МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г.Локтионова
«___» ________ 2014г.

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Индивидуальные задания и методические указания
по выполнению модуля

Курск 2014

УДК 519.24.001.5

Составитель Е.В. Скрипкина

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики *Карачевцева Л.В.*

Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Скрипкина. Курск, 2014. 52 с. табл. 4. Библиогр.: с.52.

В данном пособии содержатся индивидуальные задания, предназначенные для выполнения модуля или контрольной работы по теме «Исследование функций».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л.3,0. Уч.-изд. л.2,7. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развивать логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Содержание настоящего пособия соответствует разделам «Пределы», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» курса математики. Пособие включает в себя как теоретические, так и практические задания соответствующей тематики.

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студента.

Настоящее пособие предназначено студентам очной формы обучения, но может использоваться также и студентами дистанционной формы обучения. Для студентов заочной формы обучения пособие представляет собой задачник по тематическому модулю «Математический анализ функций одной переменной» с разбором отдельных заданий. Студентам дистанционной формы обучения пособие может служить собранием тренинговых упражнений обучающего характера. Студентам очной формы обучения может быть рекомендовано для выполнения модуля.

Выбор варианта производится соответственно номеру студента в списке группы.

1. Индивидуальные задания

1.1. Теоретические задания

1. Доказать теорему о сумме бесконечно-малых функций.
2. Доказать теорему о произведении бесконечно-малых функций на ограниченную функцию.
3. Доказать теорему о пределе суммы нескольких функций.
4. Доказать теорему о пределе произведения нескольких функций.
5. Доказать теорему о пределе частного.
6. Вывод формулы I замечательного предела.
7. Доказать теорему о II замечательном пределе.
8. Определения непрерывности функции.
9. Свойства непрерывных функций.
10. Производная. Геометрический смысл производной.
11. Доказать теорему о производной степенной функции.
12. Доказать теорему о производной тригонометрических функций y=sinx, y=cosx.
13. Доказать теорему о производной произведения двух функций.
14. Доказать теорему о производной сложной функции.
15. Доказать теорему о производной тригонометрических функций y = tgx, y = ctgx.
16. Доказать теорему о производной обратных тригонометрических функций y = arcsin x, y = arccos x.
17. Производная функции, заданной параметрически. Пример.
18. Производная функции, заданной неявно. Пример.
19. Уравнения касательной и нормали.
20. Определение и нахождение асимптот.
21. Лемма Ферма и ее доказательства.
22. Теорема Лагранжа о среднем.
23. Теорема Коши о среднем.
24. Правило Лопиталя.
25. Формула Тейлора.
26. Метод нахождения интервалов монотонности. Точки экстремума.
27. Интервалы выпуклости (вогнутости). Точки перегиба.

1.2. Практические задания

1.2.1. Задание 1

Вычислить пределы функций. Задания представлены в табл.1.1.

1.2.2. Задание 2

Задана функция $f(x)=\begin{cases} x+n, & x\le -n; \\ x^2+n, & -n<x\le n;. \\ -x+m, & x>n \end{cases}$ Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертёж.

m – число гласных букв в фамилии,
n - число согласных букв в фамилии

1.2.3. Задание 3

Вычислить производные функций, заданных явно. Задания представлены в табл.1.2.

1.2.4. Задание 4

Вычислить производные различных функций. Задания представлены в табл.1.3.

1.2.5. Задание 5

Исследовать функцию методом дифференциального исчисления и построить график. Задания представлены в табл.1.4.

Индивидуальные задачи к заданию 1

Таблица 1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x-1}{x^3+4}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{x\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,2x-\sin 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{3x+7}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$	$\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,3x-\sin 3x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{5x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	$\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{2x}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{100x}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x+1}{x^3-8x+5}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x}\right)^{-5x+1}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{x^3+2}$	$\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-12x+6}{3x^2-2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^3-6x^2+12}{x^3+4x}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x-\sin x}{\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$
11	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x^3+7x^2+5x}{12x^3+4x}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 5x}{x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$
12	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5+4x^4+2}{6x^5+12x^4-2}$	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$
13	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12x^2-1}{6x^2-6x}$	$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{4x}{x^2-9}-\frac{2}{x-3}\right)$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 5x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-3}\right)^{x-5}$
14	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x}{x^3+4x+4}$	$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1+x^2}{x-x^2}-\frac{2}{1-x}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$

Продолжение табл. 1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
15	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-5x^2+3x^5}{x^5+6x+8}$	$\lim\limits_{y\to2}\left(\frac{4+y^2}{2y-y^2}-\frac{4}{2-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin 2x}-\frac{1}{\operatorname{tg}2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$
16	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-1}{x^2-3x+6}$	$\lim\limits_{y\to3}\left(\frac{9+y^2}{3y-y^2}-\frac{6}{3-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
17	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$	$\lim\limits_{y\to4}\left(\frac{16+y^2}{4y-y^2}-\frac{8}{4-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$
18	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5-2x^2+4}{2x^4+3x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}-\frac{x}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{7x}{\sin x+\sin 7x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x+\cos x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1}{3x+2}\right)^{2x}$
20	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2^x-2}{x-1}$
21	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{6x}{x^2-4}-\frac{3}{x-2}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos 3x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{\log_4 x-1}{x-4}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
22	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$	$\lim\limits_{x\to3}\left(\frac{6x}{x^2-9}-\frac{3}{x-3}\right)$	$\lim\limits_{x\to81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x-\sin x}{2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x}$
23	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$	$\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{6x}{x^2-16}-\frac{3}{x-4}\right)$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}2x}-\frac{1}{\sin2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$
24	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{6-x}-\sqrt{6+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{\sin5x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2x}-e^{3x}}{x}$
25	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-7x+3}{3x^3-x-4}$	$\lim\limits_{x\to-2}\frac{4-x^2}{x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}2x-\sin2x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$
26	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+5}{3x^2-4x+1}$	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+3x}{9-x^2}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{2x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sin2x+\sin8x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{3x-4}\right)^{4x+2}$
27	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+5x+7}{2x^2-x+10}$	$\lim\limits_{x\to-2}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2x}{x+2}\right]$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x^2+2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3+x}{x}\right)^{-5x}$
28	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$	$\lim\limits_{x\to-3}\left[\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{3x}{x+3}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin3x}-\frac{1}{\mathrm{tg}3x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x-3}$
29	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$	$\lim\limits_{x\to2}\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{2}{x-2}\right]$	$\lim\limits_{x\to9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos7x}{2x^2}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3^x-3}{x-1}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
30	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$	$\lim\limits_{x\to3}\left[\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{2}{x-3}\right]$	$\lim\limits_{x\to7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\log_2 x-2}{x-2}$
31	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+4x}{x^3-4x+2}$	$\lim\limits_{x\to2}\left[\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x}{2-x}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2-2\cos 3x}{tg^2 3x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{5^x-5}{2(x-1)}$
32	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-4x^3+3}{2x^2+x-7}$	$\lim\limits_{x\to4}\left[\left(\frac{4}{x}-\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{x}{4-x}\right]$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+25}-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{3x-2}$
33	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$	$\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}-\frac{x}{x+2}\right)$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-4}\right)^{x+1}$
34	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$	$\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2+9}{x^2-9}-\frac{x}{x+3}\right)$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{tgx}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{5x}}{2x}$
35	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{3x^2-7x+2}{2-6x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{7x}{\sin x+\sin 2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-4}{2x+1}\right)^{-x+2}$
36	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\frac{5x^2-12x+4}{6-15x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-2}{4x+1}\right)^{\frac{3x}{2}}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
37	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{(6-3x)^2}{3x^2+3x-18}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3-\sqrt{x^2+9}}{3x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin3x}{3-\sqrt{2x+9}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^{2x+1}$
38	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2+2x-24}{6-2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sin x-\sin3x}$	$\lim\limits_{x\to7}\frac{\log_7 x-1}{x-7}$
39	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^5-4x^3+3}{2x^2+x-7}$	$\lim\limits_{y\to4}\left(\frac{16+y^2}{4y-y^2}-\frac{8}{4-y}\right)$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{2x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}\,2x-\sin2x}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$
40	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{7x+5}$	$\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}}\frac{(2-5x)-(6-15x)}{10x^2-9x+2}$	$\lim\limits_{x\to16}\frac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos5x}{\sin^2 5x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{7^x-7}{x-1}$
41	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x-7}{x-3x^2}$	$\lim\limits_{x\to-2}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2x}{2+x}\right]$	$\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^2}{\cos2x-\cos4x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+4}$
42	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{2-x}{\sqrt{6x+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin10x}{2x^2-2x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{7x+2}{7x+3}\right)^{2x+4}$
43	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^5-3x^2+8}{1-2x-x^5}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{8-x}-\sqrt{8+x}}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin(x-1)}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+2x}{-3+2x}\right)^{\frac{2}{7}x}$

Продолжение табл.1.1

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
44	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$	$\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x^3+64}$	$\lim\limits_{x\to81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5+2x}{2x-4}\right)^{x+4}$
45	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{\sqrt{2x}-x}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos5x-\cos x}{4x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{3x}-e^{7x}}{4x}$
46	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$	$\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin3x}{\sin5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$
47	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{2x^2-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to10}\frac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin5x-\sin x}{\arcsin2x}$	$\lim\limits_{x\to1}\frac{5^x-5}{x-1}$
48	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+7}{2x^3+8x^2+5}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$	$\lim\limits_{x\to16}\frac{2-\sqrt[4]{x}}{4-\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos3x-\cos^3 3x}{4x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{2x+1}$
49	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-7x-6}{2x^2-7x+3}$	$\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\mathrm{tg}2x}-\frac{1}{\sin2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x}\right)^{3x+2}$
50	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$	$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2+x-6}$	$\lim\limits_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$	$\lim\limits_{x\to-1}\frac{\sin(x+1)}{1-x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+4}{3x}\right)^{-4x}$

