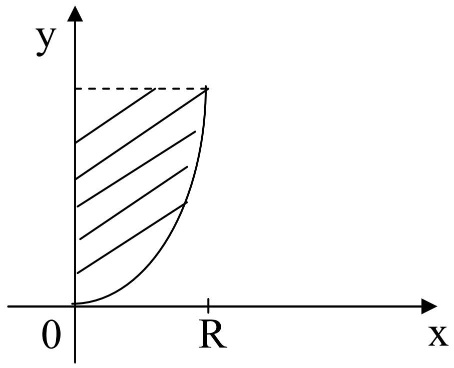


Рис.4.11

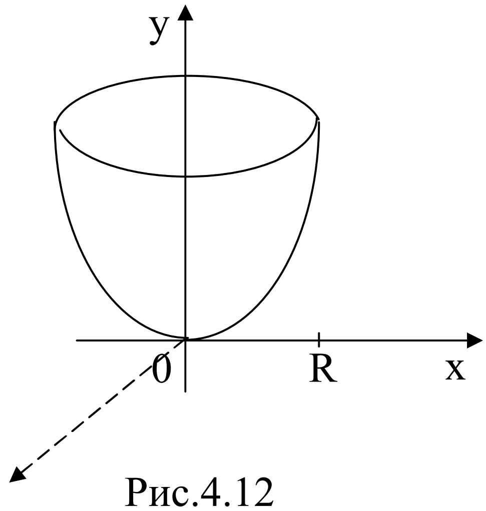


Рис.4.12

Если $y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2$, то $x^2 = \frac{R^2}{H} \cdot y$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot ydy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 H \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Пример 51. Найти объем тела вращения кривой $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая задана в параметрическом виде – это эллипс (рис.4.13). Искомой фигурой вращения является эллипсоид. Найдем V_X по формуле (4.11)

$$V_X = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

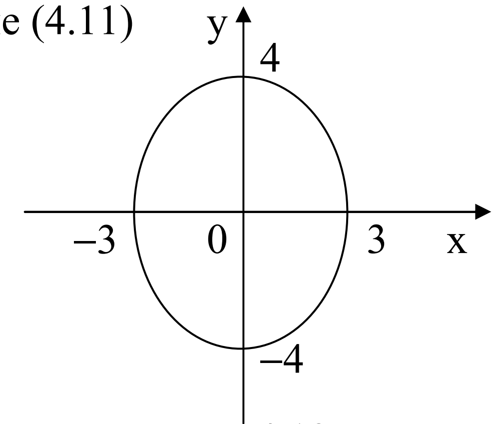


Рис.4.13

Если $x = -3$, то $3\cos t = -3$, $\cos t = -1$, $t_1 = \pi$.

Если $x = 3$, то $3\cos t = 3$, $\cos t = 1$, $t_2 = 0$.

$$V_X = \pi\int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi\int_{\pi}^{0} (4\sin t)^2 d(3\cos t) = \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \int_{\pi}^{0} (\sin t)^2 d(\cos t) =$$

$$= 48\pi\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t) = 48\pi\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} =$$

$$= 48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) - 48\pi\left(\cos\pi - \frac{\cos^3\pi}{3}\right) = 48\pi\cdot\frac{2}{3} - 48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 48\pi = 64\pi \text{ (куб.ед.).}$$

4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси OX, равна

$$Q_X = 2\pi\int_A^B |y|\, d\ell, \text{ где } d\ell \text{ – дифференциал дуги кривой.}$$

В зависимости от задания кривой – явное, в параметрическом виде или в полярных координатах – указанную формулу можно расписать так

$$Q_X = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (4.16)$$

$$Q_X = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (4.17)$$

$$Q_X = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4.18)$$

Пример 52. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $3y - x^3 = 0$, $0 \le x \le 1$.

Решение. $3y - x^3 = 0$ или $y = \frac{1}{3}x^3$

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

Воспользуемся формулой (4.16)

$$Q_X = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{1+(x^2)^2}\,dx = \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}\pi(2^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить и многие другие геометрические и физические характеристики фигур: статические моменты и моменты инерции плоских фигур, координаты центра тяжести дуг кривых и плоских фигур, работу, давление и пр. Подробнее об этом см. [2], Гл.XII, [2] §§6,7,8,9.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. 464.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. ТТ.1- 2, М.: Интеграл-Пресс, 2001,2002, 2007. - 416с., 544с, 416с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ЧЧ. 1-2. - М.: Высшая школа, 1980-2000. - 304с., 416с.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Курский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Первый проректор −
Проректор по учебной работе
______________ Е.А.Кудряшов
«____»____________2010г.

Дифференциальные уравнения

Индивидуальные задания к модулю 7.1

Курск 2010

УДК 519.24.001.5
ББК 22.1

Составители Е.А.Бойцова , Л.В.Карачевцева

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент Е.В.Журавлева

Дифференциальные уравнения [Текст]: индивидуальные задания к модулю 7.1 / Курск. гос. техн. ун-т; сост. Е.А.Бойцова, Л.В. Карачевцева. Курск, 2010. 51 с. табл. . Библиогр.: с.7.

В данной работе содержатся индивидуальные задания и методические указания, необходимые для выполнения работы.

Работа предназначена для студентов технических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,56. Уч.-изд. л. 0,52. Тираж 50 экз. Заказ …Бесплатно.
Курский государственный технический университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Важной формой обучения студентов является самостоятельная работа над учебным материалом, которая состоит из следующих элементов: изучение материала по конспектам лекций и учебникам, решение задач, самопроверка усвоения материала, выполнение индивидуальных заданий расчетно-графических, контрольных работ и типовых расчетов. Студент должен помнить, что только при систематической и упорной самостоятельной работе можно овладеть приемами и методами решения задач по математике.

Перед решением каждой задачи надо полностью выписать ее условие. Решение задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

Для подготовки студента к защите выполненной работы представлен список литературы, отражающий в полной мере теоретический материал по данной теме и методические указания по выполнению индивидуальных заданий.

При защите работы студент обязан объяснить решение любого примера из задания.

Желаем успеха!

1. Индивидуальные задания

1.1. Задание 1

Проверьте, что указанная функция $y = y(x)$ является решением уравнения

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
1	$y = \dfrac{C\sqrt{1-x^2} + x}{\sqrt{1-x^2} - Cx}$	$y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$
2	$y = -\ln(\tilde{N} - e^x)$	$y' = e^{x+y}$
3	$y = C \cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \dfrac{-xy}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$y = C\sqrt{1+e^{2x}}$	$y'(1+e^{2x}) = ye^{2x}$
5	$y^3 + y - x^2 + C = 0$	$y'(3y^2+1) = 2x$
6	$y = \sqrt{Cx^2 - 1}$	$yx \cdot y' = 1 + y^2$
7	$y = \dfrac{C+x}{1-Cx}$	$y'(1+x^2) = 1 + y^2$
8	$y = 1 + \dfrac{Cx}{1+x}$	$y - 1 = (x^2 + x)\,y'$
9	$y = \sqrt{C(1-x^2) - 1}$	$y'y(x^2-1) = x(y^2+1)$
10	$y = \dfrac{C}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}$	$y'(1+x^2) + (2y+1)\,x = 0$
11	$y = \sqrt{C - 1 - \dfrac{C}{x^2+1}}$	$xy(1+x^2)\,y' = 1 + y^2$
12	$y = \ln(C(1+x^2) - 1)$	$e^y(1+x^2)\,y' = 2x(1+e^y)$
13	$y = (x+C)\,e^x$	$y' - y = e^x$
14	$y = Ce^x - x - 1$	$y' = x + y$
15	$y = 1 + C \cdot e^{-x^3/3}$	$y' + x^2 y = x^2$

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
16	$y = e^{C\cdot tg(x/2)}$	$y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y$
17	$y - x = C(1 + xy)$	$1 + y^2 = (1 + x^2)\, y'$
18	$x^2(1 + y^2) = C$	$1 + y^2 + xy \cdot y' = 0$
19	$y = tg \ln Cx$	$1 + y^2 = xy'$
20	$\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + y^2} = C$	$x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$
21	$y = -\ln(1 + Ce^x)$	$e^{-y}(1 + y') = 1$
22	$1 + e^y = C(1 + x^2)$	$e^y(1 + x^2)\, y' = 2x(1 + e^y)$
23	$C + \frac{e^y}{y} = \ln(\ln x)$	$(1 - y)\, e^y \cdot y' + \frac{y^2}{x \ln x} = 0$
24	$2x^3y^3 = 3x^2 + C$	$xy^2(xy' + y) = 1$
25	$3x^2 - 12x + 2x^3y^3 + 6xy = C$	$x^2y^3 + y + x - 2 + (x^3y^2 + x)\, y' = 0$
26	$y^3 = Cx - \ln x - 1$	$\ln x + y^3 = 3xy^2 \cdot y'$
27	$y = \frac{Cx}{2õ + 1} + 2$	$y - xy' = 2(1 + x^2y')$
28	$y = x \cdot \sin(\ln Cx)$	$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$
29	$y^2 - 3xy + 2x^2 = C$	$4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$
30	$y = (x^2 + C)e^{-x^2}$	$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
31	$y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x - 1) + Ce^{-2x}$	$y' + 2y = x^2 + 2x$
32	$y = C\sqrt{x^2 + 2x - 1} + x$	$(x^2 + 2x - 1)\, y' - (x + 1)\, y = x - 1$
33	$y = -\left(\frac{1}{3}x^5 + Cx^2\right)^{-1}$	$xy' + 2y = x^5y^2$
34	$y = \frac{C - x^3}{2x - 3}$	$(2x - 3)\, y' + 3x^2 + 2y = 0$

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
35	$y = \dfrac{2x}{1 + Cx^2}$	$y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$
36	$y = (x + C)e^{x^5}$	$y' - 5x^4 y = e^{x^5}$
37	$y = 2x\sqrt{x} + Cx$	$xy' - y = x\sqrt{x}$
38	$y = \dfrac{\arcsin x + C}{x}$	$\sqrt{1 - x^2}(xy' + y) = 1$
39	$y = \dfrac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$	$y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$
40	$y = \ln x + \dfrac{C}{x}$	$xy' + y = \ln x + 1$
41	$y = \dfrac{1}{x(C + \ln x)}$	$y'x + y + xy^2 = 0$
42	$y = (1 + Ce^{x^2})^{-1/2}$	$y' + xy = xy^3$
43	$y = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2$	$y'' = \ln x$
44	$y = \dfrac{-1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$	$y'' = \sin 2x$
45	$y = C_1 x^3 + C_2$	$xy'' - 2y' = 0$
46	$y = C_1 \ln x + C_2$	$xy'' + y' = 0$
47	$y = C_1 x^2 + C_2$	$xy'' - y' = 0$
48	$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$	$y'' + 9y = 0$
49	$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$	$y'' - 9y = 0$
50	$y = e^{4x}(C_1 + x) + C_2$	$y'' - 4y' = 4e^{4x}$
51	$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{4}e^{2x}$	$y'' + 3y' + 2y = 3e^{2x}$
52	$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{5}{42}e^{5x}$	$y'' + 3y' + 2y = 5e^{5x}$
53	$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \dfrac{1}{24}\sin 5x$	$y'' + y = \sin 5x$

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
54	$y = C_1 + C_2 e^x - \frac{x^2}{2} - 5x$	$y'' - y' = x + 4$
55	$y = \ln(C + e^x)$	$y' = e^{x-y}$
56	$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + \frac{x}{3}$	$y'' + 3y' = 1$
57	$y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{9} - $ $- \frac{x^2}{9} - \frac{20x}{27}$	$y'' - 3y' = x^3 + 2$
58	$y = C_1 + C_2 e^{-x} + e^x\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)$	$y'' + y' = xe^x$
59	$y = \frac{C}{\cos x}$	$y' = y\,\mathrm{tg}x$
60	$y = \frac{-1}{3x + C}$	$y' = 3y^2$
61	$y = \sqrt{x^2 - Cx}$	$2xyy' = x^2 + y^2$
62	$y = x(C + \ln x)$	$xy' = x + y$
63	$y = -\ln(1 + Cx)$	$xy' + 1 = e^y$
64	$y = 3 + \frac{C}{x}$	$xy' + y = 3$
65	$y = \frac{e^x + C}{x}$	$xy' + y = e^x$
66	$y = Cx^3 - x^2$	$y' - \frac{3y}{x} = x$
67	$y = (x^2 + C)\,e^{-x^2}$	$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
68	$y = Cx^2 e^{1/x} + x^2$	$y' + \frac{1-2x}{x^2}\,y = 1$
69	$y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$	$y' + y = \cos x$

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
70	$y = \dfrac{C - \cos 2x}{2\cos x}$	$y'\cos x - y\sin x = \sin 2x$
71	$y = \ln x + \dfrac{C}{x}$	$xy' + y = \ln x + 1$
72	$y = \dfrac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$	$y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{e^{-x^2}}{x}$
73	$y = 2(\sin x - 1) + Ce^{-\sin x}$	$y' + y\cos x = \sin 2x$
74	$y = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{C}{x^2}$	$xy' + 2y = x^2$
75	$y = Cx^2 + e^x$	$y' - \dfrac{2}{x}y = \dfrac{e^x(x-2)}{x}$
76	$y = \dfrac{1}{(C - \ln x)x}$	$y'x + y = xy^2$
77	$y = \dfrac{e^{x^2/2}}{\sqrt{2x + C}}$	$y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$
78	$y = -\left(x + \dfrac{1}{2} + Cx^{2x}\right)^{\frac{-1}{2}}$	$y + y' = xy^3$
79	$y = (Ce^{x^2} + x^2 + 1)^{\frac{-1}{2}}$	$y' + xy = x^3 y^3$
80	$y = \dfrac{x}{C - \ln x}$	$x^2 y' = y^2 + xy$
81	$y = \dfrac{1}{Cx + 1 + \ln x}$	$xy' + y = y^2 \ln x$
82	$y = C\ln x + x^3$	$x\ln x \cdot y' - y = x^3(3\ln x - 1)$
83	$y = C\sqrt{x} + x^2$	$2xy' - y = 3x^2$
84	$y = C(x+1)^2 + \dfrac{1}{2}(x+1)^4$	$(x+1)y' = 2y + (x+1)^4$
85	$y = (x^2 + C)e^{x^2}$	$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
86	$y^3 = Cx^2 + x^3$	$3xy^2 y' - 2y^3 = x^3$

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
87	$y = \dfrac{Cx}{x^3+1} + \dfrac{1}{x}$	$(x^5 + x^2)\,y' + (2x^4 - x)y = x^3 - 2$
88	$y = Cx\ln x + \sqrt{x}$	$2x\ln x \cdot y' - 2(1+\ln x)y +$ $+\sqrt{x}(2+\ln x) = 0$
89	$y^4 = C(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$	$2y'\sqrt{x^2+x} = y$
90	$y = e^{x+x^2} + Ce^x$	$y' - y = 2xe^{x+x^2}$
91	$y = -x\cos x + Cx$	$xy' = y + x^2 \cdot \sin x$
92	$y = \dfrac{x}{Cxe^{x^2} + 1}$	$x^2y' + 2x^3y = y^2(1+2x^2)$
93	$y = \dfrac{x^2}{2} + C$	$(y')^2 - (2x+y)\,y' + x^2 + xy = 0$
94	$y = \dfrac{C}{x}$	$(xy')^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$
95	$y = \dfrac{C}{2}x^2 + \dfrac{1}{2C}$	$x(y')^2 - 2yy' + 2x = 0$
96	$y = 2x^2 + C$	$(y')^2 - 2xy' - 8x^2 = 0$
97	$y = x - \dfrac{1}{x+C}$	$y' = (x-y)^2 + 1$
98	$y = 2x - \dfrac{x^2}{2} + 2\ln(1-x) + C$	$x^2 + xy' = 3x + y'$
99	$y^2 = Cx^2 + x^4$	$xyy' - y^2 = x^4$
100	$y = C(2x-1) + \dfrac{1}{x}$	$x^2(2x-1)\,y' - 2x^2y = 1 - 4x$

1.2. Задание 2

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$
3. $\sqrt{4+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$
4. $\sqrt{3+y^2}\,dx - ydy = x^2ydy$
5. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$
6. $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$
7. $x\sqrt{3+y^2}\,dx + y\sqrt{2+x^2}\,dy = 0$
8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0$
9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$
10. $x\sqrt{5+y^2}\,dx + y\sqrt{4+x^2}\,dy = 0$
11. $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0$
12. $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$
13. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$
14. $x\sqrt{4+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0$
15. $(e^x + 8)dy - ye^xdx = 0$
16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$
17. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$
18. $y\ln y + xy' = 0$
19. $(1+e^x)y' = ye^x$
20. $\sqrt{1-x^2}\,y' + xy^2 + x = 0$
21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$

22. $y(1+\ln y)+xy'=0$
23. $(3+e^x)yy'=e^x$
24. $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}\,yy'=0$
25. $xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$
26. $\sqrt{5+y^2}\,dx+4(x^2y+y)dy=0$
27. $(1+e^x)yy'=e^x$
28. $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}\,dx=0$
29. $2xdx-ydy=yx^2dy-xy^2dx$
30. $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}\,y'=0$
31. $x+xy+y'(y+xy)=0$
32. $y-xy'=1+x^2y'$
33. $(1+y^2)dx=(1+x^2)dy$
34. $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$
35. $(1+2y)xdx+(1+x^2)dy=0$
36. $xy(1+x^2)y'=1+y^2$
37. $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$
38. $y'=(2y+1)\mathrm{ctg}x$
39. $x^2y'+y^2=0$
40. $xy'=\dfrac{y}{\ln x}$
41. $y'\mathrm{tg}x-y=1$
42. $y'\sin x=y\ln y$
43. $(2x+1)dy=y^2dx$
44. $3e^x\mathrm{tg}ydx+\dfrac{(2-e^x)}{\cos^2 y}dy=0$
45. $y'\sin x=y\ln y$
46. $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

47. $e^{-y}(1+y')=1$

48. $y\ln y dx + x dy = 0$

49. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)dx = 0$

50. $xydx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$

51. $y' + \dfrac{x\sin x}{y\cos y} = 0$

52. $ye^{2x}dx - (1+e^{2x})dy = 0$

53. $2e^x \cdot \mathrm{ctg} y dx + (1+e^x)\cdot\dfrac{1}{\sin^2 y}dy = 0$

54. $(3y^2+1)dy = 2xdx$

55. $y'\cos x = \dfrac{y}{\ln y}$

56. $y' = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y$

57. $\ln x dx + x\,\mathrm{tg} y dy = 0$

58. $yy' + xe^y = 0$

59. $e^{1+x^2}\mathrm{tg}ydx - \dfrac{e^{2x}}{x-1}dy = 0$

60. $(1+e^{2x})y^2dy = e^x dx$

61. $y' = 2^{x-y}$

62. $y\ln^3 y + y'\sqrt{1+x} = 0$

63. $xy = y'\ln y$

64. $\dfrac{xdx}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydy}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

65. $yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$

66. $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$

67. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0$

68. $x(y^6+1)\,dx + y^2(x^4+1)\,dy = 0$

69. $(\sqrt{xy}-\sqrt{x})\,dx + (\sqrt{xy}+\sqrt{y})\,dy = 0$

70. $\dfrac{1+\cos 2x}{1+\sin y} + y' = 0$

71. $\dfrac{4+y^2}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \dfrac{3y+2}{x+1}y'$

72. $\dfrac{\mathrm{tg}y\,dx}{\cos^2 x} + \dfrac{\mathrm{tg}x\,dy}{\cos^2 y} = 0$

73. $5e^x\,\mathrm{tg}y\,dx + \dfrac{(1-e^x)\,dy}{\cos^2 y} = 0$

74. $\dfrac{\cos^2 x}{3\sin y} + 4y' = 0$

75. $(x+2xy)\,dy + (y^2+4xy^2)\,dx = 0$

76. $(1+e^{4x})\,yy' = e^{4x}$

77. $\sqrt{\dfrac{3+y^2}{4-x^2}} \cdot y' = 2$

78. $\sqrt{y^2-3} + \sqrt{1+x^2} \cdot yy' = 0$

79. $y' = \dfrac{\cos x - \sin x + 1}{\cos y - \sin y - 1}$

80. $(xy^2+4x)\,dy + (x^2y-9y)\,dx = 0$

81. $y'\mathrm{ctg}x = y+3$

82. $y'\mathrm{tg}x = y-1$

83. $\dfrac{x^2+9}{y^2+4} + y' = 0$

84. $\dfrac{xy'}{y^2-4} + \dfrac{x^2+1}{y} = 0$

85. $(y+1)\ln(y+1) = y' \cdot (x^2+2x)$

86. $xe^{x^2} \cdot (y+3) + y' = 0$

87. $x^2 e^{x^3+2} \cdot (y^2 + 4y) = y'$

88. $xy^2 + \sqrt{x^2+8}\, y' = 0$

89. $y' \sin x = y \ln^2 y$

90. $(x^2 + 4x - 2) + (y^2 + 4y + 7)\, y' = 0$

91. $y' \mathrm{ctg} x + y = 1$

92. $y' \mathrm{tg} x = y^2 + 4$

93. $y + x^2 y' = 4 + y'$

94. $\dfrac{x}{y}(1+y^2)\, y' = 1 - x^2$

95. $\dfrac{y}{x}(4+x^2)\, y' = 5 + y^2$

96. $y' = (2y+1)\, e^{4x}$

97. $y + 6 = \dfrac{x}{y} \cdot y'$

98. $y' = \dfrac{xy + x}{x^2 y + y}$

99. $(x^2 + 9)\, y' = y^2$

100. $y^2 + 2xy' = 4 - x^2 y'$

1.3. Задание 3

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1.	$y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$	2.	$xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$
3.	$y' = \dfrac{x+y}{x-y}$	4.	$xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y$

5.	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$	6.	$xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$
7.	$y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$	8.	$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$
9.	$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 4$	10.	$xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$
11.	$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$	12.	$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$
13.	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$	14.	$xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$
15.	$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$	16.	$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
17.	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$	18.	$xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$
19.	$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$	20.	$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
21.	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12$	22.	$xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$
23.	$y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$	24.	$xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$
25.	$4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$	26.	$xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$
27.	$y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$	28.	$xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$
29.	$3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$	30.	$xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y$
31.	$xy' = y\ln\frac{y}{x}$	32.	$(\sqrt{xy} - x)\,y' + y = 0$

33.	$(y+\sqrt{x^2+y^2}) = xy'$	34.	$y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$
35.	$y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$	36.	$y' = \frac{x^2+2xy-5y^2}{2x^2-6xy}$
37.	$(x-y)dx + xdy = 0$	38.	$(x+y)dy = (x-y)dx$
39.	$(2x-y)dx + (2y-x)dx = 0$	40.	$ydx - (2x+y)dy = 0$
41.	$(x+y)dx + (2x+5y)dy = 0$	42.	$(x+2y)dx + ydy = 0$
43.	$xy'\sin\frac{y}{x} + x = y\sin\frac{y}{x}$	44.	$xy + y^2 = (2x^2+xy)\,y'$
45.	$xy'\ln\frac{y}{x} = x + y\ln\frac{y}{x}$	46.	$xyy' = y^2 + 2x^2$
47.	$xy' - y = x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$	48.	$y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$
49.	$(x^2+y^2)dx - xydy = 0$	50.	$xy' = xe^{y/x} + y$
51.	$xy' - y = \frac{x}{\operatorname{arctg} y/x}$	52.	$xy' = 2(y - \sqrt{xy})$
53.	$xy' = \sqrt{x^2-y^2} + y$	54.	$4x - 3y + y'(2y-3x) = 0$
55.	$xy' = y + \sqrt{y^2-x^2}$	56.	$y' = \frac{2xy}{3x^2+y^2}$
57.	$-xy + y^2 + y'(x^2 - xy + 4y^2) =$	58.	$xy' = \sqrt{y^2+x^2} + y$
59.	$xy - 2y^2 + y'(-x^2 + 2xy + y^2) =$	60.	$3x + y + y'x = 0$
61.	$2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2$	62.	$y'x\cdot\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$
63.	$(3y - 7x)dx - (3x - 7y)dy =$	64.	$y^3y' + 3y^2x + 2x^3 = 0$
65.	$(2x-4y)dx + (x+y)dy = 0$	66.	$y + (2\sqrt{xy} - x)\,y' = 0$

67.	$(3x-y)dx+(x-6y)dy=0$	68.	$y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}$
69.	$xy'-y=\frac{x}{\sin\frac{y}{x}}$	70.	$xy'=3(y+\sqrt{xy})$
71.	$xy'=y+4\sqrt{x^2+y^2}$	72.	$x^2y'=x^2+y^2+3xy$
73.	$y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{3y}{x}$	74.	$xy'\sin\frac{y}{x}+x=y\sin\frac{y}{x}$
75.	$xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y$	76.	$y'=\frac{x+7y}{9x-y}$
77.	$y'=\frac{3y^2+10xy}{2y^2+5x^2}$	78.	$y'=\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cdot\ln\frac{y}{x}$
79.	$y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{\ln\frac{y}{x}}$	80.	$y'-\frac{y}{x}=\frac{1}{\cos\frac{y}{x}}$
81.	$xy'=y-\frac{x}{\sin\frac{y}{x}}$	82.	$x^2y'=yx+y^2+x^2$
83.	$xy'=\sqrt{x^2-4y^2}+y$	84.	$(x+y)dx+ydy=0$
85.	$xy'-y=\frac{x}{e^{y/x}}$	86.	$xy'=y+7x\operatorname{tg}\frac{y}{x}$
87.	$xy'=6x\operatorname{ctg}\frac{y}{x}+y$	88.	$y-xy'=\sqrt{x^2+y^2}$
89.	$y'=\frac{y}{x}+\sin\frac{y}{x}$	90.	$y'=\frac{y}{x}-\operatorname{ctg}\frac{y}{x}$
91.	$y'=\frac{y}{x}+\frac{4x^2}{y^2}$	92.	$y'-\frac{y}{x}=5^{y/x}$
93.	$xy'=y+\frac{x}{10^{y/x}}$	94.	$y'=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y}{x}+4$

95.	$y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2}{x^2} - 9$	96.	$y'x = y + x\cos^2\frac{y}{x}$
97.	$y' - \frac{y}{x} + \sin^2\frac{y}{x} = 0$	98.	$y' = \frac{y^2 + 5xy + x^2}{x^2}$
99.	$y' = \frac{y}{x} - \frac{1}{y/x \cdot 7^{y/x}}$	100.	$y'x = y - 2x\sin^2\frac{y}{x}$

1.4. Задание 4

Найдите решение задачи Коши

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$
2. $y' - y\mathrm{ctg}x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
3. $y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$
4. $y' + y\mathrm{tg}x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$
6. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$
7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$
9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$
10. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$
11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4$

12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$

13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$

14. $y' - \frac{y}{x} = \frac{-12}{x^3}, \quad y(1) = 4$

15. $y' + \frac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = \frac{-5}{6}$

16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$

17. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$

18. $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1$

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$

20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}$

21. $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, \quad y(0) = \frac{2}{3}$

22. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3$

23. $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1$

24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1$

25. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = \frac{1}{2}$

26. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3$

27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = \frac{-1}{2}$

28. $y' - \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$

29. $y' - 3x^2 y = \frac{x^2(1+x^3)}{3}, \quad y(0) = 0$

30. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1$

31. $y'\,\mathrm{tg}x - y + \dfrac{1}{\sin x} = 0, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

32. $(1 + x^2)\,y' + 2xy = x^3, \quad y(0) = 1$

33. $xy' - y + \dfrac{1}{x} = 0, \quad y(1) = 0$

34. $\mathrm{cth}x \cdot y' - y + \dfrac{1}{\mathrm{ch}x} = 0, \quad y(0) = 2$

35. $xy' + y = 1, \quad y(1) = 2$

36. $(x + 1)\,y' + y = x + 1, \quad y(1) = 3$

37. $xy' + y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad y(1) = 4$

38. $x^3 y' + x^2 y = 1, \quad y(1) = 0$

39. $x^2 y' + xy = 1, \quad y(1) = 1$

40. $-xy' + 2y = \dfrac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1$

41. $x^4 y' + x^3 y = 4, \quad y(1) = 0$

42. $\mathrm{cth}x \cdot y' + y = \mathrm{ch}x, \quad y(0) = 0$

43. $y' + \dfrac{2x}{x^2 + 1}\,y = 2x, \quad y(0) = 0$

44. $y' + x^2 y = x^2, \quad y(0) = -1$

45. $xy' + y = e^x, \quad y(1) = e$

46. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = 4$

47. $xy' + y = \ln x + 1, \quad y(1) = -3$

48. $x^2 y' + y + e^{2/x} = 0, \quad y(2) = e$

49. $xy' - 2y = x^4 e^x, \quad y(1) = 0$

50. $x^2 y' + xy = 1, \quad y(e) = 1$

51. $y' + 2yx = 8x^3 + 8x, \quad y(0) = 0$

52. $\sin x \cos x \cdot y' + y = \cos 2x \cdot \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$

53. $x \cos^2 x \cdot y' - \cos^2 x \cdot y = -x^2, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

54. $y' - 2xy = x, \quad y(0) = 0$

55. $4xy' + y = 104x^3, \quad y(1) = 8$

56. $y' + xy = x^3, \quad y(0) = -1$

57. $xy' + 2y = 3x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16$

58. $y' - 8xy = 32x^3 - 8x, \quad y(0) = 0$

59. $xy' - y = 2\ln x - \ln^2 x, \quad y(e^2) = 4$

60. $xy' - 2y = x^4, \quad y(-1) = -2$

61. $xy' + 3y = \frac{x+2}{x^2(x-1)}, \quad y(2) = \frac{1}{4}$

62. $2x^2 y' + y = -e^{1/x}, \quad y(1) = e$

63. $x^2 y' + xy = -\sqrt{x}, \quad y(4) = -0{,}5$

64. $y' \cdot \sin 2x - 2y = \sin^2 2x - 2\sin^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0{,}5$

65. $y' + \frac{y}{x} = x^2 + 2x, \quad y(1) = \frac{11}{12}$

66. $2x\sqrt{x}\, y' - 6y\sqrt{x} = 7, \quad y(1) = -4$

67. $y' + \frac{y}{x} = \sin x + 3\cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$

68. $y' \sin 2x + 2y = 2\cos^2 x, \quad y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$

69. $y' \mathrm{ch} x - y \mathrm{sh} x = 1, \quad y(0) = 1$

70. $4xy' + y = 13x^3, \quad y(1) = 5$

71. $x^2y' + 2xy = \dfrac{2}{x^2+4}, \quad y(2) = \dfrac{\pi}{8}$

72. $xy' + 2y = 2\ln^2 x - \ln x, \quad y(1) = 2$

73. $2x^2y' + 2xy = -\sqrt{x}, \quad y(1) = -0{,}5$

74. $xy' + 2y = 2\sin^2 x - x\sin 2x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$

75. $y' - 2xy = 2x^3 - 2x, \quad y(0) = -2$

76. $y' - y\,\mathrm{tg}x = 2x - x^2\mathrm{tg}x, \quad y(\pi) = 0$

77. $4x^2y' + y = -e^{\frac{1}{2x}}, \quad y(0{,}5) = e$

78. $y' + 2y = 2\cos^2 x - \sin 2x, \quad y(0) = -1$

79. $y' - \dfrac{3y}{x} = x, \quad y(1) = 2$

80. $y'\cos x - y\sin x = \sin 2x, \quad y(0) = 4$

81. $xy' + 2y = e^{-x^2}, \quad y(-1) = \dfrac{-1}{2e}$

82. $y' + y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = 0$

83. $y' - y\,\mathrm{tg}x = \mathrm{ctg}x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 - \ln 3$

84. $xy' + y = (x+1)\,e^x, \quad y(1) = e$

85. $xy' + y = \ln x + 1, \quad y(1) = 3$

86. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = -1$

87. $xy' + 2y = x^2, \quad y(2) = 2$

88. $y' - \dfrac{2}{x}y = e^x(x^3 - 2x^2), \quad y(1) = -2e$

89. $xy' - y = x^2\cos x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$

90. $y' - \dfrac{y}{x\ln x} = x\ln x, \quad y(e) = \dfrac{e^2}{2}$

91. $y'\sin x - y\cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

92. $xy' + y = x^2, \quad y(3) = 3$

93. $y' + 3y\text{tg}3x = \sin 6x, \quad y(0) = \frac{1}{3}$

94. $x^2 y' - 2xy = 3, \quad y(1) = 0$

95. $xy' - 2y = x^4, \quad y(2) = 0$

96. $y' - \frac{y}{\sin x} = \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right), \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2\ln 2}{\sqrt{3}}$

97. $y' - 2y = e^x - x, \quad y(0) = 0{,}25$

98. $y' - \frac{2y}{x+1} = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = -2$

99. $y' - y\text{tg}x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 0$

100. $(1+x^2)\, y' - 2xy = (1+x^2)^2, \quad y(1) = 2$

1.5. Задание 5

Найдите решение задачи Коши

1. $y' + xy = (1+x)\, e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1$
2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 0{,}5$
3. $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2$
4. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)\, e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1$
5. $xy' - y = -y^2 (\ln x + 2) \ln x, \quad y(1) = 1$
6. $2(y' + xy) = (1+x)\, e^{-x} y^2 \quad y(0) = 2$
7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3$
8. $2y' + y\cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x), \quad y(0) = 1$
9. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^3), \quad y(0) = -1$

10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1$

11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)\,y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1$

13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)\,y^{-1}, \quad y(0) = 1$

14. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3$

15. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = \dfrac{1}{2}$

16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

17. $y' + 2xy = 2x^3y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}$

18. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$

19. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x}y^{-1}, \quad y(0) = 2$

20. $4y' + x^3y = (x^3 + 8)e^{-2x}y^2, \quad y(0) = 1$

21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)\,y^3, \quad y(1) = \sqrt{2}$

22. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2$

23. $y' + xy = (x - 1)\,e^x y^2, \quad y(0) = 1$

24. $2y' - 3y\cos x = -e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1$

25. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1$

26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2$

27. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1$

28. $2(y' + xy) = (x - 1)\,e^x y^2, \quad y(0) = 2$

29. $y' + 2y\mathrm{cth}x = y^2\mathrm{ch}x, \quad y(1) = \dfrac{1}{\mathrm{sh}1}$

30. $y' - y\mathrm{tg}x = -\dfrac{2}{3}y^4 \sin x, \quad y(0) = 1$

31. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1$

32. $y' \cdot x + y = -xy^2, \quad y(1) = 1$

33. $y' + y = xy^3, \quad y(0) = \sqrt{2}$

34. $x^3 y' - x^2 y = y^2, \quad y(1) = 0{,}5$

35. $y' + xy = xy^3, \quad y(0) = 1$

36. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}, \quad y(0) = 1$

37. $y' + xy = x^3 y^3, \quad y(0) = 1$

38. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$

39. $xy' + 2y = x^5 y^2, \quad y(1) = 1$

40. $y' - 2xy = 3x^3 y^2, \quad y(0) = 1$

41. $y' + \dfrac{2y}{x} = 3x^2 \cdot y^{4/3}, \quad y(1) = 27$

42. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}, \quad y(2) = 1$

43. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}, \quad y(2\pi) = \dfrac{1}{4}$

44. $y' + y = e^{x/2} \cdot \sqrt{y}, \quad y(0) = 2{,}25$

45. $4xy' + 3y = -e^x x^4 \cdot y^5, \quad y(1) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{e}}$

46. $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3 + 1} = y^2 (x^3 + 1) \cdot \sin x, \quad y(0) = 1$

47. $xy' + y = -x^2 y^2, \quad y(1) = -1$

48. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 0{,}25$

49. $y' + \dfrac{y}{x} = x^2 y^4, \quad y(1) = 1$

50. $y' - \dfrac{2xy}{1 + x^2} = \dfrac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1 + x^2}} \cdot \mathrm{arctg} x, \quad y(0) = 2$

51. $y' - 2y\,\mathrm{tg}x = -y^2 \sin^2 x, \quad y(0) = 1$

52. $2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x}{y}, \quad y(0) = 2$

53. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}, \quad y(0) = 1$

54. $y' - y\,\mathrm{ctg}x = \dfrac{y^3}{\sin x}, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

55. $xy' + y = \dfrac{x}{2}y^3, \quad y(1) = \dfrac{1}{2}.$

56. $y'x + y = -xy^2, \quad y(e) = \dfrac{1}{e}$

57. $y' - xy = y^3 e^{-x^2}, \quad y(0) = 0{,}5$

58. $y' + xy = xy^3, \quad y(1) = 1$

59. $xy' - y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1$

60. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = \sqrt{2}$

61. $y' + y = -e^{2x} y^2, \quad y(0) = 1$

62. $xy' + y = -x^2 y^2, \quad y(1) = 1$

63. $xy' + 2y = 3x^5 y^2, \quad y(1) = -1$

64. $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}, \quad y(5) = 3$

65. $8xy' - y = \dfrac{-1}{y^3}, \quad y(1) = 2$

66. $y' - xy = y^2 x^3, \quad y(0) = 1$

67. $y' - 2xy = y^2(x + 4x^3), \quad y(0) = 1$

68. $2\sin x \cdot y' + y\cos x = y^3 \cdot \cos x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$

69. $y' + \frac{y}{x+1} = \frac{-1}{2}(x+1)^3 y^3, \quad y(0) = 1$

70. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x}{y^2}, \quad y(1) = 1$

71. $y' + xy = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$

72. $y' - 2xy = \frac{x}{y^2}, \quad y(0) = 1$

73. $y' - y = \frac{-x}{y^2}, \quad y(0) = 1$

74. $y' + y = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 2$

75. $xy' + y = \frac{1}{y}, \quad y(1) = 0$

76. $y' - 2y = \frac{-12x}{y^2}, \quad y(0) = 1$

77. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{y}, \quad y(\pi) = \frac{2}{\pi}$

78. $xy' - y = \frac{x^2+1}{y}, \quad y(1) = 2$

79. $xy' - 2y = \frac{-4x}{3\sqrt{y}}, \quad y(1) = 1$

80. $y' + y\sin x = y^2 \cdot e^{-\cos x}, \quad y(0) = 1$

81. $y' - y\cos x = \frac{\sin 2x}{y}, \quad y(0) = 2$

82. $y' + y\,\mathrm{tg}x = 2y^2 \cdot \sin x, \quad y(0) = 0{,}5$

83. $y' + y\,\mathrm{ctg}x = \frac{3\cos x}{2y}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

84. $y' + \frac{y}{\cos^2 x} = y^2 e^{\mathrm{tg}x}, \quad y(0) = 1$

85. $y' - \frac{y}{x} = y^2 \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

86. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{yx}, \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}$

87. $y' + \frac{y}{x} = \frac{7x^4 + 3}{y}, \quad y(1) = 2$

88. $y' - \frac{y}{x} = \frac{x + 3}{y}, \quad y(1) = 3$

89. $y' + \frac{y}{1 + x^2} = y^2 e^{\text{arctg} x}, \quad y(0) = 1$

90. $y' - y\text{tg}x = \frac{-6 \sin x}{y}, \quad y(0) = 2$

91. $y' - \frac{y}{x} = -y^2 \cos x, \quad y(\pi) = \pi$

92. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{2yx}, \quad y(\pi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

93. $y' - y \sin x = -y^2 e^{\cos x}, \quad y(0) = 1$

94. $y' + \frac{y}{x} = \frac{4x + 3}{y}, \quad y(1) = 2$

95. $y' + \frac{y}{x} = -y^2 e^{-1/x}, \quad y(1) = e$

96. $y' + \frac{y}{x} = \frac{\cos x}{2y}, \quad y(\pi) = 0$

97. $y' - 2y = -4y^2 x, \quad y(0) = -1$

98. $y' - 2xy = -y^2 e^{x^2}, \quad y(0) = 1$

99. $y' + 2xy = 2y^2 x e^{x^2}, \quad y(0) = -1$

100. $y' - 2xy = 3xy^2, \quad y(0) = -1$

1.6. Задание 6

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1. $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$

2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$

3. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$

4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2}\right)dx - \left(2y - \frac{1}{x}\right)dy = 0$

5. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + \mathrm{tg}x)dy = 0$

6. $(3x^2y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0$

7. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

8. $(\sin 2x - 2\cos(x + y))dx - 2\cos(x + y)dy = 0$

9. $\left(xy^2 + \frac{x}{y^2}\right)dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3}\right)dy = 0$

10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0$

11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y\right)dy = 0$

12. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\right)dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)dy = 0$

13. $\frac{1 + xy}{x^2y}dx + \frac{1 - xy}{xy^2}dy = 0$

14. $\frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2}dy = 0$

15. $\frac{y}{x^2}dx - \frac{xy+1}{x}dy = 0$

16. $\left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right)dx - \frac{1}{x}dy = 0$

17. $\left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \frac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right)dy = 0$

18. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x\right)dx - \frac{xdy}{x^2y^2} = 0$

19. $e^y dx + (\cos y + xe^y)dy = 0$

20. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$

21. $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2 y)\,dy = 0$

22. $(5xy^2 - x^2)dx + (5x^2 y - y)dy = 0$

23. $(\cos(x + y^2) + \sin x)dx + 2y\cos(x + y^2)dy = 0$

24. $(x^2 - 4xy - 2y^2)dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)dy = 0$

25. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$

26. $\left(1 + \frac{1}{y}e^{x/y}\right)dx + \left(1 - \frac{1}{y^2}e^{x/y}\right)dy = 0$

27. $\frac{(x - y)dx + (x + y)dy}{x^2 + y^2} = 0$

28. $2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2 y + y^2)dy = 0$

29. $(3x^3 + 6x^2 y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2 y)dy = 0$

30. $xy^2 dx + y(x^2 + y^2)dy = 0$

31. $xdx + ydy + \frac{(xdy - ydx)}{x^2 + y^2} = 0$

32. $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$

33. $3x^2e^ydx + (x^3e^y - 1)dy = 0$

34. $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$

35. $2x\cos^2 ydx + (2y - x^2 \sin 2y)dy = 0$

36. $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$

37. $(3x^2y - 4xy^3)dx + (x^3 - 4x^2y + 12y^3)dy = 0$

38. $(x\cos 2y + 1)dx - x^2 \sin 2ydy = 0$

39. $(3x^2y - 2x^3 + y^3)dx + (3xy^2 + x^3 - 2y^3)dy = 0$

40. $\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x}\right)dx + (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x)dy = 0$

41. $\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \frac{e^y}{1+x^2}dy = 0$

42. $(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0$

43. $(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x\cos y)dy = 0$

44. $(x + y - 1)dx + (e^y + x)dy = 0$

45. $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$

46. $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$

47. $(xy + \sin y)dx + (0{,}5x^2 + x\cos y)dy = 0$

48. $(x^2 + y^2 + y)dx + (2xy + x + e^y)dy = 0$

49. $(2xye^{x^2} + \ln y)dx + \left(e^{x^2} + \frac{x}{y}\right)dy = 0$

50. $(\sin y + (1 - y)\cos x)dx + ((1 + x)\cos y - \sin x)dy = 0$

51. $(y + x\ln y)dx + \left(\frac{x^2}{2y} + x + 1\right)dy = 0$

52. $(x^2 + \sin y)dx + (1 + x + \cos y)dy = 0$

53. $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$

54. $(e^x \sin y + x)dx + (e^x \cos y + y)dy = 0.$

55. $(\ln y - 5y^2 \sin 5x)dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0$

56. $(3x^2 y + \sin x)dx + (x^3 - \cos y)dy = 0$

57. $(e^{x+y} + 3x^2)dx + (e^{x+y} + 4y^3)dy = 0$

58. $\left(\operatorname{tg} y - \frac{y}{\sin^2 y}\right)dx + \left(\operatorname{ctg} x + \frac{x}{\cos^2 y}\right)dy = 0$

59. $\left(\frac{y}{x^2 + y^2} - y\right)dx + \left(e^y - x - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

60. $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

61. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$

62. $(10xy - 8y + 1)dx + (5x^2 - 8x + 3)dy = 0$

63. $2x\cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2x)dy = 0$

64. $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$

65. $(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy = 0$

66. $(x + y^2)dx + 2xydy = 0$

67. $(2x^3 + xy^2)dx + (yx^2 + 2y^3)dy = 0$

68. $(6xy^2 + 4x^3)dx + (3y^2 + 6yx^2)dy = 0$

69. $\left(3x^2 \operatorname{tg} y - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0$

70. $\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$

71. $(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$

72. $\left(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \frac{1}{y}\right)dy = 0$

73. $\frac{2xdx}{y^3} + \frac{(y^2 - 3x^2)dy}{y^4} = 0$

74. $(5x^4y^2 + e^x)dx + (2x^5y - \sin y)dy = 0$

75. $(3x^2y^4 - 1)dx + \left(4x^3y^3 - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

76. $(4x^3 - y^2)dx + \left(\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} - 2xy\right)dy = 0$

77. $\left(\frac{2x}{y} + 3\cos 3x\right)dx + \left(2 - \frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0$

78. $\left(2xy^6 - \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(6x^2y^5 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$

79. $(3x^2e^{2y} - y\sin x)dx + (2x^3e^{2y} + \cos x)dy = 0$

80. $\left(y - \frac{1}{1+x^2}\right)dx + (x + 2e^{2x})dy = 0$

81. $\left(3e^{3x}\operatorname{tg}y - \frac{1}{x^4}\right)dx + \left(\frac{e^{3x}}{\cos^2 y} - 3y^2\right)dy = 0$

82. $\left(2x + \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

83. $\left(3x^2 - \frac{y\cos x}{\sin^2 x}\right)dx + \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{y}\right)dy = 0$

84. $(y^3e^x - 1)dx + 3y^2e^xdy = 0$

85. $\frac{2y}{x^2}\cos\frac{2y}{x}dx - \left(3y^2 + \frac{2}{x}\cos\frac{2y}{x}\right)dy = 0$

86. $(8xy + e^x)dx + (3y^2 + 4x^2)dy = 0$

87. $\left(2x-\frac{1}{y}\right)dx-\left(2y-1-\frac{x}{y^2}\right)dy=0$

88. $(2xy+\mathrm{tg}y)dx+\left(x^2+\frac{x}{\cos^2 y}\right)dy=0$

89. $(y^3+2y+3x^2)dx+(3y^2x+2x+3)dy=0$

90. $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)dy=0$

91. $2\cos(x+y)dx+(2\cos(x+y)-\sin 2y)dy=0$

92. $\left(xy^2-\frac{y^2}{x^3}\right)dx+\left(yx^2+\frac{y}{x^2}\right)dy=0$

93. $\frac{2x}{y^3}dx-\left(\frac{1}{y^2}+\frac{3x^2}{y^4}\right)dy=0$

94. $\left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}+2x\right)dx-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}dy=0$

95. $\left(y+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx+\left(x+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy=0$

96. $\frac{1-xy}{yx^2}dx+\frac{1+xy}{y^2x}dy=0$

97. $\frac{y+x^2}{x^2}dx-\frac{dy}{x}=0$

98. $\frac{ydx}{x^2+y^2}-\left(\frac{x}{x^2+y^2}+e^y\right)dy=0$

99. $(\cos x+ye^x)dx+e^x dy=0$

100. $(3yx^2+e^x)dx+(x^3+\cos y)dy=0$

1.7. Задание 7

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

1	$y'''x\ln x = y''$	2	$xy''' + y'' = 1$
3	$2xy''' = y''$	4	$xy''' + y'' = x + 1$
5	$\mathrm{tg}x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$	6	$x^2y'' + xy' = 1$
7	$y'''\mathrm{ctg}2x + 2y'' = 0$	8	$x^3y''' + x^2y'' = 1$
9	$\mathrm{tg}x \cdot y''' = 2y''$	10	$y'''\mathrm{cth}2x = 2y''$
11	$x^4y'' + x^3y' = 1$	12	$xy''' + 2y'' = 0$
13	$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$	14	$x^5y''' + x^4y'' = 1$
15	$xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$	16	$xy''' + y'' + x = 0$
17	$\mathrm{th}x \cdot y^{(4)} = y'''$	18	$xy''' + y'' = \sqrt{x}$
19	$y'''\mathrm{tg}x = y'' + 1$	20	$y'''\mathrm{tg}5x = 5y''$
21	$y'''\mathrm{th}7x = 7y''$	22	$x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$
23	$\mathrm{cth}x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\mathrm{ch}x} = 0$	24	$(x + 1)y''' + y'' = (x + 1)$
25	$(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$	26	$xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$
27	$-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$	28	$\mathrm{cth}xy'' + y' = \mathrm{ch}x$
29	$x^4y'' + x^3y' = 4$	30	$y'' + \dfrac{2x}{x^2 + 1}y' = 2x$
31	$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$	32	$xy'' - y' - x^2 = 0$
33	$y'' - y'\mathrm{ctg}x = \sin x$	34	$y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$
35	$xy'' - 2y' = 2x^4$	36	$xy'' = 1 + \ln x$

37	$xy'' - y'\text{tg}x = \cos x$	38	$y'' = \dfrac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}$
39	$xy'' - y' = 4x^3$	40	$xy'' - y' = x^2 \cos x$
41	$x^3 y'' = 4\ln x$	42	$y''' = x\sin^2 x$
43	$y'' = xe^{-x}$	44	$y''' = \cos^2 x$
45	$y''' \sin^4 x = \sin 2x$	46	$xy'' = y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$
47	$y'' - \dfrac{y'}{x-1} = x(x-1)$	48	$(1-x^2)y'' - xy' = 2$
49	$2xy'' = y'$	50	$y'' = (y')^2$
51	$xy''' = 2$	52	$y'' = \dfrac{1}{1+x^2}$
53	$y'' + 2x(y')^2 = 0$	54	$xy'' - y' - x\sin\dfrac{y'}{x} = 0$
55	$x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$	56	$(1+e^x)y'' + y' = 0$
57	$y''' = 2(y''-1)\text{ctg}x$	58	$x^2 y''' = (y'')^2$
59	$y''' = (y'')^2$	60	$xy''' + y'' - x - 1 = 0$
61	$(1+x^2)y'' + 2xy' = x^3$	62	$y'' = \sin x + \cos x$
63	$y''' = \dfrac{\ln x}{x^2}$	64	$xy''' = y''$
65	$y'' = xe^x$	66	$y'' = x\ln x$
67	$y''' = \sin^2 x$	68	$y''' = x + \cos x$
69	$x^2 y''' + xy'' = 1$	70	$xy''' + y'' = 1$
71	$xy''' + y'' = 3x - 2$	72	$xy''' + 4y'' = 0$
73	$y'''\text{ctg}4x = -4y''$	74	$(x-1)y''' + y'' = x - 1$
75	$(1+\cos x)y''' = -\sin xy''$	76	$(1-x^2)y'' - 2xy' = x^3$

77	$-xy'' + 2y' = \frac{2}{x}$	78	$x^3y'' + x^2y' = 5$
79	$y'' + \frac{2x}{x^2+4}y' = x$	80	$xy'' - y' = x$
81	$y'' + y'\mathrm{tg}x = -\cos^2 x$	82	$y'' = \frac{6x}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$
83	$xy'' - 2y' = 3x^3$	84	$xy'' - y' = x^2 \sin x$
85	$xy'' + y' = 1 + \ln x$	86	$xy'' - y' = \ln x$
87	$(1+\sin x)y''' = y''\cos x$	88	$(3+e^x)y''' = e^x y''$
89	$xy'' - 2y' = x + 2$	90	$xy'' + 3y' = x^2 + 1$
91	$y'' + y'\mathrm{tg}x = \sin 2x$	92	$y'' + y'\mathrm{tg}x = \cos x$
93	$y'' - y'\mathrm{tg}x = \sin x$	94	$y'' - y'\mathrm{tg}x = \cos x$
95	$y'' + y'\mathrm{ctg}x = \sin x$	96	$y'' - y'\mathrm{ctg}x = \sin x$
97	$y'' + y'\mathrm{ctg}x = \cos x$	98	$y'' + y'\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$
99	$y'' + y'\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sin x}$	100	$y'' - y'\mathrm{tg}x = \frac{1}{\cos x}$

1.8. Задание 8

Найти решение задачи Коши

1.	$4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
2.	$y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 8$

3.	$y''y^3+64=0,\quad y(0)=4,\ y'(0)=2$
4.	$y''+2\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$
5.	$y''=32\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\pi/2,\ y'(1)=4$
6.	$y''=98y^3,\quad y(1)=1,\ y'(1)=7$
7.	$y''y^3+49=0,\quad y(3)=-7,\ y'(3)=-1$
8.	$4y^3y''=16y^4-1,\quad y(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
9.	$y''+8\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=2$
10.	$y''=72y^3,\quad y(2)=1,\ y'(2)=6$
11.	$y''y^3+36=0,\quad y(0)=3,\ y'(0)=2$
12.	$y''=18\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\pi/2,\ y'(1)=3$
13.	$4y^3y''=y^4-16,\quad y(0)=2\sqrt{2},\ y'(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
14.	$y''=50y^3,\quad y(3)=1,\ y'(3)=5$
15.	$y''y^3+25=0,\quad y(2)=-5,\ y'(2)=-1$
16.	$y''+18\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=3$
17.	$y''=8\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\pi/2,\ y'(1)=2$
18.	$y''=32y^3,\quad y(4)=1,\ y'(4)=4$
19.	$y''y^3+16=0,\quad y(1)=2,\ y'(1)=2$
20.	$y''+32\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=4$
21.	$y''=50\sin^3 y\cos t,\quad y(1)=\pi/2,\ y'(1)=5$
22.	$y''=18y^3,\quad y(1)=1,\ y'(1)=3$
23.	$y''y^3+9=0,\quad y(1)=1,\ y'(1)=3$
24.	$y^3y''=4(y^4-1),\quad y(0)=\sqrt{2},\ y'(0)=\sqrt{2}$

25.	$y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 5$
26.	$y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 2$
27.	$y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \ \ y'(0) = -2$
28.	$y'' = 2\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \ \ y'(1) = 1$
29.	$y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \ \ y'(0) = \sqrt{2}$
30.	$y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \ \ y'(-1) = 1$
31.	$y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \ \ y'(1) = -1$
32.	$y'' - e^y y' = 0, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1$
33.	$y'y'' = 2y, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0$
34.	$yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 3$
35.	$y''y^3 = 3, \quad y(1) = 1, \ \ y'(1) = 1$
36.	$y'' - 12y^2 = 0, \quad y(0) = 0{,}5, \ \ y'(0) = 1$
37.	$2y'' = e^{4y}, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 0{,}5$
38.	$(y-2)y'' = 2(y')^2, \quad y(0) = 3, \ \ y'(0) = 1$
39.	$2yy'' = 3 + (y')^2, \quad y(1) = 1, \ \ y'(1) = 1$
40.	$y'' = 3\sqrt{y+1}, \quad y(2) = 0, \ \ y'(2) = 2$
41.	$(y+1)^2 y'' = (y')^3, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = 1$
42.	$y'y'' = 18y, \quad y(1) = 1, \ \ y'(1) = 3$
43.	$y''y^3 = 1, \quad y(0) = 0{,}5, \ \ y'(0) = 0$
44.	$3y'y'' = 2y, \quad y(0) = 1, \ \ y'(0) = 1$
45.	$y'' = e^y, \quad y(0) = 0, \ \ y'(0) = \sqrt{2}$
46.	$y^3y'' = -1, \quad y(1) = 1, \ \ y'(1) = 0$