Индивидуальные задачи к заданию 3

Таблица 1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
1	$y=\frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x+2}}}$	$y=e^{x^2-4x}$	$y=\lg^3(x+5)^2$	$y=\cos^2(2x^2+1)$	$y=\arcsin^2\frac{x^2}{2x+x^2}$
2	$y=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+2)}}$	$y=5^{x+\frac{1}{x^2}}$	$y=\ln^2(x^2+4)$	$y=\mathrm{tg}^2(2x+4)$	$y=\mathrm{arctg}^2\frac{x}{3}$
3	$y=\left(\frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\right)^{-3}$	$y=2^{x+\cos^2 x}$	$y=\log_3^3(x^2+x)$	$y=\mathrm{ctg}^3(2x^2+7)$	$y=\mathrm{arcctg}^2\frac{2x}{x+4}$
4	$y=\sqrt[3]{x^2\cdot(1+x)}$	$y=e^{x^2+\sin x}$	$y=\ln^3\left(\frac{x}{2x-1}\right)$	$y=\sin^2(2x^2+1)$	$y=\arccos\frac{x^2-3}{x+2}$
5	$y=\sqrt[4]{\frac{x}{2x^2+2}}$	$y=7^{x^2-2\ln x}$	$y=\ln^3\left(\frac{2x}{\sin x}\right)$	$y=\cos^3(3x^2-4)$	$y=\mathrm{arctg}^2\frac{x+2}{2\sqrt{x}}$
6	$y=2x\cdot\sqrt[3]{x^2+4x}$	$y=e^{x^2-\cos 2x}$	$y=\log_7^2(x^2+16x)$	$y=\mathrm{tg}^2\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\frac{x^3}{4}$
7	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x+7x^2}}$	$y=e^{x^2+\frac{1}{x}}$	$y=\lg^3\left(\frac{x}{3x^2+2}\right)$	$y=\mathrm{ctg}^3\frac{x}{x+1}$	$y=\arccos\frac{x^2}{x-1}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
8	$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}$	$y=3^{x^2+\frac{1}{x^2}}$	$y=\log_5^2\left(x^2+\sqrt{x}\right)$	$y=\sin^3\frac{2x}{\sqrt{x}+5}$	$y=\operatorname{arctg}\frac{x^2-4}{x+1}$
9	$y=\frac{3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x}}}$	$y=e^{x^2+\frac{1}{x\sqrt{x}}}$	$y=\lg^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$	$y=\cos^2\frac{x}{2x^2+4}$	$y=\operatorname{arcctg}^2\frac{2x}{x+2}$
10	$y=\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}}$	$y=8^{x+\sqrt{x^3}}$	$y=\log_2^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^3\frac{x}{x^2+4\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^3\sqrt{x+2}$
11	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x+x^2+3}}$	$y=e^{\frac{x}{\sqrt{x}+4}}$	$y=\lg^3\left(x^2+2x\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\frac{1}{x^2+4}$	$y=\arccos^2\frac{x}{2+\sqrt{x}}$
12	$y=\frac{1}{\sqrt[5]{2x^2+4x}}$	$y=3^{x^2-7\sqrt{x}}$	$y=\log_2^2\left(\sqrt{x}+4x\right)$	$y=\sin^3(2x+4)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{\sqrt{x}}{x+4x^2}$
13	$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}+2}$	$y=2^{x^2-\frac{4}{x}}$	$y=\ln^3\left(\frac{x}{x^2+3x\sqrt{x}}\right)$	$y=\cos^2\left(2x^2+4\right)$	$y=\operatorname{arctg}^3\frac{x}{4+x}$
14	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}+4}}$	$y=2^{x^2-4\ln x}$	$y=\log_3^2\left(x+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^3\frac{x}{x^2+2\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\frac{x}{x^2+4}$
15	$y=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}+2}}$	$y=e^{x^4-2x^3}$	$y=\lg^3\left(2x+\sqrt{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\frac{x+4}{2\sqrt{x}-7}$	$y=\arccos^3\frac{2x}{\sqrt{x}+1}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
16	$y=\sqrt[3]{2x+\frac{1}{x}+3}$	$y=2^{2x-4\cos 2x}$	$y=\log_5^2\left(x+\frac{4}{x^2}\right)$	$y=\cos^3\left(x+\sqrt{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}\frac{x+4}{2\sqrt{x}+7x}$
17	$y=\sqrt[5]{2x-\frac{7}{\sqrt{x}}}$	$y=4^{x^2-2x+7}$	$y=\lg^2\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(2x+4\sqrt{x}\right)$	$y=\arcsin\frac{x+4\sqrt{x}}{2x+3}$
18	$y=\frac{x}{2\sqrt{2x+4\sqrt{x}}}$	$y=e^{3x^2-\frac{7}{x}}$	$y=\lg^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^3\left(\frac{x}{\sqrt{x}+2}\right)$	$y=\arccos^2\frac{2x}{x+4}$
19	$y=\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}$	$y=4^{x^3+\sqrt{x}}$	$y=\ln^2\left(2x^4+\sqrt{x}\right)$	$y=\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4}$
20	$y=\sqrt[4]{2x+\frac{1}{x}}$	$y=6^{3x^2-\sqrt{x}}$	$y=\lg^3\left(x+\frac{\sqrt{x}}{4}\right)$	$y=\cos^3\left(\frac{1}{x}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\arcsin^2\frac{2x}{x+3}$
21	$y=\sqrt[3]{\frac{3}{x}+\frac{x}{3}}$	$y=e^{2x^2-\frac{\sqrt{x}}{4+x}}$	$y=\lg^2\left(x+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$	$y=\operatorname{tg}^3\left(\sqrt{x}+4x\right)$	$y=\arccos^2\frac{x}{1+x}$
22	$y=\sqrt[4]{2x+4\sqrt{x}}$	$y=8^{2x+3\sqrt[3]{x}}$	$y=\log_7^3\left(x^2+\frac{7}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt[3]{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{x}{x^2+4}$
23	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+4\sqrt{x}+2}}$	$y=9^{\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}}$	$y=\ln^2\left(\sqrt{x+4}\right)$	$y=\sin^2\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
24	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{x}{2}}}$	$y=e^{4x+2\sqrt{x}}$	$y=\lg^3\left(x+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\cos^3\left(\frac{2x+1}{x+4}\right)$	$y=\mathrm{arcctg}^3\,\frac{2x}{x+4}$
25	$y=\frac{x}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}$	$y=2^{x^2+4\sqrt{x}}$	$y=\ln^2\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)$	$y=\mathrm{tg}^2\,\frac{x+4}{\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\frac{x}{2+x}$
26	$y=\sqrt[3]{\frac{x}{x^2+4}}$	$y=3^{\sqrt{x}+4x}$	$y=\log_4^2\left(x+\frac{3}{x}\right)$	$y=\mathrm{ctg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)$	$y=\arccos^2\frac{2}{x+4}$
27	$y=\frac{1}{\sqrt[4]{x\frac{1}{\sqrt{x}}}}$	$y=e^{\sin^2 x+4x}$	$y=\lg^3\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x+1}\right)$	$y=\sin^3\left(x^2+\frac{1}{x}\right)$	$y=\mathrm{arctg}\frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}+4x^2}$
28	$y=\sqrt[3]{x+\frac{1}{2\sqrt{x}}}$	$y=5^{\sin 2x}$	$y=\log_7\left(1+\frac{7x}{\sqrt{x}+1}\right)$	$y=\cos^2\left(x+\frac{4}{x+2}\right)$	$y=\mathrm{arcctg}\frac{x+5}{\sqrt{x}+3x^2}$
29	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x+2\sqrt{x}+3}}$	$y=3^{2+x^2\cdot\sin x}$	$y=\ln^2\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$	$y=\mathrm{tg}^3\,\frac{x}{x+4}$	$y=\arcsin^2\frac{2}{\sqrt{x+5}}$
30	$y=\sqrt[4]{x-\frac{2}{\sqrt{x}}}$	$y=e^{2x^2-\sqrt{x}}$	$y=\lg^2(x+2x^2)$	$y=\mathrm{ctg}^2\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}$	$y=\arccos^3\left(x\cdot\sin^2 x\right)$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
31	$y=\sqrt[5]{x+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}}$	$y=3^{e+4\sin^2 x}$	$y=\log_3^2\left(x+\frac{5}{x^2+4}\right)$	$y=\sin^3\frac{x+1}{2x}$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2x+1}$
32	$y=\sqrt{\frac{1}{x}+2\sqrt{x}+x}$	$y=e^{3x^2+4x}$	$y=\lg^2\left(\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right)$	$y=\cos^2\left(x+\sqrt{x}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{4+x}$
33	$y=\sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$	$y=5^{3\sqrt{x}+\sin x}$	$y=\log_2^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(\frac{x+4}{2x}\right)$	$y=\arcsin\frac{\sqrt{x+3}}{x^2}$
34	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{x}+\frac{3}{x}}}$	$y=e^{\cos^2 2x+4x}$	$y=\log_5\left(\sqrt{x+2}+\frac{1}{x}\right)$	$y=\operatorname{ctg}\frac{x^2+4x+2}{x+2}$	$y=\arccos^2\left(\frac{2}{2+x}\right)$
35	$y=\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x}-1}$	$y=e^{\sqrt{x}+4x}$	$y=\lg\left(\sqrt{x^2+4x}+\sqrt{x}\right)$	$y=\sin^2\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)$	$y=\operatorname{arctg}^2\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$
36	$y=\sqrt{x+4}\cdot 2x$	$y=5^{\sqrt{x}+\frac{4}{x}}$	$y=\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{4}{\sqrt{x}+2}\right)$	$y=\cos^3\left(\sqrt{x}(2x+1)\right)$	$y=\operatorname{arcctg}^2\left(2\sqrt{x}+\frac{x}{2}\right)$
37	$y=x\sqrt[3]{x+4}$	$y=3^{\sin^2 2x+4}$	$y=\lg\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\frac{x^2+4}{\sqrt{x}}$	$y=\arcsin^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{x+2}\right)$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
38	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$	$y=e^{\sin^2 3x+\frac{4}{x}}$	$y=\log_3^2\left(\frac{x}{\sqrt{x}+4}\right)$	$y=\mathrm{ctg}^2\,\frac{x+2}{4}$	$y=\arccos^2\,\frac{x+4}{x^2+1}$
39	$y=\frac{\sqrt[3]{x+4}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$	$y=3^{\sqrt{x}+\frac{17x}{x+4}}$	$y=\ln^2\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{3}\right)$	$y=\sin^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$	$y=\mathrm{arctg}\,\frac{x^2+4+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$
40	$y=\frac{1}{\sqrt{2x+\sqrt{x+2}}}$	$y=e^{\ln 3+\frac{x}{\sqrt{x}}}$	$y=\lg_2\left(\frac{x+4}{x}\right)$	$y=\cos^3\,\frac{x^2+\sqrt{x}}{2x+1}$	$y=\mathrm{arcctg}^3\,\frac{x+4}{\sqrt{x}+1}$
41	$y=\sqrt[3]{\frac{x+\sqrt{x}}{2x}}$	$y=7^{\sin^2 x+\sqrt{x}}$	$y=\ln^2\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$y=\mathrm{tg}^2\left(x\cdot(\sqrt{x}+1)\right)$	$y=\arcsin^2\,\frac{x}{2+x}$
42	$y=\frac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}}$	$y=e^{3x^2+\frac{1}{x}}$	$y=\log_2^2\left(\frac{x+4}{1+\frac{1}{x}}\right)$	$y=\mathrm{ctg}^3\left(\frac{7}{x}+\frac{\sqrt{x}}{7}\right)$	$y=\arccos^2\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$
43	$y=\frac{\sqrt{2x+4}}{\sqrt[3]{x}}$	$y=3^{2x^2+\sqrt{x}}$	$y=\ln^3\left(\frac{x+\sqrt{x}}{2x+4}\right)$	$y=\sin^3\left(2\sqrt{x}+4x\right)$	$y=\mathrm{arctg}\left(\frac{2x+4}{\sqrt{x}+x^2+7}\right)$
44	$y=\sqrt{2x+\sqrt{x+1}}$	$y=4^{\sin 3x+\frac{\sqrt{x}}{4}}$	$y=\log_3^2\left(\frac{7}{x}+\frac{(\sqrt{x}+2)}{2}\right)$	$y=\cos^2\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x+4}\right)$	$y=\mathrm{arcctg}\,\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{2x+7}$