47.	$16y''\sqrt{y}=1,\quad y\left(\frac{8}{3}\right)=1,\ y'\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}$
48.	$3y''+y-\frac{5}{3}=0,\quad y\left(\frac{3}{4}\right)=1,\ y'\left(\frac{3}{4}\right)=1$
49.	$1+(y')^2=2yy'',\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$
50.	$y''=2yy',\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$
51.	$yy''=(y')^2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$
52.	$y''=e^{2y},\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$
53.	$2yy''=3(y')^2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$
54.	$2y^2y''=-1,\quad y\left(\frac{2}{3}\right)=1,\ y'\left(\frac{2}{3}\right)=1$
55.	$yy''=3(y')^2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=1$
56.	$y''\cdot\sqrt{y}=1,\quad y\left(\frac{2}{3}\right)=1,\ y'\left(\frac{2}{3}\right)=2$
57.	$2yy''=5+(y')^2,\quad y(2)=6,\ y'(2)=2$
58.	$y''+2e^{2y}\cdot y'=0,\quad y(0{,}5)=0,\ y'(0{,}5)=-1$
59.	$(y+1)y''=(y')^2,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$
60.	$y''=2(1+\ln y)y',\quad y(0)=e,\ y'(0)=2e$
61.	$y''\cdot \mathrm{tg}2y=2(y')^2,\quad y(0)=\pi/4,\ y'(0)=1$
62.	$y''\cdot \mathrm{tg}y=2(y')^2,\quad y(1)=3\pi/4,\ y'(1)=1/2$
63.	$(y-1)y''=2(y')^2,\quad y(1)=2,\ y'(1)=1$
64.	$1+(y')^2=yy'',\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$
65.	$y''(2y+3)=2(y')^2,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1{,}5$
66.	$yy''=(y')^2,\quad y(0)=1,\ y'(0)=2$

67.	$4y'' = 3\sqrt{y+4},\quad y(4)=0,\ \ y'(4)=2\sqrt{2}$
68.	$y''(1+y)=(y')^2+y',\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=1$
69.	$y''\sqrt{y}=y',\quad y(1)=1,\ \ y'(1)=2$
70.	$y''=e^y\cdot y',\quad y(1)=0,\ \ y'(1)=1$
71.	$y''\mathrm{ctg}y+2(y')^2=0,\quad y(0)=\pi/4,\ \ y'(0)=0{,}5$
72.	$y''(2y-1)=(y')^2,\quad y(1)=1,\ \ y'(1)=1$
73.	$yy''=-(y')^2,\quad y(1)=2,\ \ y'(1)=-0{,}5$
74.	$4y''=e^{2y},\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=0{,}5$
75.	$y''=12\sqrt{y-1},\quad y(1)=2,\ \ y'(1)=4$
76.	$y''+4e^y y'=0,\quad y(0{,}25)=0,\ \ y'(0{,}25)=-4$
77.	$3y'y''=2y\quad y(3)=1,\ \ y'(3)=1$
78.	$y''=\frac{2}{3}\sqrt[3]{y},\quad y(3)=1,\ \ y'(3)=1$
79.	$y''+2e^{-y}=0,\quad y(0)=0,\ \ y'(0)=2$
80.	$2yy''=4+(y')^2,\quad y(0)=4,\ \ y'(0)=0$
81.	$y''y^2=-8,\quad y\left(\frac{1}{6}\right)=1,\ \ y'\left(\frac{1}{6}\right)=4$
82.	$y''=6y^2y',\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=2$
83.	$y''=2\cos y\sin^3 y,\quad y(0)=\pi/2,\ \ y'(0)=1$
84.	$y''y^3=-2y',\quad y(1)=1,\ \ y'(1)=1$
85.	$y''=(1+\ln y)y',\quad y(0)=e,\ \ y'(0)=e$
86.	$y''=e^{-y}\cdot y',\quad y(0)=1,\ \ y'(0)=-\frac{1}{e}$
87.	$y''y'=18y,\quad y(1)=1,\ \ y'(1)=3$

88.	$y''y' = -e^{3y}, \quad y(1) = 0, \; y'(1) = -1$
89.	$y''\mathrm{ctg}2y + 2(y')^2 = 0, \quad y(0) = -\pi/4, \; y'(0) = 1$
90.	$2y''y^2 = (y')^3, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 2$
91.	$4y'' - 3y^5 = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = -0{,}5$
92.	$y'' + 2e^{-2y} \cdot y' = 0, \quad y(0{,}5) = 0, \; y'(0{,}5) = 1$
93.	$64y'y''y^2 = -9, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 0{,}75$
94.	$y'y''y^4 = -8, \quad y(1) = 2, \; y'(1) = 1$
95.	$y'' + 2y' \cdot y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = -1$
96.	$125y'' \cdot y' \cdot \sqrt{y} = 36, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 1{,}2$
97.	$y'' \cdot \sqrt{y} = y', \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 2$
98.	$y'' + 3y' \cdot \sqrt{y} = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = -2$
99.	$y' \cdot y'' = 4\sqrt{y}, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 2$
100.	$2y'' = e^{4y}, \quad y(-1) = 0, \; y'(-1) = 0{,}5$

1.9. Задание 9

Найдите общее решение дифференциального уравнения

1.	$y''' + 3y'' + 2y' = 8 + 4x$	2.	$y''' + 5y'' + 4y' = 8x + 14$
3.	$y''' - 3y'' + 2y' = 4x - 4$	4.	$y''' + 5y'' + 6y' = 12x + 16$
5.	$y''' - 5y'' - 6y' = -12x - 16$	6.	$y''' + 7y'' + 6y' = 12x + 20$
7.	$y''' - 7y'' + 6y' = 12x - 8$	8.	$y''' - 5y'' + 4y' = 8x - 6$
9.	$y''' + y'' - 2y' = -4x$	10.	$y''' - y'' - 2y' = -4x - 4$
11.	$y''' - 5y'' + 6y' = 12x - 4$	12.	$y''' + 3y'' + 2y' = 4x + 10$
13.	$y''' + 5y'' + 4y' = 8x + 18$	14.	$y''' - 3y'' + 2y' = 4x - 2$

15.	$y''' - 5y'' - 6y' = -12x - 22$	16.	$y''' + 5y'' + 6y' = 12x + 22$
17.	$y''' - 9y' = -27x^2 + 18x - 3$	18.	$y''' - 7y'' + 6y' = 12x - 2$
19.	$y''' - 8y'' + 16y' = 32x - 48$	20.	$y''' + y'' - 2y' = -4x - 2$
21.	$y''' + 10y'' + 25y' = 50x - 30$	22.	$y''' - 5y'' + 6y' = 12x + 2$
23.	$y''' + 3y'' + 2y' = 6x^2 + 18x + 2$	24.	$y''' + 2y'' + y' = 2x + 2$
25.	$y''' + 5y'' + 4y' = 12x^2 + 30x - 2$	26.	$y''' - 2y'' + y' = 2x - 6$
27.	$y''' - 3y'' + 2y' = 6x^2 - 18x + 2$	28.	$y''' + 4y'' + 4y' = 8x$
29.	$y''' + 5y'' + 6y' = 18x^2 + 30x - 6$	30.	$y''' - 4y'' + 4y' = 8x - 16$
31.	$y''' - 5y'' - 6y' = -18x^2 - 30x + 18$	32.	$y''' + 6y'' + 9y' = 18x - 6$
33.	$y''' + 7y'' + 6y' = 18x^2 + 42x - 6$	34.	$y''' - 6y'' + 9y' = 18x - 30$
35.	$y''' - 7y'' + 6y' = 18x^2 - 42x - 6$	36.	$y''' + 8y'' + 16y' = 32x - 16$
37.	$y''' - 5y'' + 4y' = 12x^2 - 30x - 2$	38.	$y''' - 5y'' + 4y' = 8x - 2$
39.	$y''' + y'' - 2y' = -6x^2 + 6x + 10$	40.	$y''' - y'' - 2y' = -4x - 6$
41.	$y''' - y'' - 2y' = -6x^2 - 6x + 10$	42.	$y''' - 81y' = -162x - 81$
43.	$y''' - 5y'' + 6y' = 18x^2 - 30x - 6$	44.	$y''' - y' = -3x^2 + 2x + 5$
45.	$y''' + 2y'' + y' = 3x^2 + 14x + 11$	46.	$y''' - 4y' = -12x^2 + 8x + 2$
47.	$y''' + 4y'' + 4y' = 12x^2 + 32x + 18$	48.	$y''' + 7y'' + 6y' = 12x + 26$
49.	$y''' - 4y'' + 4y' = 12x^2 - 16x + 2$	50.	$y''' - y' = -2x - 1$
51.	$y''' + 6y'' + 9y' = 27x^2 + 54x + 27$	52.	$y''' - 4y' = -8x - 4$
53.	$y''' - 6y'' + 9y' = 27x^2 - 18x + 3$	54.	$y''' - 9y' = -18x - 9$
55.	$y''' + 8y'' + 16y' = 48x^2 + 80x + 38$	56.	$y''' - 16y' = -32x - 16$
57.	$y''' - 8y'' + 16y' = 48x^2 - 16x + 6$	58.	$y''' - 25y' = -50x - 25$
59.	$y''' + 10y'' + 25y' = 75x^2 + 110x + 51$	60.	$y''' - 36y' = -72x - 36$
61.	$y''' - 10y'' + 25y' = 75x^2 - 10x + 11$	62.	$y''' - 49y' = -98x - 49$
63.	$y''' + 4y'' + 4y' = 12x^2 + 24x + 14$	64.	$y''' - 64y' = -128x - 64$

65.	$y''' - 4y'' + 4y' = 12x^2 - 24x + 14$	66.	$y''' - 100y' = -200x - 100$
67.	$y''' + 6y'' + 9y' = 27x^2 + 36x + 24$	68.	$y''' + y'' = 3x^2 + 6x + 6$
69.	$y''' - 6y'' + 9y' = 12x^2 - 36x + 24$	70.	$y''' - y'' = -3x^2 - 6x + 6$
71.	$y''' + 8y'' + 16y' = 48x^2 + 48x + 38$	72.	$y''' + 2y'' = 6x^2 + 12x + 6$
73.	$y''' - 8y'' + 16y' = 48x^2 - 48x + 38$	74.	$y''' - 2y'' = -6x^2 - 12x + 6$
75.	$y''' + 10y'' + 25y' = 75x^2 + 60x + 56$	76.	$y''' + 3y'' = 9x^2 + 18x + 6$
77.	$y''' - 10y'' + 25y' = 75x^2 - 60x + 56$	78.	$y''' - 3y'' = -9x^2 - 18x + 6$
79.	$y''' - 16y' = -48x^2 + 32x - 10$	80.	$y''' + 4y'' = 12x^2 + 24x + 6$
81.	$y''' - 25y' = -75x^2 + 50x - 19$	82.	$y''' - 4y'' = -12x^2 - 24x + 6$
83.	$y''' - 36y' = -108x^2 + 72x - 30$	84.	$y''' + 5y'' = 15x^2 + 30x + 6$
85.	$y''' - 49y' = -147x^2 + 98x - 43$	86.	$y''' - 5y'' = -15x^2 - 30x + 6$
87.	$y''' - 64y' = -192x^2 + 128x - 58$	88.	$y''' + 6y'' = 18x^2 + 36x + 6$
89.	$y''' - 81y' = -243x^2 + 162x - 75$	90.	$y''' - 6y'' = -18x^2 - 36x + 6$
91.	$y''' - 100y' = -300x^2 + 200x - 94$	92.	$y''' + 7y'' = 21x^2 + 42x + 6$
93.	$y''' - 2y'' + y' = 3x^2 - 10x + 3$	94.	$y''' - 7y'' = -21x^2 - 42x + 6$
95.	$y''' + 2y'' + y' = 3x^2 + 12x + 8$	96.	$y''' + 8y'' = 24x^2 + 48x + 6$
97.	$y''' - 2y'' + y' = 3x^2 - 12x + 8$	98.	$y''' - 8y'' = -24x^2 - 48x + 6$
99.	$y''' - 10y'' + 25y' = 50x - 70$	100	$y''' + 9y'' = 27x^2 + 54x + 6$

1.10. Задание 10

Найдите общее решение дифференциального уравнения

1	$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	2	$y'' + 3y' - 4y = (10x + 7)e^{x}$
3	$y'' - 3y' - 4y = (-10x - 3)e^{-x}$	4	$y'' - 2y' + y = 2e^{x}$
5	$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}$	6	$y'' + 5y' + 4y = (6x - 1)e^{-x}$
7	$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$	8	$y'' - 5y' + 4y = (-6x - 1)e^{x}$
9	$y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$	10	$y'' + 5y' + 6y = (2x + 1)e^{-2x}$
11	$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$	12	$y'' - 5y' + 6y = (3 - 2x)e^{2x}$
13	$y'' + 8y' + 16y = 2e^{-4x}$	14	$y'' + 5y' - 6y = (14x - 5)e^{x}$
15	$y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$	16	$y'' - 5y' - 6y = (9 - 14x)e^{-x}$
17	$y'' + 10y' + 25y = 2e^{-5x}$	18	$y'' + 2y' + y = 4x \cdot e^{x}$
19	$y'' - 10y' + 25y = 2e^{5x}$	20	$y'' - 2y' + y = (x + 1)e^{2x}$
21	$y'' + y' - 2y = (6x + 5)e^{x}$	22	$y'' + 4y' + 4y = (16x - 8)e^{2x}$
23	$y'' - y' - 2y = (-6x - 1)e^{-x}$	24	$y'' - 4y' + 4y = (x + 1)e^{-x}$
25	$y'' + 6y' + 9y = 4x \cdot e^{-x}$	26	$y'' - 6y' + 9y = (16x - 24)e^{-x}$
27	$y'' + 8y' + 16y = (36x - 60)e^{2x}$	28	$y'' - 8y' + 16y = (4x - 12)e^{2x}$
29	$y'' + 10y' + 25y = (49x + 63)e^{2x}$	30	$y'' + y' - 2y = (6x + 5)e^{x}$
31	$y'' + y' - 2y = (10x + 17)e^{3x}$	32	$y'' - y' - 2y = (4x + 9)e^{3x}$
33	$y'' + 3y' - 4y = (6x + 13)e^{2x}$	34	$y'' - 3y' - 4y = (-6x - 5)e^{2x}$
35	$y'' + 5y' + 4y = (18x - 9)e^{2x}$	36	$y'' - 5y' + 4y = (-2x - 3)e^{2x}$
37	$y'' - 5y' + 6y = (20x - 29)e^{-2x}$	38	$y'' + 5y' + 6y = (2x + 1)e^{-x}$
39	$y'' + 5y' - 6y = (-10x + 13)e^{-x}$	40	$y'' - 5y' - 6y = (8x - 17)e^{-2x}$
41	$y'' + y' = (12x + 16)e^{2x}$	42	$y'' - y' = (4x - 2)e^{-x}$
43	$y'' + 2y' = (16x + 20)e^{2x}$	44	$y'' - 2y' = (6x - 2)e^{-x}$
45	$y'' + 3y' = (20x + 24)e^{2x}$	46	$y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$

47	$y'' + 4y' = (24x + 4)e^{2x}$	48	$y'' - 4y' = (24x - 28)e^{-2x}$
49	$y'' + 5y' = (28x + 4)e^{2x}$	50	$y'' - 5y' = (28x - 46)e^{-2x}$
51	$y'' + 6y' = (32x + 52)e^{2x}$	52	$y'' - 6y' = (18 - 18x)e^{3x}$
53	$y'' + 7y' = (-12x - 2)e^{-x}$	54	$y'' - 7y' = (22 - 24x)e^{3x}$
55	$y'' + 8y' = (-14x - 2)e^{-x}$	56	$y'' - 8y' = (26 - 30x)e^{3x}$
57	$2y'' + y' = (10x + 9)e^{2x}$	58	$2y'' - y' = (5 - 3x)e^{-x}$
59	$3y'' + y' = (14x + 13)e^{2x}$	60	$3y'' - y' = (7 - 4x)e^{-x}$
61	$4y'' + y' = (36x + 34)e^{2x}$	62	$4y'' - y' = (18 - 10x)e^{-x}$
63	$y'' - 6y' - 7y = (15x - 58)e^{2x}$	64	$5y'' - y' = (22x - 21)e^{-2x}$
65	$y'' + 9y' + 20y = (5 - 12x)e^{-x}$	66	$6y'' - y' = (26x - 25)e^{-2x}$
67	$y'' + 7y' + 10y = (120x - 1)e^{3x}$	68	$7y'' - y' = (60x + 41)e^{3x}$
69	$y'' - 8y' + 7y = (-5x - 24)e^{2x}$	70	$8y'' - y' = (69x + 47)e^{3x}$
71	$y'' - 2y' - 15y = (15x - 17)e^{2x}$	72	$9y'' - y' = (78x + 53)e^{3x}$
73	$y'' - 9y' + 20y = (90x - 3)e^{-x}$	74	$2y'' - y' - y = (5x + 7)e^{2x}$
75	$2y'' + y' - 3y = (-18x - 13)e^{3x}$	76	$2y'' - y' - 3y = (3x + 7)e^{2x}$
77	$2y'' + y' - 6y = (-30x - 26)e^{3x}$	78	$2y'' - y' - 6y = (6x + 10)e^{-x}$
79	$y'' - 13y' + 12y = (-52x + 30)e^{-x}$	80	$5y'' + y' = (-22x - 21)e^{2x}$
81	$y'' + 13y' + 12y = (-20x + 18)e^{-2x}$	82	$6y'' + y' = (-26x - 25)e^{2x}$
83	$y'' + 7y' + 10y = (28x + 123)e^{2x}$	84	$8y'' + y' = (-7x + 15)e^{-x}$
85	$y'' - 7y' + 10y = (18x + 63)e^{-x}$	86	$y'' + 6y' - 7y = (8 - 20x)e^{3x}$
87	$y'' + 8y' + 15y = (34 - 48x)e^{3x}$	88	$y'' - 8y' + 15y = (7 - 3x)e^{2x}$
89	$y'' + 2y' - 15y = (16x - 16)e^{-x}$	90	$9y'' + y' = (-8x + 17)e^{-x}$
91	$y'' + 8y' + 7y = (27x + 120)e^{2x}$	92	$2y'' + y' - y = (20x + 13)e^{3x}$
93	$y'' + y' - 20y = (9 - 54x)e^{-2x}$	94	$7y'' + y' = (-6x + 13)e^{-x}$
95	$y'' - y' - 20y = (-42x - 29)e^{-2x}$	96	$y'' - 7y' + 10y = (-6x - 1)e^{3x}$

97	$y'' + 3y' - 10y = (40x + 53)e^{3x}$	98	$y'' + 9y' + 14y = (2 - 8x)e^{-3x}$
99	$y'' - 9y' + 14y = (100x + 120)e^{-3x}$	100	$y'' - 3y' - 10y = (5 - 50x)e^{3x}$

1.11. Задание 11

Найдите общее решение дифференциального уравнения

1. $y'' + 4y' + 5y = -4\sin 3x - 28\cos 3x$
2. $y'' - 4y' + 5y = 12\sin 3x - 4\cos 3x$
3. $y'' + 2y' + 2y = 10\cos 4x - 50\sin 4x$
4. $y'' - 2y' + 2y = 4\sin 2x - 2\cos 2x$
5. $y'' + 6y' + 13y = 69\cos 4x - 33\sin 4x$
6. $y'' - 6y' + 13y = -9\sin 4x - 72\cos 4x$
7. $y'' + 2y' + 5y = 7\sin 2x + 11\cos 2x$
8. $y'' - 2y' + 5y = -\sin 2x - 13\cos 2x$
9. $y'' + 4y' + 8y = 28\sin 2x + 16\cos 2x$
10. $y'' - 4y' + 8y = -4\sin 2x - 32\cos 2x$
11. $y'' + y = 6\cos 2x - 3\sin 2x$
12. $y'' + 4y = -5\sin 3x - 10\cos 3x$
13. $y'' + 8y' + 10y = -35\sin 5x - 150\cos 5x$
14. $y'' - 8y' + 10y = 125\sin 5x + 90\cos 5x$
15. $y'' + 6y' + 10y = -36\sin 2x - 12\cos 2x$
16. $y'' - 6y' + 10y = 12\sin 2x + 36\cos 2x$
17. $y'' + 9y = -48\sin 5x - 32\cos 5x$
18. $y'' + 25y = 16\sin 3x + 32\cos 3x$
19. $2y'' + 2y' + y = 10\sin 2x - 15\cos 2x$
20. $2y'' - 2y' + y = 40\sin 3x - 5\cos 3x$
21. $y'' + 4y' + 20y = 55\cos 5x - 35\sin 5x$
22. $y'' - 4y' + 20y = 8\cos 2x - 56\sin 2x$
23. $y'' + 8y' + 20y = -64\sin 2x - 32\cos 2x$
24. $y'' - 8y' + 20y = -64\sin 2x + 32\cos 2x$
25. $y'' + 36y = 54\sin 3x + 27\cos 3x$

26. $y'' + 49y = 135\sin 2x + 45\cos 2x$
27. $2y'' + 2y' + 13y = 57\cos 5x - 64\sin 5x$
28. $2y'' - 2y' + 13y = 16\sin 3x + 7\cos 3x$
29. $2y'' + 2y' + 5y = -46\sin 4x + 43\cos 4x$
30. $2y'' - 2y' + 5y = 32\sin 3x - \cos 3x$
31. $2y'' + 2y' + 25y = 30\sin 2x + 25\cos 2x$
32. $2y'' - 2y' + 25y = 38\sin 2x + 9\cos 2x$
33. $y'' + 64y = -78\sin 5x - 39\cos 5x$
34. $y'' + 81y = 112\cos 5x - 112\sin 5x$
35. $y'' + 100y = 150\cos 5x + 150\sin 5x$
36. $4y'' + 12y' + 25y = 15\sin 2x - 33\cos 2x$
37. $4y'' - 12y' + 25y = 14\sin 3x - 83\cos 3x$
38. $4y'' + 16y' + 25y = 59\sin 3x - 37\cos 3x$
39. $4y'' - 16y' + 25y = -70\sin 3x - 85\cos 3x$
40. $y'' + 121y = -117\sin 2x - 117\cos 2x$
41. $y'' + 4y' + 13y = 7\sin 4x + 51\cos 4x$
42. $y'' - 4y' + 13y = 15\cos 2x - 35\sin 2x$
43. $5y'' + 4y' + y = 95\cos 4x - 63\sin 4x$
44. $5y'' - 4y' + y = 32\cos 3x - 56\sin 3x$
45. $2y'' + 2y' + y = 23\cos 3x - 11\sin 3x$
46. $2y'' - 2y' + y = 28\cos 3x - 29\sin 3x$
47. $13y'' + 6y' + y = -63\sin 2x - 39\cos 2x$
48. $13y'' - 6y' + y = 63\sin 2x - 39\cos 2x$
49. $5y'' + 2y' + y = 15\sin 2x - 23\cos 2x$
50. $5y'' - 2y' + y = 11\sin 2x + 42\cos 2x$
51. $8y'' + 4y' + y = 95\sin 3x + 130\cos 3x$
52. $8y'' - 4y' + y = 71\sin 3x + 12\cos 3x$
53. $4y'' + y = 35\sin 3x + 105\cos 3x$
54. $10y'' + 8y' + y = 137\cos 3x - 154\sin 3x$
55. $10y'' - 8y' + y = 41\cos 3x - 202\sin 3x$
56. $10y'' + 6y' + y = 36\cos 3x - 178\sin 3x$
57. $10y'' - 6y' + y = 18\sin 3x - 89\cos 3x$
58. $9y'' + y = -70\sin 2x - 35\cos 2x$
59. $25y'' + y = 99\cos 2x - 99\sin 2x$

60. $20y'' + 4y' + y = 87\cos 2x - 71\sin 2x$
61. $20y'' - 4y' + y = 24\sin 2x - 237\cos 2x$
62. $20y'' + 8y' + y = 95\cos 2x - 63\sin 2x$
63. $20y'' - 8y' + y = 127\sin 2x - 221\cos 2x$
64. $36y'' + y = 143\cos 2x - 286\sin 2x$
65. $49y'' + y = 195\cos 2x - 390\sin 2x$
66. $13y'' + 2y' + 2y = 115\cos 3x + 6\sin 3x$
67. $13y'' - 2y' + 2y = 121\sin 3x - 109\cos 3x$
68. $5y'' + 2y' + 2y = -92\sin 3x - 31\cos 3x$
69. $5y'' - 2y' + 2y = 49\sin 3x - 37\cos 3x$
70. $25y'' + 2y' + 2y = -200\sin 2x - 90\cos 2x$
71. $25y'' - 2y' + 2y = 192\sin 2x + 106\cos 2x$
72. $64y'' + y = -575\sin 3x - 575\cos 3x$
73. $81y'' + y = -323\cos 2x - 323\sin 2x$
74. $100y'' + y = 399\cos 2x - 798\sin 2x$
75. $25y'' + 12y' + 4y = 120\cos 2x - 72\sin 2x$
76. $25y'' - 12y' + 4y = 144\sin 2x - 168\cos 2x$
77. $25y'' + 16y' + 4y = 221\sin 3x - 48\cos 3x$
78. $25y'' - 16y' + 4y = 320\cos 2x$
79. $121y'' + y = 483\sin 2x - 483\cos 2x$
80. $13y'' + 4y' + y = 140\sin 3x + 220\cos 3x$
81. $13y'' - 4y' + y = 35\sin 2x + 110\cos 2x$
82. $y'' + 4y' + 5y = -40\sin 5x$
83. $y'' - 4y' + 5y = -7\sin 6x - 55\cos 6x$
84. $y'' + 2y' + 2y = -46\sin 6x - 22\cos 6x$
85. $y'' - 2y' + 2y = 33\sin 5x - 13\cos 5x$
86. $y'' + 6y' + 13y = -18\sin 5x - 42\cos 5x$
87. $y'' - 6y' + 13y = 30\sin 5x - 12\cos 5x$
88. $y'' + 2y' + 5y = -5\sin 5x$
89. $y'' - 2y' + 5y = -30\sin 5x - 40\cos 5x$
90. $y'' + 4y' + 8y = 14\sin 5x - 57\cos 5x$
91. $y'' - 4y' + 8y = 32\sin 4x + 24\cos 4x$
92. $y'' + 8y' + 10y = 52\cos 4x - 76\sin 4x$
93. $y'' - 8y' + 10y = 50\sin 3x - 46\cos 3x$

94. $y'' + 6y' + 10y = -38\sin 3x - 34\cos 3x$
95. $y'' - 6y' + 10y = 38\sin 3x - 34\cos 3x$
96. $2y'' + 2y' + y = 108\cos 5x - 29\sin 5x$
97. $2y'' - 2y' + y = 88\cos 5x - 69\sin 5x$
98. $y'' + 2y' + 10y = -23\sin 3x - \cos 3x$
99. $y'' - 2y' + 10y = 25\cos 5x - 15\sin 5x$
100. $y'' + 4y' + 10y = 13\sin 3x - 35\cos 3x$

Список используемой литературы

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебник для втузов. – М.: Интеграл-Пресс. В 2-х ч. 2001.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - М.: Наука, 1981. - 448с.
3. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. / Под редакцией А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. - М.: Наука, 1981. - 368с.
4. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике: Учеб.пособие для втузов. – М.: Высш.шк., 1998. – 304 с.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч.II. Учеб.пособие для втузов. - М.: Высшая школа, 1996. - 304с., 416с.
6. Бойцова Е.А. Математическое моделирование с помощью дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений. Методические указания по выполнению модуля «Дифференциальные уравнения и их приложения» // Курск. гос. техн. ун-т; Курск, 2007. 42 с.
7. Бойцова Е.А. Дифференциальные уравнения и их приложения. Методические указания по выполнению модуля // Курск. гос. техн. ун-т; Курск, 2007. 32 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
____________ О.Г.Локтионова
« ___ » __________ 2014г.

Интегрирование функций

Индивидуальные задания к модулю 5

Курск 2014

УДК 517

Составители: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *К.В.Жилина*

Интегрирование функций: индивидуальные задания к модулю 5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап Курск, 2014. 38с.: табл. 11. Библиогр.: 38с..

Представлены 9 заданий, первое из которых содержит 225 вариантов, остальные – по 75 вариантов в каждом по разделу математического анализа «Интегрирование функций». Приведены контрольные вопросы, а также список рекомендуемой литературы.

Предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Системообразующим фактором математической подготовки будущих специалистов является самостоятельная учебная работа студентов, которая способствует развитию индивидуального творческого мышления, обеспечивает ритмическую работу студента в течение семестра, повышает его академическую активность.

При выборе заданий из таблиц следует использовать параметры n, N, где n – номер студента в журнале преподавателя, N – последняя цифра номера группы.

Индивидуальные задания рассчитаны на 2 уровня сложности.

Студенты, выбравшие задания первого более низкого уровня сложности, выполняют задания под номерами 1, 2, 3, 5, 6, 8.

Студенты, выбравшие задания второго уровня сложности, выполняют все задания.

Проверить правильность полученного результата при интегрировании и построить графики функций для заданий 5,6,7, можно с помощью ЭВМ, например, программного пакета Mathcad.

Методические указания по выполнению данного модуля с образцами решений аналогичных задач изложены в работе: «Интегралы и их приложения».

При защите работы студент обязан объяснить решение любого примера из задания, ответить на любой из контрольных вопросов.

В зависимости от выбранного уровня сложности при правильном решении задания и верных ответов на вопросы, студент получает различное число баллов из 100 возможных.

Контрольные вопросы по математическому анализу по разделу «Интегрирование функций» входят в перечень экзаменационных.

Задание 1

Найти неопределенный интеграл, применяя метод подведения функции под знак дифференциала и метод интегрирования функции, содержащей квадратный трехчлен в знаменателе

n	а)	б)	в)
1	$\int \frac{dx}{1-4x}$	$\int x\cos(x^2-2)dx$	$\int \frac{xdx}{x^2-4x+3}$
2	$\int \frac{dx}{(2-x)^2}$	$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$	$\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$
3	$\int \frac{dx}{4x+3}$	$\int \frac{x}{2+x^4}dx$	$\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$
4	$\int e^{2x+5}dx$	$\int \frac{x}{\sin^2(x^2+1)}dx$	$\int \frac{5+x}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$
5	$\int \sqrt[3]{2x+25}\,dx$	$\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$	$\int \frac{2x}{5x^2-3x+2}dx$
6	$\int e^{-0,1x+2}dx$	$\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$	$\int \frac{6-x}{\sqrt{x^2-7x+4}}dx$
7	$\int \cos\frac{7}{3}x\,dx$	$\int \frac{xdx}{\cos(x^2-1)}$	$\int \frac{2-x}{2x^2-20x+4}dx$
8	$\int \frac{dx}{(2x+3)^{3/5}}$	$\int x\sqrt[3]{1-x^2}\,dx$	$\int \frac{5x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$	$\int \frac{xdx}{3+4x^4}$	$\int \frac{x+3}{3+4x-4x^2}dx$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2(x-3)}$	$\int e^x\sqrt{e^{2x}+1}dx$	$\int \frac{2x+3}{15x-3x^2+9}dx$
11	$\int 5^{1-2x}dx$	$\int \frac{\sqrt{\ln x+4}}{x}dx$	$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-6x-13}}dx$
12	$\int (1-2x)^{10}dx$	$\int x\cdot e^{x^2+2}dx$	$\int \frac{3x+1}{6x-8-x^2}dx$
13	$\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$	$\int x\cos(x^2-2)\,dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{-x^2+6x+3}}dx$
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x}}$	$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$	$\int \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$

1	2	3	4
15	$\int \sin(2-5x)\,dx$	$\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}$	$\int \frac{x+1}{4x-3x^2-1}\,dx$
16	$\int \frac{dx}{4x+5}$	$\int (\cos x-1)^3 \sin x\,dx$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x-x^2+10}}$
17	$\int \sin(9-2x)\,dx$	$\int \frac{x}{4+x^2}\,dx$	$\int \frac{2-x}{2x^2-20x+4}\,dx$
18	$\int (6-2x)^{3/5}dx$	$\int x\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\,dx$	$\int \frac{6-x}{\sqrt{3x^2-7x+11}}\,dx$
19	$\int \frac{dx}{\cos^2(3-4x)}$	$\int (2x-3)\cdot e^{x^2-3x}\,dx$	$\int \frac{2-2x}{3x^2+10x-5}\,dx$
20	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3-4x}}$	$\int \frac{x^2dx}{x^3+4}$	$\int \frac{2-5x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}\,dx$
21	$\int 4^{3-2x}dx$	$\int x\sin(x^2-2)\,dx$	$\int \frac{x+3}{3+4x-4x^2}\,dx$
22	$\int \frac{dx}{(1-x)^3}$	$\int (e^x+4)^2 e^x dx$	$\int \frac{3x+2}{\sqrt{3+66x-11x^2}}\,dx$
23	$\int e^{0,1x+2}\,dx$	$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{6-x^5}}$	$\int \frac{2+4x}{x^2-3x+2}\,dx$
24	$\int \sqrt[3]{x-3}\,dx$	$\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$	$\int \frac{2x-3}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx$
25	$\int \frac{dx}{(2x+7)^5}$	$\int x\sin(2x^2+8)\,dx$	$\int \frac{2-3x}{x^2-7x+11}\,dx$
26	$\int \frac{dx}{1+3x}$	$\int \sqrt[3]{\sin x-5}\cos x\,dx$	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{2+x-x^2}}\,dx$
27	$\int \frac{dx}{\cos 3x}$	$\int \frac{e^x dx}{e^x+1}$	$\int \frac{2x-3}{15x-3x^2+9}\,dx$
28	$\int 5^{1-3x}dx$	$\int \frac{x^2dx}{5+3x^6}$	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{-x^2+4x}}\,dx$
29	$\int e^{\frac{2x-4}{5}}\,dx$	$\int e^x\sqrt[3]{2-e^x}\,dx$	$\int \frac{3-2x}{2x^2-6x-1}\,dx$
30	$\int \frac{dx}{\sin^2(2x+3)}$	$\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}\,dx$

1	2	3	4
31	$\int \sqrt{1+5x}\,dx$	$\int \frac{x\,dx}{5+7x^4}$	$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2-6x-12}}\,dx$
32	$\int \sin(2x+1)\,dx$	$\int x\cdot 2^{x^2}\,dx$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}\,dx$
33	$\int \frac{dx}{(2x+5)^{1/2}}$	$\int \frac{tg^3 x\,dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{1-2x}{\sqrt{5x-2x^2+8}}\,dx$
34	$\int 2^{1-2x}dx$	$\int \sin^3 x\cos x\,dx$	$\int \frac{3x-1}{6x-8-x^2}\,dx$
35	$\int \frac{dx}{\sin(1-x)}$	$\int \frac{\ln^3 x\,dx}{x}$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{-x^2+6x+6}}\,dx$
36	$\int \frac{dx}{4-5x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)}$	$\int \frac{x-1}{4x-3x^2-1}\,dx$
37	$\int \cos(3x+1)\,dx$	$\int (2x-1)\cdot 2^{x^2-x}\,dx$	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x-x^2+3}}\,dx$
38	$\int (2x+0{,}6)^{1/6}dx$	$\int e^x\cos(e^x)dx$	$\int \frac{3x+1}{x^2-3x-3}\,dx$
39	$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}}$	$\int x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx$	$\int \frac{3-x}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$
40	$\int \frac{dx}{9-7x}$	$\int xe^{2-3x^2}dx$	$\int \frac{1-4x}{x^2+7x+12}\,dx$
41	$\int 3^{-x/4}dx$	$\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{2x^2-2x-1}}\,dx$
42	$\int \frac{dx}{(3+2x)^3}$	$\int x\cos(x^2-2)\,dx$	$\int \frac{2-x}{3x^2+2x+5}\,dx$
43	$\int 10^{2x+1}dx$	$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{3-x^6}}$	$\int \frac{2x-3}{\sqrt{5-4x-6x^2}}\,dx$
44	$\int \sin(1-\frac{x}{3})\,dx$	$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[4]{x^4+2}}$	$\int \frac{1-3x}{8x^2+x+2}\,dx$
45	$\int (\frac{x}{5}+1)^{1/4}dx$	$\int \frac{3^x\,dx}{1+3^{2x}}$	$\int \frac{2-x}{\sqrt{2x^2+2x+7}}\,dx$

1	2	3	4
46	$\int e^{\frac{x-3}{10}}\,dx$	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$	$\int \frac{3x+1}{2x-x^2+10}\,dx$
47	$\int \frac{dx}{4-7x}$	$\int \frac{x\,dx}{5+6x^4}$	$\int \frac{1-2x}{\sqrt{x^2-7x+10}}\,dx$
48	$\int \frac{dx}{\cos 4x}$	$\int x\cdot\sin(2x^2+8)\,dx$	$\int \frac{1+4x}{x^2+2x+7}\,dx$
49	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$	$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^4}\,dx$	$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4x+11}}\,dx$
50	$\int \sqrt[4]{1-2x}\,dx$	$\int x^4(3x^5-1)^8\,dx$	$\int \frac{x-2}{\sqrt{5+x-x^2}}\,dx$
51	$\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$	$\int x\cdot 3^{x^2-8}\,dx$	$\int \frac{3x+1}{x^2+3x+6}\,dx$
52	$\int \sin(\frac{x}{2}-\frac{1}{3})\,dx$	$\int \frac{x\,dx}{1-x^4}$	$\int \frac{x+4}{\sqrt{3x^2-2x+1}}\,dx$
53	$\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{4}}$	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \frac{5-2x}{x^2+4x+31}\,dx$
54	$\int 5^{2-3x}dx$	$\int \sin^5 x\cos x\,dx$	$\int \frac{x+4}{\sqrt{9x-3x^2}}\,dx$
55	$\int \cos(2-\frac{x}{5})\,dx$	$\int \frac{dx}{x(\ln x+1)}$	$\int \frac{x+3}{x^2-7x+12}\,dx$
56	$\int \frac{dx}{\cos(2x+3)}$	$\int \frac{\sin x}{(2-\cos x)^2}\,dx$	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\,dx$
57	$\int 7^{1-3x}dx$	$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$	$\int \frac{3-x}{x^2+3x+5}\,dx$
58	$\int \cos(\frac{x}{4}-6)\,dx$	$\int \cos^4 x\sin x\,dx$	$\int \frac{2x+3}{\sqrt{2+3x-2x^2}}\,dx$
59	$\int e^{x/3}dx$	$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\int \frac{x+3}{\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$
60	$\int \frac{dx}{\sin^2(3x-4)}$	$\int \sqrt{\cos x}\,\sin x\,dx$	$\int \frac{x-3}{\sqrt{5-2x-x^2}}\,dx$

1	2	3	4
61	$\int (1-5x)^{11}dx$	$\int (2\cos x+5)^3 \sin xdx$	$\int \frac{2x-1}{x^2+6x+11}dx$
62	$\int \frac{dx}{\cos^2(x-3)}$	$\int 4^{\sin x}\cos x\, dx$	$\int \frac{6x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$
63	$\int \frac{dx}{(3-5x)^6}$	$\int x^2\cos(x^3-3)dx$	$\int \frac{3-x}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$
64	$\int \sin\frac{x}{8}dx$	$\int \frac{x^2dx}{\cos^2(x^3+3)}$	$\int \frac{5x-2}{x^2+4x+6}dx$
65	$\int e^{x/5}dx$	$\int \frac{e^{\mathrm{arctg}x}}{1+x^2}dx$	$\int \frac{x+5}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$
66	$\int \frac{dx}{\cos 2x}$	$\int \frac{\mathrm{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$	$\int \frac{3x+1}{\sqrt{4x^2+4x+9}}dx$
67	$\int \frac{dx}{4-2x}$	$\int 2^{\arcsin x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{6-2x}{x^2-3x+5}dx$
68	$\int 5^{\frac{1-3x}{4}}dx$	$\int \sqrt[3]{\mathrm{arctg}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}$	$\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+4x+3}}dx$
69	$\int \sqrt[3]{2-5x}\,dx$	$\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\cos 2x\,dx$	$\int \frac{3x+1}{x^2-8x-32}dx$
70	$\int \frac{dx}{\sin^2\frac{x}{2}}$	$\int 2x\cdot\cos(x^2+1)\,dx$	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx$
71	$\int 3^{10x}dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin^2 x}$	$\int \frac{x+5}{2x^2-6x+2}dx$
72	$\int \cos(2-5x)\,dx$	$\int x\cos(1-x^2)\,dx$	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{-3x^2-6x}}dx$
73	$\int (\frac{x}{4}-7)^{2/3}dx$	$\int 3^{\sin x}\cos x\,dx$	$\int \frac{5+2x}{x^2+3x-1}dx$
74	$\int \frac{dx}{x-4}$	$\int \sqrt{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$	$\int \frac{x+2}{\sqrt{4x-x^2+10}}dx$
75	$\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{5}}$	$\int \frac{e^{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$	$\int \frac{3x+2}{x^2-x-1}dx$

Задание 2

Используя формулу интегрирования по частям, найти неопределенный интеграл:

n	$\int udv$	n	$\int udv$	n	$\int udv$
1	$\int 2^{x}(x+4)\,dx$	20	$\int 3^{2x}(x+4)\,dx$	39	$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$
2	$\int (x-1)\cos x dx$	21	$\int \mathrm{arctg} 2x\,dx$	40	$\int \arcsin 2x\,dx$
3	$\int x\ln x\,dx$	22	$\int x\cos(2-x)\,dx$	41	$\int (x-1)\cos\frac{x+1}{2}\,dx$
4	$\int (1-x)\sin 3x\,dx$	23	$\int xe^{1-x}\,dx$	42	$\int \ln(x+5)\,dx$
5	$\int \ln(2x+1)\,dx$	24	$\int (2-x)\sin 3x\,dx$	43	$\int \mathrm{arctg} 3x\,dx$
6	$\int e^{x+1}(x-1)\,dx$	25	$\int x\cdot 2^{x+1}\,dx$	44	$\int (1-2x)\sin 2x\,dx$
7	$\int (1-2x)\cos 2x dx$	26	$\int (1-2x)\sin x\,dx$	45	$\int x^2\cos x\,dx$
8	$\int x\cdot 3^{1-5x}\,dx$	27	$\int \mathrm{arcctg} x\,dx$	46	$\int x\cdot e^{x/3}dx$
9	$\int (2x+1)\sin 2x\,dx$	28	$\int (3x+1)\,e^{4x}dx$	47	$\int (x+1)\,7^{x}\,dx$
10	$\int e^{3x}(2x-1)\,dx$	29	$\int x^2\ln x\,dx$	48	$\int x\cdot 2^{1-x}\,dx$
11	$\int (2-x)\sin 2x\,dx$	30	$\int x\cos 4x\,dx$	49	$\int (x+1)\,e^{3x}dx$
12	$\int (10-x)\cos 2x\,dx$	31	$\int (x-1)2^{x+5}\,dx$	50	$\int 2\ln(x-1)\,dx$
13	$\int 2^{-x}(x+1)\,dx$	32	$\int (1-x)\sin\frac{x}{2}\,dx$	51	$\int 5x\cos 2x\,dx$
14	$\int \ln(0{,}5x+1)\,dx$	33	$\int xe^{x/2}dx$	52	$\int (1-3x)\,e^{-3x}dx$
15	$\int xe^{2-x}dx$	34	$\int (x+7)\sin 4x\,dx$	53	$\int \arccos 3x\,dx$
16	$\int \ln(2-3x)\,dx$	35	$\int \ln(x-6)\,dx$	54	$\int (x-6)\cos(6-x)\,dx$
17	$\int x\cdot 5^{x+1}dx$	36	$\int (2x+1)\cos 3x\,dx$	55	$\int (2x+3)\sin x\,dx$
18	$\int (x-25)\sin 2x\,dx$	37	$\int x\sin\frac{x}{3}\,dx$	56	$\int (x+2)\,e^{x/5}dx$
19	$\int \arccos x\,dx$	38	$\int x\cdot 2^{5x}\,dx$	57	$\int (1+2x)2^{-x}dx$

n	$\int udv$	n	$\int udv$	n	$\int udv$
58	$\int (1-x)\sin 3x\, dx$	64	$\int (5x-1)\cos\frac{x}{4}\, dx$	70	$\int \sqrt{x}\ln x\, dx$
59	$\int (x+5)\cos\frac{x}{2}\, dx$	65	$\int xe^{2x}\, dx$	71	$\int 2x\cos\frac{x}{2}\, dx$
60	$\int \ln(2x-1)\, dx$	66	$\int x^2 e^x dx$	72	$\int e^x \sin x\, dx$
61	$\int \ln^2 x\, dx$	67	$\int e^x \cos x\, dx$	73	$\int (x+3)e^{3x} dx$
62	$\int \mathrm{arctg} x\, dx$	68	$\int \frac{\ln x}{x^2} dx$	74	$\int 3xe^{-2x} dx$
63	$\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$	69	$\int x^2 \cdot e^{x/2} dx$	75	$\int \arccos 2x\, dx$

Задание 3

Найти интеграл от неправильной рациональной дроби, предварительно представив ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби. Правильную рациональную дробь разложить на простейшие.

n	Задание	n	Задание
1	$\int \frac{x^5+4x-8}{x^3-4x}dx$	13	$\int \frac{dx}{x^4-4x^3+4x^2}$
2	$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$	14	$\int \frac{x^5}{x^3-1}dx$
3	$\int \frac{x^5+x^4+8}{x^3-4x}dx$	15	$\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx$
4	$\int \frac{x+4}{(x+1)(x^2+5x+6)}dx$	16	$\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$
5	$\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$	17	$\int \frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}dx$
6	$\int \frac{x^3+x+1}{x^3-8}dx$	18	$\int \frac{x^3+x^2}{(x-1)(x^2+3x+2)}dx$
7	$\int \frac{x-8}{x^3-4x^3+4x}dx$	19	$\int \frac{dx}{x^3-x^2+x-1}$
8	$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$	20	$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$
9	$\int \frac{x^2}{(x^2+4x+4)(x+4)^2}dx$	21	$\int \frac{x}{x^3-2x^2+x}dx$
10	$\int \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)}dx$	22	$\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x+2)}dx$
11	$\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}dx$	23	$\int \frac{2x^2+4x-9}{(x^2+2x-3)(x-4)}dx$
12	$\int \frac{3x-4}{x^3+x^2+4x+4}dx$	24	$\int \frac{x^3-3x^2-12}{x^3-7x^2+12x}dx$

n	Задание	n	Задание
25	$\int \frac{x^4 + 4x^2 + 25}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$	40	$\int \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^3 + x}\,dx$
26	$\int \frac{x^3 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x^2 - 4x - 5)}\,dx$	41	$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 4x}\,dx$
27	$\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x}\,dx$	42	$\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 1}{x^3 - x}\,dx$
28	$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + 5x^2 + 4x}\,dx$	43	$\int \frac{x^3 + x^2 - 2x + 4}{(x^2 + 2x + 1)(x-1)}\,dx$
29	$\int \frac{x^4}{x^3 + 1}\,dx$	44	$\int \frac{x^4 - 4x^2 + 3x + 2}{(x^2 - 2x + 1)(x+1)}\,dx$
30	$\int \frac{x - 1}{x^3 - 8}\,dx$	45	$\int \frac{x\,dx}{x^3 + 8}$
31	$\int \frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6}\,dx$	46	$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 5x + 10}{x^3 + 4x^2 + 4x}\,dx$
32	$\int \frac{2x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$	47	$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 15x + 2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$
33	$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^3 - 1}\,dx$	48	$\int \frac{x^3 + x + 4}{x^3 - 8}\,dx$
34	$\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$	49	$\int \frac{x - 1}{x^3 + 6x^2 + 8x}\,dx$
35	$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}\,dx$	50	$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - 4x^2 + 3x}\,dx$
36	$\int \frac{x^5 - 25x^3 - 1}{x^3 + 5x^2 + 6x}\,dx$	51	$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}\,dx$
37	$\int \frac{x^4 + x^3 - 2x^2}{x^3 - 4x^2 + 4x}\,dx$	52	$\int \frac{dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$
38	$\int \frac{x^3 - 12x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx$	53	$\int \frac{x - 4}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$
39	$\int \frac{x^4 - 2x^2 - x + 3}{x^3 - x}\,dx$	54	$\int \frac{x^3 - x + 4}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\,dx$

n	Задание	n	Задание
55	$\int \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x}\,dx$	66	$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - 12x}$
56	$\int \frac{x - 1}{(x-2)(x+1)^2}\,dx$	67	$\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 - 3x}$
57	$\int \frac{3x^2 + 5x + 12}{x^3 + 3x^2 - 10x}\,dx$	68	$\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 8x}\,dx$
58	$\int \frac{3x + 1}{x^3 - x}\,dx$	69	$\int \frac{dx}{x^3 - 4x^2 + 4x}$
59	$\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x}\,dx$	70	$\int \frac{x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 5}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$
60	$\int \frac{x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx$	71	$\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{x^2 + x}\,dx$
61	$\int \frac{x^2 + 5}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$	72	$\int \frac{x^2 - 2}{x^3 + x}\,dx$
62	$\int \frac{5x^4 - 14}{x^3 - x^2 - 4x + 4}\,dx$	73	$\int \frac{dx}{x^3 + 3x^2 + 2x}$
63	$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 - 8x}$	74	$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 - 2x}$
64	$\int \frac{11x + 16}{x^3 + 2x^2 - 8x}\,dx$	75	$\int \frac{dx}{x^3 - x^2 - 2x}$
65	$\int \frac{(x-1)^2}{x^3 - x^2 - 6x}\,dx$		

Задание 4

Найти интеграл от тригонометрической функции:

n	Задание	n	Задание
1	$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\,dx$	17	$\int \sin^4 x\cos^4 x\,dx$
2	$\int \sin^4 x\,dx$	18	$\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$
3	$\int \cos^6 3x\,dx$	19	$\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$
4	$\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}$	20	$\int \sqrt[3]{\sin x}\cos^3 x\,dx$
5	$\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$	21	$\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx$
6	$\int \sqrt{\sin x}\cos^3 x\,dx$	22	$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x+5}dx$
7	$\int \frac{dx}{3+5\cos x}$	23	$\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x\,dx$
8	$\int \frac{\sin x+1}{1+\cos x-2\sin x}dx$	24	$\int \frac{\sin^3 x}{25-\cos x}dx$
9	$\int \frac{2\operatorname{tg}x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$	25	$\int \frac{\cos x}{2\sin x+\cos x}dx$
10	$\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx$	26	$\int \cos^{2/5} x\sin^3 x\,dx$
11	$\int \sin^5 x\,dx$	27	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\sin x}}dx$
12	$\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$	28	$\int \frac{\cos x}{2+\sin x}dx$
13	$\int \sin^3 x\cdot\cos^3 x\,dx$	29	$\int \sin^3 \frac{x}{4}dx$
14	$\int \cos^3 2x\,dx$	30	$\int \sin^2 \frac{x}{3}\cos^2 \frac{x}{3}dx$
15	$\int \cos^5 2x\,dx$	31	$\int \sin^3 2x\cos^3 2x\,dx$
16	$\int \sin^4 2x\,dx$	32	$\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x}dx$

n	Задание	n	Задание
33	$\int \frac{1+\mathrm{tgx}}{\sin 2x}dx$	49	$\int \frac{\mathrm{tgx}}{\sin^2 x-5\cos^2 x+4}dx$
34	$\int \frac{1+\cos x}{\sin x-2\cos x}dx$	50	$\int \frac{4+\mathrm{tgx}}{2\sin^2 x+18\cos^2 x}dx$
35	$\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$	51	$\int \frac{6+\mathrm{tgx}}{9\sin^2 x+4\cos^2 x}dx$
36	$\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$	52	$\int \frac{7+3\mathrm{tgx}}{(\sin x+2\cos x)^2}dx$
37	$\int \frac{3+\mathrm{tgx}}{2\sin^2 x+\cos^2 x-1}dx$	53	$\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$
38	$\int \frac{dx}{1+\mathrm{tgx}}$	54	$\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$
39	$\int \frac{dx}{5+4\cos x}$	55	$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$
40	$\int \frac{\mathrm{tgx}}{1-\mathrm{ctg}^2 x}dx$	56	$\int \frac{dx}{2+\cos x-\sin x}$
41	$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x+8}dx$	57	$\int \frac{8+\mathrm{tgx}}{18\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$
42	$\int \frac{dx}{(1+\cos x)^3}$	58	$\int \frac{2\mathrm{tg}^2 x-11\mathrm{tgx}+22}{4-\mathrm{tgx}}dx$
43	$\int \frac{\mathrm{tgx}}{3+4\cos 2x}dx$	59	$\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x-1}$
44	$\int \frac{\mathrm{tg}^2 x}{4+3\cos 2x}dx$	60	$\int \cos^2\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}dx$
45	$\int \frac{8\mathrm{tgx}}{3\cos^2 x+8\sin^2 x-7}dx$	61	$\int \grave{}\sin\frac{x}{6}\cos\frac{2x}{3}dx$
46	$\int \frac{4-7\mathrm{tgx}}{2+3\mathrm{tgx}}dx$	62	$\int \sin(x-\frac{\pi}{3})\cos 3x\,dx$
47	$\int \frac{2\mathrm{tgx}-6}{(4\cos x-\sin x)^2}dx$	63	$\sin^3\frac{x}{5}dx$
48	$\int \frac{6\sin^2 x}{4+3\cos 2x}dx$	64	$\int \cos^3 0{,}5x\,dx$

n	Задание	n	Задание
65	$\int \sqrt{\cos x}\,\sin^3 x\,dx$	71	$\int \frac{\mathrm{ctg}(2x+1)}{\sin^2(2x+1)}\,dx$
66	$\int \sin^3(2x-1)\,dx$	72	$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$
67	$\int \cos 10x \sin 3x\,dx$	73	$\int \frac{dx}{2\sin x - 1}$
68	$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + \sin x}\,dx$	74	$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x - 2\cos x}\,dx$
69	$\int \frac{\mathrm{tg}^2(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}\,dx$	75	$\int \sin^5 4x\,dx$
70	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\sin x}}\,dx$		

Задание 5

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

n	Задание	n	Задание
1	$y = x\sqrt{9-x^2}$, $y = 0$; $0 \le x \le 3$	11	$\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$ $x = 2$ $(x \ge 2)$
2	$\begin{cases} x = 4\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 3t \end{cases}$ $x = 2$ $(x \ge 2)$	12	$r = 4\sin 3\varphi$, $r = 2$ $(r \ge 2)$
3	$r = 4\cos 3\varphi$, $r = 2$ $(r \ge 2)$	13	$y = \cos x \sin^2 x$, $y = 0$; $(0 \le x \le \pi/2)$
4	$y = \sin x \cos^2 x$, $y = 0$ $(0 \le x \le \pi/2)$	14	$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t \end{cases}$ $y = 3$ $(y \ge 3)$
5	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 2$ $(y \ge 2)$	15	$r = 2\cos\varphi$, $r = 2\sqrt{3}\sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$
6	$r = \cos 2\varphi$	16	$y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$; $x = \ln 2$
7	$y = \sqrt{4-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$	17	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 3$ $(0 < x < 4\pi;\ y \ge 3)$
8	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 4$ $(0 < x < 8\pi,\ y \ge 4)$	18	$r = \sin 3\varphi$
9	$r = \sqrt{3}\cos\varphi$, $r = \sin\varphi$ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$	19	$y = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$
10	$y = x^2\sqrt{4-x^2}$, $y = 0$ $(0 \le x \le 2)$	20	$\begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $x = 6\sqrt{3}$ $(x \ge 6\sqrt{3})$

1	2	3	4
21	$r=6\sin 3\varphi$, $r=3$, $(r\ge 3)$	31	$y=x\sqrt{36-x^2}$, $y=0\ \ (0\le x\le 6)$
22	$y=\arccos x$, $y=0,\ \ x=0$	32	$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t, \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y=3\ \ (y\ge 3)$
23	$\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t \end{cases}$ $y=\sqrt{3}\ \ (y\ge 3)$	33	$r=\dfrac{1}{2}+\sin\varphi$
24	$r=\cos 3\varphi$	34	$x=\arccos y$, $x=0,\ \ y=0$
25	$y=(x+1)^2$, $y^2=x+1$	35	$\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t) \end{cases}$ $y=9\ \ (0<x<12\pi;\ y\ge 9)$
26	$\begin{cases} x=3(t-\sin t), \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$ $y=3\ \ (0<x<6\pi; y\ge 3)$	36	$r=\cos\varphi$, $r=\sin\varphi$ $(0\le\varphi\le\pi/2)$
27	$r=\cos\varphi$, $r=2\cos\varphi$	37	$y=x\cdot \mathrm{arctg} x$, $y=0,\ \ x=\sqrt{3}$
28	$y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$	38	$\begin{cases} x=32\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ $x=4\ \ (x\ge 4)$
29	$\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x=4\ \ (x\ge 4)$	39	$r=\sin\varphi$, $r=2\sin\varphi$
30	$r=6\cos 3\varphi$, $r=3$ $(r\ge 3)$	40	$y=x^2\cdot\sqrt{8-x^2}$, $y=0\ \ (0\le x\le 2\sqrt{2})$

1	2	3	4
41	$\begin{cases} x = 6(t-\sin t), \\ y = 6(1-\cos t) \end{cases}$ $y = 6 \ \ (0 < x < 12\pi;\ y \geq 6)$	51	$r = \frac{5}{2}\sin\varphi,$ $r = \frac{3}{2}\sin\varphi$
42	$r = 1 + \sqrt{2}\cos\varphi$	52	$y = \frac{x}{(x^2+1)^2},$ $y = 0,\ \ x = 1$
43	$x = \sqrt{e^y - 1},$ $x = 0,\ \ y = \ln 2$	53	$\begin{cases} x = 10(t-\sin t), \\ y = 10(1-\cos t) \end{cases}$ $y = 15 \ \ (0 < x < 20\pi,\ y \geq 15)$
44	$\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t \end{cases}$ $y = 4 \ \ (y \geq 4)$	54	$r = \frac{3}{2}\cos\varphi,$ $r = \frac{5}{2}\cos\varphi$
45	$r = \frac{1}{2} + \cos\varphi$	55	$x = (y-2)^3,$ $x = 4y - 8$
46	$y = x \cdot \sqrt{4 - x^2},$ $y = 0 \ \ (0 \leq x \leq 2)$	56	$\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1 \ \ (x \geq 1)$
47	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $x = 3\sqrt{3} \ \ (x \geq 3\sqrt{3})$	57	$r = 4\cos 4\varphi$
48	$r = 1 + \sqrt{2}\sin\varphi$	58	$x = 4 - y^2,$ $x = y^2 - 2y$
49	$y = \frac{x}{1+\sqrt{x}},$ $y = 0,\ \ x = 1$	59	$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ $y = 4 \ \ (y \geq 4)$
50	$\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2\sqrt{3} \ \ (y \geq 2\sqrt{3})$	60	$r = \sin 6\varphi$

1	2	3	4
61	$y = x^2\sqrt{16 - x^2}$, $y = 0 \ \ (0 \le x \le 4)$	69	$r = 2\sin 4\varphi$
62	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $y = 1 \ \ (0 < x < 2\pi; \ \ y \ge 1)$	70	$y = x^2 \cdot \cos x$, $y = 0 \ \ (0 \le x \le \pi/2)$
63	$r = 2\cos\varphi$, $r = 3\cos\varphi$	71	$\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases}$ $y = 12 \ \ (0 < x < 16\pi; \ \ y \ge 12)$
64	$x = \sqrt{4 - y^2}$, $x = 0, \ \ y = 0, \ \ y = 1$	72	$r = 2\cos 6\varphi$
65	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $x = 1 \ \ (x \ge 1)$	73	$x = -2y^2$, $x = 1 - 3y^2$
66	$r = \cos\varphi + \sin\varphi$	74	$\begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$ $y = 9\sqrt{3} \ \ (y \ge 9\sqrt{3})$
67	$y = (x - 1)^2$, $y^2 = x - 1$	75	$r = \cos\varphi - \sin\varphi$
68	$\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ $y = 2 \ \ (y \ge 2)$		

Задание 6

Вычислить длину дуги кривой:

n	Задание	n	Задание
1	$\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$	11	$r = 5e^{5\varphi/12}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$
2	$r = 3e^{3\varphi/4}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$	12	$y = -\ln\cos x$, $0 \le x \le \pi/6$
3	$y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, $1 \le x \le 2$	13	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$
4	$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$	14	$r = 12e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$
5	$r = 2e^{4\varphi/3}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$	15	$y = e^x + 6$, $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{15}$
6	$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$, $0 \le x \le \frac{7}{9}$	16	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ $\pi \le t \le 2\pi$
7	$\begin{cases} x = 3(2\cos t - \sin t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	17	$r = 6e^{12\varphi/5}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$
8	$r = \sqrt{2}e^{\varphi}$, $-\pi/2 \le \varphi \le \pi/2$	18	$y = 2 + \arcsin\sqrt{x} + \sqrt{x - x^2}$, $\frac{1}{4} \le x \le 1$
9	$y = \ln\frac{5}{2x}$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$	19	$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3$
10	$\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	20	$r = 3e^{3\varphi/4}$, $0 \le \varphi \le \pi/3$

1	2	3	4
21	$y = \ln(x^2 - 1),$ $2 \le x \le 3$	31	$\begin{cases} x = \frac{5}{2}(t - \sin t), \\ y = \frac{5}{2}(1 - \cos t) \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi$
22	$\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$	32	$r = 12e^{12\varphi/5},$ $0 \le \varphi \le \pi/2$
23	$r = 4e^{4\varphi/3},$ $0 \le \varphi \le \pi/3$	33	$y = 1 - \ln\cos x,$ $0 \le x \le \pi/6$
24	$y = \sqrt{1 - x^2} + \text{arccsox},$ $0 \le x \le \frac{8}{9}$	34	$\begin{cases} x = \frac{7}{2}(2\cos t - \cos 2t), \\ y = \frac{7}{2}(2\sin t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$
25	$\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$	35	$r = 1 - \sin\varphi,$ $-\pi/2 \le \varphi \le -\pi/6$
26	$r = \sqrt{2}e^{\varphi},$ $0 \le \varphi \le \pi/3$	36	$y = e^x + 13,$ $\ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$
27	$y = \ln(1 - x^2),$ $0 \le x \le \frac{1}{4}$	37	$\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$
28	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le \pi$	38	$r = 2(1 - \cos\varphi),$ $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$
29	$r = 5e^{5\varphi/12},$ $0 \le \varphi \le \pi/3$	39	$y = 2 - e^x,$ $\ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$
30	$y = 2 + \text{ch}x,$ $0 \le x \le 1$	40	$\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/6$

1	2	3	4
41	$r = 3(1 + \sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le 0$	52	$\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$
42	$y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \frac{15}{16}$	53	$r = 7(1 - \sin\varphi)$, $-\pi/6 \le \varphi \le \pi/6$
43	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$	54	$y = -\arccos x + \sqrt{1 - x^2}$, $0 \le x \le \frac{9}{16}$
44	$r = 4(1 - \sin\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi/6$	55	$\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4$
45	$y = 1 - \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$	56	$r = 8(1 - \cos\varphi)$, $-2\pi/3 \le \varphi \le 0$
46	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}$ $\pi/2 \le t \le 2\pi/3$	57	$y = \ln\sin x$, $\pi/3 \le x \le \pi/2$
47	$r = 5(1 - \cos\varphi)$, $-\pi/3 \le \varphi \le 0$	58	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi/2$
48	$y = 1 - \ln(x^2 - 1)$, $3 \le x \le 4$	59	$r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le 3/4$
49	$\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/3$	60	$y = \ln 7 - \ln x$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$
50	$r = 6(1 + \cos\varphi)$, $-\pi/2 \le \varphi \le 0$	61	$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$
51	$y = \sqrt{x - x^2} - \arccos\sqrt{x} + 5$, $\frac{1}{9} \le x \le 1$	62	$r = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{4}{3}$

1	2	3	4
63	$y = \mathrm{ch}x + 3,$ $0 \le x \le 1$	70	$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/4$
64	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 4(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$	71	$r = 4\varphi,$ $0 \le \varphi \le 3/4$
65	$r = 2\varphi,$ $0 \le \varphi \le 5/12$	72	$y = e^x + 26,$ $\ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}$
66	$y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1 - x^2},$ $0 \le x \le 3/4$	73	$\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\pi/6 \le t \le \pi/4$
67	$\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$	74	$r = 2\cos\varphi,$ $0 \le \varphi \le \pi/6$
68	$r = 2\varphi,$ $0 \le \varphi \le 12/5$	75	$y = \mathrm{ch}x + 3,$ $0 \le x \le 2$
69	$y = \ln\cos x + 2,$ $0 \le x \le \pi/6$		

Задание 7.

а) 1-30. Найти площадь поверхности, образованной вращением фигуры, ограниченной указанными линиями вокруг оси OX или OY.

б) 31-75. Вычислить объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченных указанными линиями вокруг оси OX или OY.

n	Задание	n	Задание
1	$r = 2(1+\cos\varphi)$ (вокруг оси Ox)	10	$r^2 = 4\cos 2\varphi$ $0 \le \varphi \le \pi/4$ (вокруг оси Ox)
2	$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$ (вокруг оси Ox)	11	$x^2 + y^2 = 4$ (вокруг оси Ox)
3	$3x^2 + 4y^2 = 12$ (вокруг оси Oy)	12	$r = 1 - \sin\varphi$ (вокруг оси Ox)
4	$r = a$ $0 \le \varphi \le \pi/2$ (вокруг оси Ox)	13	$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ (вокруг оси Ox)
5	$y^2 = 4ax$ $0 \le x \le 3a$ (вокруг оси Ox)	14	$r = 3(1+\cos\varphi)$ (вокруг оси Ox)
6	$x^2 + (y-b)^2 = a^2,\ (a < b)$ (вокруг оси Ox)	15	$\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ (вокруг оси Ox)
7	$r = 2\sin\varphi$ (вокруг оси Ox)	16	$r = 3$ (вокруг оси Ox)
8	$3y - x^3 = 0,\ (0 \le x \le 1)$ (вокруг оси Ox)	17	$r = 6\cos\varphi$ (вокруг оси Oy)
9	$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$ $0 \le t \le 4\pi$ (вокруг оси Ox)	18	$r = 2\cos\varphi$ (вокруг оси Ox)

1	2	3	4
19	$r = 9\cos\varphi$ (вокруг оси Ох)	30	$y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi/2$ (вокруг оси Ох)
20	$\begin{cases} x = t\sin t + \cos t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$ (вокруг оси Ох)	31	$y = -x^2 + 5x - 6,\ y = 0$ (вокруг оси Ох)
21	$r = 4\sin\varphi$ (вокруг оси Ох)	32	$2x - x^2 - y = 0,$ $2x^2 - 4x + y = 0$ (вокруг оси Ох)
22	$r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (вокруг полярной оси)	33	$y = 3\sin x,$ $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ (вокруг оси Ох)
23	$\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi/2$ (вокруг оси Ох)	34	$y = xe^x, y = 0,\ x = 1$ $y = xe^x, y = 0,\ x = 1$ (вокруг оси Ох)
24	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$ (вокруг оси Ох)	35	$y = \sin^2 x,\ x = \dfrac{\pi}{2}$ (вокруг оси Ох)
25	$y^2 = 2px,\ x = h$ (вокруг оси Ох)	36	$x = \sqrt[3]{y-2},\ x = 1,$ $y = 1$ (вокруг оси Ох)
26	$y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ (вокруг оси Ох)	37	$y = xe^x, y = 0,\ x = 1$ (вокруг оси Ох)
27	$y^2 = 2x, \quad 2x = 3$ (вокруг оси Ох)	38	$y = 2x - x^2, y = 2 - x,\ x = 0$ (вокруг оси Ох)
28	$y = \dfrac{1}{3}x^3,\ -1 \le x \le 1$ (вокруг оси Ох)	39	$y = e^{1-x},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ (вокруг оси Ох)
29	$y = \mathrm{tg}x,\ 0 \le x \le \pi/4$ (вокруг оси Ох)	40	$y = x^2,\ y^2 - x = 0$ (вокруг оси Ох)

1	2	3	4
41	$x^2+(y-2)^2=1$ (вокруг оси Ox)	51	$y=\ln x,\ \ x=2,\ \ y=0$ (вокруг оси Oy)
42	$y=1-x^2,\ \ x=0,$ $x=\sqrt{y-2},\ \ x=1$ (вокруг оси Ox)	52	$y=(x-1)^2;\ \ y=1$ (вокруг оси Oy)
43	$y=x^2,\ \ y=1,\ \ x=2$ (вокруг оси Ox)	53	$y^2=x-2, y=0, y=x^3, y=1$ (вокруг оси Oy)
44	$y=x^3,\ \ y=\sqrt{x}$ (вокруг оси Ox)	54	$y=x^3,\ \ y=x^2$ (вокруг оси Oy)
45	$y=\sin\frac{\pi x}{2},\ \ y=x^2$ (вокруг оси Ox)	55	$y=\arccos\frac{x}{5},$ $y=\arccos\frac{x}{3},\ \ y=0$ (вокруг оси Oy)
46	$y=\arccos\frac{x}{3},$ $y=\arccos x,\ \ y=0$ (вокруг оси Oy)	56	$y=\arcsin x,$ $y=\arccos x,\ \ y=0$ (вокруг оси Oy)
47	$y=\arcsin\frac{x}{5},$ $y=\arcsin x,\ \ y=\pi/2$ (вокруг оси Oy)	57	$x=2, y=0,$ $y=x^2-2x+1$ (вокруг оси Oy)
48	$y=x^2,\ \ x=2,\ \ y=0$ (вокруг оси Oy)	58	$y=x^3,\ \ \ y=x$ (вокруг оси Oy)
49	$y=x^2+1,\ \ y=x,$ $x=0,\ \ x=1$ (вокруг оси Oy)	59	$y=\arccos x,$ $y=\arcsin x,\ \ x=0$ (вокруг оси Oy)
50	$y=\sqrt{x-1},\ \ y=0,\ \ y=1,$ $x=\frac{1}{2}$ (вокруг оси Oy)	60	$y=(x-1)^2,\ \ \ x=0,$ $x=2,\ \ \ y=0$ (вокруг оси Oy)

1	2	3	4
61	$y = x^2,\ y = 2 - x^2$ (вокруг оси Oy)	69	$y = 0,$ $y = x(4 - x)$ (вокруг оси Oy)
62	$y = \dfrac{8}{x^2 + 4},\quad x^2 = 4y$ (вокруг оси Oy)	70	$y = \operatorname{ch}x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = -1$ (вокруг оси Ox)
63	$y = x^4,\quad y = x^2$ (вокруг оси Ox)	71	$y = e^x, x = 0\ \ (x < 0),$ $y = 0$ (вокруг оси Ox)
64	$y = 3 - x^2,\quad y = x^2 + 1$ (вокруг оси Ox)	72	$y = e^x, x = 0\ \ (x < 0)$ $y = 0$ (вокруг оси Oy)
65	$x - y + 1 = 0,$ $y = \cos x,\quad y = 0$ (вокруг оси Ox)	73	$y = 4x - x^2, y = x$ (вокруг оси Ox)
66	$x^2 + y^2 = 1,$ $y^2 = \dfrac{3}{2}x$ (вокруг оси Ox)	74	$y = \arcsin x$ $0 \le x \le 1$ (вокруг оси Ox)
67	$y = \dfrac{1}{1 + x^2},\ y = \dfrac{x}{2},\ x = 0$ (вокруг оси Oy)	75	$y = \sin x,$ $y = \dfrac{2}{\pi}x$ (вокруг оси Ox)
68	$y = x^2 + 2,\quad y = 1 - x^2,$ $x = -1,\quad x = 1$ (вокруг оси Ox)		

Задание 8

Вычислить несобственный интеграл (или установить его расходимость):

n	Задание	n	Задание	n	Задание
1	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$	11	$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x^2/2}\,dx$	21	$\int_2^{+\infty} \cos\frac{\pi}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$
2	$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$	12	$\int_0^{+\infty} x\,e^{-x}\,dx$	22	$\int_1^{+\infty} e^{1/x}\cdot\frac{dx}{x^2}$
3	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$	13	$\int_0^{+\infty} (x^2+1)\,e^{-x}\,dx$	23	$\int_0^{+\infty} (x^2+1)2^{-x}dx$
4	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$	14	$\int_0^{+\infty} 2x^3\,e^{-x^2}\,dx$	24	$\int_0^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{ch}x\,dx$
5	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)}$	15	$\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$	25	$\int_{\ln 2}^{+\infty} e^{-3x}\mathrm{sh}x\,dx$
6	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})}$	16	$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x\,dx$	26	$\int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$
7	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	17	$\int_{-\infty}^{0} (x+1)\,e^{x}\,dx$	27	$\int_0^{+\infty} x^2\cdot 2^{-x}\,dx$
8	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+12}$	18	$\int_{-\infty}^{0} x^2\,e^{x}\,dx$	28	$\int_e^{+\infty} e^{-2x}\mathrm{ch}x\,dx$
9	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$	19	$\int_{-\infty}^{0} \cos 2x\cdot e^{x/\pi}\,dx$	29	$\int_2^{+\infty} \frac{(x-1)(x+1)}{x^3\sqrt{x}}\,dx$
10	$\int_2^{+\infty} \frac{2dx}{x^2-1}$	20	$\int_{-\infty}^{2\pi} \cos x\cdot e^{2x/\pi}\,dx$	30	$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^{3x}+1}$

1	2	3	4	5	6
31	$\int_{2}^{+\infty} \frac{\cos \pi / x}{1+\sin \pi / x} \cdot \frac{dx}{x^2}$	42	$\int_{0}^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$	53	$\int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx$
32	$\int_{0}^{+\infty} (x+e^{-x})e^{-x}\, dx$	43	$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$	54	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
33	$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(\mathrm{arctg}x)^2 (x^2+1)}$	44	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\, dx}{x^3+1}$	55	$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}x\, dx}{1+x^2}$
34	$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\cdot \mathrm{arctg}x}$	45	$\int_{1}^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4}\, dx$	56	$\int_{1}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$
35	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x\, dx}{x^2+1}$	46	$\int_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\, dx$	57	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$
36	$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$	47	$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$	58	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$
37	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{\ln x}}$	48	$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \mathrm{arctg}x \cdot \frac{dx}{x^2+1}$	59	$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4+x^2}$
38	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$	49	$\int_{1}^{+\infty} e^{\mathrm{arctg}x} \frac{dx}{x^2+1}$	60	$\int_{3}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^4}$
39	$\int_{0}^{+\infty} \frac{x\, dx}{(1+x)^3}$	50	$\int_{0}^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx$	61	$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\mathrm{arctg}x}}{(1+x^2)}\, dx$
40	$\int_{3}^{+\infty} \frac{x-1}{(x+1)^2}\, dx$	51	$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)}$	62	$\int_{0}^{+\infty} x \cos x\, dx$
41	$\int_{0}^{+\infty} x \cdot \sin x\, dx$	52	$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$	63	$\int_{2}^{+\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^3}}\, dx$

1	2	3	4	5	6
64	$\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-3x}dx$	68	$\int\limits_{3}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$	72	$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$
65	$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{1+\ln x}{x}dx$	69	$\int\limits_{3}^{+\infty} \sin 2x dx$	73	$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{x\,dx}{(1+x)^2}$
66	$\int\limits_{0}^{-\infty} xe^{x}dx$	70	$\int\limits_{2}^{+\infty} e^{\frac{2}{x}} \cdot \frac{dx}{x^2}$	74	$\int\limits_{3}^{+\infty} x \cdot e^{-2x^2}\,dx$
67	$\int\limits_{e}^{+\infty} xe^{-2x}\,dx$	71	$\int\limits_{3}^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$	75	$\int\limits_{0}^{+\infty} x \cdot 3^{-x}\,dx$

Задание 9

Исследовать несобственный интеграл от неограниченной функции на сходимость:

n	Задание	n	Задание	n	Задание
1	$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	11	$\int_{-3}^{-1}\frac{dx}{\sqrt{1-(x+2)^2}}$	21	$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$
2	$\int_{-1}^{0}\frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$	12	$\int_{0}^{1}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$	22	$\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sqrt{(1-\cos x)^3}}dx$
3	$\int_{-2}^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx$	13	$\int_{2}^{3}\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3-8}}$	23	$\int_{0}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sqrt{(1-\sin x)^3}}dx$
4	$\int_{0}^{1}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$\int_{1}^{2}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x^5-1}}dx$	24	$\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1-tgx}}$
5	$\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}}$	15	$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$	25	$\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{2-\ln x}}$
6	$\int_{1/3}^{2/3}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$	16	$\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$	26	$\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^6}}dx$
7	$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$	17	$\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}$	27	$\int_{0}^{1}\frac{2^x}{\sqrt{2^x-1}}dx$
8	$\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt{(x-2)(3-x)}}$	18	$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x}}$	28	$\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$
9	$\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$	19	$\int_{0}^{\ln 3}\frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+2e^x-3}}$	29	$\int_{0}^{1}\frac{3^x dx}{\sqrt{9^x+2\cdot 3^x-3}}$
10	$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-2x^2}}$	20	$\int_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$	30	$\int_{-4}^{-2}\frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$

1	2	3	4	5	6
31	$\int\limits_0^{\sqrt{\ln 2}} \frac{2xe^{x^2}dx}{(\sqrt{e^{x^2}-1})^3}$	42	$\int\limits_0^1 \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx$	53	$\int\limits_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x-1}}$
32	$\int\limits_{-4}^{-2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$	43	$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx$	54	$\int\limits_0^1 x\ln x\,dx$
33	$\int\limits_1^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x-e}}$	44	$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$	55	$\int\limits_0^{1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$
34	$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\cos x-\sin x}}dx$	45	$\int\limits_{-1}^0 \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}\,dx$	56	$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$
35	$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x-1/\pi}{\sqrt{\sin x-x/\pi}}dx$	46	$\int\limits_0^{1/4} \frac{\sqrt{x}+x+1}{\sqrt{x}-x}dx$	57	$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
36	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	47	$\int\limits_{-3}^3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{3+x}dx$	58	$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
37	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	48	$\int\limits_{-3}^3 \sqrt{\frac{3-x}{3+x}}\,dx$	59	$\int\limits_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$
38	$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}+\sqrt[3]{\sin x}}dx$	49	$\int\limits_{-4}^0 \sqrt{\frac{x+5}{x+4}}\,dx$	60	$\int\limits_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}}dx$
39	$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt[4]{\cos x}}dx$	50	$\int\limits_0^1 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{x}}\,dx$	61	$\int\limits_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}}dx$
40	$\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{ch}x}{\sqrt{\mathrm{sh}x}}dx$	51	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	62	$\int\limits_{-1}^0 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$
41	$\int\limits_0^{\ln 2} \frac{1+\mathrm{ch}x}{\sqrt[3]{x+\mathrm{sh}x}}dx$	52	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4x+3}$	63	$\int\limits_0^1 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

1	2	3	4	5	6
64	$\int_{1}^{2} \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}\,dx$	68	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}$	72	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$
65	$\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$	69	$\int_{0}^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	73	$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
66	$\int_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$	70	$\int_{0}^{\pi/2} \ln\sin x\,dx$	74	$\int_{0}^{1} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$
67	$\int_{0}^{-1/e} \frac{dx}{x\ln^2 x}$	71	$\int_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$	75	$\int_{0}^{1} \ln x\,dx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Дайте определение операции интегрирования. Как проверить результат интегрирования?
4. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.
6. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.
7. Сформулируйте теорему о разложении многочлена на неприводимые множители.
8. Каково правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда многочлен в знаменателе имеет различные действительные корни?
9. Каково правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда многочлен в знаменателе имеет кратные действительные корни?
10. Сформулируйте правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда многочлен в знаменателе имеет некратную пару комплексно-сопряженных корней.
11. Сформулируйте правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей в случае, когда многочлен в знаменателе имеет кратную пару комплексно-сопряженных корней.
12. В чем суть универсальной тригонометрической подстановки?
13. Методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.
14. Методы нахождения интегралов вида $\int tg^m x dx$, $\int ctg^n x dx$.
15. Какие тригонометрические подстановки используются для $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$?
16. Понятие определенного интеграла.

17. Сформулируйте теорему существования определенного интеграла.
18. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла?
19. Перечислите свойства определенного интеграла.
20. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.
21. Вычисление длины дуги гладкой кривой, заданной следующим образом:
    а) $y = f(x), \quad a \le x \le b$
    б) $x = \varphi(y), \quad c \le y \le d$
    в) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$
    г) $\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$.
22. Вычисление объема тела по сечениям.
23. Вычисление объема тела вращения (различные случаи).
24. Вычисление площади поверхности вращения (различные случаи).
25. Вычисление статических моментов дуги кривой и плоской фигуры.
26. Вычисление моментов инерции дуги кривой и плоской фигуры.
27. Как найти координаты центра масс дуги кривой и плоской фигуры?
28. Виды несобственных интегралов, их определения.
29. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. 464.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. [Текст] : учебное пособие − М.: Интеграл-Пресс, Т.1. 2007. − 416с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ЧЧ. 1-2. - М.: Высшая школа, 1980-2000. - 304с., 416с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Первый проректор -
проректор по учебной работе
___________ Е.А. Кудряшов
«___»___________ 2012 г.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

Методические указания и индивидуальные задания к модулю 15

Курск 2012

УДК 517.2
ББК 22.11

Составители: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина

Рецензент
Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры
высшей математики *В.И. Дмитриев*

Элементы математической статистики и корреляционного анализа: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. Курск. 2012. 35с.: табл. 11. Библиогр.: с.35.

Методическая разработка содержит теоретические упражнения и практические задания по теме «Элементы математической статистики и корреляционного анализа». Индивидуальные задания разбиты на три уровня сложности. Представлены примеры решения наиболее сложных задач.

Предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л . 1,9. Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

С целью активизации и упорядочения самостоятельной работы студентов над усвоением теоретического курса высшей математики и применения теоретических знаний к решению практических задач введена система РИТМО (рейтинговая интенсивная технология модульного обучения).

В данной работе представлены индивидуальные задания, содержащие как теоретические, так и практические упражнения по теме «Элементы математической статистики и корреляционного анализа». Материалы, представленные здесь можно использовать при изучении курса высшей математики, а также курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

При выборе заданий следует использовать параметры m и N, где m – номер студента в журнале преподавателя, N – номер группы в потоке ($N \leq 9$).

В зависимости от уровня подготовки студента рекомендуется воспользоваться тремя уровнями сложности, на которые разбиты задания:

Первый уровень сложности предполагает ответ на один из вариантов теоретического теста – тренинга и решение следующих практических заданий – 1, 2а, б, 4, 6.

Второй уровень сложности содержит решение одного из вариантов теоретического теста - тренинга и следующих практических упражнений – 1, 2а,б, 3, 5,7.

Третий уровень сложности – решение варианта теоретического теста - тренинга и практических заданий – 1,2,3,5-7.

Хорошо подготовленным студентам рекомендуем решить все задания своего варианта.

Выбор варианта теоретического теста – тренинга осуществляется следующим образом: mod(m, 4) + 1.

В последних двух задачах используются параметры: A= N+3, B= mod(m, 3), C = 2 + mod(m, 5), D = 1 + mod(m, 4).

1. Теоретический тест – тренинг

При решении укажите номер правильного, с Вашей точки зрения, ответа.

1.1 Вариант 1

1. Совокупность случайно отобранных объектов называется:
   1) генеральной совокупностью;
   2) выборочной совокупностью;
   3) простой совокупностью;
   4) повторной совокупностью;
   5) бесповторной совокупностью.
2. Какой из приведенных ниже статистических вариационных рядов является дискретным рядом?

   1) 1, 1, 2, 3, 5, −1, 0.

   2)

1	2	3	4
2	3	5	2

   3) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4

   4)

(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)
3	3	5	4

   5)

1	(1; 2)	2	(2; 3)	3
2	3	2	5	4

3. Дискретный вариационный ряд графически можно изобразить:
   1) полигоном и гистограммой; 2)только полигоном;
   3) только гистограммой;
   4) гистограммой и кумулятивной кривой;
   5) полигоном и кумулятивной кривой.
4. Среднее арифметическое показывает
   1) меру разброса относительно среднего, выраженную в квадратных единицах вариант;
   2) меру разброса относительно среднего, выраженную в тех же единицах, что и варианты;
   3) симметричность относительно прямой $x = M[X]$;
   4) среднее значение, вокруг которого группируются варианты;
   5) «островершинность» или «плосковершинность» графика функции распределения.
5. При построении доверительного интервала для математического ожидания при известной генеральной дисперсии необходимо использовать:

1) t(P, n-1) – квантиль распределения Стьюдента;
2) t(P) – квантиль нормального распределения;
3) χ^2(P, n) – квантиль распределения Пирсона;
4) F(k_1, k_2, P) – квантиль распределения Фишера;
5) Критерий Романовского.

6. Точечная оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки, называется
1) смещенной 2) несмещенной 3) состоятельной
4) эффективной 5)несостоятельной

7. При проверке гипотезы о теоретическом законе распределения наблюдаемое значение критерия сравнивают с критической точкой распределения:
1) Стьюдента; 2) Фишера; 3) Пирсона;
4) Гаусса; 5)нормального.

8. Укажите виды статистических гипотез среди перечисленных (не мене 2):
1) конкурирующая 2) ошибочная
3) составная 4) параметрическая

1.2 Вариант 2

1. Если каждый объект генеральной совокупности имеет одинаковую вероятность попасть в выборку, то выборка называется:
1) простой; 2) повторной; 3) бесповторной;
4) репрезентативной; 5) генеральной.

2. Какой из приведенных ниже статистических вариационных рядов является интервальным рядом?

6) 1, 1, 2, 3, 5, -1, 0.

4)

(1; 2)	(2; 3)	(3; 4)	(4; 5)
3	3	5	4

7)

1	2	3	4
2	3	5	2

3) 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4

5)

1	(1; 2)	2	(2; 3)	3
2	3	2	5	4

3. Интервальный вариационный ряд графически можно изобразить:
   1) полигоном и гистограммой;
   2) только полигоном;
   3) только гистограммой;
   4) гистограммой и кумулятивной кривой;
   5) полигоном и кумулятивной кривой.
4. Выборочное среднее квадратическое отклонение показывает
   1) меру разброса относительно среднего, выраженную в квадратных единицах вариант;
   2) меру разброса относительно среднего, выраженную в тех же единицах, что и варианты;
   3) симметричность относительно прямой $x = M[X]$;
   4) среднее значение, вокруг которого группируются варианты;
   5) «островершинность» или «плосковершинность» графика функции распределения
5. Доверительный интервал для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии имеет вид:
   1) $\bar{x} - t(P, n-1) \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P, n-1) \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}}$;
   2) $\bar{x} - t(P) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;
   3) $\bar{x} - t(P) \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P) \cdot \frac{S^*}{\sqrt{n}}$;
   4) $\bar{x} - t(P, n-1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P, n-1) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;
   5) $S^* \cdot \gamma_1 < \sigma < S^* \cdot \gamma_2$
6. Точечная оценка, которая имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок того же параметра, называется
   1) эффективной 2) неэффективной 3) состоятельной
   4) несостоятельной 5) центральной
7. При проверке гипотезы о равенстве математических ожиданий наблюдаемое значение критерия сравнивают с критической точкой распределения:
   1) Стьюдента; 2) Фишера; 3) Пирсона;

4) Гаусса; 5) нормального.

8. Укажите виды статистических гипотез среди перечисленных (не мене 2):
   1) выдвинутая 2) ошибочная
   3) простая 4) правильная

1.3 Вариант 3

1. Выборка, при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность, называется:
   1) простой; 2) повторной; 3) бесповторной;
   4) репрезентативной; 5) генеральной.
2. Пусть результаты некоторых наблюдений записаны в виде таблицы, в первом столбце которой находятся всевозможные дискретные значения x_i генеральной совокупности X, а во втором – числа n_i, т.е. частоты появления i- го значения. Такая таблица может быть охарактеризована:
   1) статистическим рядом;
   2) вариационным рядом;
   3) дискретным рядом;
   4) интервальным рядом;
   5) сгруппированным рядом.
   Исключите **неверную** характеристику.
3. Для построения полигона необходимо отрезками ломаной соединить точки с координатами:
   1) (x_i, n_i) 2) $\left(x_i, \frac{n_i}{h}\right)$ 3) $\left(x_i, \frac{n_i}{Nh}\right)$ 4) $\left(x_i, n_i^{\text{нак}}\right)$ 5) $\left(x_i, \frac{n_i^{\text{нак}}}{N}\right)$

4. Выборочная дисперсия показывает
   1) меру разброса относительно среднего, выраженную в квадратных единицах вариант;
   2) меру разброса относительно среднего, выраженную в тех же единицах, что и варианты;
   3) симметричность относительно прямой x = M[X];
   4) среднее значение, вокруг которого группируются варианты;

5) «островершинность» или «плосковершинность» графика функции распределения.

5. При построении доверительного интервала для математического ожидания при неизвестной генеральной дисперсии необходимо использовать:

   1) $t(\mathcal{J}, n\text{-}1)$ – квантиль распределения Стьюдента;

   2) $t(\mathcal{J})$ – квантиль нормального распределения;

   3) $\chi^2(\mathcal{J}, n)$ – квантиль распределения Пирсона;

   4) $F(k_1, k_2, \mathcal{J})$ – квантиль распределения Фишера;

   5) Критерий Романовского

6. Точечная оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру при любом объёме выборки, называется
   1) смещенной 2) несмещенной 3) состоятельной
   4) эффективной 5) несостоятельной

7. При проверке гипотезы о равенстве дисперсий двух нормально распределенных случайных величин наблюдаемое значение критерия сравнивают с критической точкой распределения:
   1) Стьюдента; 2) Фишера; 3) Пирсона; 4) Гаусса;
   5)нормального.

8. Укажите виды статистических гипотез среди перечисленных (не мене 2):
   1) конкурирующая 2) непараметрическая
   3) правильная 4) ошибочная

1.4 Вариант 4

1. Выборка, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность, называется:
   1) простой; 2) повторной; 3) бесповторной;
   4) репрезентативной; 5) генеральной

2. Пусть результаты некоторых наблюдений записаны в виде таблицы, в первом столбце которой находятся интервалы значений генеральной совокупности, а во втором – числа n_i, т.е. количество вариант попавших в данный интервал. Такая таблица может быть охарактеризована:

1) статистическим рядом;
2) вариационным рядом;
3) дискретным рядом;
4) интервальным рядом;
5) сгруппированным рядом.

Исключите **неверную** характеристику

3. Для построения кумулятивной кривой необходимо отрезками ломаной соединить точки с координатами:

1) (x_i, n_i) 2) $\left(x_i, \dfrac{n_i}{N}\right)$ 3) $\left(x_i, \dfrac{n_i}{Nh}\right)$ 4) $\left(x_i, \dfrac{n_i}{h}\right)$ 5) $\left(x_i, \dfrac{n_i^{нак}}{N}\right)$

4. Эксцесс показывает
   1) меру разброса относительно среднего, выраженную в квадратных единицах вариант;
   2) меру разброса относительно среднего, выраженную в тех же единицах, что и варианты;
   3) симметричность относительно прямой $x = M[X]$;
   4) среднее значение, вокруг которого группируются варианты;
   5) «островершинность» или «плосковершинность» графика функции распределения.
5. Доверительный интервал для математического ожидания при известной генеральной дисперсии имеет вид:

1) $\bar{x} - t(P, n-1) \cdot \dfrac{S^*}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P, n-1) \cdot \dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$;

2) $\bar{x} - t(P) \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P) \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$;

3) $\bar{x} - t(P) \cdot \dfrac{S^*}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P) \cdot \dfrac{S^*}{\sqrt{n}}$;

4) $\bar{x} - t(P, n-1) \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < M[x] < \bar{x} + t(P, n-1) \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$;

5) $S^* \cdot \gamma_1 < \sigma < S^* \cdot \gamma_2$

6. Какие из точечных оценок являются смещенными оценками:
   1) выборочное среднее; 2) уточненная выборочная дисперсия;
   3) выборочная дисперсия;
   4) уточненное среднее квадратичное отклонение;
   5) асимметрия.

7. При проверке гипотезы о теоретическом законе распределения наблюдаемое значение критерия сравнивают с критической точкой распределения:
   1) Стьюдента; 2) Фишера; 3) Пирсона; 4) Гаусса;
   5) нормального.
8. Укажите виды статистических гипотез среди перечисленных (не мене 2):
   1) выдвинутая 2) непараметрическая
   3) простая 4) правильная

2. Практические упражнения

2.1. Задание 1

По имеющимся статистическим данным построить дискретный и интервальный вариационные ряды. Изобразить их графически: построить полигон, гистограмму(деление провести на 4 равных интервала) и кумулятивную кривую.

1. Имеются данные о стаже рабочих цеха: 6, 6, N +1, 10, 11, 2, 2, 5, 8, 8, 12, 9, N +2, 10, 7, 7, 6, 7, 2, 3, 4, 3, 8, 6, 5, 7, 9, N + 1, 9, 5.
2. Имеются следующие данные о среднегодовых вкладах в банках (тыс. руб.): 100, 100, 50, 50, 100, 10·N, 100, 200, 150, 80, 10·N, 150 , 80, 60, 80, 80, 150, 130, 120, 10N, 100, 500, 800, 600, 60, 80, 700, 400, 150, 10N.
3. Имеются данные о дневной выручке денег от продажи товаров в торговых киосках города (тыс. руб.): 2, 2, 5, 7, 2, N + 1, 6, 3, 3, 7, 8, 2, N +2, 4, 9, 4, 3, 5, 5, 7, 8, N+1, 8, 9, N + 2, 8, 6, 3, 3, 4.
4. Имеются данные о средней месячной заработной плате рабочих – сдельщиков (тыс. руб.): 1,0; 1,2;1,2;1,25; 1,5; 1,5; 1+0,1·N; 1,35; 1,5; 1,5; 1+0,1·N; 1,3;1,45; 1,85; 1,8; 1,85; 1,8; 1,9; 1,7; 1,8; 1,6; 1,7; 1,4; 1,5; 1+0,1N; 1,4; 1,4; 1,3; 1,2; 1,5.
5. Имеются данные о выработке продукции рабочими бригадами за смену (в штуках): 14; 7; 8; 9; N + 5; 12; 3; 6; 7; 8; 6; 9; 8; 6; 13; 11; 9; 11; N + 6; 10; 11; 12; 9; 8; 12; 13; 11; N + 5; 6; 7.

6. Имеются следующие данные о количестве произведенной продукции рабочими цеха за смену (в штуках): 16; 22; 15 + N; 25; 15; 19; 16; 17; 18; 13; N + 16; 19; 14; 16; 11; 15; 12; 22; 14; 10; N + 15; 22; 17; 18; 16; 14; 17; 22; 13; 15.
7. Имеются следующие данные о среднем сроке службы деталей некоторых отобранных механизмов (в месяцах): 7; 8,2; 8,6; 7; 7,5 + 0,2N; 8; 8+0,1N; 8,8; 7,2; 7,2; 6,1; 6; 6; 10; 8,2; 7,5; 6; 6,1; 7,2; 8,8; 7,7; 6,1; 7,5+0,2N; 8; 8; 8,8; 6,1; 7,7; 7,2; 6.
8. Имеются следующие данные о выплавке чугуна за отчетный период на заводе (тыс. т): 5,6; 5,2; 5,3; 5,5; 5+0,1N; 5,5; 5,3; 5,6; 5+0,1N; 5,6; 5,4; 5,8; 5,3; 5,8; 5,5; 5,2; 5,7; 5,8; 5,6; 5,4; 5+0,1N; 5,4; 5,3; 5,5; 5,6; 5,8; 5,3; 5,2; 5,8; 5,7.
9. Имеются следующие данные о производстве часов по годам (млн. шт.): 20; 21; 25 +N; 30 – N; 27; 20; 20; 30; 33; 22; 23; 35; 33; 32; 32; 29; 22; 25; 33; 30 – N; 25 + N; 22; 25; 24; 33; 32; 25; 33; 24; 30 – N.
10. Имеются следующие данные об уровне энерговооруженности труда (кВт): 50; 52; 50; 52; 52; 50 + N; 60 – N; 60; 63; 60; 50 + N; 55; 55; 54; 53; 50 + N; 59; 57; 55; 52; 54; 50 + N; 60 – N; 63; 50; 53; 54; 55; 57; 59.
11. Имеются следующие данные о себестоимости одной единицы продукции (тыс. руб.): 13; 13; 12; 11; 12; 12; 10; 9; 9; 8 + N; 10; 10; 8; 12; 9 + N; 12; 11; 10; 15; 9 + N; 15; 13; 11; 12; 15; 9; 8; 9 + N; 15; 13.
12. Имеются данные по заводам за отчетный период о среднегодовой стоимости основных промышленно – производственных фондов (млн. руб.): 100; 130; 150; 140; 100 + 10N; 100; 100 + 10N; 100; 120; 110; 120; 100 +10N; 160; 160, 150; 140; 160; 100 + 10N; 120; 150; 110; 130; 140; 150; 100 + 10N; 150; 120; 120; 140; 100 + 10N.
13. Имеются следующие данные по заводам за отчетный период о фактическом выпуске продукции (млн. руб.): 140; 140; 150; 180; 200 – 10N; 170; 130; 170; 150; 150; 120; 110; 120; 100; 200 – 10N; 160; 180; 170; 120; 130; 130; 120; 150; 200 – 10N; 140; 120; 130; 130; 170; 160.

14. Имеются данные по группе предприятий об основных производственных фондах (млн. руб.): 3; 4; 5; 8; N + 5; 10; 7; 6; 5; 4; N + 5; 10; N + 5; 11; N + 5; 4; 6; 7; 8; 3; 8; 4; 5; 3; 8; N + 5; 7; 6; 5; 3.
15. Имеются данные по группе предприятий о валовой продукции (млн. руб.): 3; 5; 10; N + 6; 6; 4; 7; 8; 8; 3; 5; 10; 6; 6; 9; 4; 5; N + 6; 8; 3; 6; 5; 3; 8; 4; 7; 5; N + 6; 9; 9.
16. Имеются данные о росте производительности труда предприятия (прирост в процентах): N; 4; 4; 4; 7; 8; 6; 3; 5; N; 9; 5; 4; 3; 7; 2; 3; 6; 5; 4; 2; N; 6; 7; 8; 4; 5; N; 3; 7.
17. Имеются данные о росте фондовооруженности предприятия (прирост в процентах): 5; 7; 9; 10; 8; 6; 4; N + 2; N + 1; 7; 9; 5; 5; 7; 6; N + 1; 2; 5; 4; 6; N + 2; 7; 5; 3; 4; 5; 7; 2; N + 1; 7.
18. Имеются следующие данные по предприятиям о выпуске готовой продукции на одного рабочего (тыс. руб.): 3; 6; 4; 6; 4; 8; 6; N+1; N + 1; 5; 5; 7; 8; 10; 8; 4; 6; 5; 3; 7; N+1; 6; 4; 3; 7; N+1; 8; 5; 6; 5.
19. Имеются данные по предприятиям об электровооруженности труда на одного работающего (кВт – ч): 2; N + 4; 3; 7; 2; 6; 4; 10 – N; 8; 4; 6; 7; 7; 8; 8; 2; 3; 4; 6; 4; 7; 8; N + 4; 6; 7; 4; 8; 5; 6; N + 4.
20. Имеются данные о продаже товаров по ряду товарных групп за год (млн. руб.): 3,8; 2,4; 2,7; 2,6; 2,6; 2,5 + 0,1N; 2,5 + 0,1N; 2,3; 2,2; 2,3; 2,5; 2,6; 2,2; 2,0; 2,1; 2,7; 2,6; 2,5+0,1N; 2,3; 2,7; 2,5; 2,3; 2,5+0,1N; 2,5; 2,7; 2,8; 3,0; 3,5; 3,5; 2,9.
21. Имеются данные о тарифных разрядах рабочих на предприятии: 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 6; 6; 6; 5; 5; N; N; 2; 4; 6; 5; 6; N; 3; 5; 4; 6; 5; 3; 2; 2; 1.
22. Имеются данные об основных производственных фондах ряда заводов (млрд. руб.): N + 1,4; N + 1,4; 4,8; 9,0; 7,8; 5,0; 5,5; 4,0; 6,4; 3,4; 4,0; 9,4; 3,2; 5,6; 9,8; 9,0; 7,8; 10,6; 3,4; 4,0; 9,4; 2,4; 4,4; N+1,4; 7,4; 5,4; 3,4; 5,4; 9,4; 7,4.
23. Имеются данные по группе предприятий о фактическом выпуске продукции (млрд. руб.): 7,4; 5,8; 5,6; 3,6; 5,0; 9,0; 4,6; 6,4; 3,0;

6,4; 8,6; N+2,6; 6,8; 5,0; 7,2; 7,8; 7,6; 9,0; 3,8; 4,4; 5,8; 3,6; 6,8; 5,0; 8,6; 5,6; 3,6; 5,8; 7,2; N + 2; 6.

24. По ряду партий деталей, обработанных рабочими производственного участка, имеются следующие данные о количестве операций, выполняемых при обработке детали: N + 6; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 8; 11; 12; 14; 12; N + 6; 8; 8; 12; 14; 11; 14; 8; 3; 6; 3; 7; 8; 3; 14; 12; N+6; 8.

25. По ряду партий деталей, обработанных рабочими производственного участка, имеются следующие данные о количестве деталей в партии: 12; N; 3; 4; 4; 4; 12; 8; N + 2; 12; 4; 12; 12; 4; 5; 7; 5; 6; 4; 7; 3; N; 7; 8; 12; 8; 6; 7; 5; 12.

26. По ряду партий деталей, обработанных рабочими производственного участка, имеются следующие данные о времени, затраченном на обработку одной партии (час): 3,8; 1,9 + N; 1,9 + N; 4,4; 4,7; 5,9; 5,3; 3,8; 4,4; 3,7; 4,1; 3,8; 4,4; 4,7; 5,9; 4,9; 3,9; 4,4; 4,9; 5,3; 4,1; 4,4; 3,7; 3,9; 1,9 + N; 4,1; 5,3; 5,9; 3,9; 4,7.

27. Имеются следующие производственные показатели по ряду заводов отрасли за отчетный период по производству продукции (тыс. т): 4 + 0,1N; 6,0; 2,1; 4,6; 9,0; 1,7; 11,5; 10,6; 8,5; 1,6; 4 + 0,1N; 6,0; 4,6; 1,7; 4,3; 4,2; 2,1; 1,7; 10,6; 8,5; 4,5; 4,6; 4,2; 4,1; 4+0,1N; 9,0; 8,5; 1,7; 4,2; 6,0.

28. Имеются следующие производственные показатели за отчетный период по общей сумме затрат (млн. руб.): 40; 87; 51; 30 + 5N; 30 + 5N; 70; 82; 86; 86; 86; 26; 81; 40; 29; 29; 40; 45; 45; 40; 35; 29; 26; 70; 29; 40; 70; 86; 87; 51; 51.

29. Имеются следующие производственные показатели по ряду заводов отрасли за отчетный период по себестоимости единицы продукции (руб.): 8240+100N; 8958; 9230; 9000; 7818; 8333; 8500; 8647; 8285; 9032; 7959; 8240+100N; 9230; 9000; 8333; 8958; 8285; 9032; 8958; 9230; 7959; 8958; 8500; 8240+100N; 7818; 8333; 8500; 8647; 7959; 9230.

30. Имеются данные по ряду акционерных обществ по издержкам производства (млн. руб.): 2000; 4800; 2000 + 100N; 2500; 3700; 3700; 2500; 2000 + 100N; 4800; 2000; 2000; 2000; 3500; 4000;

1300; 2400; 2200; 2000 + 100N; 2200; 2500; 3700; 4800; 4000; 4000; 1300; 2600; 2500; 2600; 2300; 3500.

31. Имеются данные о получении прибыли рядом акционерных обществ района за год (млн. руб.): 320; 288; 306; 300; 250; 260+10N; 270+10N; 250; 300; 305; 320; 250; 300; 270; 255; 288; 300; 250; 288; 250; 300; 305; 250; 260+10N; 300; 270; 255; 300; 270; 280.
32. Имеются данные о среднем размере вклада в ряде сбербанков города (тыс. руб.): 20; 10 + N; 10; 12,5; 20; 20; 9; 8,5; 7; 7; 6; 7; 7; 10; 9; 9; 9; 8; 8,5; 10; 9 + N; 10; 12,5; 20; 9; 8,5; 7; 7; 20; 10.
33. Имеются данные о валовом сборе овощей в ряде районов города (тыс. ц): 830 + 10N; 860; 900; 850; 890; 870; 830 + 10N; 835; 850; 860; 900; 840; 835; 890; 860; 830 + 10N; 850; 870; 850; 860; 900; 840; 830; 850; 860; 860; 835; 860; 870; 870.
34. Имеются данные о товарных запасах розничного торгового предприятия (млн. руб.): 61+0,1N; 57,5; 51,3; 74,7; 70,2; 68,3; 61+0,1N; 51,3; 52,4; 74,7; 61+0,1N; 53,5; 64,8; 72,1; 68,7; 70,2; 68,3; 61,3; 51,3; 52,4; 74,7; 57,5; 51,3; 74,7; 68,3; 52,4; 51,3;.70,2; 68,7; 51,3.
35. Имеются данные об объёме выпускаемой продукции ряда предприятий города (млн. руб.): 63,5; 69,8; 64,7; 70,8; 77,5; 73,2 + 0,1N; 86,1; 83,3; 85,9; 69,8; 69,8; 70,8; 71,2 + 0,1N; 86,1; 75,3, 70,8; 73,2 + 0,1N; 83,3; 86,1; 71,2 + 0,1N; 63,5; 64,7; 64,7; 83,3; 69,8, 71,8; 83,3; 75,3; 71,2 + 0,1N; 85,9.

2.2. Задание 2

По заданному в нижеследующих задачах статистическому ряду выборки найти числовые характеристики:
а) выборочную дисперсию;
б) выборочное среднее квадратическое отклонение;
в) размах выборки;
г) асимметрию;
д) эксцесс.

Замечание. Числовые характеристики пунктов г) и д) можно найти с помощью программных продуктов MATHCAD или Excel.

1. Имеются следующие данные об уровне энерговооруженности труда (кВт): 50; 52; 50; 52; 52; 50 + N; 60 – N; 60; 63; 60; 50 + N; 55; 55; 54; 54; 54; 60 – N; 63; 63; 55; 60 – N; 60 – N; 50; 50 + N; 55; 55; 50; 54; 52; 52. Найти среднюю энерговооруженность труда.
2. Имеются следующие данные о себестоимости одной единицы продукции (тыс. руб.): 13; 13; 12; 11; 12; 12; 10; 9; 9; 8 + N; 10; 10; 8; 12; 9 + N; 8 + N; 8 + N; 9 + N; 8; 8; 8; 9 + N; 9; 9; 8; 11; 11; 11; 13; 13. Найти среднюю себестоимость одной единицы продукции.
3. Имеются данные по заводам за отчетный период о среднегодовой стоимости основных промышленно – производственных фондов (млн. руб.): 100; 130; 150; 140; 100 + 10N; 100; 100 + 10N; 100; 120; 110; 120; 100 +10N; 160; 160; 100; 100; 130; 130; 130; 150; 150; 140; 140; 150; 140; 160; 110; 120; 110; 120. . Найти среднегодовую стоимость основных промышленно – производственных фондов по всем заводам.
4. Имеются следующие данные по заводам за отчетный период о фактическом выпуске продукции (млн. руб.): 130; 140; 130; 140; 130; 140; 150; 200 – 10N; 180; 180; 200 – 10N; 180; 170; 170; 130; 170; 170; 120; 150; 120; 150; 180; 120; 140; 110; 180; 120; 110; 100; 200 – 10N. Найти средний фактический выпуск продукции заводами.
5. Имеются данные по группе предприятий об основных производственных фондах (млн. руб.): 3; 4; 5; 8; N + 5; 10; 7; 6; 5; 4; N + 5; 10; N + 5; 11; N + 5; 3; 3; 7; 7; 10; 11; 11; 11; 4; 5; 5; 4; 3; 8; 8. Найти среднее значение основных производственных фондов по всей группе.
6. Имеются данные по группе предприятий о валовой продукции (млн. руб.): 3; 5; 10; N + 6; 6; 4; 7; N + 7; 8; 8; 3; 5; 10; 6; 6; N+6; N+7; 10; 3; 5; 5; 4; 4; 6; 7; 10; 3; 3; N+6; N+7. Найти среднее значение выпускаемой валовой продукции.