Продолжение табл.1.2

№ пп	а)	б)	в)	г)	д)
45	$y=\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}$	$y=4^{\sin 3x+\frac{\sqrt{x}}{4}}$	$y=\log_3^2\left(\frac{7}{x}+\frac{\sqrt{x}+2}{2}\right)$	$y=\cos^2\left(\frac{2+\sqrt{x}}{x+4}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{x}}{2x+7}$
46	$y=\sqrt[3]{2+\frac{1}{x}}$	$y=e^{\ln 7+\frac{2\sqrt{x}}{x+2}}$	$y=\log_4^2\left(\frac{2\sqrt{x}+4x+3}{x+1}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\sqrt{\frac{x+4}{x+2}}$	$y=\arcsin^2\frac{\sqrt{x}}{x+3}$
47	$y=\frac{x}{\sqrt[3]{(x+7)^2}}$	$y=e^{2x+\frac{1}{\sqrt{x}}+3}$	$y=\log_3^2\left(\frac{\sqrt{x}+4}{2}+\sqrt[3]{x}\right)$	$y=\sin^2((x+4)\cdot 2x)$	$y=\operatorname{arctg}^2\frac{3x+4}{\sqrt{x}+7x+1}$
48	$y\frac{\sqrt[3]{2x+3}}{\sqrt{x}}$	$y=3^{3x^2+\sin^2 3x}$	$y=\ln^3\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}+4}{x}\right)$	$y=\cos^2\left(\frac{x+4}{2x}\right)$	$y=\operatorname{arcctg}^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right)$
49	$y=\frac{\sqrt{x+1}}{2x}$	$y=e^{\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+3x}$	$y=\log_2^3\left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{2x}\right)$	$y=\operatorname{tg}^2\left(x\cdot\sqrt{x+7}\right)$	$y=\arcsin\frac{x+\sin^2 3x}{\sqrt{x}}$
50	$y=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}+4}{x}}$	$y=6^{\ln 3x+\frac{1}{\sqrt{x}}}$	$y=\lg^3\left(3x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$y=\operatorname{ctg}^2\frac{x}{\sqrt{x+7}}$	$y=\arccos\frac{\sqrt{x}}{x+4}$

Индивидуальные задачи к заданию 4

Таблица 1.3

№ пп	а)	б)	в)
1	$y=(\ln x)^x$	$\cos(x\cdot y)+x-y=0$	$\begin{cases} x=\sin^2 t+t \\ y=\cos t+2 \end{cases}$
2	$y=(x^2+7)^{\sin x}$	$e^{x-y}-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}$
3	$y=(\sin 2x)^{\cos\frac{x}{2}}$	$e^{x+2y}-x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\arcsin(\sin t) \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t} \end{cases}$
4	$y=x^{2^x}\cdot 2^x$	$\cos(x-y)+x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) \\ y=t\sqrt{t^2+1} \end{cases}$
5	$y=(\cos\sqrt{x})^{\operatorname{tg}x}$	$\ln(2x+y)+x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2} \\ y=\arcsin(t-1) \end{cases}$
6	$y=\left(\sqrt{x+1}\right)^{2\sin^2 x}$	$\ln(2x-y)+\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\ln\operatorname{ctg} t \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$
7	$y=\left(\ln\dfrac{x}{2}\right)^{2e^x}$	$\cos(x+y)+\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^{t/2} \\ y=e^t+1 \end{cases}$
8	$y=(\sin x)^{\ln\operatorname{tg}x}$	$\arcsin(x^2-y)-\sqrt{y}=0$	$\begin{cases} x=\ln\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
9	$y=(\operatorname{ctg}3x)^{3^x}$	$\arccos(x^2+y)+\sqrt{xy}=0$	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
10	$y=\left(x^3+1\right)^{\sin x}$	$\cos^2(x+y)+x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{1-t^2} \\ y=(\arccos t)^2 \end{cases}$
11	$y=(2x)^{\cos x^2}$	$\cos^2(x-y)-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\ln\dfrac{1-t}{1+t} \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
12	$y=(\mathrm{tg}x)^x$	$e^{x+y}-\dfrac{y}{x^2}=0$	$\begin{cases} x=\arccos\dfrac{1}{t} \\ y=\sqrt{t^2-1}-\arcsin\dfrac{1}{t} \end{cases}$
13	$y=x^{5x}\cdot 5^x$	$e^{x-y}+\dfrac{x^2}{y}=0$	$\begin{cases} x=\arcsin\sqrt{t} \\ y=\sqrt{1+\sqrt{t}} \end{cases}$
14	$y=(\ln x)^{\cos x^2}$	$2^{x-y}+\mathrm{tg}\,y=0$	$\begin{cases} x=\ln\left(1-t^2\right) \\ y=\arcsin\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
15	$y=(\sin x^3)^{x^2}$	$\mathrm{ctg}(y-x)-x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=(\arcsin t)^2 \\ y=\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$
16	$y=\left(5-x^2\right)^{2\cos x}$	$\ln\left(x+y^2\right)+\sqrt{y}=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{ctg}\sqrt{1+t} \\ y=2\sqrt{1-t^2} \end{cases}$
17	$y=(\ln 5x)^{e^x}$	$x^2\cdot y-e^{xy}=0$	$\begin{cases} x=\mathrm{arctg}t \\ y=\ln\dfrac{\sqrt{1+t^2}}{t+1} \end{cases}$
18	$y=x^{e^x}(2x)^5$	$\mathrm{tg}(x+y)+\sqrt{xy}=0$	$\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2} \\ y=t-\sin t \end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
19	$y=\left(x^4-2\right)^{ctgx}$	$3^{x+y}+ctg(x\cdot y)=0$	$\begin{cases}x=\cos^2 t\\ y=2\sin^3 t\end{cases}$
20	$y=x^{3^x}\cdot 5^x$	$e^{2x+y}+tg(x+y)=0$	$\begin{cases}x=t^3+8t\\ y=t^5+2t\end{cases}$
21	$y=(arctg\ x)^{e^x}$	$\ln(x+y)+tg\frac{x}{y}=0$	$\begin{cases}x=7(t-\sin t)\\ y=7(1-\cos t)\end{cases}$
22	$y=(5x+4)^{arctg\ x}$	$e^{2x+2y^2}+y\sin x=0$	$\begin{cases}x=\ln tg\ t\\ y=\dfrac{1}{\sin^2 t}\end{cases}$
23	$y=(\sin 3x)^{\ln\sin 3x}$	$tg\frac{x}{y}+x^2+y^2=0$	$\begin{cases}x=3t-t^3\\ y=3t^2\end{cases}$
24	$y=\left(\arcsin x^2\right)^x$	$2^{x+y}-\frac{y^2}{x^2}=0$	$\begin{cases}x=t+\ln\cos t\\ y=t-\ln\sin t\end{cases}$
25	$y=\left(3-x^4\right)^{\cos x}$	$tg(x\cdot y)-x^2-y^2=0$	$\begin{cases}x=2t-t^3\\ y=2t^2\end{cases}$
26	$y=x^{\arcsin x}$	$2^{x-y}-\frac{x}{y^2}=0$	$\begin{cases}x=\ln t\\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\end{cases}$
27	$y=x^{\ln x}\cdot 2^x$	$\ln\left(x^2-y\right)+\frac{x}{y}=0$	$\begin{cases}x=t-\ln t\\ y=3t^2-2t^3\end{cases}$
28	$y=(3\sin x)^{3^x}$	$ctg(y+2x)-xy=0$	$\begin{cases}x=\arcsin t\\ y=3t-t^3\end{cases}$
29	$y=(2x)^{2^x}$	$tg\left(y+x^2\right)-\frac{x}{y}=0$	$\begin{cases}x=2t-\sin 2t\\ y=8\sin^3 t\end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
30	$y=\left(\sin x^3\right)^{e^x}$	$e^{y-x^3}+x^3-y=0$	$\begin{cases}x=\mathrm{arctg}3t\\ y=\ln\left(1+9t^2\right)\end{cases}$
31	$y=(\arccos x)^{\cos x}$	$3^{x\cdot y^2}-\frac{1}{x}+y=0$	$\begin{cases}x=2(\sin t-t\cos t)\\ y=2(\cos t+t\sin t)\end{cases}$
32	$y=\left(x^3\right)^{\mathrm{ctg}x^3}$	$e^{2x-y^2}+y^2-x=0$	$\begin{cases}x=a\ \mathrm{tg}^2t\\ y=b\sec^2 t\end{cases}$
33	$y=x^{2\cos x}$	$2^{x^2+y}-\frac{y}{x}=0$	$\begin{cases}x=2(\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$
34	$y=(x\cos x)^{2\sin x}$	$2^{x^2-y}+\frac{y^2}{x}-y=0$	$\begin{cases}x=2\cos^3 t\\ y=3\sin^3 t\end{cases}$
35	$y=(\mathrm{tg}\ x)^{\cos x}$	$5^{x\cdot y}+x^2+xy=0$	$\begin{cases}x=t^2+\ln t\\ y=3t^3+3t\end{cases}$
36	$y=\left(5x^3\right)^{\cos x^2}$	$\mathrm{tg}\left(x+y^2\right)-x\cdot y=0$	$\begin{cases}x=\arcsin(1-t)\\ y=\ln\left(1-t^2\right)\end{cases}$
37	$y=\left(\ln^2 x\right)^{\ln x^2}$	$e^{x^2+y^2}-2x+y=0$	$\begin{cases}x=\sec^2 t\\ y=\ln\mathrm{tg}\ t\end{cases}$
38	$y=\left(\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right)^{2^x}$	$e^{x^2-y}+x-y^2=0$	$\begin{cases}x=\sqrt{1+t}\\ y=\mathrm{arctg}\sqrt[4]{t}\end{cases}$
39	$y=(\ln\mathrm{tg}x)^{e^x}$	$e^{2y+\sin x}+y=0$	$\begin{cases}x=(\arcsin t)^3\\ y=\arccos\sqrt{1-t^2}\end{cases}$
40	$y=x^{5^x}\ln x$	$\sin(x\cdot y)+\frac{y^2}{x^2}=0$	$\begin{cases}x=2-\cos 2t\\ y=2t+\sin 2t\end{cases}$

Продолжение табл.1.3

№ пп	а)	б)	в)
41	$y=\left(3x^2+2\right)^{\cos x^2}$	$\sin\left(x^2+y^2\right)-\dfrac{x}{y^2}=0$	$\begin{cases} x=\arcsin(\cos t) \\ y=\arccos(\sin t) \end{cases}$
42	$y=(\cos\ln x)^{5x^3}$	$\cos\left(x^2y\right)+x-y^2=0$	$\begin{cases} x=2^{\cos^2 t} \\ y=2^{\sin^2 t} \end{cases}$
43	$y=x^{\cos^3 x}$	$\operatorname{tg}\dfrac{x}{y}+x\cdot y+y^2=0$	$\begin{cases} x=\ln(\operatorname{arctg} t) \\ y=\ln(\operatorname{arcctg} t) \end{cases}$
44	$y=x^{\ln\sin^2 x}$	$\sin\left(x^2+y^2\right)-x\cdot y=0$	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg}(\ln t) \\ y=\operatorname{arcctg}(\ln t) \end{cases}$
45	$y=x^{2^x}\cdot 5^x$	$\operatorname{tg}\left(x^2+y^2\right)-x\cdot y+y=0$	$\begin{cases} x=t-\operatorname{arctg} t \\ y=\ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$
46	$y=(\arccos x)^{5x}$	$\cos\left(x^2+x\cdot y\right)-\dfrac{x}{y}=0$	$\begin{cases} x=\arccos\sqrt{1-t^2} \\ y=\operatorname{arctg}\left(t^2-1\right) \end{cases}$
47	$y=\left(\sin x^2\right)^{\ln x}$	$\cos\left(x+x^2y\right)-x^2+y=0$	$\begin{cases} x=\arcsin e^{2t} \\ y=\arccos e^{2t} \end{cases}$
48	$y=x^{\sqrt{\arccos x}}$	$e^{x+y^3}+2x+y=0$	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg} e^t \\ y=\ln\left(1+e^{2t}\right) \end{cases}$
49	$y=x^{3\sin x}$	$e^{x^2+y}-2x\cdot y-y=0$	$\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=t+\cos t \end{cases}$
50	$y=5^{x^5}\cdot x^5$	$5^{x\cdot y}-y^2+x^2=0$	$\begin{cases} x=e^{3t}\sin 2t \\ y=e^{3t}\cos 2t \end{cases}$

Индивидуальные задачи к заданию 5

Таблица 1.4

№п	f(x)	№п	f(x)
1	$y=\dfrac{x^3}{x-1}$	2	$y=\dfrac{x^3}{x^4-1}$
3	$y=\dfrac{x^2-2}{x^2+2}$	4	$y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
5	$y=\dfrac{x^2}{x^3+1}$	6	$y=\sin x+\cos x$
7	$y=e^{2x-x^2}$	8	$y=\dfrac{x^3+4}{x^3}$
9	$y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	10	$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$
11	$y=x^3\cdot e^{-x}$	12	$y=(x-2)\cdot e^{3-x}$
13	$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$	14	$y=(3-x)\cdot e^{x-2}$
15	$y=\dfrac{1}{x^4-1}$	16	$y=\dfrac{e^x}{x}$
17	$y=\dfrac{4x}{(x+1)^2}$	18	$y=-\dfrac{8x}{x^2+4}$
19	$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$	20	$y=\dfrac{2x+1}{x^2}$
21	$y=\dfrac{x}{x^2+4}$	22	$y=\dfrac{3x-2}{x^3}$
23	$y=xe^x$	24	$y=(x+2)^2(x-1)$
25	$y=\dfrac{3}{x^2+9}$	26	$y=2+x^2-\dfrac{x^4}{2}$
27	$y=\dfrac{x^2}{x+1}$	28	$y=(x+1)^3(2x-3)$

Продолжение табл.1.4

№№	f(x)	№№	f(x)
29	$y=-\frac{(1+2x)}{(1+x)^2}$	30	$y=\frac{x}{x^2+4}$
31	$y=\frac{2x}{1+x^2}$	32	$y=x+\frac{4}{x+2}$
33	$y=x-\frac{1}{x^3}$	34	$y=\frac{x^2+8}{4-x^2}$
35	$y=\frac{1}{x(x-8)}$	36	$y=\frac{1}{x(x-8)}$
37	$y=(x-1)(x+2)^2$	38	$y=\frac{3}{9+x^2}$
39	$y=(2x-3)(x+1)^3$	40	$y=\frac{\lvert x-1\rvert}{x^2}$
41	$y=\frac{x^2}{x+1}$	42	$y=-\frac{2x+1}{(x+1)^2}$
43	$y=\frac{2x}{x^2+1}$	44	$y=\frac{x^2+2x+4}{x+2}$
45	$y=\frac{x^4-1}{x^3}$	46	$y=\frac{x^2+8}{4-x^2}$
47	$y=x^3-9x^2+15x-3$	48	$y=2x^3+3x^2-36x+15$
49	$y=\frac{4+2x^2-x^4}{2}$	50	$y=x^3-9x^2+15x-3$

2. Образцы выполнения заданий

2.1. Основные теоретические положения

При вычислении пределов необходимо помнить их свойства:

если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то

1. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = A + B,$

т.е. предел суммы равен сумме пределов.