7. Имеются данные о росте производительности труда предприятия (прирост в процентах):7; N; 8; 4; 8; 4; 8; 4; 5; 7; 5; 8;6; 6; 6; 3; 5; 5; 5; N; 6; 9; 3; 5; 3; 4; 3; 3; 3; 7. Найти средний рост производительности труда на предприятиях.
8. Имеются данные о росте фондовооруженности предприятия (прирост в процентах): 5; 7; 9; 10; 8; 6; 4; N + 2; N + 1; 7; 9; 5; 5; 7; 6; N+1; N+2; N+2; 6; 6; 6; 7; 5; 5; 4; 4; 9; 9; 9; 4. Найти среднее значение роста фондовооруженности предприятия.
9. Имеются следующие данные по предприятиям о выпуске готовой продукции на одного рабочего (тыс. руб.): 3; 6; 4; 6; 4; 8; 6; N – 1; N – 1; 5; 5; 7; 8; 10; 8; 6; 6; 6; 4; 3; 3; 8; 8; 10; 3; 3; 8; 10; 10; 10. Найти средний выпуск готовой продукции.
10. Имеются данные по предприятиям об электровооруженности труда на одного работающего (кВт – ч): 2; N + 4; 3; 7; 2; 6; 4; 10 – N; 8; 4; 6; 7; 7; 8; 8; 2; N+4; 10 – N; 10 – N; 7; 7; 7; 6; 3; 3; 3; 3; N+4; N+4; 2. Найти среднее значение электровооруженности труда на одного работающего.
11. Имеются данные о продаже товаров по ряду товарных групп за год (млн. руб.): 3,8; 2,4; 2,7; 2,6; 2,6; 2,5 + 0,1N; 2,5 + 0,1N; 2,3; 2,2; 2,3; 2,5; 2,6; 2,2; 2,0; 2,1; 3,8; 2,1; 2,1; 2,0; 2,0; 2,0; 3,8; 2,2; 2,4; 2,2; 2,1; 3,8; 2,4; 2,3; 2,3. Найти среднее значение проданных товаров.
12. Имеются данные о тарифных разрядах рабочих на предприятии: 3; N; 3; N; 3; 10 – N; 3; 3; 3; 3; 4; 5; 4; 5; 4; 5; 6; 10 – N; 6; 10 – N; 6; N; 5; 4; 5; 6; 10 – N; N; N; 3. Найти средний тарифный разряд на данном предприятии.
13. Имеются данные об основных производственных фондах ряда заводов (млрд. руб.): N + 1,4; N + 1,4; 4,8; 9,0; 7,8; 5,0; 5,5; 4,0; 6,4; 3,4; 4,0; 9,4; 3,2; 5,6; 9,8; 9,0; 7,8; 10,6; 3,4; 4,0; 4,8; 5,0; 5,5; 6,4; 9,4; 3,2; 5,6; 9,8; 3,4; 10,6. Найти среднее значение основных производственных фондов.
14. Имеются данные по группе предприятий о фактическом выпуске продукции (млрд. руб.): 7,4; 5,8; 5,6; 3,6; 5,0; 9,0; 4,6; 6,4; 3,0; 6,4; 8,6; N+2,6; 6,8; 5,0; 7,2; 7,8; 7,; 9,0; 3,8; 4,4; N + 2,6; 5,0; 3,0;

5,8; 4,6; 6,4; 9,0; 8,6; 7,4; 3,6. Найти среднее значение фактически выпущенной продукции.

15. По ряду партий деталей, обработанных рабочими производственного участка, имеются следующие данные о количестве операций, выполняемых при обработке детали: N + 1; 3; 3; 4; 5; 5; 6; 8; 11; 12; 14; 20; N + 1; 8; 8; 11; 11; 14; 14; 14; 12; 14; 20; 20; 3; 4; 4; 5; 12; N+1.Найти среднее значение количества операций.
16. По ряду партий деталей, обработанных рабочими производственного участка, имеются следующие данные о количестве деталей в партии: 12; N; 3; 4; 4; 4; 12; 8; N + 10; 12; 4; 16; 12; 4; 5; 7; 7; 7; N+10; 8; 8; 8; 5; 7; 8; 16; 5; 16; 7; 16. Найти среднее значение количества деталей в партии.
17. По ряду партий деталей, обработанных рабочими производственного участка, имеются следующие данные о времени, затраченном на обработку одной партии (час): 3,86; 1,90 +0,01N; 1,90 – 0,01N; 4,40; 4,70; 5,90; 5,38; 3,80; 4,40; 3,75; 4,14; 3,86; 4,40; 4,70; 5,90; 3,80; 3,80; 3,75; 5,38; 3,75; 1,90 +0,01N; 1,90 – 0,01N; 3,80; 4,14; 4,14; 3,86; 4,70; 4,70; 4,14; 4,14. Найти среднее значение времени, необходимое на обработку одной партии.
18. Имеются следующие производственные показатели по ряду заводов отрасли за отчетный период по производству продукции (тыс. т): 4 + 0,1N; 11,6; 6,0; 2,1; 4,6; 9,0; 1,7; 11,5; 10,6; 8,5; 1,6; 4+0,1N; 6,0; 4,6; 1,7; 4 + 0,1N; 11,5; 11,5; 11,5; 2,1; 9,0; 9,0; 11,6; 10,6; 8,5; 6,0; 6,0; 4,6; 4,6; 1,7. Найти среднее значение производственного показателя.
19. Имеются следующие производственные показатели за отчетный период по общей сумме затрат (млн. руб.): 40; 87; 51; 20 + N; 20+N; 70; 82; 86; 86; 86; 26; 81; 40; 29; 29; 26; 26; 51; 51; 51; 70; 70; 70; 26; 81; 26; 81; 82; 82; 87. Найти среднее значение производственного показателя.
20. Имеются следующие производственные показатели по ряду заводов отрасли за отчетный период по себестоимости единицы продукции (руб.): 8240+N; 8958; 9230; 9000; 7818; 8333; 8500; 8647; 8285; 9032; 7959; 8240+N; 9230; 9000; 8333; 8958; 8958; 7818; 8500; 8647; 8285; 9032; 9032; 7959; 8333; 8333; 9000; 7818;

8500; 8647. Найти среднее значение себестоимости единицы продукции.

21. Имеются данные по ряду акционерных обществ по издержкам производства (млн. руб.): 1300; 2000; 1300; 4800; 1300; 2000+100N; 3500; 2500; 4000; 3700; 3500; 3700; 3700; 2500; 4000; 2000 + 100N; 4800; 4800; 4800; 2000; 2500; 2000; 2500; 2000; 2500; 3500; 1300; 4000; 4000; 1300. Найти среднее значение издержек производства.

22. Имеются данные о получении прибыли рядом акционерных обществ района за год (млн. руб.): 320; 288; 306; 300; 250; 260+N; 270+N; 250; 300; 305; 320; 250; 300; 270; 255; 260+N; 320; 320; 288; 270+N; 305; 306; 250; 305; 305; 255; 255; 306; 270; 255. Найти среднее значение прибыли.

23. Имеются данные о среднем размере вклада в ряде сбербанков города (тыс. руб.): 20; 16 – N; 10; 12,5; 20; 20; 9; 8,5; 7; 7,6; 7; 7; 10; 9; 9; 9; 8; 8,5; 10; 16 – N; 7,6; 8,5; 7,6; 12,5; 12,5; 8,5; 8,0; 8,0; 8,0; 12,5. Найти средний размер вклада по всему ряду сбербанков.

24. Имеются данные о валовом сборе овощей в ряде районов города (тыс. ц): 830 + N; 864; 900; 850; 890; 878; 830 + N; 835; 850; 860; 900; 840; 835; 890; 860; 864; 864; 840; 840; 840; 864; 835; 900; 900; 900; 860; 850; 860; 835; 878. Найти среднее значение валового сбора овощей.

25. Имеются данные о товарных запасах розничного торгового предприятия (млн. руб.): 61+0,1N; 57,5; 51,3; 74,7; 70,2; 68,3 61+0,1N; 51,3; 52,4; 74,7; 61+0,1N; 53,5; 64,8; 72,1; 68,7; 68,7; 68,3; 68,3; 51,3; 51,3; 72,1; 70,2; 70,2; 64,8; 57,5; 68,7; 52,4; 53,5; 53,5; 70,2. Найти средний товарный запас.

26. Имеются данные об объёме выпускаемой продукции ряда предприятий города (млн. руб.): 63,5; 69,8; 64,7; 70,8; 77,5; 82 + 0,1N; 86,1; 83,3; 85,9; 69,8; 69,8; 70,8; 82 + 0,1N; 86,1; 75,3; 75,3; 75,3; 63,5; 64,7; 70;8; 77,5; 77,5; 83,3; 85,9; 86,1; 86,1; 64,7; 64,7; 70,8; 69,8. Найти средний объём выпускаемой продукции.

27. Имеются следующие данные об остатках задолженности по кредиту на ряде предприятий города (млн. руб.): 10 + N; 26; 11;

22; 14; 21; 14; 23; 13; 25; 10; 27; 12; 20; 10 + N; 22; 20; 20; 19; 18; 11; 11; 10; 13; 21; 12; 27; 26; 19; 18. Найти среднее значение остатков задолженности.

28. Имеются данные о темпах прироста суммы вкладов в ряде сбербанков города (темп прироста в процентах к предыдущему году): 13; 15; 10; 9; 7; 12; 8; N + 5; 10; 9; 9; 14; 13; 16; 11; N+5; N+5; 11; 16; 14; 8; 7; N+5; 15; 15; 11; 11; 16; 14; 14. Найти средний темп прироста по ряду.

29. Имеются данные о стаже рабочих цеха: 6; 6; N +1; 10; 11; 2; 2; 5; 8; 8; 12; 9; N +2; 10; 7; 7; 6; 7; 2; 3; N + 1; N+2; 5; 5; 12; 3; 9; 3; 11; 11. Найти средний стаж работающих.

30. Имеются следующие данные о среднегодовых вкладах в банках (тыс. руб.): 10; 10; 5; 5; 10; 10·N; 100; 200; 15; 8; 5·N; 150; 80; 60; 80; 80; 15; 130; 120; 10 N; 10 N; 5 N; 60; 60; 100; 200; 15; 120; 130; 5. Найти среднее значение среднегодовых вкладов по всему ряду банков.

31. Имеются данные о дневной выручке денег от продажи товаров в торговых киосках города (тыс. руб.): 2; 2; 5; 7; 2; N + 1; 6; 3; 3; 7; 8; 2; N +2; 4; 9; N + 1; N + 2; 2; 2; N+1; N + 2; 9; 9; 8; 7; 5; 5; 7; 8; 7. Найти среднее значение дневной выручки.

32. Имеются данные о средней месячной заработной плате рабочих – сдельщиков (тыс. руб.): 1,0; 1,2;1,2;1,25; 1,5; 1,5; 1+0,1−·N; 1,35; 1,5; 1,5; 1+0,1·N; 1,3;1,45; 1,85; 1,8; 1,0; 1,0; 1,2; 1,25; 1,35; 1,35; 1,3; 1,45; 1,45; 1,3; 1,8; 1,8; 1,85; 1,85; 1,2. Найти среднее значение месячной заработной платы.

33. Имеются данные о выработке продукции рабочими бригадами за смену (в штуках): 14; 7; 8; 9; N + 5; 12; 3; 6; 7; 8’ 6; 9; 8; 6; 13; 11; 9; 11; N + 6; 14; N +6; 11; 9; 9; 13; 12; 13; 14; 7; 7. Найти среднее значение выработанной продукции рабочими.

34. Имеются следующие данные о количестве произведенной продукции рабочими цеха за смену (в штуках): 16; 22; 15 + N; 25; 15; 19; 16; 17; 18; 13; N + 16; 19; 14; 16; 11; 15; 12; 22; 14; 10; 15 + N; 16 + N; 10; 10; 17; 17; 17; 18; 11; 19. Найти среднее количество произведенной продукции.

35. Имеются следующие данные о среднем сроке службы деталей некоторых отобранных механизмов (в месяцах): 7; 8,2; 8,6; 7; 7,5 + 0,2N; 8; 8+0,1N; 8,8; 7,2; 7,2; 6,1; 6; 6; 10; 8,2; 7,5 + 0,2N; 8 + 0,1N; 8,8; 8,8; 6,1; 6,1; 6,1; 10,0; 10,0; 8,2; 8,0; 7,0; 7,0; 6,0; 6,1. Найти средний срок службы деталей по всем отобранным механизмам.

2.3. Задание 3

Построить доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью P, зная выборочное среднее $\overline{x}$, объём выборки $n = N^2 \cdot 25$ и генеральное среднее квадратичное отклонение $\sigma = \frac{N}{4}$. Индивидуальные задания смотри в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Индивидуальные задачи к заданию 3

n	$\overline{x}$	**P**	**N**	$\overline{x}$	**P**
1	75,09	0,9	2	85,13	0,99
3	25,17	0,91	4	65,10	0,98
5	55,14	0,92	6	75,11	0,97
7	15,15	0,93	8	45,08	0,96
9	65,12	0,94	10	25,16	0,95
11	75,07	0,9	12	35,17	0,99
13	95,06	0,91	14	25,18	0,98
15	45,05	0,92	16	65,19	0,97
17	85,04	0,93	18	75,20	0,96
19	75,03	0,94	20	15,25	0,95
21	35,21	0,9	22	85,24	0,99
23	45,22	0,91	24	35,23	0,98
25	95,02	0,92	26	25,26	0,97
27	15,28	0,93	28	75,27	0,96
29	25,29	0,94	30	65,35	0,95
31	45,30	0,9	32	95,32	0,99
33	85,34	0,91	34	115,33	0,98
35	65,31	0,92			

2.4. Задание 4

Построить доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью P, зная выборочное среднее $\overline{x}$, объём выборки n, выборочную дисперсию S^{*2}.

Таблица 2.2

Индивидуальные данные к заданию 4

m	$\overline{x}$	**P**	**n**	S^{*2}
1	1,9	0,9	70	1,96
2	2,7	0,95	75	2,25
3	3,5	0,99	55	1,21
4	1,8	0,9	60	1,44
5	4,6	0,95	65	1,69
6	2,5	0,99	80	2,56
7	15,3	0,9	85	2,89
8	12,2	0,95	90	3,24
9	14,7	0,99	95	3,61
10	5,8	0,9	105	4,41
11	6,2	0,95	110	4,84
12	7,5	0,99	115	5,29
13	8,3	0,9	120	5,76
14	9,7	0,95	125	6,25
15	10,4	0,99	130	6,76
16	1,3	0,9	135	7,29
17	2,3	0,95	140	7,84
18	17,2	0,9	155	9,61
20	16,6	0,95	45	0,81
21	18,2	0,99	40	0,64
22	1,7	0,9	160	0,1024
23	9,5	0,95	55	0,0121
24	8,3	0,99	75	0,0225
25	7,2	0,9	70	0,0196
26	20,4	0,95	60	0,0144
27	19,7	0,99	65	0,0169
28	21,3	0,9	80	0,0256
29	6,9	0,95	85	0,0289

m	$\overline{x}$	P	n	S^{*2}
30	23,1	0,99	90	0,0324
31	30,7	0,9	95	0,0361
32	20,1	0,95	105	0,0441
33	32,5	0,99	110	0,0484
34	28,2	0,9	115	0,0529
35	25,1	0,95	120	0,0576

2.5. Задание 5

При доверительной вероятности P = 0.99 для заданного интервального ряда выборки проверить гипотезу: закон распределения генеральной совокупности является нормальным.

Таблица 2.3

Индивидуальные данные к заданию 5

m	Интервалы / Частоты						
1	2						
1	(102,5; 107,5)	(107,5; 112,5)	(112,5; 117,5)	(117,5; 122,5)	(122,5; 127,5)	(127,5; 132,5)	(132,5; 137,5)
	4	6	10	35	25	12	8
2	(12,25; 12,75)	(12,75; 13,25)	(13,25; 13,75)	(13,75; 14,25)	(14,25; 14,75)	(14,75; 15,25)	(15,25; 15,75)
	5	15	30	25	15	7	3
3	(9,85; 10,55)	(10,55; 11,25)	(11,25; 11,95)	(11,95; 12,65)	(12,65; 13,35)	(13,35; 14,05)	(14,05; 14,75)
	8	10	30	26	13	8	5
4	(42,5; 47,5)	(47,5; 52,5)	(52,5; 57,5)	(57,5; 62,5)	(62,5; 67,5)	(67,5; 72,5)	(72,5; 77,5)
	4	7	11	38	20	12	8
5	(107,5; 112,5)	(112,5; 117,5)	(117,5; 122,5)	(122,5; 127,5)	(127,5; 132,5)	(132,5; 137,5)	(137,5; 142,5)
	5	10	30	25	15	10	5

Продолжение табл. 2.3.

1	2						
6	(10,4; 14,4)	(14,4; 18,4)	(18,4; 22,4)	(22,4; 26,4)	(26,4; 30,4)	(30,4; 34,4)	(34,4; 38,4)
	7	15	25	20	15	10	8
7	(23;29)	(29;35)	(35;41)	(41;47)	(47;53)	(53;59)	(59;65)
	5	15	33	24	10	8	5
8	(8,1; 13,1)	(13,1; 18,1)	(18,1; 23,1)	(23,1; 28,1)	(28,1; 33,1)	(33,1; 38,1)	(38,1; 43,5)
	8	10	30	26	14	8	4
9	(95; 105)	(105; 115)	(115; 125)	(125; 135)	(135; 145)	(145; 155)	(155; 165)
	4	8	12	30	25	12	9
10	(125; 135)	(135; 145)	(145; 155)	(155; 165)	(165; 175)	(175; 185)	(185; 195)
	5	10	30	25	15	10	5
11	(1,1; 1,3)	(1,3; 1,5)	(1,5; 1,7)	(1,7; 1,9)	(1,9; 2,1)	(2,1; 2,3)	(2,3; 2,5)
	5	15	30	20	15	8	7
12	(3,3; 3,7)	(3,7; 4,1)	(4,1; 4,5)	(4,5; 4,9)	(4,9; 5,3)	(5,3; 5,7)	(5,7; 6,1)
	15	25	50	40	35	20	15
13	(120; 130)	(130; 140)	(140; 150)	(150; 160)	(160; 170)	(170; 180)	(180; 190)
	4	10	40	26	9	6	5
14	(25;30)	(30;35)	(35;40)	(40;45)	(45;50)	(50;55)	(55;60)
	10	25	50	80	45	25	15
15	(12,25; 12,75)	(12,75; 13,25)	(13,25; 13,75)	(13,75; 14,25)	(14,25; 14,75)	(14,75; 15,25)	(15,25; 15,75)
	15	35	60	90	55	30	15
16	(2,2; 3,0)	(3,0; 3,8)	(3,8; 4,6)	(4,6; 5,4)	(5,4; 6,2)	(6,2; 7,0)	(7,0; 7,8)
	5	15	30	20	13	10	7
17	(14,3; 14,9)	(14,9; 15,5)	(15,5; 16,1)	(16,1; 16,7)	(16,7; 17,3)	(17,3; 17,9)	(17,9; 18,5)
	10	35	65	90	50	35	15

Продолжение табл. 2.3.

1	2						
18	(102,5; 107,5)	(107,5; 112,5)	(112,5; 117,5)	(117,5; 122,5)	(122,5; 127,5)	(127,5; 132,5)	(132,5; 137,5)
	10	40	70	95	50	30	5
19	(12,25; 12,75)	(12,75; 13,25)	(13,25; 13,75)	(13,75; 14,25)	(14,25; 14,75)	(14,75; 15,25)	(15,25; 15,75)
	10	35	60	95	55	30	15
20	(9,85; 10,55)	(10,55; 11,25)	(11,25; 11,95)	(11,95; 12,65)	(12,65; 13,35)	(13,35; 14,05)	(14,05; 14,75)
	5	35	60	95	65	30	10
21	(42,5; 47,5)	(47,5; 52,5)	(52,5; 57,5)	(57,5; 62,5)	(62,5; 67,5)	(67,5; 72,5)	(72,5; 77,5)
	15	30	40	80	55	20	10
22	(107,5; 112,5)	(112,5; 117,5)	(117,5; 122,5)	(122,5; 127,5)	(127,5; 132,5)	(132,5; 137,5)	(137,5; 142,5)
	5	20	40	60	35	25	15
23	(10,4; 14,4)	(14,4; 18,4)	(18,4; 22,4)	(22,4; 26,4)	(26,4; 30,4)	(30,4; 34,4)	(34,4; 38,4)
	10	30	50	75	45	25	15
24	(23;29)	(29;35)	(35;41)	(41;47)	(47;53)	(53;59)	(59;65)
	5	15	40	60	40	30	10
25	(8,1; 13,1)	(13,1; 18,1)	(18,1; 23,1)	(23,1; 28,1)	(28,1; 33,1)	(33,1; 38,1)	(38,1; 43,5)
	5	15	40	60	45	25	10
26	(95; 105)	(105; 115)	(115; 125)	(125; 135)	(135; 145)	(145; 155)	(155; 165)
	10	30	60	90	70	30	10
27	(125; 135)	(135; 145)	(145; 155)	(155; 165)	(165; 175)	(175; 185)	(185; 195)
	10	35	65	90	55	35	10
28	(1,1; 1,3)	(1,3; 1,5)	(1,5; 1,7)	(1,7; 1,9)	(1,9; 2,1)	(2,1; 2,3)	(2,3; 2,5)
	5	20	35	60	45	20	15

Продолжение табл. 2.3.

1	2						
29	(3,3; 3,7)	(3,7; 4,1)	(4,1; 4,5)	(4,5; 4,9)	(4,9; 5,3)	(5,3; 5,7)	(5,7; 6,1)
	10	25	55	85	65	40	20
30	(120; 130)	(130; 140)	(140; 150)	(150; 160)	(160; 170)	(170; 180)	(180; 190)
	5	10	15	40	20	6	4
31	(25;30)	(30;35)	(35;40)	(40;45)	(45;50)	(50;55)	(55;60)
	10	25	40	80	65	20	10
32	(12,25; 12,75)	(12,75; 13,25)	(13,25; 13,75)	(13,75; 14,25)	(14,25; 14,75)	(14,75; 15,25)	(15,25; 15,75)
	5	20	50	90	65	45	25
33	(2,2; 3,0)	(3,0; 3,8)	(3,8; 4,6)	(4,6; 5,4)	(5,4; 6,2)	(6,2; 7,0)	(7,0; 7,8)
	10	15	30	60	40	35	20
34	(14,3; 14,9)	(14,9; 15,5)	(15,5; 16,1)	(16,1; 16,7)	(16,7; 17,3)	(17,3; 17,9)	(17,9; 18,5)
	5	15	40	60	40	30	10
35	(102,5; 107,5)	(107,5; 112,5)	(112,5; 117,5)	(117,5; 122,5)	(122,5; 127,5)	(127,5; 132,5)	(132,5; 137,5)
	5	10	37	22	15	10	5

2.6. Задание 6

Для двух случайных величин X и Y проведена серия испытаний. Результаты испытаний записаны в следующую корреляционную таблицу. Четные варианты индивидуальные задания берут из таблицы 2.4, а нечетные – из таблицы 2.5.

Таблица 2.4

Индивидуальные данные к заданию 6

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1	D	C	–	–	–	–
2	–	C	B	–	–	–
3	–	–	A	B	A	1
4	–	–	–	–	D	C

Таблица 2.5

Индивидуальные данные к заданию 6

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1						A
2				C	B	A
3		D	3	B		
4	C	2				

Для этих случайных величин:

1. Вычислить числовые характеристики выборочные средние, выборочные дисперсии, ковариацию и выборочный коэффициент корреляции ρ_{XY}.
2. Проверить для доверительной вероятности P = 0,95 значимость коэффициента корреляции ρ_{XY}. Сделать вывод о тесноте взаимосвязи.
3. Написать уравнения прямых регрессий Y на X и X на Y.
4. В подходящем масштабе изобразить на графике точки (x, y) из корреляционной таблицы и прямые регрессии.

2.7 Задание 7

Над случайными величинами X, Y, Z проведена серия из 8 наблюдений. Результаты записаны в таблицу

Таблица 2.6

Индивидуальные данные к заданию 7

	X	Y	Z
1	1	A	0
2	0	1	A
3	2	B	3
4	C	2	3
5	3	1	1
6	2	0	-1
7	A	3	B
8	1	C	D

Составить матрицы моментов и корреляционную. Вычислить коэффициент множественной корреляции между переменной Z (как функции от X, Y) и переменными X, Y.

3. Примеры решения задач

3.1 Пример 1

Рассмотрим пример решения задания 5.

Выдвинутая гипотеза H_0: предполагаемый закон распределения $f(x)$ – нормальный закон распределения с параметрами $M(X) = \overline{x}$, $D(X) = S^{*2}$.

Конкурирующая гипотеза H_1: предполагаемый закон распределения нормальным не является.

Таблица 3.1

Исходные данные

m	Интервалы / Частоты						
1	(1; 3)	(3; 5)	(5; 7)	(7; 9)	(9; 11)	(11; 13)	(13; 15)
	15	25	30	50	45	30	5

Объем выборки:

$n = 15 + 25 + 30 + 50 + 45 + 30 + 5 = 200$

Прежде чем искать числовые характеристики выборки, заменим интервалы соответствующими им серединами.

Таблица 3.2

Построение дискретного вариационного ряда

Интервалы	(1; 3)	(3; 5)	(5; 7)	(7; 9)	(9; 11)	(11; 13)	(13; 15)
Середины	2	4	6	8	10	12	14
Частоты	15	25	30	50	45	30	5

Числовые характеристики:

– выборочное среднее:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i n_i = \frac{1}{200}(2\cdot 15 + 4\cdot 25 + 6\cdot 30 + 8\cdot 50 + 10\cdot 45 + 12\cdot 30 + 14\cdot 5) =$$

$$= 7{,}95$$

– выборочная дисперсия:

$$S^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{200}(2^2 \cdot 15 + 4^2 \cdot 25 + 6^2 \cdot 30 + 8^2 \cdot 50 + 10^2 \cdot 45 + 12^2 \cdot 30 +$$

$$+ 14^2 \cdot 5) = 72{,}7$$

$$S^2 = 72{,}7 - 7{,}95^2 = 9{,}4975.$$

– выборочное среднее квадратическое отклонение:

$$S = \sqrt{S^2} = 3{,}08$$

Для проверки выдвинутой гипотезы используем критерий согласия Пирсона.

$$\tau_i = \frac{x_i - \overline{x}}{S},$$

где x_i – границы интервалов.

$\Phi(x_i)$ – значения функции Лапласа.

$p_i = \Phi(x_i) - \Phi(x_{i-1})$

Теоретические частоты: $n_i^{/} = n \cdot p_i$

Необходимые расчеты представим в таблице.

Таблица 3.3

Расчет значения критерия Пирсона

Интервалы	n_i	τ_i	$\Phi(\tau_i)$	p_i	$n_i^{/}$	$\frac{(n_i - n_i^{/})^2}{n_i^{/}}$
	–	–2,26	–0,4881	–	–	–
(1; 3)	15	–1,61	–0,4463	0,0418	8,36	5,27
(3: 5)	25	–0,96	–0,3315	0,1148	22,96	0,18
(5; 7)	30	–0,31	–0,1217	0,2098	41,96	3,41
(7; 9)	50	0,34	0,1331	0,2548	50,96	0,02
(9; 11)	45	0,99	0,3389	0,2058	41,16	0,36
(11; 13)	30	1,64	0,4495	0,1106	22,12	2,81
(13; 15)	5	2,29	0,4890	0,0395	7,9	1,06
Сумма	200	–	–	0,9771	195,42	13,11

Расчетное значение критерия Пирсона: $\chi^2_{\text{расч}} = 13{,}11$.

Табличное значение критерия Пирсона находим при доверительной вероятности Р = 0,95: $\chi^2_{\text{т}}(0{,}05;7-2-1) = 9{,}5$.

Так как расчетное значение превышает табличное значение, то выдвинутая гипотеза отвергается.

3.2 Пример 2

Рассмотрим пример решения задания 6.

Пусть N = 9, n = 50. Тогда A = 12, B = 3, C = 2, D = 3.

Для заданных значений параметров A, B, C, D корреляционная таблица имеет вид:

Таблица 3.4

Корреляционная таблица для заданных A, B, C, D.

Y \ X	0	1	2	3	4	5	n_y
1	–	3	–	–	–	–	3
2	3	–	2	–	–	–	5
3	–	–	1	2	12	1	16
4	–	–	–	–	1	–	1
n_x	3	3	3	2	13	1	25

Объём выборки равен 2 +3 + 3 +1 + 2 + 12 + 1 + 1 = 25.

1) Вычислим выборочные характеристики:

$$\overline{x} = \frac{1}{25}(0\cdot 3 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 13 + 6\cdot 1) = \frac{72}{25};$$

$$\overline{y} = \frac{1}{25}(1\cdot 3 + 2\cdot 5 + 3\cdot 16 + 4\cdot 1) = \frac{13}{5};$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{25}(0^2\cdot 3 + 1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 3 + 3^2\cdot 2 + 4^2\cdot 13 + 6^2\cdot 1) = \frac{266}{25};$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{25}(1^2\cdot 3 + 2^2\cdot 5 + 3^2\cdot 16 + 4^2\cdot 1) = \frac{183}{25};$$

$$S_X^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{266}{25} - \left(\frac{72}{25}\right)^2 = 2{,}346;$$

$$S_Y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = \frac{183}{25} - \left(\frac{13}{5}\right)^2 = 0{,}56;$$

$S_X = 1{,}532$; $S_Y = 0{,}748$;

$$\overline{x \cdot y} = \frac{1}{25}(1 \cdot 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 12 + 5 \cdot 3 \cdot 1 +$$

$$+ 4 \cdot 4 \cdot 1) = \frac{210}{25}$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \overline{x \cdot y} - \overline{x} \cdot \overline{y} = \frac{210}{25} - \frac{72}{25} \cdot \frac{13}{5} = 0{,}912;$$

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{S_X . S_Y} = \frac{0{,}912}{1{,}532 \cdot 0{,}748} = 0{,}796.$$

2) Проверим значимость коэффициента корреляции по критерию Стьюдента.

Выдвинутая гипотеза H_0: коэффициент корреляции значим.

Конкурирующая гипотеза H_1: коэффициент корреляции незначим.

Расчетное значение критерия Стьюдента:

$$t_{\text{расч}} = \frac{\rho_{XY}}{\sqrt{1 - \rho_{XY}^2}} \cdot \sqrt{n - 2} = \frac{0{,}796}{\sqrt{1 - 0{,}796^2}} \sqrt{25 - 2} = 6{,}31.$$

При доверительной вероятности P = 0,95 табличное значение критерия Стьюдента

$t_{\text{табл}}(0{,}05;\ 25 - 2) = 2{,}07$.

Так как расчетное значение превышает табличное, то выдвинутая гипотеза отвергается, т.е. коэффициент корреляции значим. Между величинами X и Y существует тесная прямая линейная связь, т.е. с увеличением X увеличивается Y и наоборот.

3) В общем случае уравнения прямых регрессий имеют вид:

Y на X: $y - \overline{y} = \rho_{XY} \cdot \dfrac{S_Y}{S_X}(x - \overline{x})$,

X на Y: $x - \overline{x} = \rho_{XY} \cdot \dfrac{S_X}{S_Y}(y - \overline{y})$.

При решении данной задачи уравнения прямых регрессий примут вид:

Y на X:

$y - 2{,}6 = 0{,}388(x - 2{,}88);$

X на Y:

$x - 2{,}88 = 1{,}63(y - 2{,}6).$

Графически прямые регрессии изображены на рис. 3.1.

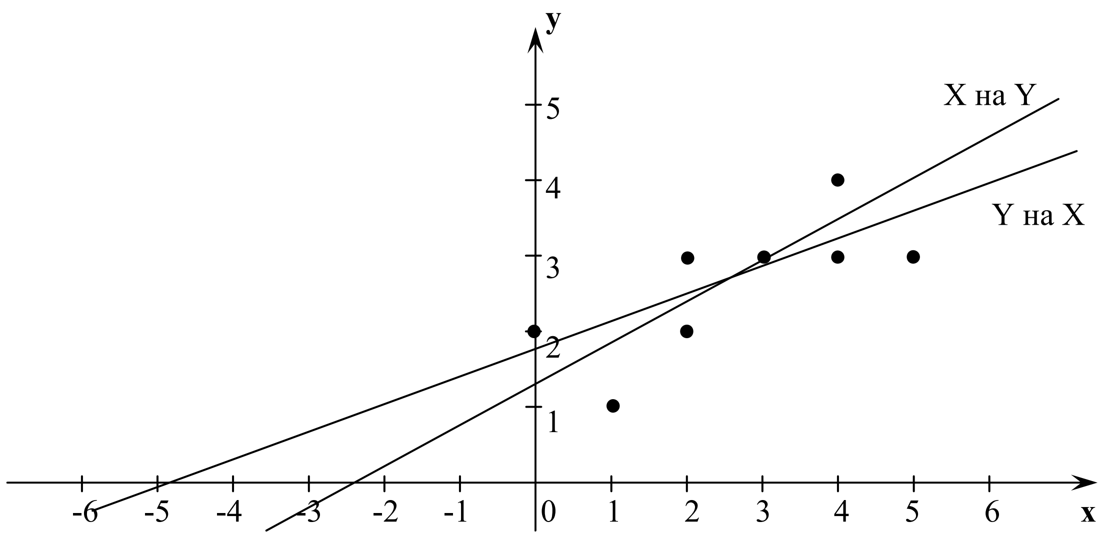


Рис. 3.1. Прямые регрессии

3.3 Пример 3

Рассмотрим пример решения задания 7.

При заданных значениях параметров выборка для X, Y и Z имеет вид:

Таблица 3.5

Выборка для X,Y и Z

№	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1	0	2	3	3	2	12	1
Y	12	1	2	2	1	0	3	3
Z	0	12	3	3	1	-1	2	3

1) Вычислим матрицу моментов. Объём выборки равен 8.
Числовые характеристики:
– выборочные средние

$$\overline{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = 3; \qquad \overline{y} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} y_i = 3; \qquad \overline{z} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} z_i = \frac{23}{8}.$$

– начальные моменты второго порядка

$$\overline{x^2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} (x_i)^2 = 21{,}5; \qquad \overline{y^2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} (y_i)^2 = 21{,}5;$$

$$\overline{z^2} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} (z_i)^2 = \frac{177}{8}.$$

– выборочные дисперсии

$S_X^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = 12{,}5$,

аналогично, $S_Y^2 = \overline{y^2} - (\overline{y})^2 = 12{,}5$;

$S_Z^2 = \overline{z^2} - (\overline{z})^2 = 13{,}859$.

– выборочные средние квадратические отклонения

$S[X] = \sqrt{D[X]} = 3{,}536$;
$S[Y] = 3{,}536$;
$S[Z] = 3{,}723$.

– начальные смешанные моменты второго порядка

$$M[XY] = \frac{1\cdot 12 + 0\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 + 3\cdot 1 + 2\cdot 0 + 12\cdot 3 + 1\cdot 3}{8} = 8;$$

$$M[XZ] = \frac{1\cdot 0 + 0\cdot 12 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 + 3\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 12\cdot 2 + 1\cdot 3}{8} = \frac{43}{8};$$

$$M[ZY] = \frac{0\cdot 12 + 12\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3}{8} = 5.$$

– ковариации или центральные смешанные моменты второго порядка

$\mathrm{cov}(X,Y) = 8 - 3\cdot 3 = -1$;

$\mathrm{cov}(X,Z) = \dfrac{43}{8} - 3\cdot\dfrac{23}{8} = -3{,}25$;

$$\text{cov}(Y,Z) = 5 - 3 \cdot \frac{23}{8} = -3{,}625.$$

Матрица моментов запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} 12{,}5 & -1 & -3{,}25 \\ -1 & 12{,}5 & -3{,}625 \\ -3{,}25 & -3{,}625 & 13{,}859 \end{pmatrix}.$$

2)Вычислим коэффициенты корреляции.

$$R(X,Y) = \frac{-3{,}625}{3{,}536 \cdot 3{,}723} = -0{,}273;$$

$$R(X,Z) = \frac{-1}{3{,}536 \cdot 3{,}536} = -0{,}08;$$

$$R(Y,Z) = \frac{-3{,}25}{3{,}536 \cdot 3{,}723} = -0{,}245.$$

Запишем корреляционную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}08 & -0{,}245 \\ -0{,}08 & 1 & -0{,}273 \\ -0{,}245 & -0{,}273 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Коэффициент множественной корреляции вычисляют по формуле:

$$R(Z,XY) = \sqrt{\frac{R^2(X,Z) + R^2(Y,Z) - 2R(X,Y) \cdot R(Y,Z) \cdot R(X,Z)}{1 - R^2(X,Y)}}$$

В нашем случае R(Z,XY) =0,383.

Библиографический список

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.: 1986.
2. Гмурман В. Е. .Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] : учебное пособие / В. Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 2003. - 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 2002.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. М.: Наука, 2004.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
КУРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра высшей математики

ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Индивидуальные задания к модулю 17

Курск 2007

Составитель: Е.В.Журавлева, Е.А.Панина

УДК 519.2

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики Л.В.Карачевцева.

Повторные испытания. Случайные величины. [Текст]: / индивидуальные задания к модулю 17 системы РИТМо по дисциплине «Математика» / сост.: Е.В.Журавлева, Е.А.Панина; Курск. гос. техн. ун-т; Курск, 2007. 53с., табл.1. Библиогр.: 3 назв.

Приведены теоретические упражнения, индивидуальные задания и список рекомендуемой литературы по теме: «Повторные испытания. Случайные величины». Задания разбиты на 3 уровня сложности, выбираемые студентами в зависимости от личной подготовленности.

Предназначены для студентов экономических специальностей.

.

Текст печатается в авторской редакции

ИД №06430 от 10. 12. 2001.
Подписано в печать ________ . Формат 60x84 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. .Тираж 50 экз. Заказ ……. Бесплатно.
Курский государственный технический университет.
Издательско-полиграфический центр Курского государственного технического университета. 305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

В целях упорядочения самостоятельной работы студентов при изучении курса «Высшей математики» разработана Рейтинговая Интенсивная Технология Модульного обучения. Эта работа представляет собой один из модулей указанной технологии. Она содержит индивидуальные задания, представляющие собой теоретические упражнения, практические задания, по темам «Повторные испытания», «Случайные величины», «Системы массового обслуживания».

При выборе заданий следует использовать параметр n, где n – номер студента в журнале преподавателя.

При выполнении заданий всем студентам рекомендуется в качестве теоретической подготовки ответить на вопросы теоретических упражнений, разбитых на два варианта (выбор варианта осуществляется по правилу: нечетные варианты выполняют тест 1, четные – тест 2)

В зависимости от уровня подготовки студента рекомендуется воспользоваться тремя уровнями сложности, на которые разбиты задания:

Первый уровень сложности предполагает решение следующих практических заданий – 1, 3, 4, 5, 9, 10.

Второй уровень сложности содержит решение следующих практических упражнений – 1, 3, 4, 5,7, 9,10, 11.

Решение задач *третьего* уровня сложности практических заданий – 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12.

Особо одаренным студентам рекомендуем решить все задания своего варианта.

Теоретические упражнения

Тест 1

1. Как называется ряд опытов, проведенных при одних и тех же условиях?
2. Если рассматривается последовательность взаимно независимых и одинаковых испытаний, причем в каждом из этих испытаний может наступить событие A с постоянной вероятностью $P(A) = p$, то рассматриваемая схема является схемой Бернулли или схемой Пуассона?
3. Как найти вероятность того, что в n испытаниях (число испытаний мало) событие A наступит m раз?
4. Если p – вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A в n независимых испытаниях наступит ровно m раз $P_n(m)$, можно найти используя локальную теорему Лапласа или интегральную теорему Лапласа?
5. Какое название носят величины, значения которых нельзя заранее указать и которые зависят от случайных причин?
6. Если случайная величина может принимать отдельные, изолированные значения, причем их количество конечно или бесконечно, но счетно, то такая величина носит название дискретной, непрерывной или смешанной?
7. Как называется перечень всех значений дискретной случайной величины и их вероятностей?
8. Как находят математическое ожидание дискретной случайной величины: как среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее квадратическое?
9. Перечислите свойства математического ожидания:

    1) математическое ожидание постоянной есть сама эта постоянная, ноль или постоянная в квадрате?

    2) что получается при вынесении постоянной множителя за знак математического ожидания M[kX]: M[X], k^2M[X], kM[X], X?

    3) математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме или произведению математических ожиданий этих величин?

    4) если M[X·Y]=M[X]·M[Y], то X и Y – зависимые или независимые случайные величины?

10. Математическое ожидание отклонения случайной величины X от его математического ожидания M[X-M[X]] равно нулю, математическому ожиданию M[X] или дисперсии?

11. Перечислите основные свойства дисперсии:

1) дисперсия постоянной величины равна нулю, единице, самой постоянной, постоянной в квадрате?

2) что получается при вынесении постоянного множителя за знак дисперсии D[kX]: D[X], k^2D[X], kD[X], X?

3) дисперсия суммы двух величин D[X+Y]=D[X]+D[Y], если X и Y – зависимые или независимые величины?

12. Как связаны дисперсия D[X] и среднее квадратическое отклонение σ[X]: D[X]=σ^2[X]; D[X]=$\sqrt{\sigma[X]}$; D[X]=σ[X]?

13. Укажите связь между дифференциальной функцией (плотностью вероятности) и интегральной функцией распределения?

14. Перечислите свойства дифференциальной функции распределения:

1. может ли плотность вероятности f(x) быть отрицательна?

2. чему равна вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет в результате испытания значение в промежутке (a,b): несобственному интегралу от дифференциальной функции распределения; неопределенному интегралу от дифференциальной функции распределения; разности производной в точках $f'(x)$ в точках a и b.

3. как зная плотность распределения найти интегральную функцию распределения?

4. чему равен $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$?

15. Сопоставьте формулу распределения и его название.

1) $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$;

2) $P(X = m) = \dfrac{a^m e^{-a}}{m!}$, $a = n \cdot p$;

3) $\mathrm{P(X = m) = q^{m-1} \cdot p}$, (0<p<1)

4) распределение Пуассона;

5) геометрическое распределение;

6) биномиальное распределение.

Тест 2

1. Как называются испытания, если вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний?
2. Если рассматривается последовательность взаимно независимых и одинаковых испытаний, причем в каждом из этих испытаний может наступить событие A с вероятностью, которая зависит от номера испытания, то рассматриваемая схема является схемой Бернулли или Пуассона?
3. Наивероятнейшим числом наступления события A в n повторных испытаниях называется частота, соответствующая максимальной, минимальной или некоторой средней вероятности?
4. Если вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие А в n независимых испытаниях произойдет от m_1 до m_2 раз $P_n(m_1, m_2)$, находят используя локальную теорему Лапласа или интегральную теорему Лапласа?
5. Какое название носят величины, значения которых нельзя заранее указать и которые зависят от случайных причин?
6. Если величина принимает все действительные значения на некотором промежутке, то она называется дискретной случайной величиной или непрерывной случайной величиной?
7. Как находят математическое ожидание дискретной случайной величины: как среднее арифметическое, среднее геометрическое, среднее квадратическое?
8. Перечислите свойства математического ожидания:

   1) математическое ожидание постоянной есть сама эта постоянная, ноль или постоянная в квадрате?

   2) что получается при вынесении постоянной множителя за знак математического ожидания M[kX]: M[X], k^2M[X], kM[X], X?

   3) математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме или произведению математических ожиданий этих величин?

   4) если M[X·Y]=M[X]·M[Y], то X и Y – зависимые или независимые случайные величины?

9. Математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от его математического ожидания $M[X-M[X]]^2$ равно нулю, математическому ожиданию M[X] или дисперсии?

10. Перечислите основные свойства дисперсии:

1) дисперсия постоянной величины равна нулю, единице, самой постоянной, постоянной в квадрате?

2) что получается при вынесении постоянного множителя за знак дисперсии D[kX]: D[X], k^2D[X], kD[X], X?

3) дисперсия суммы двух величин D[X+Y]=D[X]+D[Y], если X и Y – зависимые или независимые величины?

11. Как выглядит упрощенная формула для нахождения дисперсии?

12. Вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше x $P(X<x)$ носит название…

13. Перечислите свойства интегральной функции распределения:

1) возможные значения функции распределения расположены в промежутке: [0;1]; [-1;0]; $(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$; $[1;+\infty)$?

2) может ли интегральная функция быть убывающей?

3) вероятность $P(x_1 \le x \le x_2)$ того, что случайная величина X примет значение из промежутка $x_1 \le x \le x_2$ равна: $F(x_1)-F(x_2)$; $F(x_2)-F(x_1)$; $F(x_1)+F(x_2)$; $F(x_1)\cdot F(x_2)$, где *F(x)* – интегральная функция распределения?

4) Чему равны пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$?

14. Укажите, какая величина называется начальным моментом k-го порядка, а какая центральным моментом k-го порядка: $M[X-M[X]]^k$; $M[X^k]$?

15. Сопоставьте формулу плотности распределения с названием

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

2) $f(x)=\begin{cases}0, & x\notin(a;b)\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a;b)\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0, \lambda>0\end{cases}$

4) нормальный закон распределения

5) показательное распределение

6) равномерное распределение

Практическая часть

Задание 1

Решить задачу, используя формулу Бернулли

1. При массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 6 наудачу взятых шестерен одна окажется бракованной?
2. Игральную кость бросили 5 раз. Какова вероятность того, что три раза появится шестерка?
3. Контрольная работа студента состоит из 4 вопросов. На каждый вопрос приводится 5 ответов, один из которых является верным. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан на три вопроса?
4. Вероятность выигрыша по одному билету денежно-вещевой лотереи равна 0,2. Какова вероятность того, что из шести приобретенных билетов два билета окажутся выигрышными?
5. Среди коконов некоторой партии 30% цветных. Какова вероятность того, что среди 10 случайно отобранных из партии коконов три цветных?
6. По мишени проводится 5 выстрелов. Вероятность попадания при каждом выстреле 0,8. Какова вероятность того, что мишень будет поражена тремя выстрелами?
7. В приборе 4 лампы. Вероятность выхода каждой лампы из строя в течение года равна 1/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить две лампы?
8. Вероятность поломки каждого из 5 независимо работающих станков в течение года равна 0,1. Какова вероятность того, что в течение года поломаются 3 станка?
9. Вероятность приема радиосигнала равна 0,8. Какова вероятность того, что сигнал при пяти передачах будет принят ровно три раза?
10. Допустим, что 25% населения носит очки. Какова вероятность того, что из случайно взятых 10 человек носят очки ровно 2 человека?
11. В некоторой семье имеется 5 детей. Если принять рождение мальчика с вероятностью 0,52, то какова вероятность того, что в семье будет ровно 3 мальчика?

12. Какова вероятность того, что при десяти бросках игральной кости число очков, кратное трем, появится ровно три раза?

13. В урне 30 шаров: 20 белых и 10 черных. Вынули подряд четыре шара, причем каждый вынутый шар возвращается в урну перед извлечением следующего, и шары в урне перемешиваются. Какова вероятность того, что среди вынутых 4 шаров будет 2 белых?

14. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включено 4 мотора.

15. Монета подбрасывается 8 раз. Какова вероятность того, что 6 раз она упадет гербом вверх?

16. В классе 30 учеников: 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было два мальчика и одна девочка?

17. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается): три партии из четырех или пять партий из восьми?

18. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

19. Магазин принимает партию из 12 радиоприемников для продажи в том случае, если при проверке двух из них, выбранных наугад, они оба оказываются исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую 4 неисправных приемника?

20. Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретя 8 облигаций, выиграет по 6 из них?

21. 30% изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Некто приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность того, что 4 из них высшего сорта?

22. Всхожесть семян равна 95%. Отбирается 6 зерен. Какова вероятность того, что они дадут 5 всходов?

23. Вероятность того, что расход воды в течение дня окажется выше нормы, равна 0,2. Найти вероятность того, что расход воды будет нормальным в течение 5 дней из ближайших 6 дней.

24. Вероятность рождения бычка при отеле коровы равна 0,5. Найти вероятность того, что от 5 коров будет ровно 3 бычка.

25. Доля плодов, зараженных болезнью в скрытой форме, составляет 20%. Случайным образом отбираются 6 плодов. Определить вероятность того, что среди отобранных окажется ровно 3 зараженных плода.

26. Чаеразвесочная фабрика выпускает 40% продукции высшего сорта. Какова вероятность того, что из шести поступивших на контроль проб чая три не окажутся, чаем высшего сорта?

27. В колхозном саду посажено 7 саженцев вишни. Вероятность прижиться для каждого из саженцев одинакова и равна 0,9. Найти вероятность того, что приживется 5 саженцев.

28. В магазине находится 12 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого из них одинакова и равна 0,3. Какова вероятность того, что покупку совершат 5 покупателей?

29. В приборе 4 лампы. Вероятность выхода из строя каждой лампы в течение года равна 1/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить половину ламп?

30. Известно, что 70% родившихся ягнят обычно имеют хорошие наследственные признаки. Какова вероятность того, что из восьми родившихся ягнят хорошие наследственные признаки имеют шестеро?

31. Появление колонии микроорганизмов данного сорта в определенных условиях оценивается с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 5 случаев эта колония микроорганизмов появится 4 раза?

32. В хлопке 10% коротких волокон. Какова вероятность того, что в наудачу взятом пучке из 5 волокон окажется 2 коротких волокна?

33. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживается. Найти вероятность того, что из 10 посаженых кустов помидоров приживется семь.

34. В некоторых условиях стрельбы вероятность попадания в объект при каждом выстреле равна 0,2. Какова вероятность того, что при пяти выстрелах будет 2 попадания?

35. Монету бросили 4 раза. Какова вероятность того, что герб выпадет ровно 1 раз?

Задание 2

Решить задачу, используя формулу Бернулли

1. При высаживании непикированной рассады помидоров только 80% растений приживается. Найти вероятность того, что из 10 посаженых кустов помидоров приживется не менее восьми.
2. Контрольная работа состоит из шести задач, причем для успешного выполнения ее необходимо решить любые 4 задачи. Если студент будет решать в течение отведенного времени лишь 4 задачи, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,8. Если он попробует решить 5 задач, то вероятность правильного решения любой из них равна 0,7, а, если он возьмется за решение всех шести задач, то эта вероятность снизится до 0,6. Какой тактики должен придерживаться студент, чтобы иметь наибольшие шансы успешно выполнить работу?
3. Какова вероятность того, что при 10 бросках игральной кости три очка выпадут не более трех раз?
4. Какова вероятность того, что при 10 бросках игральной кости число очков, кратное трем, появится не более трех раз?
5. Что вероятнее выиграть у равносильного противника (ничейный результат исключается) не менее трех партий из четырех или не менее пяти партий из восьми?
6. Среди коконов некоторой партии 30% цветных. Какова вероятность того, что среди 10 случайно отобранных из партии коконов не более трех цветных?
7. В партии хлопка около 20% коротких волокон. Какова вероятность того, что среди 5 случайно отобранных волокон смеси обнаружено менее двух коротких?
8. В приборе 4 лампы. Вероятность выхода из строя каждой лампы в течение года равна 1/6. Какова вероятность того, что в течение года придется заменить не менее половины ламп?
9. Монета подбрасывается 6 раз. Какова вероятность того, что она упадет гербом вверх не более трех раз?
10. Вероятность приема радиосигнала равна 0,9. Какова вероятность того, что при трех передачах сигнал будет принят хотя бы один раз?

11. Допустим, что 25% населения носит очки. Какова вероятность того, что из случайно взятых 10 человек носят очки не менее 7 человек?

12. Магазин принимает партию радиоприемников для продажи в том случае, если при проверке двух из них, выбранных наугад, они оба оказываются исправными. Какова вероятность того, что магазин примет партию, содержащую хотя бы один неисправный приемник.

13. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,75. Найти вероятность того, что в данный момент включено не менее 4 моторов.

14. 30% изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Некто приобрел 6 изделий, изготовленных на этом предприятии. Чему равна вероятность того, что не более 4 из них высшего сорта?

15. Вероятность поломки каждого из 5 независимо работающих станков равна 0,1. Какова вероятность того, что выйдут из строя от одного до трех станков?

16. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент включено хотя бы четыре мотора.

17. Событие В появится в случае, если событие А появится не менее двух раз. Найти вероятность того, что наступит событие В, если будет произведено 6 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события А равна 0,4.

18. Монета подбрасывается 8 раз. Какова вероятность того, что не более 6 раз она упадет гербом вверх?

19. Вероятность рождения бычка при отеле коровы равна 0,5. Найти вероятность того, что от пяти коров будет не менее одного бычка.

20. Доля плодов, зараженных болезнью в скрытой форме, составляет 20%. Случайным образом отбираются 6 плодов. Определить вероятность того, что среди отобранных окажется не более 1 зараженного плода.

21. Чаеразвесочная фабрика выпускает 40% продукции высшего сорта. Какова вероятность того, что из шести поступивших на контроль проб чая более трех не окажутся чаем высшего сорта?

22. В колхозном саду посажено 7 саженцев вишни. Вероятность прижиться для каждого из саженцев одинакова и равна 0,9. Найти вероятность того, что приживется более 5 саженцев.

23. В магазине находится 12 покупателей. Вероятность сделать покупку для каждого из них одинакова и равна 0,3. Какова вероятность того, что покупку совершат не более 5 покупателей?

24. В некоторых условиях стрельбы вероятность попадания в объект при каждом выстреле равна 0,2. Какова вероятность того, что при пяти выстрелах будет не менее 2 попаданий?

25. Известно, что 70% родившихся ягнят обычно имеют хорошие наследственные признаки. Какова вероятность того, что из восьми родившихся ягнят хорошие наследственные признаки имеют не более шести?

26. Появление колонии микроорганизмов данного сорта в определенных условиях оценивается с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что из 5 случаев эта колония микроорганизмов появится не менее 4 раз?

27. В хлопке 10% коротких волокон. Какова вероятность того, что в наудачу взятом пучке из 5 волокон окажется не более 2 коротких волокон?

28. При массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 6 наудачу взятых шестерен не более одной окажется бракованной?

29. Для уничтожения танка требуется не менее двух попаданий. Найти вероятность уничтожения танка десятью выстрелами, если вероятность попадания в танк при каждом выстреле равна 0,4.

30. Всхожесть семян равна 95%. Отбирается 6 зерен. Какова вероятность того, что они дадут не менее 5 всходов?

31. Вероятность выигрыша по облигации займа за все время его действия равна 0,25. Какова вероятность того, что некто, приобретя 8 облигаций, выиграет не менее чем по 6 из них?

32. Найти вероятность того, что событие А появится в пяти независимых испытаниях не менее двух раз, если в каждом испытании вероятность появления события равна 0,3.

33. В некоторой семье имеется четверо детей. Если принять рождение мальчика с вероятностью 0,5, то какова вероятность того, что в семье будет не менее двух мальчиков?

34. Прибор состоит из четырех элементов, включенных параллельно. Вероятность безотказной работы каждого элемента равна 0,8. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы два элемента были исправны. Какова вероятность того, что прибор будет работать безаварийно?

35. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Какова вероятность того, что в семье с 4 детьми мальчиков будет больше, чем девочек?

Задание 3

Решить задачу, используя формулу для нахождения наивероятнейшего числа появления события в независимых испытаниях

1. Товаровед осматривает 30 образцов товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.
2. Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия бракованной детали в этой партии равна 0,05. Найти наивероятнейшее число нестандартных (бракованных) деталей в этой партии.
3. Вероятность обращения в поликлинику каждого человека в период эпидемии гриппа равна 0,8. Сколько человек проживает в районе, если в поликлинику обратилось 100 человек?
4. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы равна 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?
5. Вероятность нарушения точности в сборке прибора составляет 0,2. Найти наиболее вероятное число точных приборов в партии из 8 приборов.
6. Сколько следует произвести повторных испытаний, чтобы наивероятнейшее число появлений некоторого события оказалось равным 21, если вероятность появления события в отдельном испытании равна 0,8?
7. Испытываются 32 элемента некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,8. Найдите наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

8. Отдел технического контроля проверяет партию из 10 деталей. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число деталей, которые будут признаны стандартными.