Замечание: Если $A = +\infty$, $B = -\infty$, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[\infty - \infty]$.

2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = A\cdot B,$

т.е. предел произведения равен произведению пределов.

Замечание: Если $A = \infty$, $B = 0$, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[\infty \cdot 0]$.

Если $f(x) = C$, где $C = \text{const}$, то

$\lim\limits_{x\to a}(C\cdot g(x)) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x),$

т.е. постоянный множитель можно выносить за знак предела.

3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0),$

т.е. предел частного есть частное пределов.

Замечание: Если $A = \infty$, $B = \infty$ или A=0, B=0, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[\frac{\infty}{\infty}]$ или $[\frac{0}{0}]$.

4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = A^B.$

Замечание: Если $A = 1, B = \infty$, или $A = 0, B = 0$, или $A = \infty$ $B = 0$, то это свойство не верно и имеем неопределенность $[1^\infty]$, или $[0^0]$, или $[\infty^0]$.

Первый замечательный предел

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, неопределенность $[\frac{0}{0}]$.

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$,
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}=1$,
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=1$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$,
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{arctg}x}=1$,
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\quad \text{неопределенность } [1^\infty],\ e\approx 2{,}7.$$

Следствия:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$,
2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$,
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$,
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$,
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$,
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m$.

Замечание: Если $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\ldots+a_1\cdot x+a_0$, $P_m(x)=b_mx^m+b_{m-1}\cdot x^{m-1}+\ldots+b_1\cdot x+b_0$, причем $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$, тогда при вычислении предела вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}$ можно выделить 3 случая.

1 случай: степень многочлена числителя меньше степени многочлена знаменателя ($n < m$), то такой предел равен 0;

2 случай: степень многочлена числителя больше степени многочлена знаменателя ($n > m$), то такой предел равен ∞;

3 случай: степени многочленов числителя и знаменателя равны (n=m), то такой предел равен отношению коэффициентов при старших степенях, т.е. равен $\frac{a_n}{b_m}$.

Задание 1. Вычислить пределы функций

а) Вычисление пределов, исключающих неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

При раскрытии этой неопределенности следует помнить, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^n}=0,\ n>0$. Разделив числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, можно свести вычисление предела к упрощенному виду.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{3x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Способ 1. Разделив числитель и знаменатель на x^2, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{3x}{x^2}+\frac{8}{x^2}}=\left[\frac{1+2\cdot 0+4\cdot 0}{3\cdot 0+8\cdot 0}\right]=\infty$$

Способ 2. Используя замечание (случай 2) вычисление предела можно заменить вычислением эквивалентного ему предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+4}{3x+8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{3}=\infty$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{5x^3+4x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Способ 1. Разделив числитель и знаменатель на x^3, имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left[\frac{3+2\cdot 0+0}{5+4\cdot 0+0}\right]=\frac{3}{5}.$$

Способ 2. Используя замечание (случай 3) вычисление предела можно заменить вычислением эквивалентного ему предела

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+1}{5x^3+4x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3}{5x^3}=\frac{3}{5}.$$

б) Вычисление пределов, исключающих неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$ можно исключить, используя формулы сокращенного умножения:

1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

4) $ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)(x-x_2)$,

где x_1 и x_2 - действительные корни уравнения, уравнения $ax^2+bx+c=0$, причем

$$D=b^2-4ac,\qquad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Применение формул позволяет разложить многочлены на множители, тем самым приводя к сокращению одинаковых множителей.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=[\infty-\infty]$.

Преобразуем выражение в скобках

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1\cdot(1+x+x^2)-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$x^2+x-2=0$,

$$D=1-4\cdot1\cdot(-2)=9,\quad x_1=\frac{-1+3}{2}=1;\qquad x_2=\frac{-1-3}{2}=-2,$$

$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$,

$1-x^3=(1-x)(1+x+x^2)$.

Выражение в скобках примет вид

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{(x-1)(x+2)}{-(x-1)(1+x+x^2)}=-\frac{x+2}{1+x+x^2}.$$

тогда

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)=-\frac{1+2}{1+1+1}=-\frac{3}{3}=-1.$$

в) Неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ в пределах, связанных с вычислениями, основанными на домножении числителя и знаменателя на сопряженное выражение.

Сопряженным для выражения $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)$ является выражение вида $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$ и наоборот.

Кроме того, если неопределенность создается квадратным трехчленом ax^2+bx+c его нужно разложить, используя формулу (4) (см.пункт б). Так же возможно использование формул (1) – (3) пункта б).

1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}=\left[\frac{0}{0}\right]$.

Сопряженным выражением к числителю будет выражение вида $\left(\sqrt{5x+1}+4\right)$. Знаменатель разложим на множители. Для этого решим уравнение

$x^2+2x-15=0 \qquad D=4+4\cdot 15=64$

$x_1=\frac{-2+8}{2}=3; \qquad x_2=\frac{-2-8}{2}=-5$

$x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$

Имеем:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{5x+1}-4\right)\left(\sqrt{5x+1}+4\right)}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)}=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{5x+1})^2-4^2}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)}=$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5x+1-16}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)} = \lim_{x\to 3}\frac{5x-15}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5(x-3)}{(\sqrt{5x+1}+4)(x-3)(x+5)} = \lim_{x\to 3}\frac{5}{(\sqrt{5x+1}+4)(x+5)}.$$

Выражение не содержит неопределенность и значение предела равно

$$\lim_{x\to 3}\frac{5}{(\sqrt{5x+1}+4)(x+5)} = \frac{5}{(\sqrt{5\cdot 3+1}+4)(3+5)} = \frac{5}{(4+4)8} = \frac{5}{8\cdot 8} = \frac{5}{64}.$$

г) Вычисление пределов, приводящихся к первому замечательному пределу или его следствиям.

При вычислении пределов необходимо помнить:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$;

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$; $\quad\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$;

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Примеры.

1) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Введем новую переменную $y = x+2$, то при $x\to -2$, $y\to 0$.

Имеем

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{(y-2)^2-4} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y^2-4y} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y(y-4)} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Используем формулы тригонометрии:

$$\cos 3x-\cos 5x=-2\sin\frac{3x+5x}{2}\cdot\sin\frac{3x-5x}{2}=-2\sin 4x\cdot\sin(-x)=$$

$$=2\sin 4x\cdot\sin x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 4x\cdot\sin x}{x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right]=2\cdot 0\cdot 1=0.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}5x-\sin 5x}{8x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Преобразуем числитель, учитывая, что $\mathrm{tg}5x=\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}$, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{\cos 5x}-\sin 5x}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x\left(\dfrac{1}{\cos 5x}-1\right)}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x(1-\cos 5x)}{8x^2\cos 5x}.$$

Выделяя первый замечательный предел и его следствие $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{8x^2\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x\cdot\dfrac{1-\cos 5x}{(5x)^2}\cdot(5x)^2}{8x^2\cdot 1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1\cdot 5x\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 25x^2}{8x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{125x^3}{16x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{125x}{16}=0$$

д) Вычисление пределов, исключающих неопределенность вида $[1^\infty]$.

Пределы сводятся ко второму замечательному пределу или его следствиям

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-4}\right)^{x-2}=[1^\infty]$.

Выражение в скобках преобразуем, выделив целую часть:

$$\frac{2x+5}{2x-4}=1+\frac{2x+5}{2x-4}-1=1+\frac{2x+5-2x+4}{2x-4}=1+\frac{9}{2x-4}=1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}.$$

Аргумент в выражении второго замечательного предела равен $\frac{2x-4}{9}$. Такой же аргумент нужно создать и в степени:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}\right)^{x-2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}\right)^{\frac{2x-4}{9}\cdot\frac{9}{2x-4}\cdot(x-2)},$$

Применим теорему о пределе степенно-показательной функции: если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$, то $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=A^B$, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x-4}{9}}\right)^{\frac{2x-4}{9}}=e.$$

Причем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{2x-4}\cdot(x-2)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-18}{2x-4}=\frac{9}{2}.$

Окончательно $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x-4}\right)^{x-2}=e^{\frac{9}{2}}=\sqrt{e^9}=e^4\sqrt{e}.$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right].$

Для вычисления предела используем свойство 4. Сделаем замену:

$x-1=y \quad x=y+1$, то $\quad x\to 1;\ y\to 0,\quad$ т.е.

$$\lim_{y\to 0}\frac{2^{y+1}-2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{2^y\cdot 2-2}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{2(2^y-1)}{y}=2\cdot\lim_{y\to 0}\frac{2^y-1}{y}=2\cdot\ln 2.$$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{8x}}{6x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Используем свойство 3. В числителе e^{7x} вынесем за скобки

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}(e^{-x}-1)}{6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}(e^{-x}-1)}{-6x}=-\lim_{x\to 0}\frac{e^{8x}}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=$$

$$=-\frac{e^{0}}{6}\cdot 1=-\frac{1}{6}.$$

Задание 2.

Основные теоретические положения

Для непрерывности функции f(x) в точке x_0 необходимо и достаточно выполнение трех условий:

1. функция f(x) должна быть определена в точке x_0, т.е. можно вычислить значение $f(x_0)$;

2. должны существовать и быть конечными односторонние пределы

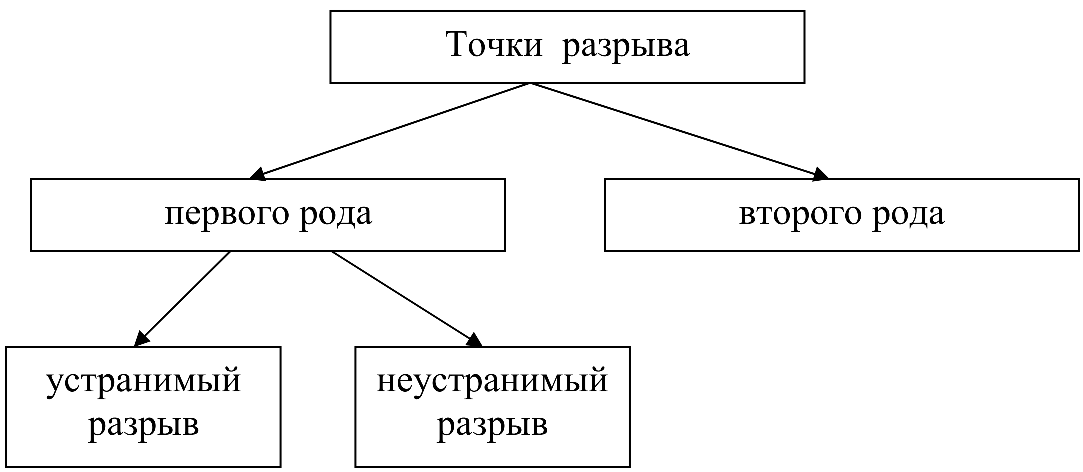
$$A=\lim_{x\to x_0-0} f(x),\quad B=\lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3. $A = B = f(x_0)$.

Если все эти три условия выполнены, то x_0 – точка непрерывности функции f(x).

Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то x_0 – точка разрыва функции f(x).

Точки разрыва функции можно разделить на точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода. Причем точки разрыва первого рода так же делятся на точки устранимого и неустранимого разрывов. Т. е. можно рассматривать следующую схему



Дадим определения всех этих точек разрыва.

Устранимый разрыв: односторонние пределы A и B существуют и конечны, $A = B$, но f(x) неопределена при $x = x_0$ или $A = B \neq f(x_0)$.

Неустранимый разрыв: односторонние пределы A и B существуют и конечны, но $A \neq B$. При этом f(x) может быть как определена, так и не определена при $x = x_0$.

Таким образом, у точек разрыва первого рода односторонние пределы должны существовать и быть конечными.

Все точки разрыва, не являющиеся точками разрыва первого рода, есть точки разрыва второго рода. Т.е. если хотя бы один из односторонних пределов A или B не существует или равен ∞, то x_0 есть точка разрыва второго рода.

Пример выполнения задания

Задана функция $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le -1; \\ x^2+1, & -1 < x \le 1; \\ -x+2, & x > 1. \end{cases}$ Найти точки разрыва функции, если они существуют, определить их тип. Схематично сделать чертеж.

Функции $y_1(x) = x+1$, $y_2(x) = x^2+1$, $y_3(x) = -x+2$ непрерывны при $x \in (-\infty;+\infty)$. Следовательно, f(x) может иметь точки разрыва при $x = -1$, $x = 1$. Исследуем:

1) при $x = -1$ имеем:

$$f(-1) = -1+1 = 0$$

$$A = \lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (x+1) = -1+1 = 0$$

$$B = \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} (x^2+1) = ((-1)^2+1) = 2$$

Так как односторонние пределы A и B существуют и конечны, то точка $x = -1$ разрыв I рода. Т.к. $A \neq B$, то это неустранимый разрыв.

2) при $x = 1$ имеем:

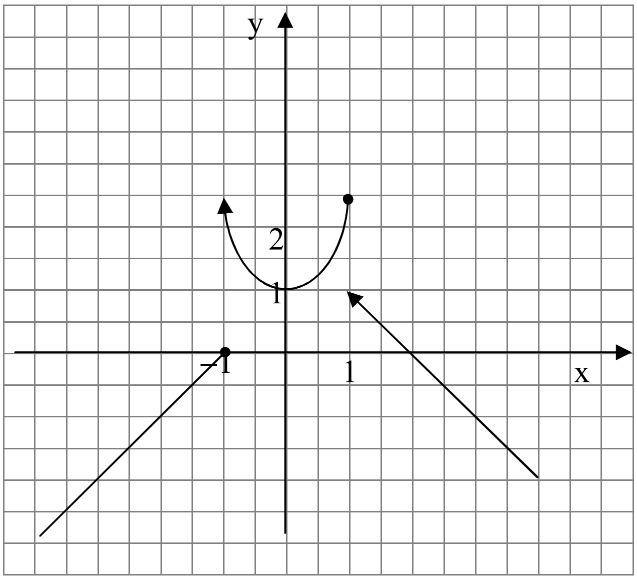
$f(x)$ определена при $x = 1$, $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$A = \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (x^2 + 1) = 2$

$B = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} (-x + 2) = -1 + 2 = 1$

Так как односторонние пределы A и B существуют и конечны, то точка $x = -1$ разрыв I рода. Т.к. $A \neq B$, то это неустранимый разрыв.



Задание 3. Вычислить производные функций, заданных явно

Правила дифференцирования

1) $(u_1 \pm u_2 \pm u_3 \pm ... \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm u_3' \pm ... \pm u_n'$,
2) $(uv)' = u'v + uv'$,
3) $(c \cdot u(x))' = c \cdot u'(x)$,
4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$,
5) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$,
6) $(c)' = 0$,
7) $(u(v(x)))' = u' \cdot v'$, где $u(v(x))$ − сложная функция.

Таблица производных

Тип функции	Вид производной	Частные случаи
Степенная $y = x^n$ $y = (u(x))^n$	$(x^n)' = u \cdot x^{n-1}$ $((u(x))^n)' = n \cdot (u(x))^{n-1} \cdot u'(x)$	$\left(\sqrt[n]{x^m}\right)' = \left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n} \cdot x^{\frac{m}{n}-1}$ Пример: $(\sqrt{x})' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (x^{-n})' = -nx^{-n-1}$ Пример: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
Показательная $y = a^x$ $y = a^{u(x)}$	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \cdot \ln a \cdot u'(x)$	$(e^x)' = e^x$
Логарифмическая $y = \log_a x$ $y = \log_a u(x)$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ $(\log_a u(x))' = \frac{1}{u(x) \cdot \ln a} \cdot u'(x)$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Тригонометрическая	$(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$; $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;	$(\sin u(x))' = \cos u(x) \cdot u'(x)$ $(\cos u(x))' = -\sin u(x) \cdot u'(x)$ $(\operatorname{tg} u(x))' = \frac{1}{\cos^2 u(x)} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{ctg} u(x))' = -\frac{1}{\sin^2 u(x)} \cdot u'(x)$
Обратные тригонометрические функции	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$;	$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-(u(x))^2}} \cdot u'(x)$ $(\arccos u(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-(u(x))^2}} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{arctg} u(x))' = \frac{1}{1+(u(x))^2} \cdot u'(x)$ $(\operatorname{arcctg} u(x))' = \frac{-1}{1+(u(x))^2} \cdot u'(x)$

Примеры:

1) $y = 2x \cdot \sqrt[3]{x^5 + 3x}$.

Для нахождения производной используем правила:

$$y' = (2x \cdot (x^5 + 3x)^{1/3})' = (2x)' \cdot (x^5 + 3x)^{1/3} + 2x((x^5 + 3x)^{1/3})' =$$

$$= 2(x^5 + 3x)^{1/3} + 2x \cdot \frac{1}{3}(x^5 + 3x)^{1/3-1} \cdot (x^5 + 3x)' = 2(x^5 + 3x)^{1/3} +$$

$$+ \frac{2}{3}x(x^5 + 3x)^{-2/3} \cdot (5x^4 + 3) = 2(x^5 + 3x)^{1/3} \cdot \left(1 + \frac{5x^4 + 3}{3(x^5 + 3x)}\right) =$$

$$= 2\sqrt[3]{x^5 + 3x} + \frac{2x}{3\sqrt{(x^5 + 3x)^2}} = \frac{3 \cdot 2(x^5 + 3x) + 2x}{3\sqrt[3]{(x^5 + 3x)^2}} = \frac{6x^5 + 20x}{3\sqrt[3]{(x^5 + 3x)^2}}.$$

2) $y = e^{x^3 - 4x}$.

Используем правила нахождения производной

$$y' = (e^{x^3 - 4x})' = e^{x^3 - 4x} \cdot (x^3 - 4x)' = e^{x^3 - 4x} \cdot (3x - 4).$$

3) $y = 7^{x^2 + \frac{1}{x}}$. Используем правила нахождения производной

$$y' = (7^{x^2 + \frac{1}{x}})' = 7^{x^2 + \frac{1}{x}} \ln 7 \left(x^2 + \left(\frac{1}{x} \right) \right)' = 7^{x^2 + \frac{1}{x}} \ln 7(2x + (-1)x^{-1-1}) =$$

$$= 7^{x^2 + \frac{1}{x}} \ln 7 \left(2x - \frac{1}{x^2} \right).$$

4) $y = \ln^3(x^2 + 2x)$.

Преобразуем к виду $y = (\ln(x^2 + 2x))^3$.