9. Товаровед осматривает 24 образца товаров. Вероятность того, что каждый из образцов будет признан годным к продаже, равна 0,6. Найти наивероятнейшее число образцов, которые товаровед признает годными к продаже.

10. Найти наивероятнейшее число правильно набитых перфораторщицей перфокарт среди 19 перфокарт, если вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,1.

11. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,8, а для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

12. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,3. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события в этих испытаниях будет равно 30.

13. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,7. Найти число испытаний, при котором наивероятнейшее число появлений события равно 20.

14. Чему равна вероятность наступления события в каждом из 39 независимых испытаний, если наивероятнейшее число наступлений события в этих испытаниях равно 25.

15. Прибор состоит из 5 независимо работающих элементов. Вероятность отказа элемента в момент включения прибора равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отказавших приборов.

16. Батарея произвела пять выстрелов по объекту. Вероятность попадания в объект при одном выстреле равна 0,2. Найти наивероятнейшее число попаданий.

17. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти наивероятнейшее число покупателей, которым потребуется обувь указанного размера, если в магазине находится 15 покупателей.

18. Пусть вероятность того, что в течение гарантийного срока телевизор потребует ремонта, равна 0,1. Найти наивероятнейшее чис-

ло телевизоров потребовавших ремонта среди 50 проданных магазином.

19. Пусть вероятность того, что пассажир опоздает к отправлению поезда, равна 0,02. Найти наиболее вероятное число опоздавших из 855 пассажиров.

20. Пусть вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает неправильно, равна 0,03. Найти наивероятнейшее число случаев правильной работы автомата, если будет опущено 150 монет.

21. Оптовая база обслуживает 12 магазинов. От каждого из них заявка на товары на следующий день может поступить с вероятностью 0,3. Найти наивероятнейшее число заявок на следующий день.

22. Вероятность того, что денежный автомат при опускании одной монеты сработает правильно, равна 0,97. Сколько нужно опустить монет, чтобы наивероятнейшее число случаев правильной работы автомата было равно 100?

23. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. Найти наивероятнейшее число мальчиков в семье из 7 детей.

24. На автобазе имеется 12 автомашин. Вероятность выхода на линию для каждой из них равна 0,8. Найти наивероятнейшее число вышедших на линию машин.

25. При установившемся технологическом процессе происходит 10 обрывов нити на 100 веретен в час. Определить наивероятнейшее число обрывов нити на 80 веретенах в течение часа.

26. Сколько нужно посеять семян, всхожесть которых 80%, чтобы наивероятнейшее число не взошедших семян было равно 40?

27. 30% изделий данного предприятия – это продукция высшего сорта. Каково наивероятнейшее число изделий высшего сорта поступило в магазины в партии из 300 изделий.

28. В колхозном саду посажено 7 саженцев вишни. Вероятность прижиться для каждого из саженцев одинакова и равна 0,9. Найти наивероятнейшее число прижившихся саженцев.

29. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найти наивероятнейшее число годных клемм из произведенных 900.

30. Пусть вероятность нарушения герметичности банки консервов равна 0,02. Найти наивероятнейшее число разгерметизированных банок среди произведенных 2000.

31. Вероятность обращения в поликлинику каждого человека в период эпидемии гриппа равна 0,8. Найти наивероятнейшее число обратившихся в поликлинику, если в районе проживает 1000 человек.

32. Сколько нужно взять деталей, чтобы наивероятнейшее число годных было равно 50, если вероятность того, что наудачу взятая деталь будет бракованной, равна 0,1?

33. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,85. Стрелок сделал 25 независимых выстрелов. Найти наивероятнейшее число попаданий.

34. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,6. Найти наивероятнейшее число залпов, при которых оба стрелка попадут в мишень, если будет произведено 15 залпов.

35. Пусть проводится серия из шести испытаний, состоящих в бросании монеты. Каково наивероятнейшее число появления герба?

Задание 4

Решить задачу, используя локальную теорему Муавра– Лапласа

1. Монета брошена 40 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет в 25 случаях.
2. Средний процент работы кинескопа телевизора в течение гарантийного срока равен 12. Вычислить вероятность того, что из 46 наблюдаемых телевизоров 6 выдержат гарантийный срок.
3. Определить вероятность того, что среди 400 проб руды окажется 275 проб с промышленным содержанием металла, если вероятность промышленного содержания металла одинакова для каждой пробы и равна 0,7.
4. Вероятность того, что перфокарта набита неверно, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 900 набитых перфокарт окажется 720 набитых правильно.
5. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность 120 попаданий из 320 выстрелов.
6. Найти вероятность того, что 500 посеянных семян не взойдет 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью 0,75.

7. Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Какова вероятность того, что среди 1000 новорожденных окажется 480 девочек?

8. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий 530 будут первого сорта.

9. Какова вероятность того, что в 75 испытаниях, состоящих в извлечении карты из колоды в 52 карты, бубновая карта появится 10 раз?

10. Найти вероятность того, что событие А наступит 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

11. В среднем 2,5% людей – дальтоники. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных 100 человек пятеро – дальтоники?

12. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,8. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена ровно 75 раз.

13. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется половина мальчиков.

14. Монета брошена 300 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет 155 раз.

15. Какова вероятность того, что в 85 испытаниях, состоящих в извлечении карты из колоды в 36 карт, пиковая карта появится 15 раз?

16. Вероятность заключить договор фирмой – поставщиком с некоторым заводом равна 0,2. Какова вероятность того, что из 100 фирм – поставщиков 30 заключат договоры с заводом – изготовителем?

17. В партии из 1000 деталей имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 50 изделий, взятых наудачу из этой партии, ровно 3 окажутся дефектными.

18. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаниях равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

19. Вероятность выпуска бракованного изделия равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 100 выпущенных изделий будет ровно 60 изделий без брака.

20. Предположим, что 25% населения носит очки. Какова вероятность того, что из 100 случайно выбранных человек 30 носят очки?

21. Было высажено 400 деревьев. Какова вероятность того, что приживется наивероятнейшее число деревьев, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8?

22. При массовом производстве шестерен вероятность брака при штамповке равна 0,1. Какова вероятность того, что из 400 наугад взятых шестерен бракованных будет наивероятнейшее число шестерен?

23. Вероятность изготовления размеров деталей в номинале равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 деталей в номинале окажется 51.

24. На тракторном заводе рабочий за смену изготовляет 625 деталей. Вероятность того, что деталь окажется первого сорта, равна 0,8. Какова вероятность того, что деталей первого сорта будут изготовлено ровно 510 штук?

25. Найти вероятность того, что среди наудачу взятых 100 деталей 55 окажутся отполированными, если в общей массе деталей имеется поровну отполированных и неотполированных.

26. Вероятность изготовления стандартной детали на автомате равна 0,95. Изготовлена партия из 200 деталей. Найти вероятность наивероятнейшего числа нестандартных деталей в этой партии.

27. Доля брака в некоторой продукции составляет 3%. В партии 800 изделий. Какова вероятность наиболее вероятного числа бракованных изделий в этой партии?

28. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаниях равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

29. Игральную кость бросили 600 раз. Какова вероятность того, что единица выпадет 100 раз?

30. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 84 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

31. Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

32. Найти вероятность того, что событие А наступит 1000 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,4.

33. Вероятность появления бракованной детали равна 0,05. Какова вероятность того, что из 200 деталей будет обнаружено 10 бракованных?

34. По данным технического контроля в среднем 2% изготовляемых на заводе часов нуждаются в дополнительной регулировке. Чему равна вероятность того, что из 300 изготовленных на заводе часов 290 шт. не будут нуждаться в дополнительной регулировке?

35. Известно, что 3/5 всего числа изготовляемых заводов телефонных аппаратов является продукцией высшего сорта. Чему равна вероятность того, что среди изготовленных 200 аппаратов 140 шт. окажется высшего сорта?

Задание 5

Решить задачу, используя интегральную теорему Муавра – Лапласа

1. В течение года град приносит значительный ущерб одному хозяйству из 50. Определить вероятность того, что из 200 хозяйств, имеющихся в области, пострадает не более двух хозяйств.

2. В результате проверки качества приготовленного к посеву зерна было установлено, что 90% зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет от 700 до 740 шт.

3. Предполагая, что вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 111, но не более 130 раз.

4. Было высажено 400 деревьев. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев больше 300, если вероятность того, что отдельное дерево приживется, равна 0,8.

5. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не более 1469 раз.

6. Вероятность неточной сборки прибора равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 500 приборов окажется от 410 до 430 (включительно) точны.

7. Пусть вероятность того, что покупателю необходима обувь 41-го размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из 750 покупателей не более 140 потребуют обувь этого размера.

8. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз.

9. При автоматической прессовке карболитовых болванов 2/3 общего числа их не имеют зазубрин. Найти вероятность того, что из 450 взятых наудачу болванок число болванок без зазубрин заключено между 280 и 320.

10. Игральную кость бросают 600 раз. Найти вероятность того, что число выпадений шестерки будет не менее 90 и не более 110 раз.

11. В течение года град приносит значительный ущерб одному хозяйству из 50. Определить вероятность того, что из 200 хозяйств, имеющихся в области, пострадает не менее восьми хозяйств.

12. В результате проверки качества приготовленного к посеву зерна было установлено, что 90% зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет не менее 890 шт.

13. Пусть вероятность того, что покупателю нужна женская обувь 36–го размера, равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 2000 покупателей таких будет не менее 575.

14. Предполагая, что вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 110 раз.

15. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 раз и не более 1500 раз.

16. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не более 74 раз.

17. Монета брошена 400 раз. Найти вероятность того, что число выпадений герба будет заключено между 190 и 210.

18. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,1. Найти вероятность того, что среди 300 случайно отобранных деталей окажется от 20 до 90 деталей, не прошедших проверку.

19. Игральную кость бросают 600 раз. Найти вероятность события, состоящего в том, что тройка выпадет не более 90 раз.

20. Предполагая, что вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не менее 115 раз

21. В результате проверки качества приготовленного к посеву зерна было установлено, что 90% зерен всхожи. Требуется определить вероятность того, что из отобранных и высаженных 1000 зерен прорастет от 880 до 920 шт.

22. Вероятность появления события в каждом из 2100 независимых испытаний равна 0,7. Найти вероятность того, что событие появится не менее 1470 раз.

23. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз и не более 90 раз.

24. Вероятность исправной работы некоторого прибора равна 0,1. Какова вероятность того, что в партии из 100 приборов будет неисправных приборов не более 13?

25. Вероятность обращения в поликлинику каждого взрослого человека в период эпидемии гриппа равна 0,8. Найти, среди какого числа взрослых человек можно ожидать, что в поликлинику будет не менее 75 обращений.

26. Пусть вероятность того, что покупателю нужна женская обувь 36–го размера, равна 0,3. Найти вероятность того, что среди 2000 покупателей таких будет от 570 до 630 включительно.

27. Предполагая, что вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти вероятность того, что при 200 выстрелах мишень будет поражена не более 110 раз.

28. Предприятие имеет 2400 агрегатов. В каждый агрегат входит некоторая деталь, вероятность выхода из строя которой за время t равна 1/6. Исходя из этого, отдел снабжения на время t заготовил 400 запасных деталей этого типа, найти вероятность того, что это количество запасных деталей обеспечит бесперебойную работу всех агрегатов в течение времени t.

29. Всхожесть хранящегося на складе зерна равна 80%. Отбираются первые попавшиеся 100 зерен. Требуется найти вероятность того, что среди них число всхожих зерен окажется от 68 до 90 шт.

30. Вероятность получения с конвейера изделия первого сорта равна 0,9. Определить вероятность того, что из взятых на проверку 600 изделий от 520 до 535 изделий будут первого сорта.

31. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется от 70 до 100 деталей, не прошедших проверку

32. Вероятность появления бракованной детали равна 0,05. Определить вероятность того, что при проверке партии из 200 деталей бракованная деталь появится больше, чем 5 раз, но меньше, чем 30 раз.

33. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена не более 70 раз.

34. Монета брошена 200 раз. Найти вероятность того, что число выпадений герба заключено между 80 и 110(включительно).

35. Вероятность, изделию оказаться бракованным, равна 0,005. Найти вероятность того, что из 10000 наугад взятых изделий бракованных окажется не более 80.

Задание 6

Решить задачу, используя интегральную теорему Муавра – Лапласа

1. Всхожесть хранящегося на складе зерна равна 80%. Отбираются первые попавшиеся 100 зерен. Требуется найти вероятность того, что относительная частота всхожести зерен будет отличаться от 0,8 по абсолютной величине не более чем на 0,1.

2. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти границы числа попаданий в мишень при 600 выстрелах, чтобы вероятность невыхода за эти границы была равна 0,993.

3. Посажено 600 семян кукурузы с вероятностью 0,9 прорастания для каждого семени. Найти границу абсолютной величины отклонения относительной частоты взошедших семян от вероятности 0,9, если эта граница должна быть гарантирована с вероятностью 0,995.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,6. Найти такое число выстрелов по мишени, при котором с вероятностью 0,993 можно ожидать, что отклонение частоты попаданий от вероятности 0,6 не превзойдет 0,03 (по абсолютной величине).

5. На склад магазина поступают изделия, 80% которых высшего сорта, а остальные – первого сорта. Сколько изделий надо взять наудачу со склада, чтобы с вероятностью 0,997 можно было утверждать, что частота появления изделий первого сорта находится между 0,75 и 0,85.

6. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,2. Если будет 10000 покупателей, то какова вероятность того, что доля тех, которым необходима обувь этого размера, отклонится от вероятности 0,2 не более чем на 0,005 (по абсолютной величине)?

7. Сколько семян надо отобрать для определения процента всхожести, чтобы с вероятностью 0,977 можно было бы утверждать, что отклонение частоты появления доброкачественных семян от вероятности 0,9 не превышало по абсолютной величине 0,02?

8. Вероятность того, что покупателю необходима мужская обувь 41-го размера, равна 0,2. Если будет 10000 покупателей, то, какое с вероятностью 0,9973 можно ожидать наибольшее отклонение от вероятности 0,2 доли тех покупателей, которым необходима обувь 41-го размера?

9. Вероятность выпуска радиолампы с дефектом равна 0,03. Найти максимально возможное отклонение ε частоты от 0,03 среди 2000 радиоламп, чтобы вероятность получить отклонение по абсолютной величине меньше ε, была равна 0,999.

10. Сколько нужно проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения доли годных деталей от вероятности 0,9 того, что деталь будет годной, не превысит 0,01 (по абсолютной величине)?

11. Вероятность наступления события в каждом испытании равна 0,8. Найти наибольшее отклонение частоты появления этого события от вероятности его наступления, которое можно ожидать с вероятностью 0,9127 при 4900 испытаниях.

12. Сколько нужно проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,99 можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения доли годных деталей от вероятности 0,9 того, что деталь будет годной, не превысит 0,01 (по абсолютной величине)?

13. Сколько надо произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что отклонение частоты появления со-

бытия от вероятности появления этого события равной 0,4, будет не более 0,04?

14. Сколько нужно проверить деталей, чтобы с вероятностью 0,999 можно было ожидать, что абсолютная величина отклонения частоты появления годных деталей от вероятности 0,9 того, что деталь будет годной, не превысит 0,01 (по абсолютной величине)?

15. В каких границах находится относительная частота появления события в независимых испытаниях, если вероятность ее отклонения от вероятности 0,4 равна 0,988, при n = 100?

16. Игральную кость бросили 80 раз. Найти границы, в которых число выпадений шестерки будет заключено с вероятностью 0,9973.

17. Сколько нужно произвести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было ожидать отклонение частоты выпадения герба от вероятности 0,5 на абсолютную величину, меньшую чем 0,01?

18. Сколько раз нужно бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

19. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе руды равна 0,4. Принимая, что событие, вероятность которого 0,997, достоверно, найти границы числа проб с промышленным содержанием металла среди 1000 проб.

20. Пусть вероятность того, что покупателю необходима женская обувь 36-го размера, равна 0,3. Найти вероятность того, что отклонение доли нуждающихся в обуви 36-го размера от вероятности 0,3 не превзойдет (по абсолютной величине) 0,02.

21. Мастерская по гарантийному ремонту телевизоров обслуживает 2000 абонентов. Вероятность того, что купленный телевизор потребует гарантийного ремонта, равна 0,3. Предполагая, что событие, вероятность которого 0,9973, достоверно, найти границы числа телевизоров, которые потребуют гарантийного ремонта.

22. Вероятность того, что каждому из 800 покупателей необходима женская обувь 36-го размера, равна 0,3. Найти границы, в которых с вероятностью 0,9625 заключена доля покупателей, нуждающихся в обуви 36-го размера.

23. Вероятность получения нестандартной детали равна 0,1. Найти вероятность того, что среди случайно взятых 200 деталей от-

носительная частота появления нестандартной детали отклонится от вероятности 0,1 по абсолютной величине не более чем на 0,03.

24. Вероятность появления события в каждом из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность отклонения относительной частоты появления события от его вероятности не более чем на 0,02 по абсолютной величине.

25. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

26. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Найти, какое отклонение относительной частоты появления события от его вероятности можно ожидать с вероятностью 0,9128 при 5000 испытаниях.

27. Вероятность появления события в каждом испытании 0,3. Произведено 1800 независимых испытаний. Найти границы отклонения частоты появления события от вероятности его появления, которую можно гарантировать с вероятностью 0,95.

28. В урне 80 белых и 20 черных шаров. Сколько шаров (с возвращением) нужно вынуть из урны, чтобы с вероятностью 0,95 можно было ожидать, что частота появления белого шара будет отклоняться от вероятности меньше, чем на 0,1?

29. Вероятность появления события A при каждом испытании равна 0,7. Сколько раз достаточно повторить испытание, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что частота появления события А будет отклоняться от вероятности не больше, чем на 0,05?

30. ОТК проверяет 475 изделий на брак. Вероятность того, что изделие бракованное, равна 0,05. Найти с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число бракованных изделий среди проверенных.

31. Вероятность наступления события А в каждом из независимых испытаний равна 0,2. Произведено 900 испытаний. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности не более, чем на 0,04.

32. В урне содержаться белые и черные шары в отношении 4:1. После извлечения шара регистрируется его цвет и шар возвращается в урну. Чему равно наименьшее число извлечений n, при котором с вероятностью 0,95 можно ожидать, что абсолютная величина откло-

нения относительной частоты появления белого шара от его вероятности будет не более чем на 0,01?

33. Вероятность того, что деталь нестандартна 0,2. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 300 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности 0,2 по абсолютной величине не более чем на 0,03.

34. Вероятность того, что деталь нестандартна 0,2. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью 0,95 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности 0,2 по абсолютной величине не более чем на 0,03.

35. При штамповке 70% деталей выходит первым сортом, 20% - вторым, 10% - третьим. Определить, сколько нужно взять отштампованных деталей, чтобы с вероятностью 0,9973 можно было утверждать, что частота появления первосортных среди них будет отличаться от вероятности изготовления первосортной детали по абсолютной величине не более чем на 0,05.

Задание 7

Решить задачу, используя приближение Пуассона

1. Семена некоторой культуры в 1 кг содержат в среднем 5 зерен сорняков. Для некоторого опыта отвешивается 200 г семян. Определить вероятность того, что в 200 г не окажется ни одного зерна сорняков.
2. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит две опечатки.
3. На основании статистических данных за изучаемый период установлена вероятность того, что пятилетний ребенок не доживет до 15 лет. Она приблизительно равна 0,001. Определить вероятность того, что один из 400 зарегистрированных в детской поликлинике пятилетних детей не доживет до пятнадцатилетнего возраста.
4. В среднем на 1 м^2 площади посева встречается 0,5 стеблей сорняков. Определить вероятность того, что на 4 м^2 не окажется ни одного сорняка.

5. Отбирается 5000 изделий. Доля брака составляет 0,0002. Найти вероятность того, что в выборке ровно два бракованных изделия.

6. Доля зараженности зерна вредителями в скрытой форме составляет 0,01. Определить вероятность того, что в выборке из 100 зерен окажется ровно 3 зараженных зерна.

7. Пусть вероятность нарушения герметичности банки консервов равна 0,0005. Найти вероятность того, что среди 2000 банок две окажутся разгерметизированными.

8. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет 2 ребенка?

9. Вероятность появления бракованной детали, изготавливаемой станком – автоматом, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей изготовленных станком будет 4 бракованных.

10. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит не менее двух опечаток.

11. Завод отправил потребителю партию из 500 изделий. Вероятность повреждения изделий в пути равна 0,002. Найти вероятность того, что потребитель получит 3 негодных изделия.

12. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какова вероятность того, что на коммутатор позвонят в течение 1 мин 4 абонента?

13. При установившемся технологическом процессе в среднем 0,5% шариков для шарикоподшипников оказывается бракованных. Найти вероятность того, что в партии из 1000 шариков бракованными окажутся 4 штуки.

14. На основании статистических данных за изучаемый период установлена вероятность того, что пятилетний ребенок не доживет до 15 лет. Она приблизительно равна 0,001. Определить вероятность того, что из 400 зарегистрированных в детской поликлинике пятилетних детей двое не доживут до пятнадцатилетнего возраста.

15. Во время стендовых испытаний подшипников качения 0,4% отходит в брак. Какова вероятность того, что при случайном отборе 5000 подшипников обнаружится 5 негодных?

16. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель двух и более пуль, если число выстрелов равно 5000.

17. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение минуты обрыв произойдет на 5 веретенах.

18. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя равна 0,0003. Определить вероятность того, что в изготовленной партии из 500 генераторов окажется хотя бы один бракованный.

19. При установившемся технологическом процессе в среднем 0,5% шариков для шарикоподшипников оказывается бракованных. Найти вероятность того, что в партии из 1000 шариков бракованными окажутся 5 штук.

20. Вероятность производства бракованной детали равна 0,008. Найти наивероятнейшее число бракованных деталей в партии из 1000 деталей и вероятность такого количества их в партии.

21. Книга издана тиражом 100 тысяч экземпляров. Вероятность брака в книге равна 0,00001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

22. Рукопись объемом в 1000 страниц машинописного текста содержит 1000 опечаток. Найти вероятность того, что наудачу взятая страница содержит хотя бы одну опечатку.

23. Коммутатор учреждения обслуживает 100 абонентов. Вероятность того, что в течение 1 мин абонент позвонит на коммутатор, равна 0,02. Какова вероятность того, что на коммутатор позвонят в течение 1 мин 3 абонента?

24. В магазин отправили 400 тщательно упакованных качественных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0,005. Найти вероятность того, что в магазин прибудут 3 испорченных изделия.

25. Вероятность незагорания новой лампочки равна 0,001. Какова вероятность того, что из 200 лампочек не загорится ровно 3?

26. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,001. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на 5 веретенах.

27. Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,001. Поступило 1000 вызовов. Определить вероятность трех сбоев.

28. На основании статистических данных за изучаемый период установлена вероятность того, что пятилетний ребенок не доживет до 15 лет. Она приблизительно равна 0,001. Определить вероятность того, что хотя бы один из 400 зарегистрированных в детской поликлинике пятилетних детей не доживет до пятнадцатилетнего возраста.

29. Вероятность изготовления бракованного генератора для автомобильного двигателя равна 0,0003. Определить вероятность того, что в изготовленной партии из 200 генераторов окажется хотя бы один бракованный.

30. Вероятность изготовления консервной банки с недостаточной герметизацией равна 0,002. Какова вероятность того, что среди 2000 банок с недостаточной герметизацией окажется 3 банки?

31. При введении вакцины против полиомиелита иммунитет создается в 99,99% случаев. Какова вероятность того, что из 1000 вакцинированных детей заболеет 3 ребенка?

32. Телефонная станция обслуживает 400 абонентов. Для каждого абонента вероятность того, что в течение часа он позвонит на станцию, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение часа 5 абонентов позвонят на станцию.

33. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу прибудут 3 негодных изделия?

34. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа двух элементов?

35. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие А может появится с вероятностью, равной 0,001. Какова вероятность того, что при 2000 испытаниях событие A появится не менее двух и не более четырех раз?

Задание 8

Для заданной случайной величины X найти:
1)закон распределения,
2)математическое ожидание,
3)дисперсию

1. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле – 0,6, для второго – 0,4. X – число попаданий в мишень.
2. В урне 6 шаров, из которых 3 белые, а остальные черные. Из этой урны наудачу извлекают 4 шара. X – число извлеченных белых шаров.
3. Имеются 5 ключей, из которых только один подходит к замку. X – число проб при открывании замка (испробованный ключ в последующих пробах не участвует).
4. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято две детали. X – число стандартных деталей среди извлеченных.
5. Брошены две игральные кости. X – сумма выпавших очков.
6. X – число мальчиков в семьях с 3 детьми (считаем, что вероятность рождения мальчика равна 0,5).
7. На пути движения автомобиля 4 светофора. Каждый из них разрешает или запрещает дальнейшее движение с вероятностью 0,5. X – число светофоров, пройденных автомобилем до первой остановки.
8. Монета бросается наудачу 4 раза. X – число выпадений герба.
9. Производится два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может появиться любое из чисел 1, 2, 3. X – максимальное из двух полученных чисел.
10. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красные. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша. X – число красных карандашей среди выбранных.
11. Рабочий обслуживает два независимо работающих станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, равна для первого станка 0,5, для второго – 0,6. X – число станков, которые не потребуют внимания рабочего.

12. Производятся последовательные испытания трех приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9. Х -–число испытанных приборов.

13. Х – число девочек в семьях с 4 детьми (считаем вероятность рождения девочки равной 0,5).

14. Проводится два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое из чисел 2, 1, 0, -1, -2. Х – сумма двух полученных чисел.

15. Из 20 контрольных работ, среди которых две оценены на «отлично», наугад извлекаются две работы. Х – число работ с оценкой «отлично» среди извлеченных.

16. Два стрелка стреляют каждый по своей мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,7, для второго – 0,8. Х – разность между числом попаданий в мишень первого стрелка и числом попаданий в мишень второго стрелка.

17. С вероятностью попадания при одном выстреле 0,7 охотник стреляет по дичи до первого попадания, но успевает сделать не более 4 выстрелов. Х – число промахов.

18. Два стрелка стреляют по одной мишени, делая независимо друг от друга по два выстрела. Вероятность попадания для каждого из стрелков равна 0,5. Х – общее число попаданий в мишень.

19. Производится два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое из чисел 0, 1, 2, 3. Х – модуль разности двух полученных чисел.

20. Автомобили поступают в торговый салон с завода партиями по 10 штук. По соглашению сторон для экономии времени и ресурсов в торговом салоне подвергаются контролю качества и безопасности только 5 из 10 поступающих автомобилей. Обычно 2 из 10 поступивших машин не удовлетворяют стандартам качества. Х – число машин удовлетворивших контролю качества среди проверенных 5.

21. Производится стрельба по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,8, при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в два раза. Х – число попаданий в цель при двух выстрелах.

22. Имеются 5 ключей, из которых только два подходят к замку. X – число проб при открывании замка (испробованный ключ в дальнейших пробах не участвует).

23. Монета бросается 5 раз. X – число выпадений герба.

24. Дважды брошена игральная кость. X – модуль разности между числом очков при первом бросании и числом очков при втором бросании.

25. В партии из 12 деталей имеется 9 стандартных. Их этой партии наудачу взято 3 детали. X – число стандартных деталей в выборке.

26. Человек находится в начале системы координат. Он подбрасывает монету. При появлении герба делает шаг направо (в положительном направлении оси абсцисс), при появлении цифры – шаг налево. X – абсцисса положения человека после четырех бросаний.

27. Три стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле – 0,5, для второго – 0,6, для третьего – 0,7. X – число попаданий в мишень.

28. Проводятся последовательные испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9. X – число испытанных приборов.

29. Бросают две игральные кости. X – остаток от деления суммы выпавших очков на 4.

30. Нефтеразведывательная компания получила финансирование для проведения 5 нефтеразведок. Вероятность успешной нефтеразведки 0,1. Предположим, что нефтеразведки осуществляют независимые друг от друга разведывательные партии. X – число успешных нефтеразведок.

31. В карточной игре игрок, который извлекает из колоды карт (52 карты) валет или даму, выигрывает 15 очков; тот, который вытащит короля или козырного туза, выигрывает 5 очков. Игрок, который достанет любую другую карту, проигрывает 4 очка. X – число выигранных очков при одном извлечении.

32. Производятся независимые испытания трех приборов. Вероятность отказа каждого прибора 0,5, 0,25, 0,2 соответственно. X – число отказавших приборов.

33. На пути движения автомобиля 5 светофоров. Каждый из них разрешает дальнейшее движение с вероятностью 0,75 или запрещает с вероятностью 0,25. X – число пройденных автомобилем светофоров до первой остановки.

34. Проводится два независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое из чисел 2, 1, 0, –1, -2. X – модуль произведения двух полученных чисел.

35. За некоторый промежуток времени амеба может погибнуть с вероятностью 0,25, выжить с вероятностью 0,25, разделиться на две с вероятностью 0,5. В следующий такой же промежуток времени с каждой амебой независимо от ее «происхождения» происходит то же самое. X – количество амеб к концу второго промежутка времени.

Задание 9

Решить задачу на тему «Дискретная случайная величина»

1. Число телефонных звонков, поступающих в справочное бюро от абонентов между полуднем и часом дня в любой день недели, есть случайная величина X, заданная так:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,2	P_3	0,1	0,1	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_3,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что в справочное бюро поступит больше двух звонков в течение часа (между полуднем и часом дня).

2. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}9$ возможного значения x_1, математическое ожидание M[X] = 2,2, дисперсия D[X] = 0,36. Найти:

а) неизвестные x_1, x_2 и p_2,

б) функцию распределения случайной величины.

3. Число ошибок на страницу, которое делает некоторая машинистка, есть случайная величина X, заданная следующим образом:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,01	0,09	0,30	P_4	0,20	0,10	0,10

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_4,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что ею будет сделано не более 4 ошибок на страницу,

г) определить вероятность того, что машинистка сделает более двух ошибок на страницу.

4. Процент людей, купивших новое средство от головной боли после того, как увидели его рекламу по телевидению, есть случайная величина, заданная так:

x_i	0	10	20	30	40	50
p_i	0,10	P_2	0,35	0,20	0,10	0,05

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_2,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что более 20% людей откликнутся на рекламу.

5. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0,8$ возможного значения x_1, математическое ожидание M[X] = 3,2, дисперсия D[X] = 0,16. Найти:

а) неизвестные x_1, x_2 и p_2,

б) функцию распределения случайной величины.

6. Число продаваемых машин в автомагазине – случайная величина, заданная так:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,1	0,2	0,2	P_5	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_5,

б) найти вероятность того, что завтра число проданных автомобилей будет от 2 до 4 (включая 2 и 4), в) составить функцию распределения числа автомобилей, продаваемых ежедневно.

7. Число иногородних судов, прибывающих ежедневно под погрузку в определенный порт, - случайная величина X, заданная так:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	P_1	0,2	0,4	0,1	0,1	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_1,

б) найти функцию распределения,

в) найти вероятность того, что в заданный день прибудет от 1 до 4 грузовых судов (включая 1 и 4),

г) если в заданный день прибывает больше трех судов, то порт берет на себя ответственность за издержки вследствие необходимости нанимать дополнительных водителей и грузчиков. Чему равна вероятность того, что порт понесет дополнительные расходы в заданный день?

8. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}6$ возможного значения x_1, математическое ожидание M[X] = 3,4, дисперсия D[X] = 0,24. Найти:

а) неизвестные x_1, x_2 и p_2,

б) функцию распределения случайной величины.

9. Число яхт, сходящих со стапелей маленькой верфи, - случайная величина, заданная следующим образом:

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0,20	0,20	0,30	0,10	0,10	P_6	0,05

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_6,

б) чему равна вероятность того, что число яхт, построенных в следующем месяце, будет находиться между 4 и 7 (включая 4 и 7)?

в) найти функцию распределения,

г) оценить вероятность того, что число яхт, построенных в течение месяца, будет не более 6.

10. Число дефектов в продукции, производимой автоматом, - случайная величина X, заданная следующим образом:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	P_4	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_4,

б) найти $P(1 < X < 3)$,

в) построить функцию распределения,

г) определить $P(2 \le X < 4)$.

11. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}4$ возможного значения x_1, математическое ожидание M[X] = 3,6, дисперсия D[X] = 0,24. Найти:

а) неизвестные x_1, x_2 и p_2,

б) функцию распределения случайной величины.

12. Доход от некоторого рискованного бизнеса представляет собой случайную величину с заданным рядом распределения:

x_i	–2000	–1000	0	1000	2000	3000
p_i	0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

Замечание: -2000, -1000 означают убыток.

а) какой наиболее вероятный денежный доход рискованного бизнеса?

б) чему равен на длительный период средний доход от этого бизнеса?

13. Журнал «Деньги» в одном из номеров поместил информацию о том, что возврат инвестиций на российском рынке в 1990г. ожидался более высоким, чем от аналогичных инвестиций на американском рынке. Консультант по инвестициям, советующий вкладывать средства в российский рынок, полагает, что вероятностное распределение возврата инвестиций (% в году) в один из таких проектов имеет вид:

x_i	9	10	11	12	13	14	15
p_i	0,05	0,15	0,30	0,20	0,15	0,10	P_7

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_7,

б) построить функцию распределения,

в) чему равна вероятность того, что возврат инвестиций будет составлять, по крайней мере, 12%.

14. Дискретная случайная величина X может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность $p_1 = 0{,}2$ возможного значения x_1, математическое ожидание M[X] = 3,8, дисперсия D[X] = 0,16. Найти:

а) неизвестные x_1, x_2 и p_2,

б) функцию распределения случайной величины.

15. Распределение случайной величины X – числа бракованных изделий, производимых в течение смены на одном из станков, – задано таблицей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	P_2	0,3	0,1

а) найти неизвестную вероятность p_2;

б) построить функцию распределения;

в) чему равна вероятность того, что число бракованных изделий будет не больше 2?

16. На полиметаллическом руднике из забоя взято 7 проб. Случайная величина X – результаты химических анализов на содержание металла по пробам.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
p_i	0,1	0,3	0,1	P_4	0,2	0,1	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_4,

б) построить функцию распределения,

в) чему равна вероятность $P(3 < X < 6)$.

17. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Случайная величина X – число отказавших при испытании приборов.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,3	0,2	0,1	P_4	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_4,

б) построить функцию распределения,

в) чему равна вероятность того, что число отказавших приборов не менее 2, г) чему равна вероятность того, что число отказавших приборов не более 2,

д) чему равна вероятность того, что число отказавших приборов от 1 до 3?

18. Автоматическая линия может выпускать бракованные изделия даже при нормальной настройке. Переналадка линии производится после второго бракованного изделия. Число изделий изготовленных между двумя переналадками линии, есть случайная величина X, заданная таблицей

x_i	150	200	250	300	350	400
p_i	0,05	P_2	0,3	0,2	0,15	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_2,

б) построить функцию распределения,

в) чему равна вероятность того, что число изготовленных изделий между двумя переналадками больше 300,

г) чему равна вероятность того, что число изготовленных изделий между двумя переналадками меньше 240,

д) чему равна вероятность того, что число изготовленных изделий между двумя переналадками от 220 до 370.

19. Число телефонных звонков, поступающих в справочное бюро от абонентов между полуднем и часом дня в любой день недели, есть случайная величина X, заданная так:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,3	0,2	0,2	P_4	0,1	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_4,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что в справочное бюро поступит больше трех звонков в течение часа между полуднем и часом дня.

20. Процент людей, купивших новое моющее средство после того, как увидели его рекламу по телевидению, есть случайная величина, заданная так:

x_i	0	10	20	30	40	50
p_i	0,10	0,25	0,35	P_4	0,10	0,05

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_4,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что не менее 25% людей откликнутся на рекламу.

21. Случайная величина X – число отобранных всхожих семян для посева – задана таблицей:

x_i	70	80	90	100
p_i	0,15	0,35	P_3	0,25

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_3,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что более 80 семян отобрано для посева.

22. Число прижившихся кустов рассады есть случайная величина X, заданная распределением:

x_i	5	6	7	8	9	10
p_i	P_1	0,3	0,1	0,2	0,1	0,1

а) найти p_1,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что менее 8 кустов рассады приживется.

23. Случайная величина X – число родившихся ягнят, имеющих хорошие наследственные признаки, в некотором хозяйстве - задана следующей таблицей:

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_6,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что число родившихся ягнят, имеющих хорошие наследственные признаки, заключено в интервале от 90 до 108.

24. Число продаваемых машин в автомагазине – случайная величина, заданная так:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,05	0,1	P_3	0,15	0,4	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_3,

б) найти вероятность того, что завтра число проданных автомобилей будет от 2 до 4 (включая 2 и 4),

в) составить функцию распределения числа автомобилей, продаваемых ежедневно.

25. Число иногородних судов, прибывающих ежедневно под погрузку в определенный порт, - случайная величина X, заданная так:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,15	0,35	P_4	0,1	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_4,

б) найти функцию распределения,

в) найти вероятность того, что в заданный день прибудет от 1 до 4 грузовых судов (включая 1 и 4),

г) если в заданный день прибывает больше трех судов, то порт берет на себя ответственность за издержки вследствие необходимости нанимать дополнительных водителей и грузчиков. Чему равна вероятность того, что порт понесет дополнительные расходы в заданный день?

26. Число покупателей, совершивших покупку в магазине, есть случайная величина X, заданная законом распределения:

x_i	25	30	35	40	45	50	55	60
p_i	0,05	0,10	0,15	0,05	0,25	0,05	P_7	0,15

а) найти p_7,

б) составить интегральную функцию распределения,

в) найти вероятность того, что число покупателей, совершивших покупку в магазине, больше 40.

27. Число дефектов в продукции, производимой автоматом, - случайная величина X, заданная следующим образом:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	P_2	0,3	0,2	0,1

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_2,

б) найти $P(2 < X < 4)$,

в) построить функцию распределения,

г) определить $P(1 < X < 4)$.

28. Распределение случайной величины X – числа контрольных работ с оценкой «отлично», извлеченных из пачки, - задано таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	P_2	0,15	0,30	0,20	0,15	0,10

а) найти p_2,

б) построить функцию распределения,

в) определить вероятность того, что число контрольных работ с оценкой «отлично» будет не более 2.

29. Доход от некоторого рискованного бизнеса представляет собой случайную величину с заданным рядом распределения:

x_i	–2000	–1000	0	1000	2000	3000
p_i	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,1

Замечание: –2000, –1000 означают убыток.

а) какой наиболее вероятный денежный доход рискованного бизнеса?

б) чему равен на длительный период средний доход от этого бизнеса?

30. Число автобусов, выезжающих ежедневно на линию по определенному маршруту, есть случайная величина X, заданная следующей таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	P_3	0,3	0,1

а) считая, что задан закон распределения, найти p_3,

б) составить функцию распределения,

в) найти вероятность того, что число автобусов вышедших на линию не менее 2.

31. Число яхт, сходящих со стапелей маленькой верфи, - случайная величина, заданная следующим образом:

x_i	2	3	4	5	6	7	8
p_i	P_1	0,20	0,30	0,10	0,10	0,15	0,05

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины, найти p_1,

б) чему равна вероятность того, что число яхт, построенных в следующем месяце, будет находиться между 2 и 5 (включая 2 и 5)?

в) найти функцию распределения,

г) найти вероятность того, что число яхт, построенных в течение месяца, будет не менее 6.

32. Число проданных кондуктором трамвая проездных билетов – случайная величина X, заданная распределением:

x_i	350	375	400	425	450	475	500
p_i	0,1	0,15	0,25	0,25	P_5	0,05	0,05

а) найти p_5,

б) найти функцию распределения,

в) считая, что стоимость одного билета равна 6 руб. Найти среднюю выручку кондуктора.

33. Процент людей, купивших новое обезболивающее средство после того, как увидели его рекламу по телевидению, есть случайная величина, заданная так:

x_i	0	10	20	30	40	50
p_i	0,10	0,25	0,35	0,20	0,10	P_6

а) предполагая, что задан закон распределения случайной величины X, найти p_6,

б) найти функцию распределения случайной величины X,

в) определить вероятность того, что не менее 30% людей откликнутся на рекламу.

34. Вероятностный прогноз для величины X – процентного изменения стоимости акций по отношению к их текущему курсу в течение 6 месяцев – дан в виде закона распределения:

x_i	5	10	15	20	25	30
p_i	0,1	0,1	0,2	0,3	0,2	P_6

а) найти p_6,

б) построить функцию распределения,

в) найти вероятность того, что курс акций будет более 19%.

35. Пусть ежедневные расходы на обслуживание и рекламу автомобилей в некотором автосалоне составляют в среднем 100 тыс. руб., а число продаж X автомашин в течение дня подчиняется следующему закону распределения:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0,25	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,025	0,025

а) Найти математическое ожидание ежедневной прибыли при цене за машину 150 тыс. руб. (Указание: ежедневная прибыль рассчитывается по формуле: П = (150X – 100) тыс. руб.)

б) построить функцию распределения.

Задание 10

Дана плотность распределения f(x) случайной величины X (см. табл.1).

Найти:

а) параметр γ;

б) математическое ожидание случайной величины X;

в) дисперсию случайной величины X;

г) функцию распределения F(x) случайной величины X;

д) вероятность выполнения неравенства $x_1 < X < x_2$.

Построить графики функций f(x) и F(x).

Таблица 1.1

Индивидуальные данные для задания 10

n	f(x)	параметры	x_1	x_2
1	2	3	4	5
1	$f(x)=\begin{cases}0, & x \le a,\\ \gamma, & a < x \le b,\\ 0, & x > b\end{cases}$	a = –1, b = 3	2	3
8		a = 0, b = 5	–1	4
15		a = 1, b = 3	2	4
22		a = –2, b = 4	–1	5
29		a = –3, b = 3	0	4
2	$f(x)=\begin{cases}0, & x \le a,\\ \gamma x, & a < x \le b,\\ 0, & x > b\end{cases}$	a = 0, b = 2	1	3
9		a = 1, b = 4	2	3
16		a = 3, b = 7	2	4
23		a = 4, b = 5	4	7
30		a = 0, b = 3	0	2
3	$f(x)=\begin{cases}0, & x \le a,\\ \gamma(x-a), & a < x \le b,\\ 0, & x > b\end{cases}$	a = 1, b = 3	1	2
10		a = –1, b = 1	0	2
17		a = 2, b = 6	1	4
24		a = 6, b = 8	2	4
31		a = –5, b = –1	–4	0

Продолжение табл.1.1

1	2	3	4	5
4	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \gamma(x+a), & -a<x\le 0,\\ \gamma(a-x), & 0<x\le a,\\ 0, & x>a\end{cases}$	a = 1	0	2
11		a = 2	–1	1
18		a = 3	–2	3
25		a = 4	–5	0
32		a = 5	2	5
5	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \gamma, & a<x\le (a+b)/2,\\ 2\gamma, & (a+b)/2<x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases}$	a = 1, b = 3	0	2
12		a = 3, b = 7	6	8
19		a = 2, b = 5	3	5
26		a = -2, b = 4	0	1
33		a = -1, b = 5	–1	2
6	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \gamma(x-a), & a<x\le \dfrac{a+b}{2},\\ \gamma\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right), & \dfrac{a+b}{2}<x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases}$	a = 0, b = 1	–1	0,25
13		a = -1, b = 1	0	0,5
20		a = 2, b = 4	3	3,5
27		a = 1, b = 4	2	3
34		a = 10, b = 12	9	11
7	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \gamma\dfrac{b-a}{a}, & 0<x\le a,\\ \gamma(b-x), & a<x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases}$	a = 1, b = 2	0	1,5
14		a = 1, b = 3	0,5	3
21		a = 2, b = 3	1	2
28		a = 0,5, b = 1	0	0,5
35		a = 1, b = 1,5	0,5	3

Задание 11

Дана плотность распределения $f(x)=\gamma e^{-Nx^2+2nx-\frac{n^2}{N}}$ случайной величины X. Найти:

а) математическое ожидание случайное величины X,

б) дисперсию случайной величины X,

в) параметр γ,

г) функцию распределения F(x) случайной величины X,

д) вероятность P(–N < X – M[X] < D[X]),

е) такое d, что $P(-d < X - M[X] < d) = \frac{2n+8-N}{2n+8+10N}$.

Построить графики функций f(x) и F(x).

Задание 12

Решить задачу по теме «Системы массового обслуживания»

1. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 3 контролера. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 20 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 7 мин.
   Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}97$.
2. Приходная касса городского района с временем работы 11 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 220 человек в день. В приходной кассе работают 2 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 4 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.
3. На АЗС установлено 3 колонок для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 15 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 2 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
4. Дежурный по администрации города имеет 5 телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 мин. Определить показатели дежурного администратора как объекта СМО.
5. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 4 контролера. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 22 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 6 мин.

Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0,98$.

6. Приходная касса городского района с временем работы 10 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 220 человек в день. В приходной кассе работают 2 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 3 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.
7. На АЗС установлено 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 3 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 10 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 3 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
8. На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается. Определить среднее количество мест, не занятых автомобилями, и вероятность того, что прибывший автомобиль не найдет на стоянке свободного места.
9. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 5 контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 25 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 5 мин.
   Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0,96$.
10. Приходная касса городского района с временем работы 10 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 300 человек в день. В приходной кассе работают 3 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 4 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.

11. На АЗС установлено 3 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 1 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 20 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 4 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
12. АТС предприятия обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в секунду. Определить характеристики АТС как объекта СМО.
13. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 6 контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 30 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 8 мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}97$.
14. Приходная касса городского района с временем работы 9 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 300 человек в день. В приходной кассе работают 3 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 3 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.
15. На АЗС установлено 3 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 3 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 30 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 3 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
16. В грузовой речной порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает сухогруз в среднем за 8 час. Краны работают круглосуточно. Определить характеристики работы порта как объекта СМО и в случае необходимости дать рекомендации по улучшению его работы.
17. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 6 контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 18

изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 6 мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}98$.

18. Приходная касса городского района с временем работы 8 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 280 человек в день. В приходной кассе работают 4 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 4 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.
19. На АЗС установлено 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 3 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 25 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 2,5 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
20. В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин. Определить основные показатели работы службы «Скорой помощи» как объекта СМО и рассчитать, сколько потребуется телефонных аппаратов, чтобы удовлетворить не менее 90% поступающих вызовов врачей.
21. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 5 контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 28 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 4 мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}96$.
22. Приходная касса городского района с временем работы 9 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 270 человек в день. В приходной кассе работают 4 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 3 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.

23. На АЗС установлено 4 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 20 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 3,5 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
24. Салон – парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет интенсивность 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин. Определить среднюю длину очереди на обслуживание, считая ее неограниченной.
25. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 4 контролера. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 24 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 3 мин.

Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0,98$.

26. Приходная касса городского района с временем работы 8 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 240 человек в день. В приходной кассе работают 3 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 5 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.
27. На АЗС установлено 3 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 4 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 35 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 3 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
28. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за час, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин. Определить вероятность того, что клиент получит отказ, будет обслужен, а также среднее число клиентов, обслуживаемых мастерской в течение 1 часа, и среднее время занятых мастеров.

29. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 2 контролеров. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 14 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 5 мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}97$.
30. Приходная касса городского района с временем работы 11 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 300 человек в день. В приходной кассе работают 3 оператора – кассира. Средняя продолжительность обслуживания одного клиента составляет 5 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.
31. На АЗС установлено 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 15 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 2 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.
32. АТС поселка обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Время переговоров в среднем составляет около 3 мин. Вызовы на станцию поступают в среднем через 2 мин. Определить вероятность того, что заявка получит отказ, среднее число занятых каналов, абсолютную пропускную способность АТС.
33. Контроль готовой продукции фирмы осуществляют 3 контролера. Если изделие поступает на контроль, когда все контролеры заняты проверкой готовых изделий, то оно остается непроверенным. Среднее число изделий, выпускаемых фирмой, составляет 16 изделий в час. Среднее время на проверку одного изделия – 6 мин. Определить вероятность того, что изделие пройдет проверку, насколько загружены контролеры, и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0{,}96$.
34. Приходная касса городского района с временем работы 7 часов в день проводит прием от населения коммунальных услуг и различных платежей в среднем от 200 человек в день. В приходной кассе работают 2 оператора – кассира. Средняя продолжительность об-

служивания одного клиента составляет 2 мин. Определить характеристики работы приходной кассы как объекта СМО.

35. На АЗС установлено 3 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем 20 машин в час. Среднее время заправки одной машины – 2,5 мин. Определить вероятность отказа и среднюю длину очереди.

Список используемой литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1999.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2003.

(7)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Первый проректор –
проректор по учебной работе
_________ Е.А.Кудряшов
«__» августа ______2011г.

Определенный интеграл

Методические указания и индивидуальные
задания к модулю №8

Курск 2011

УДК 510 (083)

Составитель Л.И.Студеникина

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *Е.В.Журавлева*

Определенный интеграл. Методические указания и индивидуальные задания к М-8 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И.Студеникина. Курск, 2011. 32 с. табл. 8. Библиогр.: с. 32

Представлены индивидуальные задания, состоящие из теоретических упражнений и практических заданий к модулю для студентов экономических специальностей, обучающихся по системе интенсивной рейтинговой технологии модульного обучения. Работа содержит примеры выполнения наиболее сложных заданий.

Работа предназначена для студентов экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 50 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Важным фактором изучения вузовского математического курса является самостоятельная работа студентов. Одна из форм организации самостоятельной работы − система рейтинговой интенсивной технологии модульного обучения.

Опыт показывает, что данная система активизирует самостоятельную работу студентов, способствует повышению общего уровня математической культуры. Предлагаемая методическая разработка является одним из блоков в модульно-рейтинговой системе дисциплины «Математика».

Студентам предлагается выполнить в соответствии со своим вариантом 10 задач. Задания №1-3,7 – первого уровня сложности, 4-6, 8 – второго уровня. В 9-ом задании выбрать N как номер группы в потоке. Ряд заданий способствует развитию навыков в применении методологии и методов количественного и качественного анализа с использованием экономико-математического аппарата. Перед решением индивидуальных заданий следует ответить на теоретические вопросы и выполнить упражнения.

В ходе подготовки к защите выполненной работы, следует обратиться к дополнительной литературе, которая приведена в библиографическом списке.

Желаем успеха!

1 Теоретические упражнения

Упражнение 1

Установить последовательность действий при вычислении площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)\big(f(x) \geq 0\big)$ осью Ox и прямыми $x = a,\ x = b$.

1. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i.

2. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей системой точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

3. Вычислим произведение $f(\xi_i)\ \Delta x_i$.

4. Найдем значение функции $f(\xi_i)$.

5. Вычислим предел $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} I_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

6. Составим интегральную сумму $I_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

7. Если существует конечный предел не зависящий от способа деления отрезка на части и выбора точки ξ_i, то его значение численно равно искомой площади криволинейной трапеции.

Упражнение 2

Достаточным условием интегрируемости функции является

____

1) неотрицательность
2) кусочная непрерывность
3) монотонность
4) ограниченность

Упражнение 3

Формула Ньютона-Лейбница имеет вид _____________

1) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$ 2) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + C$ 4) $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x) + C$

Упражнение 4

Некорректно записано свойство определенного интеграла №___

1) $\int\limits_a^b \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

2) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx, A = \text{const}$

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0, \int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, для $\tilde{n} \in [a, b]$

5) Если $f(x) \le g(x)$ на [a,b], то $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$

6) Если на [a, b] выполнено неравенство $m \le f(x) \le M$, где m - наименьшее значение, M – наибольшее значение функции $y = f(x)$ на [a, b], то $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

7) Если f(x) непрерывна на [a, b], то существует $\xi \in [a, b]$ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

8) Определенный интеграл не зависит от переменной интегрирования.

Упражнение 5

Продолжите формулировку теоремы.

Пусть u(x), v(x) – две непрерывно дифференцируемые функции на отрезке [a, b], тогда справедлива формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv =$ ________

1) $uv\Big|_a^b + \int_a^b vdu$ 2) $\int_a^b vdu - uv\Big|_a^b$

3) $uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$ 4) $uv - \int vdu$

Упражнение 6

Выбрать правильное утверждение.

Пусть F(x) – первообразная для f(x) на некотором отрезке [a, b]. Пусть x=φ(t), дифференцируемая монотонная функция на [α; β], причем φ(α)=a, φ(β)=b, тогда $\int_a^b f(x)dx =$ ______

1) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ 2) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t), \varphi'(t))dt$

3) $\int_\alpha^\beta f(t)\cdot\varphi(t)dt$ 4) $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt$

Упражнение 7

Вставьте пропущенные слова в определениях.

а) Функция f(x) определена на промежутке [a, +∞) и интегрируема на каждом конечном отрезке [a, b], где $a < b$.

Выражение $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ называется ________.

Если данный предел ________ и ________, то говорят, что _________ _________ сходится, в противном случае ________.

б) Пусть неограниченная функция f(x) определена на полуинтервале [a, b) и интегрируема на любом отрезке [a, c], где $a < c < b$. Выражение $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$ называется ________ ________ функции f(x) на промежутке [a, b). Если данный предел существует и конечен, то говорят, что ________ интеграл ________ и равен $\lim_{c \to b-0} \int_a^c f(x)dx$; в противном случае он ________.

Упражнение 8

Установить соответствие.

1. Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными параметрически.	а) $\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi$
2. Площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными в декартовых координатах.	б) $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx$
3. Площадь криволинейного сектора в полярных координатах.	в) $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$
4. Длина дуги кривой в декартовых координатах.	г) $\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt$
5. Длина дуги кривой заданной параметрически.	д) $\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}\,dt$
6. Длина дуги кривой в полярных координатах.	е) $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx$
	ж) $\pi\int_a^b y(x)dx$

2. Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.1

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x}+\cos x\right)dx$	2	$\int_1^3 \left(\frac{(x+2)^2}{x^3}+\sin x\right)dx$
3	$\int_1^4 \left(\frac{x^3+x-5}{x}-e^{2x}\right)dx$	4	$\int_1^2 \left(5^{2x}+\frac{x^4+2}{x}\right)dx$
5	$\int_0^1 \left(\frac{3}{4+x^2}+\cos 3x\right)dx$	6	$\int_2^4 \left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{x^3-2}{x}\right)dx$
7	$\int_2^5 \left(\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{x^3-1}{x-1}\right)dx$	8	$\int_0^1 \left(4\sin x+e^{3x+2}+6\right)dx$
9	$\int_1^2 \frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$\int_1^2 \left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$
11	$\int_{-2}^{-1} \left(2\cos(3x-1)+e^{5x}+\frac{1}{2x}\right)dx$	12	$\int_1^2 \left(7^{6x}+\frac{x^4-x+5}{x^2}\right)dx$
13	$\int_1^2 \left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-e^{4x}\right)dx$	14	$\int_1^3 \frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$
15	$\int_0^1 \left(\left(2x^2+1\right)\left(2-x^3\right)+\cos 3x\right)dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
17	$\int_2^3 \left(\frac{x^3-x+2}{x^2-1}+\sin 4x\right)dx$	18	$\int_1^2 \left(\frac{2x^3+x+5}{x}-\sin x\right)dx$

1	2	3	4
19	$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} - e^{2x+1} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$	20	$\int_1^9 \left(\frac{x^{3/2} + x + 5}{x} + \cos 2x\right)dx$
21	$\int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{3x^4 + 3x^2 + 1}{1 + x^2}\,dx$	22	$\int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^2}dx$
23	$\int_1^2 e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx$	24	$\int_0^2 \frac{2^x + 5^x}{10^x}dx$
25	$\int_2^4 e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}\right)dx$	26	$\int_1^3 4x\left(3 + \frac{1}{2x^2}\right)dx$
27	$\int_0^2 \left(2^x e^x + \frac{1}{1 + x^2} + x^3\right)dx$	28	$\int_2^3 \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}dx$
29	$\int_1^2 \frac{x^3 + 3x^2 - x + 5}{x}dx$	30	$\int_1^2 \frac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^3}{x}dx$
31	$\int_0^2 \left(\frac{1}{5 + 4x} + \sin(1 + 2x)\right)dx$	32	$\int_1^4 \left(e^{2x-1} + \frac{1}{4x - 2}\right)dx$
33	$\int_0^1 \left(\sqrt[3]{1 + x} + \frac{6}{1 + 3x}\right)dx$	34	$\int_0^1 \left(\frac{1}{(2 + x)^3} + \cos 2x\right)dx$
35	$\int_1^2 \left(e^{3x-5} + \frac{x^4 + 2x^3 + x + 6}{x}\right)dx$	36	$\int_0^1 \left(5^{1-2x} - \sin(1 - 4x)\right)dx$

Задание 2. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.2

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt{6x+1}}$	2	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{5x+1}}$
3	$\int_2^3 \frac{xdx}{1-\sqrt{4x+1}}$	4	$\int_1^2 \frac{dx}{5+\sqrt{3x-1}}$
5	$\int_2^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$	6	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int_6^7 \frac{2x^2dx}{\sqrt{x-5}}$	8	$\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{\sqrt{x+4}}$
9	$\int_2^3 \frac{2dx}{\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[4]{x^3}}$	10	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+7x}-6}$
11	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+4}dx$	12	$\int_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{6x+1}}$
13	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{3x+1}}$	14	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{7x+1}}$
15	$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	16	$\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$
17	$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{8x+1}}$	18	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
19	$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	20	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$

1	2	3	4
21	$\int\limits_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$	22	$\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$
23	$\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$	24	$\int\limits_2^9 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x-1}}$
25	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{3+\sqrt{9x+1}}$	26	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{4+\sqrt{6x+2}}$
27	$\int\limits_2^3 \frac{dx}{x+3\sqrt{x-1}}$	28	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{6+\sqrt{7x+1}}$
29	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{10+\sqrt{12x+1}}$	30	$\int\limits_2^{10} \frac{dx}{x+6\sqrt{x-1}}$
31	$\int\limits_1^4 \frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$	32	$\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{3-2x}+3}$
33	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{4+\sqrt{11x+5}}$	34	$\int\limits_0^2 \frac{6dx}{12+\sqrt{3x+1}}$
35	$\int\limits_2^5 \frac{dx}{x+4\sqrt{x-1}}$	36	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{2+\sqrt{5x+1}}$

Задание 3. Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Таблица 2.3

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4}$	2	$\int_0^1 (3x+7)^{10}dx$
3	$\int_1^2 \frac{\ln^3 x}{x}dx$	4	$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$
5	$\int_0^1 \frac{\mathrm{tg}^8 x}{\cos^2 x}dx$	6	$\int_1^2 \frac{3x^2dx}{x^3+5}$
7	$\int_0^{1/2} \frac{\arccos^3 x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8	$\int_1^2 \frac{2+\ln x}{x}dx$
9	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$	10	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)}$
11	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}^2 x+x}{1+x^2}dx$	12	$\int_1^3 \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
13	$\int_2^3 \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$	14	$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$
15	$\int_{2,5}^3 (2x-5)^{17}dx$	16	$\int_1^2 \frac{\mathrm{ctg}^{10} x}{\sin^2 x}dx$
17	$\int_1^2 x^2 5^{x^3-1}dx$	18	$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$
19	$\int_0^{1/2} \frac{8x-\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$

1	2	3	4
21	$\int_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}dx$	22	$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$
23	$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$	24	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{1+x^6}$
25	$\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$	26	$\int_0^1 (2x+3)\cos(x^2+3x+1)dx$
27	$\int_1^2 \frac{\ln^2 x + x^3}{x}dx$	28	$\int_{-1}^0 \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$
29	$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$	30	$\int_{-1}^0 \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$
31	$\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$	32	$\int_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5dx}{\sqrt{x^6+1}}$
33	$\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$	34	$\int_1^e \frac{\sin\ln x}{x}dx$
35	$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$	36	$\int_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12ctg3xdx$

Задание 4. Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям.

Таблица 2.4

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int_{-2}^{0}\left(x^2+5x+6\right)\cos 2x dx$	2	$\int_{-3}^{0}(x+3)\sin 4x dx$
3	$\int_{1}^{2} xe^{x}dx$	4	$\int_{-1}^{0}\left(x^2+2x+1\right)\sin 3x dx$
5	$\int_{1}^{2}(4-3x)e^{-3x}dx$	6	$\int_{0}^{1}(4x+3)\cos 2x dx$
7	$\int_{1}^{2}\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx$	8	$\int_{0}^{1}(3x+4)e^{3x}dx$
9	$\int_{1}^{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}dx$	10	$\int_{1}^{3}\ln(2x+3)dx$
11	$\int_{0}^{\pi}(6x-10)\sin 2x dx$	12	$\int_{0}^{1}(x+1)\ln(x+1)dx$
13	$\int_{-1}^{0}\arcsin(x+1)dx$	14	$\int_{0}^{1}\ln\left(x^2+4\right)dx$
15	$\int_{0}^{2}(1-6x)\cos x dx$	16	$\int_{0}^{\frac{1}{9}}\arccos(9x-1)dx$
17	$\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\cos^2 x}$	18	$\int_{1}^{2}\frac{xdx}{\sin^2 x}$
19	$\int_{2}^{4}x\sin^2 x dx$	20	$\int_{1}^{3}\operatorname{arcctg}2x dx$

1	2	3	4
21	$\int\limits_{0}^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}$	22	$\int\limits_{1/2}^{1} \arcsin(1-x)dx$
23	$\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}dx$	24	$\int\limits_{-1}^{0} x\ln(1-x)dx$
25	$\int\limits_{1}^{2} \ln(4+5x)dx$	26	$\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx$
27	$\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$	28	$\int\limits_{0}^{\pi/2} (x+2)\cos\frac{x}{2}dx$
29	$\int\limits_{2}^{3} x\ln(x-1)dx$	30	$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2xdx$
31	$\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos xdx$	32	$\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}dx$
33	$\int\limits_{-2}^{-1} \ln(1-4x)dx$	34	$\int\limits_{0}^{1} (1-4x)\sin xdx$
35	$\int\limits_{0}^{\pi} (2x+6)\cos xdx$	36	$\int\limits_{3}^{4} (x-3)\sin 2xdx$

Задание 5 . Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

Таблица 2.5

№	$\int\limits_a^b f(x)dx$	№	$\int\limits_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int\limits_{-1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+2}$	2	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$
3	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$	4	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}}$
5	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}dx$	6	$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+6}$
7	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	8	$\int\limits_{5/8}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+4}$
9	$\int\limits_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+10}$	10	$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x-6}$
11	$\int\limits_{-0.2}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	12	$\int\limits_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
13	$\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)}$	14	$\int\limits_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$
15	$\int\limits_{11/4}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-11x+2}$	16	$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x+2}$
17	$\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{3x^2-12x+3}$	18	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\left(6x^2-5x+1\right)\ln\frac{3}{4}}$
19	$\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2-5x+6}$	20	$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3x}$

1	2	3	4
21	$\int\limits_{1/4}^{+\infty}\frac{dx}{2x-3-4x^2}$	22	$\int\limits_{5}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2-8x-3}$
23	$\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{8-2x-x^2}$	24	$\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{dx}{5x-x^2-6}$
25	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+25}$	26	$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-8x+30}$
27	$\int\limits_{3}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2-9x+6}$	28	$\int\limits_{4}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-3x-2}$
29	$\int\limits_{1.5}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-6x+1}$	30	$\int\limits_{3/4}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-3x+2}$
31	$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-3x+1}$	32	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{5x^2-10x+25}$
33	$\int\limits_{-3/4}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+3x+6}$	34	$\int\limits_{-5/6}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2+5x+1}$
35	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+3}$	36	$\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{4x^2-2x+7}$

Задание 6. Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся

Таблица 2.6

№	$\int\limits_a^b f(x)dx$	№	$\int\limits_a^b f(x)dx$
1	2	3	4
1	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$	2	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
3	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	4	$\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$
5	$\int\limits_{-1/3}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	6	$\int\limits_{3/4}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7	$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$	8	$\int\limits_{-3/4}^0 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
9	$\int\limits_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	10	$\int\limits_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
11	$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$	12	$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-2)^3}$
13	$\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{(1-3x)^2}$	14	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{(x+1)^2}$	16	$\int\limits_{-1/5}^0 \frac{dx}{(1+5x)^2}$
17	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	18	$\int\limits_2^4 \frac{2dx}{(2-x)^2}$

1	2	3	4
19	$\int_{0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	20	$\int_{3/2}^{4}\frac{dx}{(2x-3)^2}$
21	$\int_{1/3}^{1}\frac{dx}{(1-3x)^2}$	22	$\int_{2}^{3}\frac{dx}{\sqrt[3]{2-x}}$
23	$\int_{-6}^{0}\frac{dx}{(x+6)^2}$	24	$\int_{1/4}^{1}\frac{dx}{(1-4x)^3}$
25	$\int_{1}^{5}\frac{dx}{\sqrt{5-x}}$	26	$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$
27	$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{x+1}}$	28	$\int_{0}^{2}\frac{dx}{(2-x)^3}$
29	$\int_{0}^{4}\frac{dx}{(x-4)^5}$	30	$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
31	$\int_{1}^{6}\frac{dx}{(x-6)^{1/4}}$	32	$\int_{0}^{3}\frac{5dx}{\sqrt{3-x}}$
33	$\int_{0}^{7}\frac{dx}{(x-7)^{1/5}}$	34	$\int_{0}^{2}\frac{dx}{(2-x)^2}$
35	$\int_{1/3}^{1}\frac{dx}{\sqrt[7]{1-3x}}$	36	$\int_{-3/5}^{0}\frac{dx}{(5x+3)^2}$

Задание 7. Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь

Таблица 2.7

№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$	№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$
1	2	3	4
1	$y=x^2-4x+3$ $y=x+3$	2	$y=x^2-8x+7$ $y=-5x+5$
3	$y=x^2+4x$ $y=x+4$	4	$y=9x^2+6x+1$ $y=-x+1$
5	$y=(x-2)^2$ $y=4x-8$	6	$y=-(x+3)(x-2)$ $y=x-2$
7	$y=3x-x^2$ $y=-x$	8	$y=2x^2-4x+1$ $y=2x-3$
9	$y=-x^2-8x+1$ $y=-x-2$	10	$y=x^2-2x$ $y=\frac{1}{2}x+5$
11	$y=(x+1)(x-4)$ $y=5x-4$	12	$y=x^2+6x+1$ $y=2x+1$
13	$y=2x^2+8x+1$ $y=6x+1$	14	$y=(x-1)^2$ $y=x+1$
15	$y=-x^2+x+5$ $y=-2x+7$	16	$y=x^2+3x+1$ $y=4x+1$
17	$y=-2x^2+5x-3$ $y=-3x-3$	18	$y=\frac{1}{2}x^2+2x+1$ $y=4x+1$
19	$y=(x+5)(x-1)$ $y=3.5x-3.5$	20	$y=x^2+x+6$ $y=4x+6$
21	$y=-x^2+2x-1$ $y=-2x+2$	22	$y=2x^2-x+5$ $y=-5x+11$

1	2	3	4
23	$y = 3x^2 + x - 4$ $y = 10x - 10$	24	$y = 0.5x^2 - x + 2$ $y = 2x + 2$
25	$y = x^2 + 8x - 3$ $y = 11x - 5$	26	$y = x^2 + 4x - 1$ $y = 7x - 3$
27	$y = -x^2 + 6x - 2$ $y = 3x$	28	$y = x^2 + 9x + 4$ $y = 12x + 2$
29	$y = -x^2 + x + 10$ $y = -2x + 12$	30	$y = x^2 + 6x + 1$ $y = 9x - 1$
31	$y = x^2 - 7x + 4$ $y = -4x + 2$	32	$y = x^2 + 5x - 1$ $y = 8x - 3$
33	$y = -x^2 + 3x - 2$ $y = 2x - 2$	34	$y = -x^2 + x + 1$ $y = -2x + 3$
35	$y = x^2 - x - 6$ $y = 2x - 8$	36	$y = x^2 + 2x + 7$ $y = 5x + 5$

Задание 8. Вычислить длины дуг кривых

Таблица 2.8

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	2	3	4
1	$y=2e^{\frac{x}{2}}$, $\ln 3 \le x \le \ln 8$	2	$y=\frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$
3	$\begin{cases} x=\frac{1}{6}t^6 \\ y=2-\frac{t^4}{4} \end{cases}$ Между точками пересечения с осями Ox,Oy	4	$2y-x^2+3=0$ Между точками пересечения с осями Ox
5	$y=e^x$, $0 \le x \le 1$	6	$y=e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$
7	$\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$	8	$y=\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, $0 \le x \le 9$
9	$y=\frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 2$	10	$y=4-\frac{x^2}{2}$, $y \ge 0$
11	$y^2=\frac{2}{3}(x-1)^3$, $0 \le x \le 5$	12	$y=\int\limits_0^x \sqrt{\cos 2t}dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
13	$y=\int\limits_0^x \sqrt{\sin 2t}dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$	14	$\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
15	$\begin{cases} x=a\cos^5 t \\ y=a\sin^5 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	16	$x=a\cos t$ $y=-2a\ln\sin t$, от т.А (0,0) до В (x_0, y)
17	$\rho=7(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	18	$\rho=2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
19	$\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases}$, $\pi \le t \le 2\pi$	20	$\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$

1	2	3	4
21	$\begin{cases} x = e^{t}(\cos t + \sin t) \\ y = e^{t}(\cos t - \sin t) \end{cases}$ $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$	22	$\begin{cases} x = 4(2\cos t - \cos 2t) \\ y = 4(2\sin - \sin 2t) \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$
23	$\rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	24	$\rho = \sqrt{2}e^{\varphi}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
25	$\rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, \ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	26	$\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$
27	$\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$	28	$\rho = 1 - \sin\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le -\frac{\pi}{6}$
29	$\rho = 3(1 + \sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le 0$	30	$\rho = 5(1 - \cos\varphi), -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le 0$
31	$\rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$	32	$\rho = 2(1 - \cos\varphi), \ -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$
33	$\rho = 4(1 - \sin\varphi), 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	34	$\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 + \cos t) \end{cases}, \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$
35	$\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$	36	$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^{3}}, \ \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$

Задание 9.

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + nx - N$ выраженных в денежных единицах, если объём продукции **x** меняется от **0** до **N** единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

N=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Задание 10.

Для **n**=1 до 15

Определить объём продукции, произведённой рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \dfrac{k}{at + b} + c$.

Таблица.2.9

№	k	a	b	c
1	k=1	a=3	b=2	c=2
2	k=1	a=4	b=2	c=3
3	k=2	a=3	b=3	c=4
4	k=2	a=4	b=3	c=5
5	k=3	a=5	b=2	c=3
6	k=3	a=1	b=2	c=6
7	k=4	a=2	b=1	c=3
8	k=4	a=3	b=1	c=4
9	k=4	a=4	b=1	c=5
10	k=5	a=2	b=2	c=1
11	k=5	a=3	b=4	c=2
12	k=6	a=1	b=2	c=3
13	k=6	a=2	b=4	c=5
14	k=7	a=3	b=2	c=1
15	k=7	a=3	b=4	c=3

Для **n**= 16 до 35

Изменение производительности производства с течением времени от начала внедрения нового технологического процесса задается функцией $z = a - b^{-\alpha t + \beta}$, где t − время в единицах. Найти объём продукции, произведённой за первый месяц, считая от начала внедрения рассматриваемого технологического процесса.

Таблица 2.10

№	a	b	α	β
16	a=27	b=2	$\alpha = 0,3$	$\beta = 4$
17	a=35	b=3	$\alpha = 0,1$	$\beta=3$
18	a=31	b=2	$\alpha = 0,4$	$\beta=3$
19	a=29	b=4	$\alpha = 0,2$	$\beta=2$
20	a=19	b=2	$\alpha = 0,1$	$\beta=4$
21	a=31	b=5	$\alpha = 0,6$	$\beta=2$
22	a=18	b=2	$\alpha = 0,4$	$\beta=4$
23	a=30	b=2	$\alpha = 0,4$	$\beta=4$
24	a=32	b=3	$\alpha = 0,1$	$\beta=3$
25	a=25	b=5	$\alpha = 0,5$	$\beta=2$
26	a=27	b=3	$\alpha = 0,5$	$\beta=3$
27	a=19	b=4	$\alpha = 1$	$\beta=3$
28	a=36	b=6	$\alpha = -0,5$	$\beta=2$
29	a=49	b=7	$\alpha = -1$	$\beta=4$
30	a=32	b=2	$\alpha = -0,5$	$\beta=4$
31	a=31	b=2	$\alpha = -0,5$	$\beta=2$
32	a=30	b=4	$\alpha = -0,5$	$\beta=2$
33	a=41	b=9	$\alpha = -0,5$	$\beta=3$
34	a=27	b=4	$\alpha = -0,5$	$\beta=4$
35	a=30	b=9	$\alpha = -0,5$	$\beta=3$

3. Образцы выполнения заданий

3.1. Пример 1

Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1+x$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $t = 1$; при $x = 15$, $15 = t^2 - 1$; $t^2 = 16$, $t = 4$.

Получим

$$\int\limits_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = \int\limits_1^4 (2t^2-2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = 36.$$

3.2. Пример 2

Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

Решение. Пусть $\ln x = t$, тогда $d\ln x = dt$, $\frac{1}{x}dx = dt$. При $x = 1$, $\ln 1 = t$, $t = 0$; при $x = e$, $\ln e = t$, $t = 1$. Получим $\int\limits_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$.

3.3. Пример 3

Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \\ v_1 = -\cos x \end{vmatrix} = 4\pi^2 \sin 2\pi - 0 - 2x \cdot (-\cos x)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cos 2\pi - 0 - 2 \sin x\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

3.4. Пример 4

Вычислить несобственные интегралы, если они сходится.

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$; в) $\int_0^3 \frac{dx}{(-3+x)^2}$.

Решение.

а)

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5} = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{dx}{x^2 + 2\cdot\frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14.5}$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{d(x+3.5)}{(x+3.5)^2 + \frac{9}{4}} = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+3.5}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^a =$$

$$= \frac{2}{3} \lim_{a\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x+7}{3}\Bigg|_1^a = \frac{2}{3} \lim_{a\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a+7}{3} - \operatorname{arctg}3\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}3\right).$$

б)

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^1 x^{-1/4}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{3/4}}{3/4}\right|_{0+\varepsilon}^1 = \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left. x^{3/4}\right|_{0+\varepsilon}^1 = \frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}.$$

в)

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(-3+x)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{3-\varepsilon}\frac{dx}{(-3+x)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{3-\varepsilon}(-3+x)^{-2}dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(-3+x)^{-1}}{-1}\right|_0^{3-\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{x-3}\right|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{1}{3-x}\right|_0^{3-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{3-3+\varepsilon} - \frac{1}{3}\right) = +\infty, \text{ò.å. íåñîáñòâåí íûé èíòåãðàë ðàñõîäèòñÿ}.$$

3.5. Пример 5

Вычислить длины дуг кривых.

а) $y = \dfrac{x^2}{2}$ îò $õ = 0$ äî $õ = 1$

Решение. Длина дуги кривой находится по формуле $L = \int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}dx.$

В нашем случае $y' = x$, получим

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+õ^2}dx = \left.\left(\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)\right|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) -$$

$$-0 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

б) $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - t \\ y = t^2 + 2,\ 0 \le t \le 3 \end{cases}$

Решение. При параметрическом задании кривой $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

длина дуги вычисляется по формуле $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$

В нашем случае $x' = t^2 - 1; y' = 2t,$ тогда

$$L = \int\limits_0^3 \sqrt{(t^2 - 1)^2 + 4t^2}\,dt = \int\limits_0^3 \sqrt{t^4 - 2t^2 + 1 + 4t^2}\,dt =$$

$$= \int\limits_0^3 \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\,dt = \int\limits_0^3 \sqrt{(t^2 + 1)^2}\,dt = \int\limits_0^3 (t^2 + 1)dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{3^3}{3} + 3 = 12.$$

в) Вычислить длину дуги кривой $\rho = \varphi^2$ îò $\varphi = 0$ äî $\varphi = \pi.$

Решение.

$$L = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

$\rho' = 2\varphi$, значит,

$$L = \int\limits_0^\pi \sqrt{\varphi^4 + 4\varphi^2}\,d\varphi = \int\limits_0^\pi \varphi\sqrt{\varphi^2 + 4}\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sqrt{\varphi^2 + 4}\,d(\varphi^2 + 4) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\varphi^2 + 4)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^\pi = \frac{(\varphi^2 + 4)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{3}((\pi^4 + 4)^{3/2} - 4^{3/2}) =$$

$$= \frac{1}{3}((\pi^2 + 4)^{3/2} - 8).$$

3.6. Пример 6

Найти среднее значение издержек $K(x) = 3x^2 + nx - N$ выраженных в денежных единицах, если объём продукции **x** меняется от **0** до **N** единиц. Указать объём продукции, при котором издержки принимают среднее значение.

$n = 5,\ N = 9$.

Решение. Согласно теореме о среднем значении

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Называется средним значением функции на отрезке $[a,b]$.

В нашем случае

$$f(\xi) = \frac{1}{9}\int_0^9 (3x^2 + 5x + 9)\,dx = \frac{1}{9}\left(\frac{3x^3}{3} + \frac{5x^2}{x} + 9x\right)\Bigg|_0^9 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(x^3 + 2{,}5x^2 + 9x\right)\Bigg|_0^9 = \frac{1}{9}\left(9^3 + 2{,}5\cdot 9^2 + 9\cdot 9\right) = 112{,}5$$

Определим, при каком объеме издержки принимают это значение.

Для этого надо решить уравнение

$$3x^2 + 5x + 9 = 112{,}5$$

$$3x^2 + 5x - 103{,}5 = 0$$

$$D = 25 - 4\cdot 3\cdot(-103{,}5) = 1267$$

$$x_1 = -6{,}8, \quad x_2 = 5{,}1$$

Учтем, что объем продукции не может быть отрицательным, получим

$$\xi = x = 5{,}1$$

3.7. Пример 7

Для $n = 1$ до 15

Определить объём продукции, произведённой рабочим за второй час рабочего дня, если производительность труда характеризуется функцией $f(t) = \dfrac{k}{at+b} + c$.

Решение.

Пусть $k = 7,\ à = 5,\ b = 1,\ ñ = 2$.

Если $f(t)$ характеризует производительность труда рабочего в зависимости от времени t, то объем продукции, произведенным рабочим за промежуток времени от t_1 до t_2 будет выражаться формулой

$$V = \int_{t_2}^{t_2} f(t)dt.$$

В нашем случае

$$V = \int_1^2 \left(\frac{7}{5t+1} + 2 \right) dt = \left(\frac{7}{5} \ln|5t+1| + 2t \right) \Bigg|_1^2 = \frac{7}{5}\ln 11 + 4 - \frac{7}{5}\ln 6 - 2 =$$

$$= \frac{7}{5}\ln\frac{11}{6} + 2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Высшая математика для экономистов: Практикум / под ред. проф. Н.Ш.Кремера. 2-е изд. - М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. М.: 1978. 575 с.
3. Общий курс математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова.- М.: ИНФРА-М, 2000.-656 с.(Высшее образование).
4. Сборник заданий по высшей математике. Учебное пособие / Кузнецов Л.А.. − Спб : изд. «Лань», 2008 . 240с.
   Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. М.: Дело, 2000.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
___________ О.Г. Локтионова
«___» ___________ 2014 г.

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1
для студентов технических специальностей

Курск 2014

УДК 514.12

Составители: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики

Н.А. Моргунова

Функции нескольких переменных: Индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина. Курск, 2014. 15 с.

Содержит теоретические упражнения, практические индивидуальные задания и контрольные вопросы, а также примеры решения индивидуальных заданий. Работа предназначена для студентов очного отделения технических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ___________. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

1. Теоретические упражнения

1. Для функции двух и трёх переменных введите понятие графика функции, линии и поверхности уровня. Найдите поверхности уровня функций и изобразите их графически:
а) $u = 3x - 2y + 4z$;
б) $u = x^2 + y^2 + z^2$;
в) $u = x^2 + y^2 - z^2$.
2. Введите определение предела функции нескольких переменных. Вычислите:
а) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to -\infty}} \left(\dfrac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$;
б) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to a}} \dfrac{\sin(xy)}{x}$.
3. Сформулируйте свойства непрерывных функций двух переменных, заданных в замкнутой области. Одно из них докажите.
4. В чём заключается геометрический смысл частных производных функции двух переменных? Проиллюстрируйте.
5. Применение полного дифференциала к приближённым вычислениям. Вычислите с использованием данной теории $1{,}02^3 \cdot 0{,}97^2$.
6. Дана функция $u = \arcsin \dfrac{x}{y}$. Исследуйте её на непрерывность в области определения D, является ли она равномерно непрерывной в области D?
7. Выведите необходимое условие дифференцируемости функции нескольких переменных.
8. Выведите формулу производной сложной функции:
а) в случае одной независимой переменной;
б) в случае нескольких независимых переменных.
9. Введите понятие дифференциала функции многих переменных. Для функции двух переменных выведите формулу для вычисления дифференциала n-го порядка.
10. Сформулируйте теорему об инвариантности формы полного дифференциала.

11. Выведите формулу для вычисления производной функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением $F(x, y(x)) = 0$, через частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$.

12. Выведите формулы для вычисления частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции, заданной неявно $\Phi(x, y, z(x, y)) = 0$.

13. Выведите уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности.

14. Сформулируйте теорему о смешанных частных производных. Рассмотрите случай производных 2-го порядка от функций 2 переменных.

15. Выведите формулу для нахождения производной по направлению от функций 2-х переменных.

16. Запишите формулу Тейлора для функций 2-х переменных.

17. Докажите необходимые условия экстремума функции 2-х переменных.

18. Опишите достаточные условия экстремума функции 2-х переменных.

19. Какие задачи называются задачами отыскания условного экстремума функции $z = f(x, y)$. Экстремум функции Лагранжа.

20. Найдите условные экстремумы функций:

а) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ при $x + y + 3 = 0$;

б) $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2}$;

в) $z = 4x + 3y$ при $x^2 + y^2 = 4$.

21. Сформулируйте определение оператора Лапласа. Запишите уравнение теплопроводности в пространстве.

22. Рассмотрите частные случаи уравнения теплопроводности в пространстве: уравнение теплопроводности в стержне, уравнение теплопроводности на плоскости.

23.Сформулируйте определение гармонической функции $u(x, y, z)$. Приведите пример.

24. Докажите, что функция $z = f(x,y)$, удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$:

а) $z = \ln\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2}$;

б) $z = f\left(\frac{x}{x^2+y^2}; \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

2. Практические задания

2.1 Задание 1

Найти область определения функции $z = f(x,y)$. Задания представлены в табл.2.1.

Таблица 2.1

№ пп	Функция	№ пп	Функция
1	2	3	4
1	$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$	16	$z = \arcsin\frac{x}{y}$
2	$z = \arcsin(x+y)$	17	$z = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$
3	$z = \ln(-x+y)$	18	$z = \arccos\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{25}$
4	$z = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$	19	$z = \sqrt{x^2+y^2-1} - \lg(25-x^2-y^2)$
5	$z = \sqrt{25x^2+25y^2-49}$	20	$z = \sqrt{x^2+y^2-49}$
6	$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$	21	$z = \frac{1}{\log_5(81-x^2-y^2)}$
7	$z = \sqrt{x+y}$	22	$z = \sqrt{(x^2+y^2-25)(49-x^2-y^2)}$
8	$z = \arcsin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	23	$z = \sqrt{1+y-x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-y-x^2}}$
9	$z = \frac{1}{\ln(1-x^2-y^2)}$	24	$z = \frac{1}{\log_4(1-x^2-y^2)} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-64}}$
10	$z = \sqrt{y^2-1} + \sqrt{1-x^2}$	25	$z = \sqrt{36x^2-y^2-4}$
11	$z = \sqrt{xy}$	26	$z = \arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3	4
12	$z=\sqrt{(x^2+y^2-4)(9-x^2-y^2)}$	27	$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$
13	$z=\log_3(x^2+y^2-1)+\sqrt{16-x^2-y^2}$	28	$z=\dfrac{1}{\log_7(36-x^2-y^2)}$
14	$z=\arccos\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$	29	$z=\ln(-y+x)$
15	$z=\sqrt{1+y-x^2}-\sqrt{1-y-x^2}$	30	$z=\sqrt{(x^2+y^2-4)(25-x^2-y^2)}$

2.2 Задание 2

Определить вид линии уровня функции. Задания представлены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

№ пп	Функция	№ пп	Функция
1	2	3	4
1	$z=e^{xy}$	16	$z=\dfrac{x}{y}$
2	$z=\ln\sqrt{\dfrac{y}{x}}$	17	$z=x+y+3$
3	$z=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$	18	$z=x^2+y^2+64$
4	$z=2x+y$	19	$z=x^2-y^2$
5	$z=x^2-y^2-25$	20	$z=\sqrt{xy}$
6	$z=(1+x+y)^2$	21	$z=\dfrac{x}{2y}$
7	$z=arctg\,\dfrac{y}{x}$	22	$z=\sqrt{\dfrac{x}{3y}}$
8	$z=e^{x^2-2x+y^2}$	23	$z=\dfrac{2}{x^2+y^2}$
9	$z=\cos\left(\pi\cdot\left(\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}\right)\right)$	24	$z=\sqrt{7x-2y^2}$
10	$z=\sqrt{5x-y^2}$	25	$z=x^2-y^2-81$
11	$z=\arccos\dfrac{6y}{x}$	26	$z=\log_2\sqrt{\dfrac{y}{x}}$
12	$z=5^{\sqrt{x^2-y^2}}$	27	$z=4x+y+1$

Продолжение таблицы 2.2

1	2	3	4
13	$z=\dfrac{7}{x^2+y^2}$	28	$z=3^{\sqrt{x^2-y^2}}$
14	$z=\sqrt{8x-y^2}$	29	$z=\arccos\dfrac{8y}{x}$
15	$z=5x+3y$	30	$z=\sin\left(\pi\cdot\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{49}\right)\right)$

2.3 Задание 3

Данные (f(x,y), x_0, y_0) к заданиям 2.3.1÷2.3.5 взять по своему номеру из табл. 2.3.

2.3.1 Для функции z = f(x,y) найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

2.3.2 Найти полный дифференциал функции z = f(x,y).

2.3.3 Найти градиент функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

2.3.4 Найти производную функции z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$ по направлению вектора (1; 2).

2.3.5 Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности z = f(x,y) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Таблица 2.3

№ пп	Функция	x_0	y_0	№ пп	Функция	x_0	y_0
1	2	3	4	5	6	7	8
1	$z=\ln\left(y^3-3e^x\right)$	0	3	16	$z=\sin\left(x^2-6y\right)$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$	$\dfrac{\pi}{24}$
2	$z=\ln(xy-y)$	4	2	17	$z=\cos\left(x^2-y^3\right)$	0	$\dfrac{\sqrt{3\pi}}{3}$
3	$z=\arcsin\sqrt{x\cdot y}$	1	0,5	18	$z=e^{3x^2+y^2}$	5	4
4	$z=\arcsin x\cdot\cos 6y^2$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2\pi}}{6}$	19	$z=tg(3x)\cdot\cos\left(5y^2\right)$	$\dfrac{\pi}{9}$	$\dfrac{\sqrt{10\pi}}{10}$

Продолжение таблицы 2.3

1	2	3	4	5	6	7	8
5	$z=e^{-2x}\cdot\sin 7y$	3	$\frac{\pi}{14}$	20	$z=tg\,\frac{y^2}{x}$	6	$\sqrt{5\pi}$
6	$z=\sqrt{2x^2+5y^4}$	2	–3	21	$z=tg\left(x^2y^5\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1
7	$z=e^{x^2-3y^2}$	–1	2	22	$z=arctg\sqrt{xy}$	–1	–1
8	$z=\cos\left(xy^3\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	1	23	$z=x^3\cdot 6^y\cdot\sin 3$	3	2
9	$z=\ln\left(x^2-2y^4\right)$	7	2	24	$z=\ln\left(x^3+4y\right)$	e	0
10	$z=arctg\left(x^3y\right)$	2	$\sqrt{3}$	25	$z=\ln\sqrt{x^3y}$	1	e^2
11	$z=\sin\sqrt{\frac{y}{x^5}}$	2	$\frac{8\pi^2}{9}$	26	$z=\arcsin x^3\cdot\sin 4y$	1	$\frac{\pi}{8}$
12	$z=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{xy}\right)$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	27	$z=e^{5x+3y^2-6}$	7	0
13	$z=5^{3x+4y}$	–3	5	28	$z=\arccos\sqrt{xy}$	3	0,5
14	$z=\cos 3x\cdot\sin 6y$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{36}$	29	$z=\cos\sqrt{\frac{x}{y^5}}$	$\frac{\pi^2}{16}$	1
15	$z=\log_3\left(y+xy^3\right)$	26	1	30	$z=\lg\left(3x+y^3\right)$	0	10

2.4 Задание 4

Для функции $z=N\cdot x^n+\left(N+8\right)\cdot y^m+\left(2N-3\right)\cdot x^{m+1}\cdot\ln y$ найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

где m – число гласных букв в фамилии,
n – число согласных букв в фамилии,
N – номер варианта по списку.

2.5 Задание 5

Исследовать на локальный экстремум функцию

$$z=(3+P_3)\cdot\frac{1}{x}+(P_4+1)\cdot\frac{x}{y}+2\cdot P_5\cdot y,$$

где P_3, P_4, P_5 – остатки от деления Вашего номера на числа 3, 4, 5, соответственно.

3. Примеры решения задач

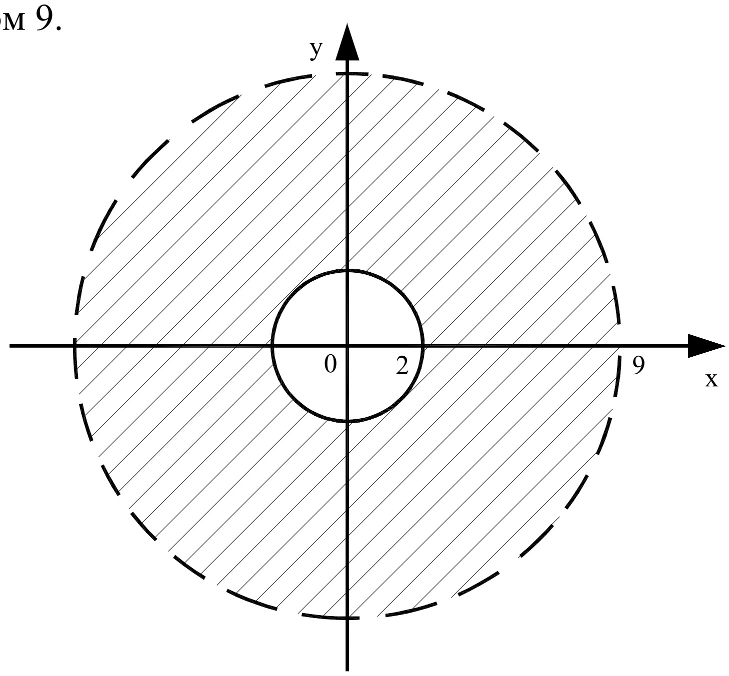
3.1 Решение задания 1

Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2-4}-\lg\left(81-x^2-y^2\right)$.

Решение:

$$D(z):\begin{cases}x^2+y^2-4\ge 0,\\ 81-x^2-y^2>0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\ge 4,\\ x^2+y^2<81.\end{cases}$$

Первое неравенство системы представляет собой внешнюю область окружности с центром в точке (0;0) и радиусом 2, включая границу. Второе неравенство системы представляет собой круг без границы, с центром в точке (0;0) и радиусом 9.



3.2 Решение задания 2

Определить вид линии уровня функции $z=\ln\sqrt{xy}$.

Решение:

$$D(z):\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ y>0;\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Линии уровня $z=C$ определяются уравнением $\ln\sqrt{xy}=C\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{xy} = e^C \;\; \Leftrightarrow xy = e^{2C} \Leftrightarrow y = \dfrac{e^{2C}}{x}$. Это гипербола, расположенная в первой и третьей координатных четвертях.

3.3 Решение задания 3

3.3.1 Для функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

3.3.2 Найти полный дифференциал функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

3.3.3 Найти градиент функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

3.3.4 Найти производную функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y =25 по направлению вектора (1; 2).

3.3.5 Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \cos x \cdot \log_5 y$ в точке x =$\dfrac{\pi}{6}$, y = 25.

Решение:

3.3.1 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \log_5 y \cdot (-\sin x) = -\log_5 y \cdot \sin x \Big|_{(\frac{\pi}{6};25)} = -\log_5 25 \cdot \sin\dfrac{\pi}{6} = -2 \cdot \dfrac{1}{2} = -1;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5}\Bigg|_{(\frac{\pi}{6};25)} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}.$$

3.3.2 $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot dy = -1 \cdot dx + \dfrac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot dy.$

3.3.3 $gradz = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \vec{i} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \vec{j} = -1 \cdot \vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot \vec{j}.$

3.3.4 $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \cos\alpha + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(x_0;\, y_0)} \cdot \cos\beta;$

$$\cos\alpha = \frac{x_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\beta = \frac{y_l}{\sqrt{x_l^2 + y_l^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{15}}{250 \cdot \ln 5}.$$

3.3.5 Уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

$$(x - x_0) \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0;\, y_0)} + (y - y_0) \cdot \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0;\, y_0)} = z - z_0.$$

Вычислим предварительно z_0, подставив координаты $(x_0; y_0)$ в формулу функции.

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \log_5 25 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}\ .$$

То есть, имеем $\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot (-1) + (y - 25) \cdot \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} = z - \sqrt{3};$

$$-x + \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5} \cdot y - z - \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \ln 5} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6} = 0.$$

Уравнение нормали к поверхности имеет вид:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0;\, y_0)}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0;\, y_0)}} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

$$\frac{x - \frac{\pi}{6}}{-1} = \frac{y - 25}{\frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}} = \frac{z - \sqrt{3}}{-1};$$

$$\frac{6x - \pi}{-6} = \frac{50 \cdot \ln 5 \cdot (y - 25)}{\sqrt{3}} = \frac{z - \sqrt{3}}{-1}.$$

3.4 Решение задания 4

Для функции $z = 42 \cdot x^5 + 50 \cdot y^3 + 81 \cdot x^4 \cdot \ln y$ найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=210\cdot x^4+324\cdot x^3\cdot\ln y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=150\cdot y^2+\frac{81\cdot x^4}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(210\cdot x^4+324\cdot x^3\cdot\ln y\right)'_x=840\cdot x^3+972\cdot x^2\cdot\ln y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(150\cdot y^2+\frac{81\cdot x^4}{y}\right)'_y=300\cdot y-\frac{81\cdot x^4}{y^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(210\cdot x^4+324\cdot x^3\cdot\ln y\right)'_y=\frac{324\cdot x^3}{y};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(150\cdot y^2+\frac{81\cdot x^4}{y}\right)'_x=\frac{324\cdot x^3}{y}.$$

3.5 Решение задания 5

Пусть $N=42$, тогда $P_3=0$, $P_4=2$, $P_5=2$. Тогда заданная в условии функция примет вид: $z=\frac{3}{x}+\frac{3x}{y}+4y$. Исследуем её на локальный экстремум.

Решение:

Найдём частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3x}{y^2}+4$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{6}{x^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{6x}{y^3}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{3}{y^2}$. Найдём критические точки, решая систему

$$\begin{cases}-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{y}=0,\\ 4-\frac{3x}{y^2}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{1}{x^2}=0,\\ 4-\frac{3x}{y^2}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{x^2},\\ 4-\frac{3}{x^3}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x^2,\\ x=\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=0{,}825,\\ x=0{,}909.\end{cases}$$

Исследуем функцию $z(x,y)$ на экстремум в точке $(0{,}909;0{,}825)$, применяя достаточный признак. Найдём значения вторых производных в этой точке.

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(0{,}909;0{,}825)}=\frac{6}{0{,}909^3}=7{,}988;$$

$$B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0{,}909;0{,}825)}=-\frac{3}{0{,}825^2}=-4{,}408;$$

$$C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(0{,}909;0{,}825)}=\frac{6\cdot 0{,}909}{0{,}825^3}=9{,}713.$$

Дискриминант $D = A \cdot C - B^2 = 7{,}988 \cdot 9{,}713 - (-4{,}408)^2 = 58{,}157$. Так как $D > 0$, $A > 0$, то в точке $(0{,}909;0{,}825)$ имеется локальный минимум $z_{\min} = \dfrac{3}{0{,}909} + \dfrac{3 \cdot 0{,}909}{0{,}825} + 4 \cdot 0{,}825 = 9{,}906$.

4. Контрольные вопросы

1. Что называется функцией нескольких переменных?
2. Что называется областью определения функции двух переменных?
3. Что называется областью изменений или множеством значений функции двух переменных?
4. Что такое частная производная?
5. Что называется линией уровня функции $z = f(x, y)$?
6. Что называется поверхностью уровня функции $u = f(x, y, z)$?
7. Что понимается под d-окрестностью точки $M_0(x_0; y_0)$?
8. Что называется двойным пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$?
9. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0; y_0)$?
10. Какая функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной на множестве точек Е?
11. Сформулируйте теорему Вейерштрасса.
12. Как формулируется теорема о смешанных производных?
13. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
14. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.
15. Сформулируйте достаточный признак дифференцируемости функции $z = f(x, y)$ в точке.
16. Что называется линеаризацией функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0; y_0)$?
17. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
18. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?
19. Что называется производной по направлению вектора для функции двух переменных? для функции трех переменных?

20. Запишите формулу Тейлора для функции двух переменных.
21. Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
22. Что называется условным экстремумом функции двух переменных $z = f(x, y)$?

Список рекомендуемой литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления.Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007.416с.
2. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Проспект, 2011.-608с.
3. Сборник задач по математике для втузов: В 4 частях: Ч.2 / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. - М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2009.432с.

(9)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Первый проректор –
проректор по учебной работе
_____________ Е.А.Кудряшов
«9» декабря 2011г.

Расчет вероятностей случайных событий

Индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13

Курск 2011

УДК 510. (083)

Составители: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина

Рецензент
Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры
высшей математики *В.И. Дмитриев*

Расчет вероятностей случайных событий: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. Курск, 2011. 50с.: табл. 1. Библиогр.: с.50.

Методическая разработка содержит теоретические упражнения и практические задания по теме «Расчет вероятностей случайных событий». Индивидуальные задания разбиты на три уровня сложности. Представлены примеры решения наиболее сложных задач.

Предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 2,90. Уч.-изд. л . 2,63. Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

На кафедре высшей математики Юго-Западного государственного университета для активизации и упорядочения самостоятельной работы студентов используется рейтинговая интенсивная технология модульного обучения. Рассматриваемая методическая разработка направлена на усвоение теоретического курса и применение теоретических знаний к решению практических задач по разделу курса математики, а также по дисциплине «Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы».

Данная работа содержит индивидуальные задания, содержащие как теоретические упражнения, так и практические задания, по теме «Расчет вероятностей случайных событий».

При выборе заданий следует использовать параметры n и N, где n – номер студента в журнале преподавателя, N – номер группы в потоке ($N \leq 9$).

В зависимости от уровня подготовки студента рекомендуется воспользоваться тремя уровнями сложности, на которые разбиты задания:

Первый уровень сложности предполагает решение теоретического теста - тренинга и выполнение следующих практических заданий – 1, 2, 3, 4, 6, 7б, 9, 10.

Второй уровень сложности содержит решение теоретического теста - тренинга и выполнение следующих практических упражнений – 1, 2, 3, 4, 7а, 8, 9, 10,

и решение задач *третьего* уровня сложности – решение теоретического теста - тренинга и выполение практических заданий – 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10.

Для лучшего усвоения материала по этой теме рекомендуем решить все задания своего варианта.

Выбор теоретического теста - тренинга осуществляется следующим образом: $m = \mathrm{mod}(n, 4) + 1$.

1. Индивидуальные задания

1.1 Теоретические упражнения

Теоретический тест-тренинг №1

1. Если событие A исключает появление события B, то такие события называются

1) несовместными 2)независимыми 3)противоположными
4) совместными 5)равновозможными

2. Установите соответствие между понятием и его определением

А невозможное	1. событие, которое всегда происходит в условиях определенного опыта
Б случайное	2. событие, которое никогда не происходит в условия определенного опыта
В противоположное	3. событие, которое происходит только тогда, когда исходное событие не происходит
	4. событие, которое может произойти, а может и не произойти в условиях определенного опыта

3. На рисунке 1.1 изображена операция с событиями.

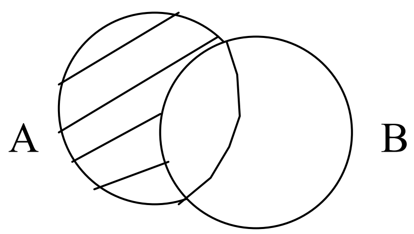


Рис.1.1. Операция с событиями A и B.

Этой операцией является:

1) $A \cap B$ 2) AUB 3) A\B 4) $\overline{A}$ 5)B\A

4. Вероятность достоверного события равна

1) 0 2) 1 3) –1 4) ∞ 5) любое число

5. Число перестановок элементов множества в случае, когда не все элементы различны, определяют по формуле:

1) $\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$ 2) $n!$ 3) n^m 4) $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$

5) $\frac{n!}{(n-m)!}$

6. Дайте классическое определение вероятности. Перечислите недостатки этого определения.

7. Сформулируйте теорему о вероятности суммы совместных событий. Перечислите последовательность действий при доказательстве этой теоремы:

Теоретический тест – тренинг №2

1. Если вероятность появления события А меняется в зависисмости от того произошло событие В или нет, то такие события называются

1) несовместными 2)независимыми 3)противоположными
4) зависимыми 5)равновозможными

2. Установите соответствие между понятием и его определением

А невозможное	1. событие, которое всегда происходит в условиях определенного опыта
Б противоположное	2. событие, которое никогда не происходит в условия определенного опыта
В достоверное	3. событие, которое происходит только тогда, когда исходное событие не происходит
	4. событие, которое может произойти, а может и не произойти в условиях определенного опыта

3. На рисунке 1.2 изображена операция с событиями.

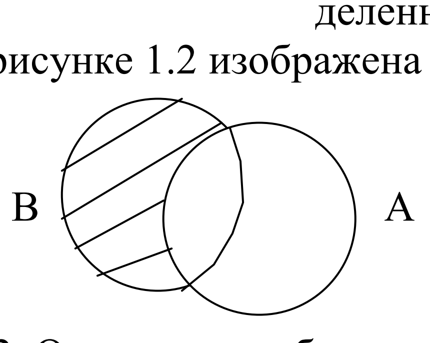


Рис.1.2. Операция с событиями А и В.

Этой операцией является:

1) $A \cap B$ 2) AUB 3) $A \setminus B$ 4) $\overline{A}$ 5) $B \setminus A$

4. Вероятность невозможного события равна

1) 0 2) 1 3) –1 4) ∞ 5) любое число

5. Число сочетаний из n элементов по m элементов в каждом в случае, когда все элементы различны, определяют по формуле:

1) $\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ 2) $n!$ 3) n^m 4) $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

5) $\frac{n!}{(n-m)!}$

6. Дайте статистическое определение вероятности. Укажите условия существования статистической вероятности.

7. Сформулируйте теорему о о вероятности совместного появления двух событий. Перечислите действия при доказательстве этой теоремы.

Теоретический тест – тренинг №3

1. Если событие А не исключает появления события В, то такие события называются

1) несовместными 2)независимыми 3)противоположными

4) совместными 5)равновозможными

2. Установите соответствие между понятием и его определением

А случайное	1. событие, которое всегда происходит в условиях определенного опыта
Б противоположное	2. событие, которое никогда не происходит в условия определенного опыта
В достоверное	3. событие, которое происходит только тогда, когда исходное событие не происходит
	4. событие, которое может произойти, а может и не произойти в условиях определенного опыта

3. На рисунке 1.3 изображена операция с событиями.

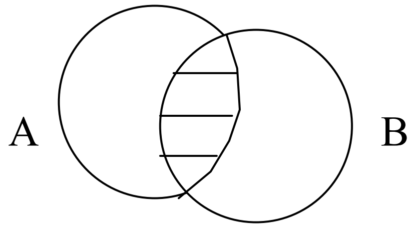


Рис.1.3. Операция с событиями A и B.

Этой операцией является:

1) $A \cap B$ 2) $A \cup B$ 3) $A \setminus B$ 4) $\overline{A}$ 5) $B \setminus A$

4. Значения вероятности случайного события заключены в промежутке:

1) $(-\infty; -1)$ 2) $(5, +\infty)$ 3) $[-1; 0)$

4) $[0, 1]$ 5) $(1; 5]$

5. Число размещений из n элементов по m элементов в каждом в случае, когда не все элементы различны, определяют по формуле:

1) $\dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ 2) $n!$ 3) n^m

4) $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ 5) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

6. Дайте определение геометрической вероятности. Приведите примеры. Перечислите недостатки определения.

7. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности. Перечислите последовательность действий при выводе формулы.

Теоретический тест – тренинг №4

1. Если вероятность появления события A не изменяется в зависимости от того произошло событие B или нет, то такие события называются

1) несовместными 2)независимыми 3)противоположными

4) зависимыми 5)равновозможными

2. Установите соответствие между понятием и его определением

А невозможное	1. событие, которое всегда происходит в условиях определенного опыта
Б случайное	2. событие, которое никогда не происходит в условия определенного опыта
В достоверное	3. событие, которое происходит только тогда, когда исходное событие не происходит
	4. событие, которое может произойти, а может и не произойти в условиях определенного опыта

3. На рисунке 1.4 изображена операция с событиями.

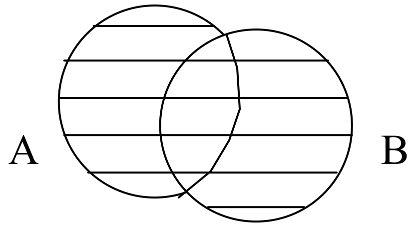


Рис.1.4. Операция с событиями А и В.

Этой операцией является:

1) $A \cap B$ 2) AUB 3) $A \backslash B$ 4) $\overline{A}$ 5)$B \backslash A$

4. Если вероятность события А равна р, то вероятность противоположного события $\overline{A}$ равна

1)$1 + p$ 2)$1 - p$ 3)1 4)0 5)любое число

5. Число перестановок элементов множества в случае, когда все элементы различны, определяют по формуле:

1) $\dfrac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$ 2) $n!$ 3) n^m 4) $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$

5) $\dfrac{n!}{(n-m)!}$

6. Перечислите аксиомы вероятности.

7. Сформулируйте теорему о вероятности появления хотя бы одного из событий, независимых в совокупности. Перечислите последовательность действий при доказательстве этой теоремы.

1.2. Практические задания

1.2.1. Задание 1

Решить комбинаторную задачу

1. Сколькими способами из N + 25 учеников класса можно выделить актив в следующем составе: староста, редактор стенгазеты, профорг?
2. В шахматном турнире участвуют N + 5 школьников и N + 15 студентов. Сколькими способами могут распределиться три призовых места, занятые в турнире, если никакие два участника не набрали одинаковое количество очков?
3. Сколько различных образцов билетов с указанием станции отправления и назначения нужно отпечатать для железной дороги с N + 35 станциями?
4. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из 10N кандидатов?
5. Сколько словарей нужно издать, чтобы можно было непосредственно выполнить переводы с любого из N + 3 языков на любой другой из этих N + 3 языков?
6. В районе построили новую школу. Из пришедших 15+ N учителей нужно выбрать директора, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?
7. В седьмом классе изучается N + 10 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть четыре различных урока?
8. На N + 7 сотрудников выделены N + 3 путевки. Сколькими способами их можно распределить, если все путевки различны?
9. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг, если имеется материал N + 3 различных цветов и полосы флага должны быть разного цвета?
10. В президиум собрания избраны N + 6 человек. Сколькими способами они могут распределить между собой обязанности председателя, секретаря и счетчика?

11. Для проведения экзамена создается комиссия из двух преподавателей, причем один из них председатель, а другой ассистент. Сколько комиссий можно создать из 2N + 4 преподавателей?
12. В классе N + 15 мальчиков и N + 15 девочек. Для участия в концерте нужно выделить танцевальный дуэт, дуэт певцов и гимнастический дуэт (каждый из которых состоит из мальчика и девочки). Сколькими способами это можно сделать (при условии, что все умеют петь, танцевать, делать гимнастические упражнения)?
13. Из N + 3 инженеров и N + 8 экономистов должна быть составлена комиссия в составе 7 человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один инженер?
14. Сколькими способами может быть присуждена первая, вторая, третья премии трем лицам, если число соревнующихся равно N + 8?
15. В классе N + 30 учеников. Сколькими способами можно выделить из них 3 человека для участия в праздничной демонстрации так, чтобы один нес флаг, другой – плакат, а третий - шарики?
16. Для освещения событий в трех станах ближнего зарубежья решено отправить по одному корреспонденту. Сколькими способами это можно сделать, если в штате 20 + N сотрудников?
17. В хирургическом отделении работает 10N врачей. Сколькими способами из –них можно образовать бригаду в составе хирурга и ассистента?
18. В классе 15 + 2N учащихся. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если один из них должен быть старшим?
19. Сколько существует различных вариантов трудоустройства N+2 журналистов, если они будут устраиваться на работу в две редакции, при условии, что в каждую редакцию может устроиться только один журналист?
20. Сколькими способами можно рассадить N + 3 учащихся на 30 местах?
21. Учащемуся необходимо сдать 4 экзамена за N + 7 дней. Сколькими способами это можно сделать?

22. На выборах в некий государственный орган победу одержали 2N+5 человек. Из них необходимо выбрать председателя, заместителя преседателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
23. Сколькими способами могут быть присуждены Гран-при, первая, вторая, третья премии и приз зрительских симпатий пяти лицам, если число участвующих в конкурсе 2N + 13?
24. Сколько различных N – значных чисел можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 (число может начинаться с нуля, и цифры не повторяются)? Как измениться ответ, если цифры могут повторяться?
25. На полке в магазине игрушек стояло 2N+25 различных игрушек. Для N + 4 детей выбирают в подарок по одной игрушке. Сколькими способами выбранные игрушки можно подарить?
26. Станок с программным управлением выполняет N + 5 операций. Сколькими способами можно составить программу для работы станка для заданных трех операций?
27. Для патрулирования улиц среди 3N +15 курсантов необходимо выделить двоих, среди которых один старший. Сколькими способами это можно сделать?
28. Месячный план проката кинофильмов составляет3N + 1 фильм. Сколькими способами можно составить план показа фильмов в первый день месяца, если надо показать 3 фильма?
29. В ансамбле N + 7 мужчин и N + 9 женщин. Сколькими способами можно выделить дуэт певцов и дуэт танцоров, каждый из которых состоит из одного мужчины и одной женщины, если все в ансамбле умеют петь и танцевать?
30. В N + 7 этажном доме на первом этаже в лифт садится 4 человека. Известно, что они выйдут на разных этажах. Сколькими способами они могут это сделать?
31. На выставке-продаже автомобилей представлено N + 10 видов машин. Сколькими способами можно выбрать автомобили для директора, главного инженера и бухгалтера крупного завода?
32. Учащиеся данного класса изучают N + 9 учебных предметов; если в расписание занятий включается каждый день по четыре различных предмета, то сколькими различными способами могут быть распределены уроки в день?

33. В теннисном турнире участвуют N + 8 мужчин и N + 6 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?
34. Сколькими способами можно обозначить вершины (N + 2) – угольника большими латинскими буквами (в латинском алфавите 26 букв)?
35. Из 33 букв русского алфавита составляют слова из N + 3 букв так, что соседние буквы в слове различны. Сколько таких слов можно составить (допускаются и слова, не имеющие в русском языке смысла)?

1.2.2. Задание 2

Решить комбинаторную задачу

1. Сколькими способами можно рассадить 2N + 4 куста различных пород вдоль аллеи с двух сторон?
2. В магазин поступило N + 8 видов различных игрушек. Сколькими способами их можно расположить на витрине?
3. К бензоколонке одновременно подъехала N + 1 машина. Сколькими способами они могут организовать очередь?
4. Для производства продукции заводу-изготовителю нужно заключить N + 5 договоров с N + 5 заводами-поставщиками. Сколькими способами это можно сделать?
5. Станок с программным управлением выполняет N + 7 операций. Сколькими способами можно составить программу работы станка с выполнением всех операций по одному разу?
6. Месячный репертуар кинотеатра составляет N + 10 фильмов. Сколькими способами можно составить план проката кинофильмов, если каждый фильм можно показать один раз?
7. В конкурсе принимали участие 2N + 9 детских садов. Сколькими способами могут распределиться места между ними?
8. В газете необходимо разместить N + 8 объявлений друг за другом. Сколькими способами это можно сделать?
9. В ансамбле N + 6 мужчин и N + 6 женщин. Сколькими способами их можно расставить на сцене в ряд так, чтобы никакие два мужчины и никакие две женщины не стояли рядом?

10. В видеотеке находится N + 7 видеокассет. Сколькими способами их можно расставить на полке?
11. На выставке-продаже автомобилей представлено N + 12 видов машин. Сколькими способами их можно расставить в ряд для показа?
12. В гирлянде N + 15 разноцветных лампочек и две не цветные лампочки. Сколькими способами можно составить гирлянду так, чтобы не цветные лампочки рядом не располагались?
13. Сколькими способами можно составить набор из N + 1 разного пирожного, если имеется N + 1 сорт?
14. Сколькими способами можно распределить N + 18 глав книги между N + 18 авторами?
15. В соревнованиях по фигурному катанию принимали участие дуэты из N+5 стран. Сколькими способами могут распределиться места по окончании соревнований?
16. Сколькими способами N + 15 человек могут встать в очередь друг за другом?
17. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке N + 9 человек?
18. Сколькими способами можно составить список студентов группы, в которой N + 15 человек и нет однофамильцев?
19. Сколькими способами можно распределить N + 3 должности между N + 3 лицами, избранными в президиум спортивного общества?
20. За одним столом надо рассадить N +4 мальчиков и N + 4 девочек так, чтобы не было двух рядом сидящих мальчиков и двух рядом сидящих девочек. Сколькими способами это можно сделать?
21. Сколькими способами можно составить содержание сборника, состоящего из N+15 статей?
22. Сколькими способами можно упорядочить множество {1, 2, …, N +8} так, чтобы числа 1, 2, 3 стояли рядом и в порядке возрастания?
23. В комнате N + 5 разноцветных лампочек. Сколько всего может быть различных способов освещения комнаты?

24. Дрессировщик выводит на арену 2N + 2 собачек: поровну болонок и такс. Сколькими способами их можно вывести в две колонны так, чтобы собаки одной породы шли друг за другом?
25. Сколькими способами можно рассадить N + 8 деревьев различных пород вдоль дороги с одной стороны?
26. Сколькими способами можно расставить N + 8 книг на книжной полке, чтобы две данные книги не стояли рядом?
27. Сколькими способами N + 20 человек могут стать в очередь друг за другом так, чтобы Иванов, Петров и Сидоров стояли друг за другом и в указанном порядке?
28. Для оформления колонны демонстрантов выделено N + 15 различных флагов. Сколькими способами их можно раздать N + 15 лицам?
29. N + 30 книг – трехтомник одного автора, а остальные книги различных авторов – помещены на одной книжной полке. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?
30. В турнире участвуют N + 6 человек. Сколькими способами могут распределиться места между ними?
31. Сколькими способами можно составить флаг из N + 1 различного цвета, если имеется материал N + 1 цвета?
32. Сколькими способами можно разместить N + 5 книг на книжной полке?
33. Сколькими способами можно упорядочить множество {1, 2, … , 2N + 2} так, чтобы каждое четное число имело четный номер?
34. Сколько можно составить комбинаций из 2N + 3 элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?
35. На собрании должны выступить N + 3 человека. Сколькими способами их можно разместить в списке ораторов?

1.2.3. Задание 3

Решить комбинаторную задачу

1. Рота состоит из трех офицеров, N+1 сержанта и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд, состоящий из 1 офицера, двух сержантов и N + 10 рядовых?

2. Из пруда, в котором плавают 40 щук, выловили N + 4 щуки, пометили их и пустили обратно в пруд. Сколькими способами можно второй раз выловить 9 щук, чтобы среди них были 3 помеченные?
3. Сколькими способами из 30 учащихся можно выбрать делегацию, состоящую из N + 2 учащихся?
4. В комнате N + 20 лампочек. Сколько всего разных способов освещения комнаты, при которых горит ровно 5 лампочек?
5. Даны N + 3 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести, соединяя точки попарно?
6. В колоде 52 карты. Сколькими способами можно вынуть N + 4 карты, чтобы среди них была дама?
7. Сколькими способами можно выбрать N + 2 книги из 2N + 3 книг, стоящих на полке?
8. На плоскости проведено N + 5 прямых так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения этих прямых?
9. В колоде 36 карт. Сколькими способами можно выбрать N + 2 карты, чтобы среди них были две красной масти?
10. Из группы, состоящей из N + 7 мужчин и N + 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами можно это сделать?
11. Для участия в первенстве университета по легкой атлетике необходимо составить команду из 5 человек. Сколькими способами это можно сделать, если имеется N+5 бегунов?
12. В колоде 32 карты (без шестерок). Сколькими способами можно выбрать N карт так, чтобы среди них не было ни одной карты, старше десятки?
13. В группе N+2 человека учатся на все пятерки. Администрация учебного заведения премировала лучших учащихся путевками в Анапу. Но к сожалению путевок только две. Сколько возможно вариантов выбора учащихся на отдых?
14. Из N + 8 роз и N + 6 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

15. Комплексная бригада состоит из N + 1 маляра, N + 2 штукатуров и одного столяра. Сколько различных бригад можно создать из рабочего коллектива, в котором N + 15 маляров, N + 12 штукатуров и N + 10 столяров?
16. В колоде 52 карты. Сколькими способами можно выбрать N + 2 карты так, чтобы все они были картинками?
17. Из N + 20 сотрудников лаборатории N + 5 человек должны выехать в командировку. Сколько может быть различных составов отъезжающей группы, если заведующий лабораторией и два ведущих сотрудника одновременно уезжать не должны?
18. Из отряда солдат в N + 45 человек назначаются в караул 4 человека. Сколькими различными способами может быть составлен караул?
19. Имеются лотерейные билеты, пронумерованные от 1 до N + 20. Сколькими способами из них можно выбрать N билетов так, чтобы среди выбранных билетов был хотя бы один номер, больший 15?
20. В колоде 36 карт. Сколькими способами можно выбрать N + 3 карты так, чтобы среди них был туз пик?
21. Во взводе N + 5 сержантов и N + 45 солдат. Сколькими способами можно составить наряд из одного сержанта и 3 солдат?
22. 2N девушек и 2N + 2 юношей играют в городки. Сколькими способами они должны разбиться на команды по 4 человека в каждой? Сколькими способами можно составить команды, чтобы в них было хотя бы по одному юноше?
23. Сколько хорд можно провести через N + 5 различных точек, лежащих на одной окружности?
24. В турнире участвовало N + 10 шахматистов, каждый из них сыграл с каждым из остальных по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?
25. В колоде 52 карты. Сколькими способами можно выбрать N + 5 карт, чтобы среди них три были черной масти?
26. Сколько можно провести различных плоскостей через N + 8 точек пространства, если никакие четыре из них не лежат в одной плоскости?
27. Сколькими способами можно выбрать N + 4 лица на N + 4 одинаковые должности из N + 12 кандидатов?

28. Для проведения экзамена создается комиссия из N + 1 преподавателей. Сколько различных комиссий можно составить из N + 4 преподавателей?
29. На N + 7 сотрудников выделены N + 3 путевки. Сколькими способами их можно распределить, если все путевки одинаковы?
30. В конкурсе «Студент года» принимают участие N+30 человек. Сколькими способами может быть организована финальная часть, если в финал выходит 5 человек?
31. Из N + 6 намеченных кандидатов нужно избрать N + 2 счетчика. Сколькими способами можно это сделать?
32. В хирургическом отделении работает 10N врачей. Сколькими способами из них можно организовать бригаду их хирурга и 4 его ассистентов?
33. В чемпионате по футболу участвуют 2N + 10 команд, причем каждые две команды встречаются между собой два раза. Сколько матчей играется в течение сезона?
34. Четыре автора должны написать книгу из N + 15 глав, причем первый и третий должны написать по пять глав, второй – 4, а остальные – четвертый. Сколькими способами можно распределить главы между ними?
35. В классе 15+ 2N учащихся. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства?

1.2.4 Задание 4

Решить задачу, пользуясь определением геометрической вероятности.

1. Электропривод, соединяющий пункты А и В, порвался в неизвестном месте. Чему равна вероятность того, что разрыв произошел не далее 500 м от пункта А, если расстояние между пунктами (N + 1) км.
2. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых (N + 1) см и (N + 2) см соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг,

попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями?

3. В круге радиуса (N + 2) см наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадет в одну из двух непересекающихся фигур, лежащих внутри круга, площади которых равны 2,37 см^2 и 3,52 см^2.
4. На отрезке AB = l наудачу поставлена точка C. Найти вероятность того, что меньший из отрезков AC и BC имеет длину больше, чем $\dfrac{l}{N+1}$ (предполагается, что вероятность попадания точки пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на прямой).
5. В шар радиуса R = N вписан.в куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадет в куб.
6. На квадратном листе картона со стороной (N + 10) см, нарисованы два непересекающихся круга с диаметрами d_1 = 1 см, d_2 = 2 см. Найти вероятность того, что точка, лежащая в квадрате, находится внутри области, принадлежащей или первому кругу или второму.
7. В шар радиуса R = N вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность попадания точки в пирамиду.
8. Внутрь круга радиуса R = N + 2 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного пятиугольника.
9. Пусть на отрезок длиной (N + 7) см бросают наудачу точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет на отрезок длиной (N + 2)см, являющийся частью отрезка длины N + 7.
10. Абонент ждет телефонного вызова в течение N часов. Какова вероятность, что вызов произойдет в последние 20 минут этого времени?
11. В круге радиуса R = N + 3 помещен меньший круг радиуса r = 2. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в большой круг точка попадет также и в меньший круг (предполагается, что вероятность попадания в круг пропорциональна площади круга и не зависит от расстояния).

12. В круг радиуса R = 2N вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка наудачу брошенная в этот круг попадет в данный треугольник.
13. На квадратном листе картона со стороной (N + 10) см, нарисованы два непересекающихся круга с диаметрами d_1 = 1 см, d_2 = 2 см. Найти вероятность того, что точка, лежащая в квадрате, находится внутри второго круга.
14. Пусть на отрезок длиной (N + 7) см бросают одновременно (независимо одна от другой) две точки. Какова вероятность того, что обе эти точки попадут на отрезок длиной (N + 2)см, являющийся частью отрезка длиной (N + 7) см.
15. На отрезке L = 10·N см помещен меньший отрезок l = 5·N см. Найти вероятность того, что наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.
16. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 2N и 3N соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в кольцо, образованное указанными окружностями?
17. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых N+1 и N+2 соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет в малый круг?
18. Внутрь круга радиуса R = N + 1 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в часть круга пропорциональна площади этой части и не зависит от ее расположения относительно круга.
19. Внутрь круга радиуса R = N наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного треугольника.
20. Внутрь круга радиуса R = N + 3 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного шестиугольника.

21. Мины поставлены на прямой через каждые (0,1N + 5) метров. Танк шириной (0,1N + 3) м идет перпендикулярно этой прямой. Какова вероятность того, что он подорвется?
22. Внутрь круга радиуса R = N + 4 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг правильного семиугольника.
23. Внутрь квадрата брошена наудачу точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в квадрат круга радиуса R = N + 1.
24. Внутрь правильного треугольника наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в треугольник круга радиуса R = N.
25. Внутрь правильного шестиугольника наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в шестиугольник круга радиуса R = N + 1.
26. Внутрь круга радиуса R = N + 5 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в круг восьмиугольника.
27. Внутрь круга радиуса R = N + 1 наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри кругового сектора с углом $\alpha = 30°$.
28. В круге радиуса R = N + 15 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадет в один из двух непересекающихся квадратов со стороной a = 2см, лежащий внутри круга.
29. В круге радиуса R = N + 15 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадет в один из двух непересекающихся квадратов со сторонами a = 2см и a = 1см соответственно, лежащий внутри круга.
30. В круге радиуса R = N + 10 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадет в один из двух непересекающихся правильных треугольников со сторонами a = 1см и a = 2 см соответственно, лежащий внутри круга.
31. В круге радиуса R = N + 20 наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что она попадет в одну из двух непересекающихся окружностей с радиусами r_1 = 3см и r_2 = 5 см, лежащий внутри круга.

32. На квадратном листе картона со стороной (N + 10) см, нарисованы два непересекающихся круга с диаметрами d_1 = 1 см, d_2 = 2 см. Найти вероятность того, что точка, лежащая в квадрате, находится вне второго круга.
33. Внутрь круга радиуса R = N + 2 см наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется вне кругового сектора с углом $\alpha = 60°$.
34. Внутрь круга радиуса R = N + 2 см наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется в одном из двух непересекающихся круговых секторах с углами $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 60°$.
35. В квадрат со стороной a = (N + 3) см помещен меньший квадрат b = N + 2 см. Найти вероятность того, что наудачу брошенная точка в большой квадрат, попадет также и в рамку, образованную построенными квадратами.

1.2.5 Задание 5

Решить задачу, используя геометрическое определение вероятности.

1. Наудачу выбираются два действительных числа x и y, причем $0 \le x \le N$, $0 \le y \le N$. Найти вероятность того, что $y^2 \le x$.
2. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где коэффициенты p и q выбраны наудачу в квадрате $|p| \le N$, $|q| \le N$, окажутся действительными.
3. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где коэффициенты p и q выбраны наудачу в квадрате $|p| \le N, |q| \le N$, окажутся мнимыми.
4. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где коэффициенты p и q выбраны наудачу в квадрате $|p| \le N, |q| \le N$, окажутся положительными.
5. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что

$|x| \le N, | \; y| \le N+1$. Какова вероятность того, что дробь $\frac{x}{y}$ окажется положительной?

6. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le N, \; |y| \le N$. Какова вероятность того, что $|x| < |y|$?
7. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le N, \; 0 \le y \le N$. Какова вероятность того, что $x^2 < y$?
8. На паркетный пол (паркет имеет форму квадрата) бросается монета, диаметр которой в N + 1 раз меньше стороны квадрата. Какова вероятность того, что монета не пересечет не одной стороны квадрата (предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения на плоскости).?
9. В квадрат с вершинами в точках (0, 0), (0, N +2), (N +2, 0), (N + 2, N + 2) наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y > x^2 - 1$?
10. В треугольник с вершинами в точках (0, 0), (0, N + 2), (N + 2, 0) наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y < x^2 - 1$?
11. На шахматную доску наудачу брошена монета, диаметр которой в N + 1 раз меньше стороны каждого из квадратов доски. Какова вероятность того, что монета окажется полностью на черном поле?
12. Наудачу выбираются два действительных числа x и y, причем $0 \le x \le N$, $0 \le y \le N$. Найти вероятность того, что $y^2 \ge x$.
13. В прямоугольник с вершинами в точках (0,0), (0,N +2), (2(N+ 2), 0), (2(N + 2), N + 2) наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y > 3 - x^2$?
14. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися на расстоянии 2N друг от друга. На плоскость наудачу брошена монета диаметра N. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.
15. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается нижней стороны квадрата с вершинами в точках (0, 0), (0, N + 1), (N + 1, N + 1), (N + 1, 0) и

проходит через верхние его вершины. Какова вероятность того, что точка, наудачу брошенная в квадрат, попадет в область, заключенную между верхней стороной квадрата и параболой?

16. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается полукруга и проходит через границы его диаметра $d = 2(N + 1)$. Какова вероятность того, что точка, наудачу брошенная в полукруг, попадет в область, ограниченную дугой полукруга и параболой?
17. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le N + 1, |y| \le N + 4$. Какова вероятность того, что дробь $\frac{x}{y}$ окажется отрицательной?
18. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \le N + 1,\ |y| \le N + 1$. Какова вероятность того, что $x^2 > y$?
19. В фигуру, ограниченную линиями $y = N + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $y = x - N$ наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y > x^2 - 1$?
20. В фигуру, ограниченную линиями $y = N + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $y = x - N$ наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что ее координаты x и y будут удовлетворять неравенству $y < x^2 - 1$?
21. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается нижней стороны квадрата с вершинами в точках (0, 0), (0, N + 1), (N + 1, N + 1), (N + 1, 0) и проходит через верхние его вершины. Какова вероятность того, что точка, наудачу брошенная в квадрат, попадет в область, заключенную между параболой и прямыми $y = 0$, $x = N + 1$, $x = 0$?
22. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается полукруга и проходит через границы его диаметра $d = 2(N + 1)$. Какова вероятность того, что точка, наудачу брошенная в полукруг, не попадет в область, ограниченную дугой полукруга и параболой?
23. Из отрезка $[-N; N + 1]$ наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше N, а произведение меньше N?
24. Найти вероятность того, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$, где коэффициенты p и q выбраны наудачу в квадрате $|p| \le N,\ |q| \le N$, окажутся отрицательными.

25. На отрезок длиной N наудачу бросают две точки. Они разбивают отрезок на три меньших отрезка. Какова вероятность того, что из полученных отрезков можно построить треугольник?
26. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает N + 1. Найти вероятность того, что $xy \le 1$, а $\frac{y}{x} \le N+1$.
27. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает N. Найти вероятность того, что сумма их не превышает N, если сумма их квадратов больше 0,25.
28. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит N, будет больше N?
29. На плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии (N + 5) см наудачу брошен круг радиуса 1 см. Найти вероятность того, что круг не пересечет ни одной из прямых. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения?
30. Даны две концентрические окружности радиусов r_1 = N + 2 см, r_2 = N + 4 см. На большей окружности наудачу ставятся две точки A и B. Какова вероятность того, что отрезок AB не пересечет малую окружность?
31. Наудачу взяты два положительные числа x = 0,1(N + 1), y = 0,2N, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет больше единицы, а частное $\frac{y}{x}$ не больше двух.
32. Наудачу взяты два положительные числа x, y, каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма x + y не превышает единицы, а произведение xy не меньше $0{,}01 \cdot N$.
33. На отрезке OA длины L = N + 12 числовой оси OX наудачу поставлены две точки M(x) и K(y). Найти вероятность того, что длина отрезка MK меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точки. Предполагается, что вероятность попадания

точки на отрезке пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

34. На отрезке OA длины L = N + 10 числовой оси OX наудачу поставлены две точки D(x) и E(y), причем $y \geq x$. Найти вероятность того, что длина отрезка DE меньше, чем $\frac{N+10}{2}$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезке пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.
35. На отрезке OA длины L = N + 15 числовой оси OX наудачу поставлены две точки L(x) и N(y). Найти вероятность того, что длина отрезка LN меньше, чем $\frac{N+15}{2}$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезке пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

1.2.6. Задание 6

Решить задачу, используя классическое определение вероятности.

1. В группе N + 6 юношей и N + 8 девушек. По жребию разыгрывается два билета в театр. Какова вероятность того, что билет получат две девушки?
2. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в университет, зашифрованы целыми числами от 1 до (N + 90) включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?
3. В урне (N + 5) шаров: 5 красных, а остальные зеленые. Какова вероятность того, что два наудачу вынутых шара окажутся зелеными?
4. В урне (N + 7) шаров: 2 белых, 3 синих, а остальные черные. Какова вероятность того, что наудачу вынутый шар окажется не белым?
5. Из букв Вашей фамилии наугад выбираются две буквы. Какова вероятность того, что они обе гласные?

6. В ящике имеется N + 5 деталей, из которых две бракованные. Рабочий наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся качественными.
7. На N + 3 карточках написаны числа от 1 до N + 3. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на 3?
8. На карточках написаны целые числа от 1 до N + 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна 10?
9. Из букв Вашей фамилии наугад выбираются две буквы. Какова вероятность того, что они обе согласные?
10. Из N + 30 учащихся спортивной школы 12 занимаются баскетболом, 15 – волейболом, 5 – волейболом и баскетболом, а остальные – другими видами спорта. Какова вероятность, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?
11. Из N + 3 жетонов, занумерованных четными различными числами и десяти жетонов, занумерованных различными нечетными числами, выбираются три. Найти вероятность того, что номера всех выбранных жетонов четные.
12. Из числа талонов, занумерованных всеми двузначными числами, свернутыми в одинаковые трубочки, наугад берется N штук. Какова вероятность того, что номера взятых талонов состоят из одинаковых знаков?
13. В денежно-вещевой лотерее на серию в 1000 билетов приходится N + 100 денежных выигрышей и N + 60 вещевых. Какова вероятность какого-либо выигрыша на один лотерейный билет?
14. В урне 4N красных и 5N? Голубых шаров, одинаковых по размеру и весу. Чему равна вероятность того, что наудачу извлеченные два шара окажутся одного цвета?
15. Из N + 3 одинаковых билетов денежно-вещевой лотереи один выигрышный. N + 3 человек по очереди и наугад берут (и не возвращают обратно) по одному билету. Зависит ли вероятность взять выигрышный билет от номера в очереди?
16. В книге 10N+200 сраниц. Чему равна вероятность того, что наугад открытая страница будет иметь порядковый номер кратный 5?

17. В колоде 52 карты. Наудачу извлекают N + 3 карты. Какова вероятность того, что среди извлеченных две красные карты?
18. Из колоды в 52 карты выбирается наугад N + 2 карты. Какова вероятность, что среди них окажется хотя бы один туз?
19. Из букв Вашей фамилии наугад выбираются две буквы. Какова вероятность того, что одна гласная, а другая – согласная.
20. В шахматном турнире участвуют 2N + 10 человек, которые будут распределены по жребию в двух группах по равному количеству в каждой. Какова вероятность, что двое наиболее сильные участника будут играть в одной группе?
21. В ящике находится N+5 бракованных и 15N стандартных деталей. Наудачу извлекают 3 детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных две стандартные детали?
22. В коробке имеется N + 20 карандашей, из которых 3 – белые. Ребенок наудачу извлекает 5 карандашей. Найти вероятность того, что извлеченные карандаши окажутся не белыми.
23. В ящике N + 5 белых и N + 2 черных одинаковых на ощупь шаров. Какова вероятность того, что первый вытащенный наудачу шар, будет белым?
24. В коробке N + 9 красных и N + 7 зеленых одинаковых на ощупь кубиков. Наудачу вынимают 3 кубика. Какова вероятность того, что оба они зеленые?
25. В одном ящике лежат N + 3 белых и N + 6 красных одинаковых на ощупь шаров, а в другом – 15 синих и 5 черных. Из каждого ящика наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что вынули красный и черный шары?
26. В ящике имеется N + 10 деталей, среди которых 9 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает три детали. Найти вероятность того, что извлеченные детали окажутся окрашенными.
27. В конверте среди N + 70 фотокарточек находится разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.
28. В цехе работают N + 5 мужчин и N + 7 женщин. По табельным номерам наудачу отобраны восемь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся 3 женщины.

29. В группе 25 + N студентов, среди которых 9 отличников. По списку наудачу отобраны 10 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов 6 отличников.
30. В коробке N + 5 одинаковых изделий, причем 3 из них окрашены. Наудачу извлечены два изделия. Найти вероятность того, что среди извлеченных изделий одна деталь окрашена.
31. К концу дня в магазине осталось N + 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает 2 арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?
32. При перевозке N +100 деталей, из которых 10 были забракованы, утеряна 1 стандартная деталь. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь оказалась бракованной.
33. Найти вероятность того, что все учащиеся в группе, состоящей из 30 + N человек, родились в разные дни года.
34. В классе, состоящем из N + 20, 15 человек занимаются в математическом кружке. Какова вероятность, что наудачу выбранный ученик окажется членом математического кружка?
35. Устройство состоит из N + 5 элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

1.2.7. Задание 7

На m одинаковых на ощупь карточках написаны буквы. Найти вероятность того, что, при случайном выкладывании карточек в ряд, получится заданное слово. (Количество карточек, наборы букв и данное слово см. в табл. 1.1).

Решить задачу:

1) используя классическое определение вероятностей;
2) используя теоремы о сложении и умножении вероятностей.

Таблица 1.1

Индивидуальные задачи к заданию 7

n	m	набор букв	Заданное слово
1	5	и, и, и, л, л	лилии
2	6	а, а, а, п, п, х	папаха
3	6	о, о, о, м, л, к	молоко
4	6	а, а, а, г, г, р	гагара
5	6	о, о, о, к, к, ш	окошко
6	6	а, а, с, к, к, р	краска
7	5	к, к, о, о, с	кокос
8	6	о, о, с, с, м, к	космос
9	5	а, а, к, к, о	какао
10	5	к, к, о, о, н	кокон
11	5	а, а, б, н, н	банан
12	5	а, а, п, п, к	папка
13	6	к, к, а, а, с, з	сказка
14	5	е, е, л, п, п	пепел
15	5	ш, ш, а, а, л	шалаш
16	5	а, а, к, к, з	казак
17	5	з, з, а, а, к	заказ
18	6	о, о, о, к, к, р	окорок
19	6	с, а, а, а, н, н	ананас
20	6	ф, е, е, р, р, м	фермер
21	6	з, з, а, а, н, о	заноза
22	5	р, р, а, а, д	радар
23	6	и, и, п, к, к, н	пикник
24	6	а ,а, з, к, к, у	указка
25	6	а, а, б, б, б, о	баобаб
26	5	к, к, м, о, о	комок
27	5	о, о, т, х, х	хохот
28	5	о, о, р, р, т	ротор
29	6	п, п, р, р, у, у	пурпур
30	5	а, а, б, к, к	кабак
31	5	а, а, ж, ж, д	жажда
32	5	о, о, п, т, т	топот
33	5	д, д, о, о, в	довод
34	6	и, и, м, с, с, я	миссия
35	6	а, н, о, о, п, п	попона

1.2.8. Задание 8

Решить задачу, используя теоремы сложения и умножения вероятностей.

1. Из урны, содержащей N + 2 белых и N + 3 черных шаров, вынимаются 2 шара. Какова вероятность того, что они разных цветов?
2. В урне находятся N + 3 белых и N + 4 черных шаров. Вынимаются 2 шара. Какова вероятность, что они оба белые?
3. В урне находятся N + 2 белых и 5 черных шаров. Вынимаются 2 шара. Какова вероятность, что они оба черные?
4. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при N + 2 –ом бросании?
5. N + 20 машин были доставлены на станцию технического обслуживания. При этом 5 из них имели неисправности в ходовой части, 8 имели неисправности в моторе, а остальные были полностью исправны. Какова вероятность, что машина с неисправной ходовой частью имеет также неисправный мотор?
6. Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитуриент должен подготовить N + 20 вопросов по мат. анализу и N + 25 – по геометрии. Но он успел подготовить только 15 вопросов по мат. анализу и 20 по геометрии. Билет содержит 3 вопроса, два из которых по мат. анализу и один – по геометрии. Какова вероятность, что абитуриент сдаст экзамен на «отлично» (ответит на все 3 вопроса)?
7. Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитуриент должен подготовить N + 20 вопросов по мат. анализу и N + 25 – по геометрии. Но он успел подготовить только 15 вопросов по мат. анализу и 20 по геометрии. Билет содержит 3 вопроса, два из которых по мат. анализу, а один – по геометрии. Какова вероятность, что абитуриент сдаст экзамен на «хорошо» (ответит на любые два вопроса)?
8. В урне находятся N + 2 белых, N + 3 черных и N + 4 красных шаров. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность, что хотя бы два шара будут одного цвета?

9. В лотерее разыгрывается $N + 10$ билетов, из которых $N + 5$ выигрышных. Некто покупает 4 билета. Какова вероятность, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный?
10. При одном обзоре радиолокационной станцией объект обнаруживается с вероятностью 0,6. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других циклов. Какова вероятность, что при $N + 3$ циклах объект будет обнаружен?
11. В ящике лежат $N + 2$ белых, $N + 4$ красных и $N + 7$ синих одинаковых на ощупь шаров. Вынимается наугад один шар. Какова вероятность, что он цветной?
12. Зачет по стрельбе считается сданным, если курсант получает оценку не ниже 4. Какова вероятность сдачи зачета курсантом, если известно, что он получает за стрельбу оценку 5 с вероятностью $0{,}01 \cdot N$ и оценку 4 с вероятностью $0{,}02 \cdot N$?
13. В одной урне $N + 2$ шара – белые, а $N + 3$ шара – черные, в другой – 5 белых и 2 черных. Из каждой урны взяли по одному шару. Какова вероятность того, что шары будут одного цвета?
14. В тренировках по парным соревнованиям в беге участвуют $N + 4$ учащихся из школы №1, семь учащихся из школы №2и восемь учащихся из школы №3. Найти вероятность того, что по жеребьевке в первую пару войдут два ученика из школы №3 или только из школы №2.
15. Два стрелка, для которых вероятность попадания равна соответственно 0,07 и $0{,}01 \cdot N$ производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.
16. Два стрелка, для которых вероятность попадания равна соответственно 0,07 и $0{,}01 \cdot N$ производят по одному выстрелу. Определить вероятность одного попадания в мишень.
17. В первом ящике $N + 7$ шаров, из которых 5 – белые. Во втором ящике $N + 8$ шаров, из которых 6 – белые. Из каждого ящика взяли по одному шару. Какова вероятность, что оба они белого цвета?
18. В партии изделий ОТК проверяет половину и признает годной всю партию, если бракованных изделий будет не более одного. Какова вероятность того, что партия из $N + 15$ изделий, в которой два бракованных изделия будет признана годной?

19. В первом ящике N + 10 шаров: 2 белых, 3 красных, а остальные - синие. Во втором ящике N + 8 шаров: 3 белых, 4 красных, остальные – синие. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что среди вынутых шаров нет синих?
20. В урне N + 5 белых и 1 черный шары. Вынули сразу три шара. Какова вероятность того, что все шары белые?
21. В ящике N + 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
22. Брошены N + 1 игральные кости. Найти вероятность того, что на каждой из выпавших граней появится 5 очков.
23. В ящике N + 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 4 детали. Найти вероятность того, что все извлеченные изделия окажутся окрашенными.
24. Вероятность доставки почты вовремя в два почтовых отделения равны соответственно 0,09·N и 0,095N. Найти вероятность того, что в одно из них почта будет доставлена вовремя.
25. В день физкультурника Петя пошел на стадион. Можно было купить билеты на соревнования по футболу с вероятностью 0,3, или купить билеты на соревнования по волейболу с вероятностью 0,2, или купить билеты на соревнования по баскетболу с вероятностью 0,1N. Какова вероятность того, что Петя попал на соревнования?
26. В мастерской работает 3 станка. За смену первый станок потребует наладки с вероятностью 0,1N, второй станок – с вероятностью 0,15, третий станок – с вероятностью 0,12. Считая, что станки не могут одновременно потребовать наладки, найти вероятность того, что за смену хоть один станок потребует наладки.
27. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8; и 0,1N. Найти вероятность того, что деталь находится не более чем в трех ящиках.
28. Устройство состоит из трех элементов, работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,1N; 0,6; 0,7.

Найти вероятность того, что за время t безотказно будет работать только один элемент.

29. В день физкультурника Петя пошел на стадион. Можно было купить билеты на соревнования по футболу с вероятностью 0,3, или купить билеты на соревнования по волейболу с вероятностью 0,2, или купить билеты на соревнования по баскетболу с вероятностью 0,1N. Какова вероятность того, что Петя попал на соревнования, в котором запрещена игра ногой?
30. В тренировках по парным соревнованиям в беге участвуют N + 4 учащихся из школы №1, семь учащихся из школы №2 и восемь учащихся из школы №3. Найти вероятность того, что по жеребьевке в первую пару войдут два ученика из разных школ.
31. Студент знает 20 вопросов из N + 30 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.
32. Вероятность доставки почты вовремя в два почтовых отделения равны соответственно 0,09·N и 0,095N. Найти вероятность того, что хотя бы в одно из них почта будет доставлена вовремя.
33. Вероятность того, что нужная сборщику деталь находится в первом, втором, третьем, четвертом ящике соответственно равна 0,6; 0,7; 0,8; и 0,1N. Найти вероятность того, что деталь находится в двух ящиках.
34. Вероятность попадания орудий при одном залпе соответственно равны 0,7; 0,8; 0,1N. Найти вероятность того, что мост будет разрушен при одном одновременном залпе трех орудий (мост разрушен, если в него попало не менее двух снарядов).
35. В ящике лежат N + 8 белых и N + 12 красных одинаковых на ощупь шаров. Наугад вынимают 5 шаров. Какова вероятность того, что среди них окажется не менее двух белых?

1.2.9. Задание 9

Решить задачу, используя формулу полной вероятности

1. В урну, содержащую N + 2 шара, опущен белый шар, после чего из урны извлечен один шар. Найти вероятность того, что

вынутый шар окажется белым, если равно возможны всевозможные предположения о цвете первоначально лежавших N + 2 шаров.

2. Имеются две одинаковые урны, первая из которых содержит N + 1 черных и 3 белых шара, а вторая – 2 черных и N + 2 белых шара. Сначала наугад выбирается урна, а потом наугад из нее извлекается один шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар?
3. Ученик пришел на экзамен, зная 25 вопросов из N + 30. Перед ним был взят только один билет. Какова вероятность того, что ученик знает наудачу вытянутый билет?
4. В пирамиде установлены N + 4 винтовок, из которых три снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки?
5. В вычислительной лаборатории имеются N + 5 клавишных автоматов и N + 3 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.
6. В ящике содержится N + 7 деталей, изготовленных на заводе №1, N + 10 деталей – на заводе №2 и N + 15 деталей – на заводе № 3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3 эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.
7. В первой урне содержится N + 10 шаров, из них 8 белые; во второй урне N + 15 шаров, из них – 5 белые. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

8. В цехе работают N + 20 станков. Из них N + 1 – марки А, N + 5 – марки В, а остальные – марки С. Вероятность того, что качество деталей окажется отличным для этих станков для этих станков соответственно равна 0,9; 0,8; 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех?
9. Из N + 4 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6, а остальные – с вероятностью 0,4. Что вероятнее, попадет ли в цель наудачу выбранный стрелок или нет?
10. Студент пришел на экзамен, зная 25 вопросов из N + 30. Как ему лучше идти сдавать экзамен: первым или вторым?
11. Из N + 40 деталей N + 20 изготовлено в I цехе, N + 10 – во втором, а остальные – в третьем. I и III цехи дают бракованную продукцию с вероятностью 0,2, а второй цех – с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что взятая деталь окажется бракованной?
12. Первый автомат за смену выпустил N + 700 деталей, из которых 0,3% брака, второй выпустил 1800 - N деталей, их которых 0,2% брака, а третий выпустил 2500 деталей, из которых 0,4% брака. Какова вероятность того, что на сборку попадет бракованная деталь?
13. Из N + 2 колод по 36 карт и N + 1 колод в 52 карты наудачу выбрана колода, а из колоды наудачу взята карта. Какова вероятность того, что это туз?
14. Имеется 4 урны. В первой урне N + 1 белых и 5 черных шаров. Во второй урне N + 2 белых и 8 черных шаров. В третьей урне 4 белых и N + 1 черных шаров. В четвертой урне 5 белых и N + 3 черных шаров. Выбирается наугад одна из урн и вынимается из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.
15. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит (10 + N)%, вторая – (N + 20)%, остальные – третья машина. В их продукции брак составляет соответственно 2, 5, 7%. Какова вероятность того, что случайно выбранный болт окажется дефектным?
16. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 5N% - вторым, остальные – третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны 0,01,

0,05, 0,03. Найти вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной.

17. Экзамен происходит по следующей схеме: если некоторый билет уже был вытянут, то экзаменатор откладывает его, т.е. последующие экзаменующиеся не могут вытянуть этот билет. Ученик выучил из N + 30 билетов N + 25. В каком случае вероятность того, что ученик вытянет выученный билет, больше – когда он идет отвечать первым или последним?
18. В урне лежат N + 3 шара, цвета которых неизвестны. (Каждый шар может быть или белым, или черным.) Положили в урну белый шар. Какова вероятность теперь вытянуть из урны белый шар?
19. Имеются две урны. В первой лежат N + 3 красных и N + 6 синих шаров, а во второй N + 4 красных и N + 6 синих шаров соответственно. Из первой урны во вторую перекладывают один шар. Какова вероятность после этого вынуть красный шар из первой урны?
20. Имеются две урны. В первой лежат N + 2 белых и N + 3 черных шаров, а во второй N + 7 белых и N + 6 черных шаров соответственно. Из первой урны во вторую перекладывают один шар. Какова вероятность после этого вынуть белый шар из второй урны?
21. На сборку поступают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1N% брака, второй – 0,2%, третий – 0,3N%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 100n, со второго – 2000, с третьего – 200N деталей.
22. В коробку, содержащую N+1 карандашей, положили красный карандаш, после чего из коробки взяли один карандаш. Найти вероятность того, что вытащенный карандаш окажется красным, если равно возможны всевозможные предположения о цвете первоначально лежавших N + 1 карандашей.
23. Имеются две одинаковые коробки, первая из которых содержит 10 зеленых счетных палочек и N + 8 синих, а вторая N + 10 зеленых счетных палочек и 15 синих. Сначала наугад выбирается коробка, а потом из нее извлекается наугад одна палочка. Какова вероятность того, что будет выбрана зеленая?

24. Имеются две одинаковые урны, первая из которых содержит N + 2 черных и 5 белых шаров, а вторая N + 3 белых и 7 черных шаров. Сначала наугад выбирается урна, а потом наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что будет выбран черный шар?
25. В первой коробке содержится N + 15 карандашей, из них 3 – желтые; во второй коробке N + 8 карандашей, из них 2 – желтые. Из каждой коробки наудачу извлекли по одному карандашу, а затем из этих двух карандашей наудачу взят один. Найти вероятность того, что взят желтый карандаш.
26. В коробке лежат N + 7 одинаковых на ощупь и по размеру кубиков, цвета которых неизвестны (каждый кубик может быть или сиреневым или голубым). Положили в урну сиреневый кубик. Какова вероятность теперь вынуть из коробки сиреневый кубик?
27. Имеются две коробки. В первой лежит N + 5 фиолетовых и 10 черных карандашей, а во второй – 6 фиолетовых и N + 7 черных карандашей. Из первой коробки во вторую перекладывают один карандаш. Какова вероятность после этого вынуть фиолетовый карандаш из первой коробки?
28. Из N + 7 винтовок, из которых 4 снайперские, наудачу выбирается одна и из нее производится выстрел. Найти вероятность того, что стрелок поразит цель, если вероятность попадания из снайперской винтовки 0,96, а из обычной – 0,6.
29. Имеются две коробки. В первой лежит N + 3 фиолетовых и 5 черных карандашей, а во второй – 4 фиолетовых и N + 8 черных карандашей. Из первой коробки во вторую перекладывают один карандаш. Какова вероятность после этого вынуть фиолетовый карандаш из второй коробки?
30. Имеются три коробки. В первой лежит N + 2 красных и N + 2 синих карандаша. Во второй – N + 1 красных и N + 1 синих карандаша. В третьей – 5 красных и 3 синих карандаша. Выбирается наугад одна из коробок и вынимается из нее карандаш. Найти вероятность того, что этот карандаш красный.
31. Имеются три коробки. В первой лежит 1 красный и N синих карандашей. Во второй – N красных и 1 синий карандаш. В третьей – 4 красных и 2 синих карандаша. Выбирается наугад

одна из коробок и вынимается из нее карандаш. Найти вероятность того, что этот карандаш синий.

32. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02N%, для сторого 0,03N%, для третьего 0,04N%. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в 3 раза больше, чем второго, а третьего в 2 раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?
33. Имеются две одинаковые коробки, первая из которых содержит 10 зеленых счетных палочек и N + 8 синих, а вторая – N = 10 зеленых и 15 синих счетных палочек. Сначала наугад выбирается коробка, а потом из нее извлекается наугад одна палочка. Какова вероятность того, что будет выбрана синяя палочка?
34. Радиолампа может принадлежать к дной из трех партий с вероятностями 0,2, 0,3, 0,5. Вероятность того, что лампа проработает заданное число часов, для этих партий соответственно равна 0,9, 0,8, 0,1N. Определить вероятность того, что радиолампа проработает заданное число часов.
35. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит (N+15)% телевизоров со скрытым дефектом, второго – (N+10)%, и третьего (N+5)%. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30% телевизоров с первого завода, 20% - со второго завода, 50% - с третьего?

1.2.10. Задание 10

Решить задачу, используя формулу Байеса

1. Вероятность поражения самолета при одиночном выстреле для первого ракетного расчета равна $0.02\cdot(N + 1)$, а для второго – $0.03\cdot(N + 1)$. Каждое из орудий производит по одному выстрелу, причем зарегистрировано одно попадание в самолет. Какова вероятность, что удачный выстрел принадлежит первому расчету?

2. Каждый из танков независимо сделал выстрел по некоторому объекту. Вероятность поражения цели первым танком равна 0.7, вторым – $0.1 \cdot N$. Объект поражен одним попаданием. Определить вероятность того, что объект поражен вторым танком.
3. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Сама проверка такова, что с вероятностью 0,9 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность $0.01 \cdot (N + 1)$ того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?
4. На склад поступает продукция трех фабрик, приче продукция первой фабрики составляет $(20+2N)$%, второй – 46%, остальные – третьей. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен $3N$%, для второй – $2N$%, для третьей – N%. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.
5. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении $N + 1$, $N + 2$, $N + 3$, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3. Прибор, приобретенный научно-исследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что данный прибор произведен первым заводом (марка завода на приборе отсутствует)?
6. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в $N+1$ раз превышает объем продукции второго завода. Вероятности брака на первом заводе 0,05, на втором заводе – 0,01. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что деталь изготовлена первым заводом?
7. В группе из $N + 25$ человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 – удовлетворительно, а остальные – плохо подготовлены. Отличники знают все 30 вопросов программы, хорошо подготовленные – $N + 20$, подготовленные удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен отлично или хорошо.

8. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны $0{,}01\cdot N$, $0{,}01\cdot(N+1)$, $0{,}01\cdot(N+2)$. Какова вероятность того, что второй стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?
9. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна $0{,}01\cdot(N+2)$, второго – $0{,}01\cdot(N+5)$. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказал только первый узел.
10. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 10N изделий изготовлено первым автоматом, 30+N - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 2N%, второго – 3N%. Найти вероятность того, что случайно выбраное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.
11. В урне лежат N шаров неизвестного цвета – с равной вероятностью белые или черные. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что в урне белые шары?
12. В пирамиде N + 10 винтовок: N + 5 снабжены оптическим прицелом, а остальные – без оптического прицела. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом?
13. Для приема зачета преподаватель подготовил N + 50 задач: N + 20 из дифференциального исчисления; N + 15 из интегрального исчисления, а остальные - по теории вероятностей. Для сдачи зачета студент должен решить первую доставшуюся наугад задачу. Известно, что студент сдал зачет. Определить вероятность того, что он решил задачу по теории вероятно-

стей, если он умеет решать из предложенного списка задач 18 из дифференциального исчисления, 10 из интегрального и 5 по теории вероятностей.

14. В группе из N + 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 – удовлетворительно, а остальные – плохо подготовлены. Отличники знают все 30 вопросов программы, хорошо подготовленные – N + 20, подготовленные удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен удовлетворительно.
15. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны $0{,}01\cdot(N + 1)$, $0{,}01\cdot(N + 2)$, $0{,}01\cdot(N + 3)$. Какова вероятность того, что первый стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?
16. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна $0{,}01\cdot(N+3)$, второго – $0{,}01\cdot(N+4)$. За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказали оба узла.
17. Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90 % (т.е. 10% носителей туберкулёза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулёз, составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным $(0{,}01\cdot N)$%. Какова вероятность того, что человек признанный больным, действительно является носителем туберкулёза?
18. В пирамиде N + 12 винтовок: N + 7 снабжены оптическим прицелом, а остальные – без оптического прицела. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,9; для винтовки без оп-

тического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Какова вероятность того, что стрелок стрелял из винтовки без оптического прицела?

19. В одной студенческой группе обучаются N + 20 студентов, во второй – N + 15, а в третьей – N + 25. На экзамене по математике получили оценку «отлично» N + 1 студент первой группы, N + 1 студент второй группы и N + 3 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим оценку «отлично». Какова вероятность того, что он учится в первой группе?
20. В группе из N + 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 – удовлетворительно, а остальные – плохо подготовлены. Отличники знают все 30 вопросов программы, хорошо подготовленные – N + 20, подготовленные удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти вероятность того, что студент подготовлен плохо.
21. Три стрелка производят по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для каждого из стрелков соответственно равны 0,01·(N+2), 0,01·(N+3), 0,01·(N +4). Какова вероятность того, что третий стрелок промахнулся, если после выстрелов в мишени оказалось две пробоины?
22. Прибор состоит из двух последовательно включенных узлов. Надёжность (вероятность безотказной работы в течение времени T) первого узла равна 0,01·(N+3), второго – 0,01·(N+6). За время испытания прибора в течение времени T зарегистрирован отказ прибора. Найти вероятность того, что отказал только второй узел.
23. Противотанковая батарея состоит из N + 10 орудий, причём для первой группы из N + 6 орудий вероятности того, что при одном выстреле произойдет недолет, попадание или перелет, равны соответственно 0,1; 0,7; 0,2. Для каждого из остальных орудий вероятности тех же событий равны соответственно 0,2; 0,6; 0,2. Наудачу выбранное орудие произвело три выстрела по цели, в результате чего было зафиксировано одно попада-

ние, один недолет, один перелет. Какова вероятность того, что стрелявшее орудие принадлежит второй группе?

24. В урне лежат N шаров неизвестного цвета – с равной вероятностью белые или черные. В урну опускается один белый шар и после тщательного перемешивания наудачу извлекается один шар. Он оказался белым. Какова вероятность того, что первоначально в урне находились только черные шары?
25. В пирамиде N + 15 винтовок: N + 5 снабжены оптическим прицелом, а остальные – без оптического прицела. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,96; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,85. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?
26. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить N + 30 вопросов. Из N + 25 студентов N + 10 подготовили все вопросы, восемь – N + 12 вопросов, а остальные 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что этот студент подготовил все вопросы.
27. В группе N + 15 девочек и N + 10 мальчиков. К занятию не выполнили домашнюю работу N + 2 девочки и N + 3 мальчика. Наудачу вызванный студент оказался неподготовленным к занятию. Какова вероятность того, что вызвали мальчика?
28. Две перфораторщицы набили на разных перфораторах по одинаковому количеству перфокарт. Вероятность того, что первая перфораторщица допустит ошибку, равна 0,01·(N + 2), для второй перфораторщицы эта вероятность равна 0,01·(N + 1). При сверке перфокарт была обнаружена ошибка. Найти вероятность того, что ошиблась первая перфораторщица(предполагается, что оба перфоратора были исправны).
29. В больницу поступают (N + 50)% больных с заболеванием желудка, (N +10)% - с заболеванием печени, а остальные – с заболеванием почек. Вероятность полного излечения болезни желудка равна 0,1·N, для болезней печени и почек эти вероятности соответственно равны 0,7 и 0,8. Больной, поступивший

в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием печени.

30. Имеются три одинаковых ящика. В первом ящике N + 10 белых шаров, во втором – N + 12 белых и N + 11 черных шаров, а в третьем ящике – 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули черный шар. Какова вероятность того, что шар вынут из третьего ящика?
31. В группе N + 10 девочек и N + 12 мальчиков. К занятию не выполнили домашнюю работу N + 8 девочек и N + 9 мальчиков. Наудачу вызванный студент оказался неподготовленным к занятию. Какова вероятность того, что вызвали мальчика?
32. Для приема зачета преподаватель подготовил N + 40 задач: N + 15 из теории рядов; N + 15 из векторной алгебры, а остальные - по статистике. Для сдачи зачета студент должен решить первую доставшуюся наугад задачу. Известно, что студент сдал зачет. Определить вероятность того, что он решил задачу из теории рядов, если он умеет решать из предложенного списка задач 10 из теории рядов, 10 – из векторной алгебры и 5 по статистике.
33. В одной группе обучаются N + 18 студентов, во второй – N + 10, а в третьей – N + 20. На экзамене по математике получили оценку «удовлетворительно» N + 10 студентов первой группы, N + 2 студента второй группы и N + 2 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим оценку «удовлетворительно». Какова вероятность того, что он учится в третьей группе?
34. Имеются две одинаковые урны. В первой урне N + 10 белых и N + 7 черных шаров, а во втором – N + 5 белых и N + 6 черных. Наудачу выбирается урна, а из нее один шар. Этот шар оказался черным. Какова вероятность того, что шар вынут из второй урны?
35. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить N + 30 вопросов. Из N + 20 студентов N + 8 подготовили все вопросы, десять студентов – N + 15 вопросов, а остальные – 15 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на поставленный вопрос. Найти вероятность того, что этот студент подготовил 15 вопросов из N + 30.

2 Примеры выполнения заданий

Большую трудность при решении задач по теории вероятностей вызывают задания с использованием понятий комбинаторики. Кроме того есть некоторые типы задач также вызывающие определенные затруднения. Поэтому рассмотрим примеры решения некоторых комбинаторных задач и наиболее сложные задачи.

2.1 Пример 1

Сколькими способами читатель может выбрать три книжки из 5?

Решение. Определение. Пусть имеется множество, состоящее из *n* элементов. Каждое его подмножество, содержащее *k* элементов, называется сочетанием из *n* элементов по *k* элементов.

Таким образом, сочетания из n элементов по k элементов – это все k – элементные подмножества n – элементного множества, причем различными подмножествами считаются только те, которые имеют неодинаковый состав.

Так по условию задачи имеется множество, состоящее из 5 книг. Читателю неважно, в каком порядке их брать, важно только их количество – 3. Следовательно, нам необходимо найти число сочетаний из 5 элементов по три элемента.

Так как число сочетаний находится по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

то искомое число способов будет равно $C_5^3 = \frac{5!}{2!3!} = 10$.

Ответ: 10 способов.

2.2 Пример 2

В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого *n* – угольника, если никакие 3 из них не пересекаются в одной точке?

Решение. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствует 4 вершины *n* – угольника, а каждым 4 вершинам *n* – угольника соответствует 1 точка пересечения (точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных точках). Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, которыми среди *n* вершин можно выбрать 4 вершины:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Ответ: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ способов.

2.3 Пример 3

Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, ... ,2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

Решение. Определение. Множество называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие некоторое число (номер элемента) от 1 до *n*, где *n* – число элементов множества, так что различным элементам соответствуют различные числа.

Определение. Различные упорядоченные множества, которые отличаются лишь порядком элементов (т.е. могут быть получены из того же самого множества), называются перестановками этого множества.

Число перестановок множества из n элементов P_n равно

$P_n = n!$

Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест *n*) $n!$ способами; каждому способ размещения четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов размещения нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому общее число перестановок указанного типа равно $n! \cdot n! = (n!)^2$.

Ответ: $(n!)^2$ способов.

2.4 Пример 4

Сколько можно составить перестановок из n элементов, в которых данные два элемента не стоят рядом?

Решение. Определим число перестановок, в которых данные два элемента a и b стоят рядом. Могут быть следующие случаи: a стоит на первом месте, a стоит на втором месте, . . ., a стоит на $(n - 1)$ – месте, а b стоит правее a; число таких случаев равно $n - 1$. Кроме того, a и b можно поменять местами, и, следовательно, существует $2(n - 1)$ способов размещения a и b рядом. Каждому из этих способов соответствует $(n - 2)!$ Перестановок других элементов. Следовательно, число перестановок, в которых a и b стоят рядом, равно $2\cdot(n - 1)\cdot(n - 2)! = 2\cdot(n - 1)!$. Поэтому искомое число перестановок равно

$$n! - 2\cdot(n - 1)! = (n - 1)!\cdot(n - 2).$$

Ответ: $(n - 1)!\ (n - 2)$ способов.

2.5 Пример 5

В классе 30 учащихся. Сколькими способами могут быть выбраны комсорг и староста, если каждый учащийся может быть избран на одну из этих должностей?

Решение. Определение. Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется размещением из n элементов по k элементов.