Используем правила нахождения производной

$$y' = (\ln^3(x^2 + 2x))' = 3\ln^2(x^2 + 2x) \cdot (\ln(x^2 + 2x))' =$$

$$= 3\ln^2(x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (x^2 + 2x)' =$$

$$= 3\ln^2(x^2 + 2x) \cdot \frac{1}{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2) = \frac{6(x + 1)\ln^2(x^2 + 2x)}{x^2 + 2x}.$$

5) $y=\cos^3\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)$.

$$y=\left(\cos\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^3$$

Используем правила нахождения производной

$$y'=\left(\cos^3\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)' = 3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\left(\cos\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\right)' =$$

$$=2\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\left(-\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\right)\cdot\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)' =$$

$$=-3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\cdot\left(2+\frac{x'(x^2+2)-x(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}\right)=$$

$$=-3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\cdot\left(2+\frac{x^2+2-x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}\right)=$$

$$=-3\cos^2\left(2x+\frac{x}{x^2+1}\right)\cdot\sin\left(2x+\frac{x}{x^2+2}\right)\cdot\left(2+\frac{2-x^2}{(x^2+2)^2}\right).$$

6) $y=\mathrm{ctg}^2\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)$.

Используем правила нахождения производной

$$y'=\mathrm{ctg}^2\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)' = 2\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\left(\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\right)' =$$

$$=2\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x+1}{x^2+1}}\right)\cdot\frac{(x+1)'\cdot(x^2+1)-(x^2+1)'(x+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$=-2\mathrm{ctg}\frac{x+1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{x+1}{x^2+1}}\cdot\frac{x^2+1-2x(x+1)}{(x^2+1)^2}=$$

$$= -2\frac{\cos\frac{x+1}{x^2+1}}{\sin^3\frac{x+1}{x^2+1}}\cdot\frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}.$$

Задание 4. Вычислить производные различных функций

а) Функция $y = [f(x)]^{g(x)}$ называется степенно-показательной. Для вычисления производных таких функций можно предварительно прологарифмировать обе части. Производные находить учитывая, что функция y-сложная функция переменной x.

Примеры.

1) $y = (\cos x^2)^x$

Прологарифмируем обе части, по основанию е имеем

$\ln y = \ln(\cos x^2)^x$.

Учитывая свойство логарифма $\log_a b^c = c\log_a b$ преобразуем выражение

$\ln y = x\cdot\ln(\cos x^2)$.

Найдем производные от обеих частей по переменной x:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = x'\cdot\ln(\cos x^2) + x\cdot(\ln(\cos x^2))',$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(\cos x^2) + x\cdot\frac{1}{\cos x^2}\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x,$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(\cos x^2) - \frac{2x^2\cdot\sin x^2}{\cos x^2},$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(\cos x^2) - 2x^2 \mathrm{tg} x^2,$$

$$y' = (\ln(\cos x^2) - 2x^2\cdot\mathrm{tg} x^2)\cdot y.$$

Подставляя $y = (\cos x^2)^x$, имеем

$$y' = (\ln(\cos x^2) - 2x^2\cdot\mathrm{tg} x^2)(\cos x^2)^x.$$

2) $y = x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x$.

Логарифмируя обе части, имеем

$\ln y = \ln(x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x)$

Учитывая свойства логарифмов

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$,

$\log_a b^c = c\log_a b$, получим

$\ln y = \ln x^{\sqrt{\ln x^2}} + \ln 5^x$,

$\ln y = \sqrt{\ln x^2} \cdot \ln x + x \cdot \ln 5$.

Найдем производные от обеих частей по переменной x

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x^2}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \cdot \ln x + \sqrt{\ln x^2} \cdot \frac{1}{x} + \ln 5,$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x^2}} + \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} + \ln 5,$$

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x^2}} + \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} + \ln 5 \right) \cdot y.$$

Или, подставляя $y = x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x$, получаем

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x^2}} + \frac{\sqrt{\ln x^2}}{x} + \ln 5 \right) \cdot x^{\sqrt{\ln x^2}} \cdot 5^x.$$

б) Производные функции, заданных неявно находятся по общим правилам нахождения производных с учетом того, что функция y−сложная функция переменной x.

Примеры.

1) $\cos(x^2 \cdot y) + \dfrac{y^2}{x} + e^{x+y} = 0$.

$$\left(\cos(x^2 \cdot y) + \frac{y^2}{x} + e^{x+y} \right)' = 0,$$

$$-\sin(x^2 \cdot y) \cdot (2xy + x^2 \cdot y') + \frac{2y \cdot y' \cdot x - y^2}{x^2} + e^{x+y} \cdot (1 + y') = 0.$$

Преобразуем выражение так, чтобы можно было выразить y'

$$-2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)-x^2\cdot y'\cdot\sin(x^2\cdot y)+\frac{2y\cdot y'}{x}-\frac{y^2}{x^2}+e^{x+y}+e^{x+y}\cdot y'=0,$$

$$\frac{2y\cdot y'}{x}-x^2\cdot y'\cdot\sin(x^2\cdot y)+e^{x+y}\cdot y'=2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)+\frac{y^2}{x^2}-e^{x+y},$$

$$y'\left(\frac{2y}{x}-x^2\cdot\sin(x^2\cdot y)+e^{x+y}\right)=2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)+\frac{y^2}{x^2}-e^{x+y}.$$

Тогда y'

$$y'=\frac{2xy\cdot\sin(x^2\cdot y)+\dfrac{y^2}{x^2}-e^{x+y}}{\dfrac{2y}{x}-x^2\cdot\sin(x^2\cdot y)+x^2\cdot e^{x+y}}.$$

$$y'=\frac{2x^3y\cdot\sin(x^2\cdot y)+y^2-x^2\cdot e^{x+y}}{2xy-x^4\cdot\sin(x^2\cdot y)+x^2\cdot e^{x+y}}.$$

в). Производные функций, заданных параметрически $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ находятся следующим образом

$y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, где y'_t, x'_t - производные, определяемые по общим правилам нахождения производных.

Примеры.

1) $\begin{cases}x=2-\sin 2t,\\ y=2t+\cos 2t.\end{cases}$

$$y'_t=(2t+\cos 2t)'=2+(-\sin 2t)\cdot 2=2-2\sin 2t=2(1-\sin 2t).$$

$$x'_t=(2-\sin 2t)'=-\cos 2t\cdot 2=-2\cos 2t.$$

$$y'_x=\frac{2(1-\sin 2t)}{-2\cos 2t}=\frac{\sin 2t-1}{\cos 2t}=\mathrm{tg}2t-\frac{1}{\cos 2t}.$$

2) $\begin{cases}x=\mathrm{arctg}\,e^{3t},\\ y=\ln(1+e^{6t}).\end{cases}$

$$x'_t = (\operatorname{arctg} e^{3t})' = \frac{1}{1+e^{6t}} \cdot e^{3t} \cdot 3 = \frac{3e^{3t}}{1+e^{6t}}.$$

$$y'_t = (\ln(1+e^{6t}))' = \frac{1}{1+e^{6t}} \cdot e^{6t} \cdot 6 = \frac{6e^{6t}}{1+e^{6t}}.$$

$$y'_x = \frac{6e^{6t}}{1+e^{6t}} \cdot \frac{1+e^{6t}}{3e^{3t}} = 2e^{3t}.$$

$$y'_x = 2e^{3t}.$$

Задание 5. Исследовать функцию методом дифференциального исчисления и построить график

Пример 1. Исследовать и построить график функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$.

Решение.

1. Областью определения функции является множество всех вещественных чисел, кроме $x = 1$, при котором знаменатель обращается в нуль.

$D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Так как D(y) несимметричное множество относительно x=0, то функция является функцией общего вида (ни четная, ни нечетная).

2. Точка $x = 1$ является точкой разрыва, при этом

$$\lim_{x \to 1+0} \frac{x^2+1}{x-1} = \left[\frac{1+1}{1+0-1} = \frac{2}{+0} \right] = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^2+1}{x-1} = \left[\frac{1+1}{1-0-1} = \frac{2}{-0} \right] = -\infty.$$

В остальных точках числовой оси функция непрерывна.

3. $x = 1$ − вертикальная асимптота

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот.

Если $x \to +\infty (x \to -\infty)$, то $y \to +\infty (y \to -\infty)$, следовательно, горизонтальных асимптот у графика нет. Наклонные асимптоты будем искать в виде $y = kx + b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^2-x}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+1}{x-1}=1.$$

Следовательно, при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$ график функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$.

4. Найдем производную

$$y'=\frac{(x^2+1)'(x-1)-(x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2};$$

$$y'=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

Стационарными точками являются корни уравнения $x^2-2x-1=0$, т.е. точки $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$ (в этих точках $y'=0$). Исследуем знак производной в интервалах $(-\infty,1-\sqrt{2})$, $(1-\sqrt{2},1)$, $(1,1+\sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2},+\infty)$.

x	$(-\infty;1-\sqrt{2}]$	$1-\sqrt{2}$	$[1-\sqrt{2};1)$	1	$(1;1+\sqrt{2}]$	$1+\sqrt{2}$	$[1+\sqrt{2};\infty)$
y'	+	0	–		–	0	+
y	возрастает	максимум $y_{max}(1-\sqrt{2})=$ $=2(1-\sqrt{2})$	убывает		убывает	минимум $y_{min}(1+\sqrt{2})=$ $=2(1+\sqrt{2})$	возрастает

5. Найдем вторую производную функции:

$$y''=\frac{(x^2-2x-1)'(x-1)^2-((x-1)^2)'(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4}=$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^4}$$

$$y'' = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Видно, что в области определения функции $(x \neq 1)$ y'' не обращается в нуль, а значит, график функции не имеет точек перегиба.