Из определения вытекает, что размещения из n элементов по k элементов – это все k – элементные подмножества, отличающиеся или составом элементов или порядком их следования.

Из условия задачи ясно, что, если два ученика избраны на должности комсорга и старосты, то, поменяв порядок избрания, мы получим другую комбинацию выборов. Следовательно, нам необходимо найти число способов, равное числу размещений из 30 элементов по 2:

$$A_{30}^{2} = \frac{30!}{(30-2)!} = \frac{30!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870.$$

Ответ: 870 способов.

2.6 Пример 6

Предположим, что надежность определения туберкулеза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 95 % (т.е. 5% носителей туберкулёза остаются неопознанными). Вероятность того, что у здорового человека будет ошибочно определен туберкулёз, составляет 1%. Просвечиванию была подвергнута большая группа людей со средним процентом больных, равным 0,8%. Какова вероятность того, что человек признанный больным, действительно является носителем туберкулёза?

Решение. Событие А – человек признан больным.

Гипотезы:

B_1 – человек является носителем туберкулеза.

B_2 – человек здоров.

Используя условие задачи, имеем следующие значения вероятности:

$P(B_1) = 0{,}008$ $P(B_2) = 1 - 0{,}008 = 0{,}992$

$P(A/B_1) = 0{,}95$ $P(A/B_2) = 0{,}01$

По формуле полной верояности находим Р(А).

$P(A)=P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) = 0{,}95 \cdot 0{,}008 + 0{,}01 \cdot 0{,}992 =$

$= 0{,}0175$

По формуле Байеса находим искомую вероятность:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}95 \cdot 0{,}008}{0{,}0175} = 0{,}43.$$

Ответ: вероятность того, что человек признанный больным, действительно является носителем туберкулёза, равна 0,43.

3 Контрольные вопросы

1. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
2. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
3. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
4. Дайте определение полной группы событий.
5. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
6. Дайте определение относительной частоты.
7. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
8. Сформулируйте теоремы о вероятности суммы двух совместных, несовместных событий.
9. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
10. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
11. Приведите формулу Байеса.

Список рекомендуемой литературы

1. Вентцель Е. С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. М.:1986.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2002.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк., 2002.
4. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. М.: Наука, 1978.
5. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2007.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________О.Г. Локтионова
«30» июня ______2016 г.

Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений

Индивидуальные задания к модулю

Курск 2016

УДК 512.64

Составители: Е.А. Бойцова, Т.В. Шевцова

Рецензент:
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
высшей математики *Л.И. Студеникина*

Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А. Бойцова, Т.В. Шевцова. – Курск, 2016. – 26 с.: табл. 4. Библиогр.: с. 26.

Представлены индивидуальные задания, состоящие из теоретических упражнений и практических заданий по разделу математики «Линейная алгебра», и даны примеры выполнения типовых заданий.

Индивидуальные задания предназначены для студентов технических и экономических специальностей и направлений подготовки дневной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ_____. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Данная методическая разработка предназначена для организации самостоятельной работы студентов, изучающих алгебру в качестве отдельной дисциплины или как раздел в курсе математики или высшей математики. Она является составной частью рейтинговой интенсивной технологии модульного обучения, действующей в Юго-Западном государственном университете.

В разработке содержатся теоретические упражнения, практические задания и контрольные вопросы по следующим темам: вычисление определителей матриц, действия над матрицами, решение и исследование систем линейных уравнений.

Теоретические упражнения представлены в 35 вариантах, что должно обеспечить заданиями всех студентов конкретной группы. Практические упражнения даны в 50 вариантах, выбор номера варианта осуществляется согласно номеру n в журнале. Количество вариантов практических заданий больше, чем теоретических. Это сделано для того, чтобы студенты имели возможность использовать методическую разработку не только для отчета по соответствующей теме во время текущего контроля, но и при подготовке к итоговому контролю.

Контрольные вопросы даны для самопроверки теоретических знаний студентов.

Список литературы в конце данной разработки отражает некоторые учебные пособия, которые рекомендуется использовать при выполнении модуля.

Индивидуальные задания

Теоретические упражнения

1. На основе понятия инверсии вывести формулу для вычисления определителя квадратной матрицы 2-го порядка.
2. На основе понятия инверсии вывести формулу для вычисления определителя квадратной матрицы 3-го порядка.
3. Доказать, что число различных чётных перестановок порядка n равно числу нечётных.
4. Перечислить все перестановки 4-го порядка с $0,1,2,3,4,5$ и 6 инверсиями (сгруппировать по числу инверсий).
5. Определить знак, с которым в определитель 4-го порядка входит произведение $a_{21}a_{45}a_{34}a_{53}a_{12}$.
6. Доказать, что всякая транспозиция символов в перестановке меняет четность перестановки.
7. Доказать, что существует ровно $n!$ перестановок n элементов.
8. Среди перестановок порядка n указать перестановку с наибольшим числом инверсий.
9. Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если эта матрица содержит нулевую строку.
10. Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если эта матрица содержит две одинаковые строки.
11. Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если эта матрица содержит две пропорциональные строки.
12. Доказать, что определитель матрицы меняет знак на противоположный при перестановке двух строк матрицы.
13. Доказать, что определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы.
14. Доказать, что если все элементы какой-либо строки определителя умножить на любое число k, то величина определителя изменится в k раз.

15. Доказать, что если определитель матрицы равен нулю, то одну из ее строк можно представить в виде суммы других строк с некоторыми коэффициентами.
16. Доказать, что определитель произведения квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению определителей этих матриц.
17. Доказать, что если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей: в первом из которых элементы отмеченной строки равны первым слагаемым, а во второй – вторым.
18. Доказать теорему анулирования: сумма произведений элементов некоторой строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.
19. Доказать, что для любых матриц A, B, C для которых определены $A\cdot B$ и $B\cdot C$, имеет место равенство: $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$, то есть доказать ассоциативность операции умножения матриц.
20. Доказать, что для любых матриц A, B, C для которых определены $A\cdot B$ и $A\cdot C$, имеют место равенства: $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$, то есть доказать левую и правую дистрибутивность операции умножения относительно сложения.
21. Доказать, что для любых матриц A и B, для которых определено произведение $A\cdot B$, имеет место равенство: $(A\cdot B)^{t}=B^{t}\cdot A^{t}$.
22. Матрица A называется симметрической, если $A=A^{t}$, и кососимметрической, если $A=-A^{t}$ Доказать, что любую квадратную матрицу можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.
23. Доказать, что если A, B – квадратные матрицы одного и того же порядка, то сумма коэффициентов по главной диагонали для матриц $A\cdot B$ и $B\cdot A$ одинакова.
24. Вывести формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.
25. Доказать, что всякую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.

26. Доказать, что ранг суммы матриц не более суммы рангов слагаемых.
27. Доказать, что вырожденная матрица не обратима.
28. Доказать, что ранг произведения матриц не выше любого из рангов сомножителей.
29. Доказать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
30. Вывести формулу для нахождения матрицы, обратной матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
31. Доказать, что если для любой квадратной матрицы X и некоторой квадратной матрицы A выполняется равенство: $A \cdot X = X \cdot A$, то $A = \lambda \cdot E$ для некоторого λ, где E – единичная матрица соответствующего порядка.
32. Квадратная матрица A называется ортогональной, если выполняется равенство: $A \cdot A^{t} = E$, где E – единичная матрица Доказать, что произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.
33. Квадратная матрица A называется ортогональной, если выполняется равенство: $A \cdot A^{t} = E$, где E – единичная матрица. Доказать, что матрица, обратная ортогональной, также есть ортогональная матрица.
34. Доказать, что если A и B –квадратные матрицы одного и того же порядка и $A \cdot B = E$, то $B \cdot A = E$, где E –единичная матрица.
35. Доказать, что множество решений системы линейных уравнений не меняется при следующих элементарных преобразованиях расширенной матрицы системы:

    а) перестановка строк;

    б) умножение строки на число не равное нулю;

    в) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число;

    г) перестановка столбцов, исключая последний (при этом меняются местами соответствующие неизвестные системы).

Практические задания

Задание 1

Найти значение выражения $(n-10)\cdot A + B\cdot C$, если n нечетно, и значение выражения $C\cdot B-(n-10)\cdot A$, если n нечетно.

Матрицы A, B, C взять из таблицы 1 согласно числу n, которое определяется номером студента по списку в журнале.

Таблица 1

n	*A*	*B*	*C*
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
9	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
19	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
29	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
34	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
35	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
36	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
38	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
39	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
40	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
41	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
42	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
43	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
44	$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
45	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
46	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 2 \\ -5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
47	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	*A*	*B*	*C*
48	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
49	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
50	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2

Найти определитель матрицы *A* по правилу треугольников.

Матрицу A взять из таблицы 2.

Таблица 2

n	*A*	*B*	*n*	*A*	*B*
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

9	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

n	A	B	n	A	B
27	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$
35	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$	38	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$
39	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$	40	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
41	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	42	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
43	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	44	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

n	A	B	n	A	B
45	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	46	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$
47	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	48	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
49	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$	50	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Задание 3

Найти матрицу, обратную матрице A. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Матрицу A взять из таблицы 2.

Задание 4

Записать систему линейных уравнений, соответствующую уравнению в матричной форме:

$A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Решить полученную систему методом Крамера.

Матрицы A и B взять из таблицы 2. Значение главного определителя матрицы взять из решения задания 2.

Задание 5

Полученную в задании 4 систему линейных уравнений решить методом обратной матрицы.

Обратную матрицу взять из решения задания 3.

Задание 6

Полученную в задании 4 систему линейных уравнений решить методом Гаусса.

Задание 7

Вычислить определитель 4-го порядка, пользуясь элементарными преобразованиями.

Определитель взять из таблицы 3

Таблица 3

n	$\lvert A\rvert$	n	$\lvert A\rvert$	n	$\lvert A\rvert$
1	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 9 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ 7 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

Таблица 3

13	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 & 3 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
31	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	32	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	33	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Продолжение таблицы 3

34	$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	35	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	36	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
37	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	38	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 3 \end{vmatrix}$	39	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
40	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	41	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 9 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	42	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
43	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	44	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	45	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$
46	$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	47	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	48	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ -9 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
49	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	50	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$		

Задание 8

Выразить матрицу X через матрицы A, B,C и D из матричного уравнения. Найти матрицу X.

Матричное уравнение и матрицы A, B и C приведены в таблице 4

Таблица 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
1	$A\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\-2&-1\end{pmatrix}$
2	$(A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\-4&2\end{pmatrix}$
3	$A\cdot X+B=C$	$\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&1\\2&-2\end{pmatrix}$
4	$X\cdot A+X=B+C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}$
5	$A^{-1}\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}5&1\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\-5&2\end{pmatrix}$
6	$A+X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&1\\-3&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\-5&1\end{pmatrix}$
7	$A\cdot X+X=B+C$	$\begin{pmatrix}-2&2\\3&-6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&-1\\-5&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-4\\3&0\end{pmatrix}$
8	$A\cdot X\cdot B^{-1}=-C$	$\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&1\\5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$
9	$A\cdot X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&7\\-1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$
10	$A^{-1}\cdot X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-3\\1&4\end{pmatrix}$
11	$X\cdot A-B=C$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-3\\5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\4&-2\end{pmatrix}$
12	$X\cdot A+X=B+C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-2\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&4\\-3&1\end{pmatrix}$
13	$A\cdot X+2B=C$	$\begin{pmatrix}7&2\\4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$
14	$A\cdot X\cdot B^{-1}=C$	$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&1\\5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&1\\2&-1\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
15	$A \cdot X \cdot B = -3C$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
16	$A - X \cdot B = C$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
17	$X \cdot A + B = C$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
18	$A \cdot X + B = 2C$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$
19	$A \cdot (X + B) = C$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$
20	$(A + B) \cdot X = C$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$
21	$A \cdot X + 3B = C$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$
22	$A + X \cdot B = -C$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$
23	$(2A - B) \cdot X = C$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
24	$X \cdot A - 2B = C$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$
25	$A \cdot X + X = B - C$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
26	$X \cdot A + B = C$	$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
27	$(A + B) \cdot X = -C$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
28	$A^{-1}\cdot X\cdot B=2C$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 4\end{pmatrix}$
29	$A\cdot X\cdot B=2C$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$
30	$A\cdot X-B=C$	$\begin{pmatrix}-2 & 7\\ -1 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$
31	$X\cdot(A-B)=C$	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 1 & -5\end{pmatrix}$
32	$(2A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 3 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 8 & 2\end{pmatrix}$
33	$A\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
34	$X\cdot A+X=B-C$	$\begin{pmatrix}2 & 7\\ 2 & 4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
35	$X\cdot(A+B)=C$	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 4 & 2\end{pmatrix}$
36	$A+X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$
37	$X\cdot A-X=B+C$	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -2\\ -5 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -3\end{pmatrix}$
38	$A\cdot(X+B)=-C$	$\begin{pmatrix}7 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
39	$X\cdot A-B=2C$	$\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}$
40	$(A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
41	$A\cdot X\cdot B=3C$	$\begin{pmatrix}3 & -7\\ -2 & 5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$
42	$X\cdot(A-B)=C$	$\begin{pmatrix}-5 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$
43	$A\cdot(X-B)=-C$	$\begin{pmatrix}7 & 2\\ -4 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
44	$X\cdot A+2B=C$	$\begin{pmatrix}6 & -1\\ -5 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$
45	$A^{-1}\cdot X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4 & -1\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
46	$X\cdot A-X=B+C$	$\begin{pmatrix}7 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 5 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & -3\end{pmatrix}$
47	$A\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -3 & -5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$
48	$X\cdot(A+B)=C$	$\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3 & 0\\ -2 & -2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -5\end{pmatrix}$
49	$A\cdot X+B=3C$	$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$
50	$A\cdot(X+B)=-C$	$\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.
2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?
3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?
4. Что такое перестановка порядка n?
5. Что такое инверсия?
6. Какие перестановки называются чётными, какие нечётными?
7. Сколько существует различных перестановок порядка n, сколько из них чётных?
8. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.
9. В чём заключается правило треугольников?
10. Перечислить свойства определителей.
11. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?
12. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?
13. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?
14. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
15. Сформулировать лемму о транспонировании произведения матриц.
16. Какие системы называются эквивалентными?
17. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?
18. Как записать и решить систему в матричной форме?
19. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.

20. Написать формулы Крамера.

21. Что такое элементарные преобразования матрицы?

22. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

23. Как найти определитель матрицы методом Гаусса?

24. Как найти обратную матрицу методом Гаусса?

25. Как найти ранг матрицы методом Гаусса?

26. Как методом Гаусса определить, будет ли система совместной или нет, определённой или нет?

27. Как записать базисное множество решений неопределённой

системы?

28. Какие неизвестные называются главными, какие свободными?

29. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

30. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?

Список рекомендуемой литературы

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра [Текст]: учеб. пособие – СПб.: Лань, 2008. – 392 с.
2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра [Текст]: учебник в 2-х т. Т I , – М.: ГелиосАРВ, 2003. – 336 с.
3. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра [Текст]: Учебник в 2-х т. Т II – М.: ГелиосАРВ, 2003. – 416 с.
4. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник для вузов – М.: Проспект, 2011. – 608 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра [Текст]: учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
6. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел [Текст]: учеб. Пособие – М.: Высшая школа, 2002. – 559 с.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учебник для вузов – М.: Физматгиз, 2007. – 432 с.

(11)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г.Локтионова
«___» __________ 2014г.

Векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля

Курск 2014

УДК 514.12

Составитель А.В.Бойков

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики *Дмитриев В.И.*

Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.В.Бойков. Курск, 2014. 30 с. табл. 3. Ил.: 2, Библиогр.: с.30.

Методические указания отражают требования образовательных стандартов 3-го поколения подготовки бакалавров и специалистов по техническим специальностям. Работа содержит теоретические индивидуальные упражнения, практические индивидуальные задания, контрольные вопросы, указания к использованию ЭВМ, рекомендуемую литературу по темам “Векторная алгебра” и “Аналитическая геометрия”.

Предназначены для студентов технических специальностей

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л.1,75. Уч.-изд. л.1,58. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студента. В Юго-Западном государственном университете самостоятельная работа студентов организуется на основе положения о бально-рейтинговой системе оценки качества освоения основных образовательных программ и имеет модульную структуру. Опыт нашего и других вузов показывает, что эта система активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса математики.

Предлагаемые методические указания являются пособием к одному из модулей этой системы. Методические указания посвящены разделам “Векторная алгебра” и “Аналитическая геометрия” (до тем кривые и поверхности второго порядка) и содержат индивидуальные задания (теоретическое упражнение и практические задания), контрольные вопросы, рекомендуемую литературу, указания к использованию ЭВМ (Mathcad) при выполнении заданий модуля. Указания по выполнению заданий модуля приводятся в пособии [7].

Предусмотрены три уровня сложности заданий модуля. Студенту предлагается выполнить одно теоретическое упражнение и некоторое количество практических заданий, в зависимости от выбранного им (или преподавателем) уровня сложности (или направления подготовки):

первый уровень - №№ 3-5, 8, 9(а,б), 11(а,б);
второй уровень - №№ 1-9, 11(а-е,и-л);
третий уровень - №№ 1-12.

1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбор индивидуального задания к модулю-2 осуществляется по номеру варианта студента n. При этом используются параметр $P_к$ − остаток от деления номера варианта n на число к, и выражение $[n / k]$ − целая часть от деления n на k. Например, если $n = 7$, то $P_2=1$, $P_3=1$, $P_4=3$, $P_5=2$, $P_6=1$, $P_7=0$, $P_8=7$, $P_9=7$ и т.д. Если $n = 7$ и $к = 4$, то $[n/k] = [7/4] = 1$.

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

Выполнить теоретическое упражнение номер m, где $m = P_{30} + 1$.

1. Сформулировать и доказать свойства проекции вектора на ось.
2. Записать и доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек “начала” и “конца” вектора.
3. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
4. Записать и доказать формулы, выражающие координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении, через координаты концов этого отрезка.
5. Записать и доказать формулы для длины и направляющих косинусов вектора, выражающие эти величины через декартовы координаты вектора.
6. Доказать свойства скалярного произведения векторов.
7. Записать и доказать формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их декартовы координаты.
8. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
9. Записать и доказать формулы для косинуса угла между двумя векторами в пространствах V_2 и V_3.
10. Доказать свойство $[\vec{a};\vec{b}] = -[\vec{b};\vec{a}]$ векторного произведения векторов.
11. Используя свойства векторного произведения, доказать формулу, выражающую векторное произведение векторов через их декартовы координаты.

12. Записать и доказать формулы для вычисления площади параллелограмма и треугольника с помощью векторного произведения векторов.
13. Записать и доказать формулу, выражающую смешанное произведение векторов через их декартовы координаты.
14. Доказать свойства смешанного произведения векторов.
15. Записать и доказать формулы для вычисления объема параллелепипеда и треугольной пирамиды с помощью смешанного произведения векторов.
16. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие компланарности векторов пространства V_3.
17. Доказать, что любая прямая на плоскости имеет уравнение $Ax + By + C = 0$, где $\vec{N} = (A; B)$ нормальный вектор этой прямой.
18. Вывести уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ с угловым коэффициентом k.
19. Доказать, что любая прямая на плоскости имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + m\cdot t, \\ y = y_0 + n\cdot t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $(x_0; y_0)$ − произвольная точка прямой, а вектор $\vec{q} = (m; n)$ – направляющий вектор этой прямой. Записать каноническое уравнение прямой.
20. Доказать, что любая прямая в пространстве имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + k\cdot t, \\ y = y_0 + m\cdot t, \\ z = z_0 + n\cdot t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$, − произвольная точка прямой, а вектор $\overline{q} = (k; m; n)$ − направляющий вектор этой прямой. Записать каноническое уравнение прямой.
21. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными общими уравнениями. Доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.

22. Вывести формулу для тангенса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными уравнениями с угловым коэффициентом. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
23. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными каноническими (параметрическими) уравнениями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
24. Записать и доказать формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве.
25. Записать и доказать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
26. Доказать, что любая плоскость в пространстве имеет уравнение $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0$, где $\vec{N} = (\mathrm{A};\mathrm{B};\mathrm{C})$ нормальный вектор этой плоскости.
27. Вывести уравнение плоскости проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.
28. Вывести формулу для косинуса угла между двумя плоскостями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
29. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми в пространстве, заданными каноническими (параметрическими) уравнениями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
30. Вывести формулу для синуса угла между прямой и плоскостью. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

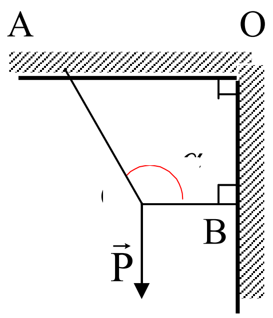
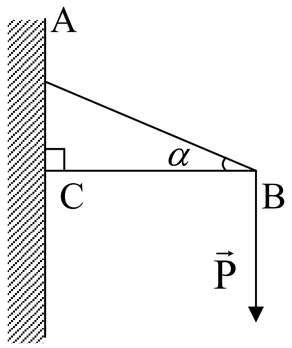
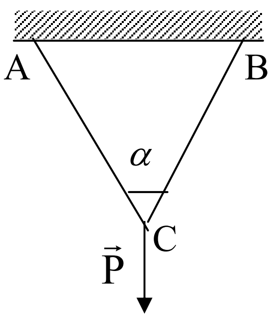
1.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1.2.1. ЗАДАНИЕ 1

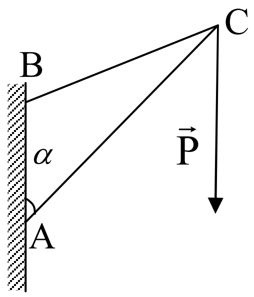
Решить задачу номер m из табл.1.1, где $m = P_4 + 1$.

Таблица 1.1

Индивидуальные условия к заданию 1

№ задачи m	Условие задачи		Угол α
1	2		3
1		К двум тросам подвешен груз $\lvert\vec{P}\rvert = 100$ кГ Определить силы (в кГ), возникающие в тросах, если угол ACB равен α, угол OBC равен 90°	$\alpha = 90^\circ + 2^\circ \cdot ([n/4]+1)$
2		Груз весом $\lvert\vec{P}\rvert = 100$кГ поддерживается двумя стержнями AB и CB. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол ACB равен 90°, угол ABC равен α	$\alpha = 3^\circ \cdot ([n/4] + 1)$
3		К двум тросам AC и BC, одинаковой длины, подвешен груз весом $\lvert\vec{P}\rvert = 100$ кГ. Определить силы (в кГ), возникающие в тросах, если угол ACB равен α	$\alpha = 6^\circ \cdot ([n/4] + 1)$

Продолжение табл. 1.1

1	2	3
4	 Груз весом $\lvert\vec{P}\rvert = 100$ кГ поддерживается двумя стержнями AC и BC. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол BAC равен α, и угол ABC равен 120°	$\alpha = 2^\circ \cdot ([n/4] + 1)$

1.2.2. ЗАДАНИЕ 2

Решить задачу номер m из табл.1.2, где $m = P_5 + 1$

Таблица 1.2

Индивидуальные условия к заданию 2

№ задачи m	Условие задачи
1	2
1	Точка O − точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки B, если $\overrightarrow{AB} = (-1; P_3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; P_5; -2)$, $O(2; -1; P_7)$
2	Точка O − точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки O, если $A(P_3; -1; -2)$, $C(-3; P_5; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 0; P_7)$

Продолжение табл. 1.2

1	2
3	В параллелограмме ABCD точка K − середина стороны CD. Найти координаты точки A, если $\overrightarrow{AK} = (1;-5;P_3)$, $\overrightarrow{BD} = (-2;P_7;-3)$, $B(P_5;0;7)$
4	В параллелограмме ABCD точка O − точка пересечения диагоналей. Найти координаты точки K, − середины стороны AD, если $B(P_3;\ P_5;\ P_7)$, $C(-2;1;-3)$, $O(4;0;-1)$
5	В трапеции ABCD стороны AB и CD - основания, Точка $N(P_7;P_3;P_5)$ − середина стороны BC. Найти координаты точки A, если $\overrightarrow{AB} = (8;12;-4)$, $\overrightarrow{CD} = (-2;-3;1)$, $\overrightarrow{AD} = (5;0;7)$

1.2.3. ЗАДАНИЕ 3

Даны три силы: $\vec{F}_1 = P_2\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} - 7\cdot\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\cdot\vec{i} + P_3\cdot\vec{j} + 4\cdot\vec{k}$ и $\vec{F}_3 = -2\cdot\vec{j} + P_5\cdot\vec{k}$. Найти равнодействующую $\vec{R}$ сил $(-\vec{F}_1), \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_0(0;1;P_7)$ в положение $M(P_6;0;1)$.

1.2.4. ЗАДАНИЕ 4

Сила $\vec{F} = (P_3;P_5;-2)$ приложена к точке $C(P_4;-1;P_7)$. Определить величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

1.2.5. ЗАДАНИЕ 5

Найти ненулевой вектор ортогональный векторам $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -3)$ и $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$. Сделайте проверку.

1.2.6. ЗАДАНИЕ 6

Даны точки: $A(-1;-P_3; 2)$, $B(P_5; 2; 0)$ и $C(P_5\cdot(P_3+2); P_3^2 + 3\cdot P_3 + 4; P_8 - 2\cdot(P_3+1))$. Образуют ли эти точки треугольник?
Если да, то чему равна его площадь?
Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

1.2.7. ЗАДАНИЕ 7

Даны точки: $A(1; -P_2; -1)$, $B(1-P_3; 0; 1)$, $C(-1; 1; P_5-2)$, $D(P_2; P_4; P_8)$. Образуют ли эти точки пирамиду?
Если да, то чему равен объём пирамиды?
Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

1.2.8. ЗАДАНИЕ 8

Даны точки $A(-1-P_7; P_5-2)$ и $B(P_5-2; P_5+4)$. Найти:
а) точку $C(x_1; y_1)$ − середину отрезка AB;
б) точку $D(x_2; y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $(P_9+1):(9-P_9)$.

1.2.9. ЗАДАНИЕ 9

На плоскости даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Координаты точек взять в табл. 1.3.

Сделайте чертёж треугольника ABC и найдите:

а) длину и уравнение стороны BC (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);

б) косинус угла A и угол A (в градусах);

в) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC;

г) высоту, проведенную к стороне BC, и её уравнение;

д) уравнение медианы, проведенной к стороне BC;

е) уравнение биссектрисы угла A.

Таблица 1.3

Координаты точек A, B, C к заданию 9

n	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	2	3	4	5	6	7
1	14	−1	−1	7	−7	−1
2	−1	−1	2	−1	2	3
3	−7	−2	7	−2	2	10
4	−1	−1	4	1	−5	−1
5	−5	−2	3	13	−5	7
6	−1	6	−1	−2	5	−2
7	8	−6	8	1	−4	10
8	−5	−6	11	6	0	6
9	−2	1	2	−2	6	1
10	−3	−11	5	4	−3	10
11	5	−7	5	7	−7	2
12	9	−4	−3	5	−3	1
13	8	7	−1	7	−7	−1
14	15	9	8	9	−1	−3
15	1	−9	1	2	−11	7
16	4	2	−5	14	−14	2
17	−3	−1	12	7	−9	7
18	9	9	−5	9	0	−3
19	−9	3	−9	−5	6	−5
20	−7	−3	−7	1	5	6
21	6	−6	−2	9	−2	0
22	−2	8	3	−4	8	8
23	−1	−1	8	11	−8	−1
24	−7	12	−7	1	5	−4

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5	6	7
25	1	3	7	3	4	7
26	−6	13	−14	7	−6	−8
27	2	10	−7	−2	7	−2
28	−5	−1	−1	−1	4	11
29	−5	12	7	−4	7	12
30	8	−3	14	5	−1	−3
31	−1	2	5	−6	11	2
32	0	0	12	−9	0	7
33	8	−7	13	5	−3	−7
34	12	7	−9	7	−3	−1
35	−3	−8	−8	4	−3	16
36	−7	2	5	−7	5	7
37	5	9	−4	9	−4	−3
38	−1	7	−7	−1	8	7
39	8	11	−8	−1	−1	−1
40	5	−4	−7	12	−7	1
41	−3	−1	1	−1	1	2
42	−7	−1	14	−1	−1	7
43	−5	9	0	−3	9	9
44	14	−9	−1	−1	14	7
45	5	6	−7	−3	−7	1
46	−2	9	−2	0	6	−6
47	11	6	0	6	−5	−6
48	−4	10	8	−6	8	1
49	−3	−3	5	3	13	−3
50	−2	7	2	7	7	−5
51	−6	−8	−6	13	−14	7
52	7	−5	−2	7	2	7
53	−1	−2	3	1	−1	4
54	−5	7	−5	−2	3	13
55	−3	−6	9	−1	−3	8
56	1	1	−11	1	−11	−8
57	12	−9	0	7	0	0
58	1	2	−11	7	1	−9
59	−3	−2	5	13	13	−2
60	5	4	−3	10	−3	−11
61	5	7	−7	2	5	−7
62	14	5	−1	−3	8	−3
63	13	5	−3	−7	8	−7
64	−4	−6	8	−6	8	−1

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5	6	7
65	−1	−3	15	9	8	9
66	−1	7	−7	−1	14	−1
67	−2	0	6	−6	−2	9
68	7	−2	1	−10	7	−18
69	0	−3	9	9	−5	9
70	−3	5	−3	1	9	−4
71	7	1	−7	−5	1	−5
72	0	6	−5	−6	11	6
73	8	1	−4	10	8	−6
74	−8	−6	4	−1	−8	4
75	−3	8	−3	−6	9	−1
76	−11	7	1	−9	1	2
77	−14	7	−6	−8	−6	13
78	−1	−3	8	−3	14	5
79	−6	10	−6	−8	6	1
80	−9	7	−3	−1	12	7
81	0	7	0	0	12	−9
82	−7	1	5	6	−7	−3
83	9	−1	−3	8	−3	−6
84	−7	11	9	−1	9	11
85	−3	−7	8	−7	13	5
86	−7	−1	8	7	−1	7
87	2	7	7	−5	−2	7
88	−3	−5	−3	7	−11	1
89	−3	10	−3	−11	5	4
90	4	11	−5	−1	−1	−1
91	3	11	3	−4	11	−4
92	3	13	−5	7	−5	−2
93	−8	−1	−1	−1	8	11
94	2	−5	5	−1	2	3
95	−7	1	5	−4	−7	12
96	7	−2	2	10	−7	−2
97	−13	4	−1	−1	11	4
98	−3	1	9	−4	−3	5
99	−2	1	3	1	3	13
100	8	9	−1	−3	15	9

1.2.10. ЗАДАНИЕ 10

Решить задачу номер n.

1. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудалённую от двух данных точек A(1;1), B(3,0).
2. Найти координаты точки, симметричной точке (2,−4) относительно прямой $4x+3y+1=0$.
3. Найти уравнение диагонали параллелограмма, проходящей через точку пересечения его сторон $x+y-1=0$ и $y+1=0$, если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке P(−1;0).
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2;6) и образующей с осями координат треугольник, который находится во второй четверти и имеет площадь 3 кв.ед.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(−1,2) так, что середина её отрезка, заключённого между параллельными прямыми $x+2y+1=0$ и $x+2y-3=0$ лежит на прямой $x-y-6=0$.
6. Даны уравнения двух сторон треугольника $4x-5y+9=0$ и $x+4y-3=0$. Найти уравнение третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке (3;1).
7. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $2x - y + 4 = 0$ и $2x - y + 10 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + y + 2 = 0$.
8. Составить уравнения сторон треугольника, если точки A(−5;5), B(3;1) - две его вершины, а D(2;5) − точка пересечения его высот.
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-7=0$ и точка пересечения его диагоналей P(0;−1). Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Даны уравнения одной из сторон ромба $x - 3y + 10 = 0$ и одной из его диагоналей $x + 4y - 4 = 0$. Диагонали ромба пересекаются в точке P(0;1). Найти уравнения трех остальных сторон ромба.
11. Уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 2 = 0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин.

12. Даны вершины $A(-3;-2)$ и $B(8;-4)$ трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции равны и точка пересечения диагоналей $O(0,2)$. Найти координаты вершин C и D этой трапеции.
13. Даны вершины $A(2;-2)$ и $B(3;-1)$ и точка $P(1;0)$ пересечения медиан треугольника. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C.
14. Даны уравнения двух высот треугольника $3x + 2y - 34 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ и одна из вершин $A(6;5)$. Составить уравнения сторон.
15. Даны уравнения медиан $2x - 11y + 28 = 0$, $5x + 7y - 22 = 0$ и одна из вершин $(-2;-2)$ треугольника. Составить уравнения сторон.
16. Две стороны треугольника заданы уравнениями $2x + y - 1 =0$ и $x - 3y + 14 =0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение третьей стороны.
17. Даны уравнения сторон треугольника: (AB) $7x - 2y + 32 = 0$; (AC) $x +y + 2 = 0$; (BC) $4x + y - 1 = 0$. Найти точку пересечения его высот.
18. Составьте уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение гипотенузы $3x - y + 11 = 0$ и $C(4;3)$ − вершина прямого угла.
19. В равнобедренном треугольнике известны: уравнение основания $5x + 3y - 53 = 0$, уравнение одной из боковых сторон $x +4y-14 = 0$ и точка на второй боковой стороне $M(3;7)$. Найдите уравнение второй боковой стороны.
20. Одна из сторон квадрата лежит на прямой $x - 5y + 32 = 0$, а одна из вершин находится в точке $M(2;1)$. Найдите уравнения остальных сторон квадрата.
21. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x - 7y + 28 = 0$, концы которого лежат на осях координат.
22. Точки K $(1;3)$ и L $(-1;1)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки P $(3;0)$ и Q $(-3;5)$ лежат на её боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
23. Даны стороны треугольника: (AC) $2x - 15y - 55 = 0$; (AB) $4x - 3y + 25 = 0$; (BC) $14x + 3y - 61 = 0$. Составить урав-

нение прямой, проходящей через вершину C и через точку на стороне AB, делящую ее (считая от вершины A) в отношении 1:4.

24. Точки $B(7;1)$ и $D(9;-3)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин.
25. В треугольнике известны уравнения высоты $x + y - 3 = 0$ и медианы $11x - 4y + 10 = 0$, проведенных из различных вершин. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $(8;9)$.
26. Написать уравнение сторон треугольника, зная одну его вершину $(6;3)$, уравнения высоты $11x - 9y + 75 = 0$ и биссектрисы $11x - 13y + 79 = 0$, проведенных из одной вершины.
27. Точка A $(2;0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x + y -1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.
28. Длина стороны ромба с острым углом 60 равна 2. Диагонали ромба пересекаются в точке $M(1;2)$, причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнение сторон ромба.
29. Точка $A(1;2)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $B(3;-1)$ - серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $4x - 3y + 10 = 0$. Составить уравнения остальных сторон трапеции.
30. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $(9;2)$, уравнения биссектрисы $x + y - 5 = 0$ и медианы $x - y = 0$, проведенных из различных вершин.
31. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;3)$, B $(2;5)$ и ортоцентр − точка $H(1;4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот).
32. Точка $H(-3;2)$ является точкой пересечения высот треугольника, две стороны которого лежат на прямых $2x - y = 0$ и $x + y -3 =0$. Составить уравнение третьей стороны.
33. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1;3)$ и касающейся прямых $7x + y = 0$ и $x - y + 8 = 0$.
34. Окружность проходит через точки $M(1;0)$ и $N(2;1)$. Найдите центр этой окружности, если известно, что он лежит на прямой $5x - y - 4 = 0$.

35. Точки $B(1;2)$ и $C(3;-6)$ симметричны относительно некоторой прямой. Составить уравнение этой прямой.
36. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке $K(-2;4)$. Составить уравнение диагонали, не проходящей через точку пересечения сторон $4x-y+4=0$ и $4x+3y+20=0$.
37. Площадь прямоугольного треугольника, катетами которого являются оси координат, равна 8. Составить уравнение гипотенузы, если известно, что она проходит через точку $A(-4;8)$.
38. Составить уравнение прямой L_1, параллельной прямой L_2 : $2x+3y-23=0$, если середина отрезка прямой L_3: $5x+2y+3=0$, заключенного между параллельными прямыми L_1 и L_2 лежит на прямой L_4: $6x-y+24=0$.
39. Составить уравнение стороны треугольника, в котором известны точка пересечения медиан $M(-1;7)$ и уравнения двух других сторон $x+4y-37=0$, $2x-y+16=0$.
40. Даны две стороны $x-y+6=0$ и $x-y+10=0$ и диагональ $3x+y-10=0$ ромба. Найти вершины ромба.
41. В треугольнике известны две вершины $A(-2;9)$, $B(2;-3)$ и точка пересечения высот $O(2;7)$. Написать уравнения сторон.
42. Точка $A(3;-2)$ является вершиной квадрата, а точка $M(1;1)$ − точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.
43. Даны уравнения одной из сторон ромба $x+y-39=0$ и одной из его диагоналей $x-3y+11=0$. Найти уравнения остальных сторон ромба, если его центр - точка $N(-2;3)$.
44. Найти координаты вершин параллелограмма, в котором известны две стороны $2x-5y-5=0$ и $2x+5y-15=0$ и диагональ $6x+5y-35=0$.
45. Найти координаты точек C и D четырехугольника ABCD, в котором отрезки AB и DC параллельны, BD и AC перпендикулярны друг другу и заданы вершины $A(9;-1)$, $B(5;5)$.
46. Даны две вершины $(3;-1)$, $(1;4)$ и центр тяжести $(0;2)$ треугольника. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.
47. Даны уравнения двух высот треугольника $3x+4y-23=0$ и $12x-5y-24=0$ и одна из его вершин $A(1;1)$. Составить уравнения сторон.

48. Написать уравнения сторон треугольника, две медианы которого лежат на прямых $x + y - 3 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$, а точка $A(1;1)$ является вершиной треугольника.
49. Две стороны треугольника заданы уравнениями, $x + 3y - 21 = 0$ и $7x + y + 13 = 0$, а середина третьей стороны − точка $(2;3)$. Составить уравнение третьей стороны.
50. Даны уравнения сторон треугольника:(MN) $3x - 5y + 17 = 0$, (NP) $8x + 6y - 32 = 0$, (MP) $5x + 11y + 9 = 0$. Найти ортоцентр треугольника. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот).
51. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$, а точка $C(3;-1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна 9/4. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты.
52. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $x + 2y - 2 = 0$, а одна из боковых сторон - на прямой $y + 2x - 1 = 0$. Составить уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что её расстояние от точки пересечения данных прямых равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
53. Составить уравнения сторон квадрата, в котором одна из вершин-точка $A(8;7)$ и одна из сторон лежит на прямой $5x + 2y + 4 = 0$.
54. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $2x + y - 8 = 0$, концы которого лежат на окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 4$.
55. Точки $M(3;7)$ и $N(2;3)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции. Точки $K(1;7)$ и $P(4;6,5)$ лежат на её боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
56. Даны стороны треугольника: (AB) $4x + 3y - 10 = 0$; (BC) $3x + 2y - 8 = 0$; (AC) $8x + 5y - 18 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C и делящей сторону AB в отношении 2:3 (считая от вершины A).
57. Противоположными вершинами квадрата являются точки $A(-5;-3)$ и $C(3;17)$. Найти координаты двух других вершин.
58. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(2;7)$, уравнения медианы $9x + y + 4 = 0$ и высоты $x + 5y - 11 = 0$, проведенных из различных вершин.

59. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(-5;4)$, уравнения высоты $6x + y - 61 = 0$ и биссектрисы $4x - 3y + 7 = 0$.
60. Точка $M(6;4)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $3x - y + 2 = 0$. Найти уравнения остальных сторон треугольника.
61. Длина стороны ромба с тупым углом 120° равна $6\sqrt{2}$. Меньшая диагональ параллельна биссектрисе 2 и 4 координатных углов. Диагонали пересекаются в точке $P(-4;6)$. Составьте уравнения сторон ромба.
62. Точка $P(8;1)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $N(2;3)$ − серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $4x + 3y +1 = 0$. Составить уравнения сторон.
63. Составьте уравнения трех сторон треугольника, в котором медиана $3x + 2y - 6 =0$ и биссектриса $x - y = 0$ проведены не из вершины $A(4;0)$, а из двух других вершин.
64. Даны стороны треугольника: $4x - 3y + 26 = 0$ (AB); $x + 2y+1 = 0$ (AC); $7x + 3y - 37 = 0$ (BC). Найти точку пересечения медианы, проведенной из вершины B и высоты, проходящей через вершину C.
65. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1;8)$ и касающейся прямых $x + 10 = 0$ и $4x - 3y + 10 = 0$.
66. Точка K отстоит на одинаковых расстояниях от точек $P(7;8)$ и $Q(1;2)$. Найти координаты точки K, если известно, что она лежит на прямой $4x - 5y + 27 = 0$.
67. Найти координаты точки N, симметричной точке M относительно прямой $x + y - 5 = 0$. Точка M отстоит от прямой на расстоянии вдвое большем, чем точка $K(-2;7)$ и находится с ней по одну сторону от прямой, причем отрезок KM перпендикулярен прямой.
68. В параллелограмме две стороны заданы уравнениями $x-5y + 7 = 0$ и $5x - 3y - 9 = 0$. Составить уравнение диагонали параллелограмма, не проходящей через точку пересечения этих сторон, если известно, что диагонали пересекаются в точке $M(2;4)$.
69. Найти координаты вершин треугольника, симметричного треугольнику ABC относительно центра описанной около треугольника ABC окружности, если $A(9;-1)$, $B(5;1)$, $C(0;-5)$.

70. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $x+3y-13=0$ и образующей с осями координат треугольник, площадь которого равна 6.
71. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ так, что отрезок этой прямой, заключённый между прямыми $3x+y+2=0$ и $4x+y-1=0$, в точке A делится пополам.
72. Центр тяжести треугольника − точка $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. Уравнения двух его сторон $4x+y+14=0$ и $x-6y-9=0$. Составить уравнение третьей стороны.
73. Известны уравнения двух сторон ромба $7x-9y-39=0$ и $3x+11y-91=0$ и одной из его диагоналей $5x+y-13=0$. Вычислить координаты вершин ромба.
74. Составить уравнение третьей стороны треугольника, если известны уравнения двух его сторон $6x-y-11=0$ и $4x+5y+13=0$ и ортоцентр − точка $H(-1;2)$.
75. Написать уравнения сторон квадрата, центр которого − точка $O(1;-3)$, а одна из вершин − точка $A(-4;7)$.
76. Написать уравнения сторон ромба, если известны диагональ $x+y-2=0$, точка её пересечения с другой диагональю $P(0;2)$ и одна из сторон $3x-y-10=0$.
77. Вычислить координаты вершин параллелограмма, в котором две стороны лежат на прямых $2x-5y-5=0$ и $2x+5y-15=0$, а одна из диагоналей на прямой $6x+5y-35=0$.
78. Диагонали трапеции ABCD $(AD\|BC)$ перпендикулярны друг другу и заданы вершины $A(4;-1)$ и $B(13;6)$. Найти координаты вершин C и D трапеции.
79. Составить уравнения сторон треугольника, в котором даны две вершины $A(-7;6)$ и $B(7;4)$ и точка пересечения отрезков, соединяющих эти вершины с серединами противоположных сторон $\left(\frac{5}{3};4\right)$.
80. Даны уравнения двух высот треугольника $x-5y+16=0$ и $9x+7y+14=0$ и одна из его вершин $M(-5;-3)$. Написать уравнения сторон треугольника.

81. Даны уравнения двух медиан $x - 3y + 2 = 0$ и $2x + 2y - 21 = 0$ треугольника и одна из вершин $A(5;-1)$. Найти уравнения сторон треугольника.
82. Середина одной из сторон треугольника − точка $M(0;3)$. Две другие стороны лежат на прямых $x - 9y + 52 = 0$ и $x + y - 8 = 0$. Составить уравнение третьей стороны.
83. Найти точку пересечения высот треугольника, стороны которого лежат на прямых $6x + y - 23 = 0$, $9x - 4y - 7 = 0$, $3x - 5y - 17 = 0$.
84. Точка $C(6;1)$ − вершина прямого угла в треугольнике, а гипотенуза лежит на прямой $2x - 3y + 5 = 0$. Написать уравнения катетов, один из которых лежит на прямой, содержащей точку $K(-4;-25)$.
85. Точки $A(1;2)$ и $B(3;0)$ − вершины равнобедренного треугольника ABC, углы A и B при основании равны $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Найти координаты вершины C, зная, что она лежит по ту же сторону от прямой AB, что и точка $M(2;3)$.
86. Составить уравнения сторон квадрата по известному уравнению одной из сторон $x + 8y - 17 = 0$ и одной из вершин $A(2;9)$.
87. Даны уравнения сторон квадрата $4x + y - 9 = 0$ и $4x + y + 36 = 0$. Составить уравнения двух других его сторон при условии, что точка $A(6;2)$ лежит на стороне этого квадрата.
88. Точки $M(5;-1)$ и $N(-3;7)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки $P(-1;-2)$ и $Q(4;6)$ лежат на боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
89. Даны стороны треугольника $9x - 2y - 51 = 0$ (AC), $4x + 3y + 24 = 0$ (AB), $x + 2y + 1 = 0$ (BC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину C и точку K на стороне AB, делящую её в отношении $3:7$ (считая от вершины B).
90. Точки $A(9;8)$ и $D(-1;4)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты других вершин.
91. Известны одна из вершин треугольника $A(4;-5)$, уравнения высоты $7x - y + 17 = 0$ и медианы $2x - 11y - 13 = 0$. Составить уравнения сторон.
92. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(4;1)$, уравнения высоты $2x - y + 11 = 0$ и биссектрисы $7x - 8y + 25 = 0$, проведенных из одной вершины.

93. Стороны треугольника заданы уравнениями: $4x - 3y = 0$ (AB); $3x - 4y = 0$ (BC); $5x + 12y - 10 = 0$ (AC). Найти радиус вписанной окружности.
94. Известны уравнение одной из сторон правильного треугольника $5x - y + 1 = 0$ и одна из вершин A(5;−3). Составить уравнения двух других сторон треугольника.
95. Диагонали ромба пересекаются в точке K(3;−7). Большая диагональ образует с осью ординат угол 45º, а со сторонами угол 30º. Длина стороны равна $4\sqrt{2}$. Составить уравнения сторон ромба.
96. Точка M(6;1) является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $N\left(\frac{7}{4};1\right)$ − серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $x + 4y + 7 = 0$. Составить уравнения остальных сторон трапеции.
97. Из одной вершины треугольника проведена биссектриса $3x + y - 1 = 0$, из другой − медиана $11x - 5y - 25 = 0$, а третья вершина − точка A(−3;−2). Составить уравнения стороны треугольника.
98. Ортоцентр треугольника ABC − точка O(−1;5). Составить уравнения сторон треугольника, если известны вершины A(2;1),B(2;11).
99. Даны уравнения сторон треугольника $x + 2y +1= 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$. Найти точку пересечения высот.
100. Найти координаты центра окружности, проходящей через точку A(−3;5) и касающейся прямых $x - 3y - 2 = 0$ и $13x - 7y + 102 = 0$.

1.2.11. ЗАДАНИЕ 11

В пространстве даны точки $A(-2;\ -1-P_7;\ 1)$, $B(3;\ P_5;-1)$, $C(5;\ 3-P_3;1)$, $D(1;\ -1-P_7;\ 0)$. Сделать чертёж пирамиды ABCD и найти :

а) длину и уравнение ребра AB;

б) уравнение грани ABC;

в) высоту, проведенную из вершины D, и её уравнение;

г) проекцию вершины D на плоскость ABC;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину D параллельно ребру AB;

е) уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC;

ж) уравнение плоскости, проходящей через ребро AD перпендикулярно грани ABC;

з) уравнение проекции ребра AD на грань ABC;

и) угол между ребрами AB и AD;

к) угол между ребром AD и гранью ABC;

л) угол между гранями ABC и ABD.

1.2.12. ЗАДАНИЕ 12

Дана точка $M(1;0;-2)$. Найти:

а) точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, симметричную точке M относительно точки $S(-1-P_7;P_5;3-P_3)$;

б) точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, симметричную точке M относительно прямой

$$\frac{x+1}{-1-P_7}=\frac{y-2}{P_5}=\frac{z-1}{3-P_3};$$

в) точку $M_3(x_3;y_3;z_3)$, симметричную точке M относительно плоскости

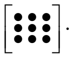
$$(-1-P_7)\cdot x+P_5\cdot y+(3-P_3)\cdot z+1=0.$$

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ

Задания раздела 1 можно выполнять с помощью ЭВМ, используя, например, пакет Mathcad, а также совместимые с ним программные разработки кафедры. Однако ЭВМ дает готовые ответы и не отражает процесс вычислений. Поэтому в целях усвоения темы, предполагается подробное "ручное" решение заданий и применение ЭВМ ограничивается проверкой правильности ответов.

Рассмотрим решение некоторых задач с помощью пакета Mathcad.

1.Вызов шаблона вектора и его ввод

Из окна матричной и векторной палитры вызвать панель ввода матрицы. Для этого щелкнуть (левой кнопкой мыши) по кнопке .

Указать размеры n,1 матрицы в соответствующих полях открывшегося окна и щелкнуть по кнопке ОК (n - размерность вектора, число строк; 1 − число столбцов).

Набрать матрицу-вектор, передвигаясь с помощью кнопок со стрелками. После набора последнего числа нажать клавишу ПРОБЕЛ.

2. Операции над векторами

Операции над векторами можно выполнять используя кнопки матричной и векторной палитры, калькулятора и клавиатуры. Последовательность действий иллюстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 2.1

Введём векторы $\vec{a} = (1;-3;2), \vec{b} = (-3;0;1)$ и число $\lambda = -1.5$:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \vec{b} := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda := -1.5.$$

Найдем сумму $\overrightarrow{x_1}$ и разность $\overrightarrow{x_2}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, произведение $\overrightarrow{x_3}$ вектора $\vec{a}$ на число λ, скалярное (x_4) и векторное ($\overrightarrow{x_5}$) произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{x_1} := \vec{a} + \vec{b}; \quad \overrightarrow{x_2} := \vec{a} - \vec{b}; \quad \overrightarrow{x_3} := \lambda \cdot \vec{a}; \quad x_4 := \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad \overrightarrow{x_5} := \vec{a} \times \vec{b};$$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{x_3} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad x_4 = -1; \quad \overrightarrow{x_5} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

3. Вычисление длины и направляющих косинусов вектора

Длину и направляющие косинусы вектора можно найти используя кнопки матричной и векторной палитры, калькулятора, палитры греческих букв, клавиатуры. Последовательность действий иллюстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 2.2

Введём вектор $\vec{a}$ и его координаты:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad x := -2; \quad y := 1; \quad z := 2.$$

Найдём длину вектора $\vec{a}$ и его направляющие косинусы:

$$\Delta := |\vec{a}|; \qquad \cos\alpha := \frac{x}{\Delta}; \qquad \cos\beta := \frac{y}{\Delta}; \qquad \cos\gamma := \frac{z}{\Delta};$$

$$\mathbf{\Delta} = 3; \qquad \cos\alpha = -0.667; \qquad \cos\beta = 0.333; \qquad \cos\gamma = 0.667.$$

Направляющие косинусы вектора можно найти иначе, - умножая вектор $\vec{a}$ на число $\frac{1}{\Delta}$, т.е. найдя орт $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e}_{\vec{a}} := \frac{1}{\Delta} \cdot \vec{a}; \qquad\qquad \vec{e}_{\vec{a}} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.333 \\ 0.667 \end{bmatrix}.$$

4. Нахождение угла между векторами

Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 2.3

Введём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad\qquad \vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Найдём косинус угла φ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi := \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \qquad \varphi := a\cos(\cos\varphi); \qquad \Phi := \varphi \cdot \frac{180}{\pi};$$

$$\cos\varphi = 0.467; \qquad \varphi = 1.085 \text{ (рад.)}; \qquad \Phi = 62.188^\circ.$$

Чтобы вызвать функцию arccos нужно нажать клавишу $f(x)$ на панели инструментов и в открывшемся списке выбрать acos.

5. Составление уравнений

Составление уравнений рассмотрим на примере нахождения уравнения плоскости проходящей через три заданные точки, не принадлежащие одной прямой.

Пусть заданы точки $A_1(2;-1;3)$, $A_2(1;1;1)$, $A_3(-4;0;3)$. Их радиус векторы $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ имеют такие же координаты. Пусть $\overrightarrow{r_{12}} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{r_{13}} = \overrightarrow{A_1A_3}$. Тогда, вводя векторы

$$\vec{r_1} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{r_2} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{r_3} := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \qquad \overrightarrow{r_{12}} := \vec{r_2} - \vec{r_1}; \qquad \overrightarrow{r_{13}} := \vec{r_3} - \vec{r_1},$$

получим

$$\overrightarrow{r_{12}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \qquad \overrightarrow{r_{13}} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Убедимся, что точки A_1, A_2, A_3 не принадлежат одной прямой. Действительно

$$\frac{-6}{-1} = 6, \quad \frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{0}{-2} = 0,$$

и, следовательно, векторы $\overrightarrow{r_{12}}$ и $\overrightarrow{r_{13}}$ неколлинеарные.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель с помощью ЭВМ. Для этого нужно набрать

$$A(x,y,z) := \begin{pmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad f(x,y,z) := |A(x,y,z)|;$$

$$f(x,y,z) \to 2 \cdot x - 25 + 11 \cdot z + 12 \cdot y.$$

Итак, плоскость $A_1A_2A_3$ имеет уравнение

$$2x + 12y + 11z - 25 = 0.$$

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Векторные и скалярные величины. Определения направленного отрезка, вектора. Линейные операции над векторами в геометрической форме (сумма, разность, произведение вектора на число) и их свойства.
2. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах.
3. Определения векторного пространства, базиса и размерности векторного пространства, координат вектора в базисе. Операции над векторами в координатной форме. Сформулировать теоремы о базисах в пространствах V_1, V_2, V_3.
4. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек "начала" и "конца" вектора.
5. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.
6. Выражение модуля (длины) и направляющих косинусов вектора через декартовы координаты вектора.
7. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
8. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.
9. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
10. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.
11. Понятие об уравнении линии на плоскости.

12. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
13. Уравнение прямой "с угловым коэффициентом" (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями "с угловым коэффициентом").
14. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).
15. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.
16. Понятие уравнения поверхности в пространстве.
17. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
18. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.
19. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравниям).
20. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).
21. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009. − 224с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004. − 224с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Издательство «Лань», 2010. − 224с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш. шк., 2000. −304с.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х частях: Ч1. / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова.- М.: Издательство физико-математической литературы, 2009. −288с.
6. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Джангар, Большая Медведица, 2001. −863с.
7. Бредихина О.А., Шеставина С.В. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М2 / ЮЗГУ. Курск. 2013. −18с.
8. Плис А. И. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие для студ. вуз. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000. − 656 с.