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	не входит в область определения	+
y	график выпуклый		график вогнутый

6. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

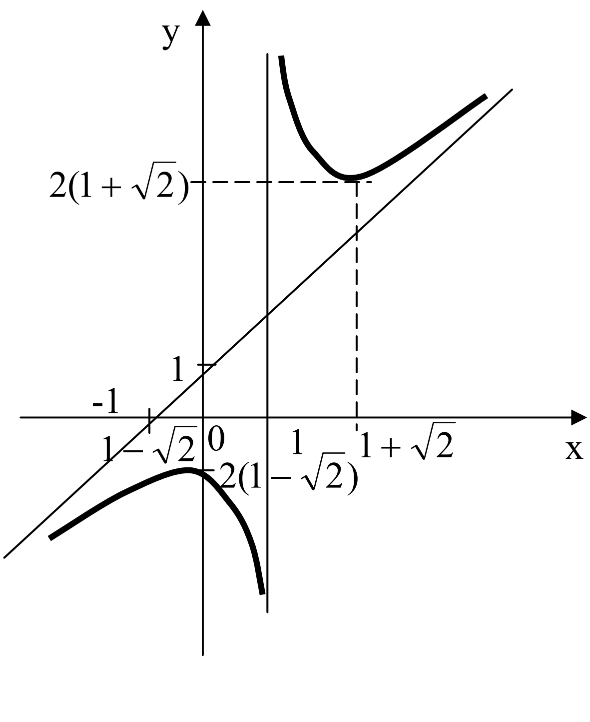
$$x = 0, \quad y(x_0) = \frac{1}{-1} = -1,$$

(0;−1) − точка пересечения графика с осью Oy.

$y = 0$, x − не существует, т.к уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет вещественных корней. С осью Ox график не пересекается.

На основании полученных данных строим график функции

$$y = \frac{x^2+1}{x-1}.$$



Пример 2. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Решение.

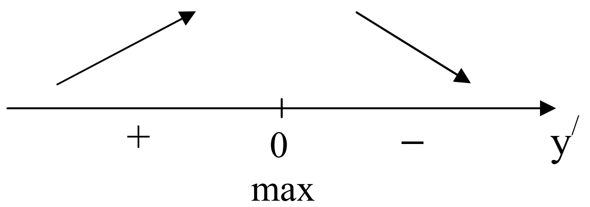
1. Область определения (-∞, +∞).

Функция четная, график симметричен относительно оси Оу т.к. $y(-x) = \dfrac{1}{1+(-x)^2} = \dfrac{1}{1+x^2} = y(x)$. Точек разрыва и вертикальных асимптот нет, т.к. $1+x^2 \neq 0$.

С осью Ох не пересекается: $y \neq 0$ при всех x. С осью Оу пересечение при x = 0, y(0) = 1.

2. Найдем производные. Решим уравнение $y' = 0$. $y' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Стационарная точка x=0. Интервалы (-∞,0), (0,+∞). Знаки производной $y' : (-\infty,0), y' > 0$; функция y–возрастает, (0,+∞), $y' < 0$; функция y –убывает.



При x=0 – максимум

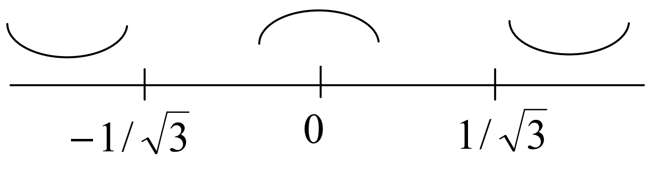
$y(0) = 1 - \max$ функции

3. Находим $y'' = \dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. $y'' = 0$, $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Интервалы:

$(-\infty,-\dfrac{1}{\sqrt{3}})$, $y'' > 0$ вогнутость

$(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{3})$, $y'' < 0$ выпуклость

$(\dfrac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$, $y'' > 0$ вогнутость



В точках $x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и $x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ y'' меняет знак $y\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{3}{4}$, следовательно,

$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{3}{4}\right)$ – точки перегиба.

4. Найдем наклонные асимптоты. Уравнение асимптот ищем в виде $y = kx + b$, где

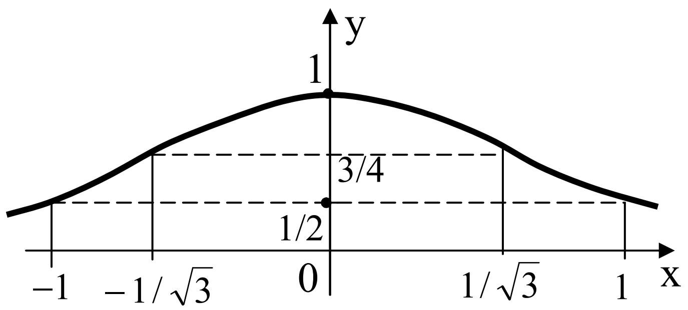
$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{(1+x)^2 x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty}[y(x) - kx] = \lim_{x\to\infty}[y(x) - 0\cdot x] = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Горизонтальная асимптота $y = 0$ при $x \to \pm\infty$.

5. Построение графика.

Найдем дополнительные точки: $y(\pm 1) = \frac{1}{2}$



Пример 3. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = x^2 \cdot e^{-x}$ и, используя результаты исследования, построить её график.

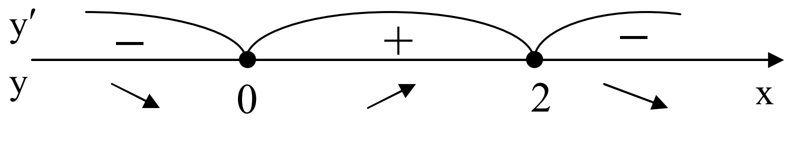
1. $D(y) = R$

2. $y(-x) = (-x)^2 \cdot e^x = x^2 e^x$ – функция не является ни четной, ни нечетной.

3. $y'(x) = (x^2 \cdot e^{-x})' = (x^2)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (e^{-x})' =$

$= 2xe^{-x} - e^{-x} \cdot x^2 = xe^{-x}(2 - x)$

$y' = 0; \qquad xe^{-x}(2 - x) = 0, \qquad x_1 = 0,\ x_2 = 2$



при $x \in (-\infty;0] \cup [2;+\infty)$ − функция убывает,

$x \in [0;2]$ − функция возрастает

$x = 0$ − точка минимума, $y(0) = 0$ − минимум,

$x = 2$ − точка максимума, $y(2) = \dfrac{4}{e^2}$ − максимум.

4. $y'' = (xe^{-x}(2-x))' = (e^{-x}(2x - x^2))' =$

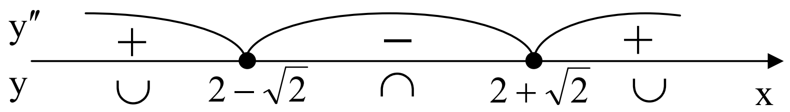
$= -e^{-x}(2x - x^2) + (2 - 2x) \cdot e^{-x} =$

$= e^{-x}(x^2 - 2x - 2x + 2) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$.

$y'' = 0$, $e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0$, ёё$x^2 - 4x + 2 = 0$

$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$, $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$x_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3{,}4;$ $x_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}6$.



на $(-\infty;2-\sqrt{2}) \cup (2+\sqrt{2};+\infty)$ − функция вогнута,

на $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ − функция выпукла,

Точки перегиба графика функции:

$(2-\sqrt{2};\ (2-\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2+\sqrt{2}})$

$(2+\sqrt{2};\ (2+\sqrt{2})^2 \cdot e^{-2-\sqrt{2}})$

5. Асимптоты

Найдем асимптоты при $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Т.к.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0 = \text{const}$, то

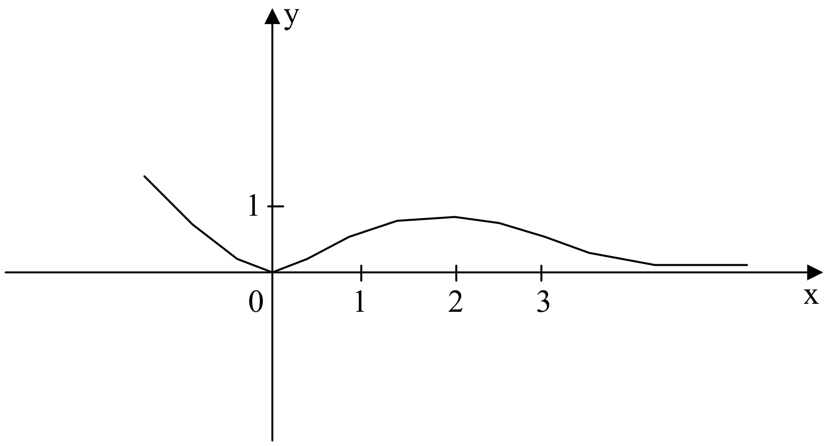
$y = 0$ − горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ найдем наклонные асимптоты $y = kx + b$

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot e^{-x}}{x} = [\infty - \infty] = \infty .$$

Следовательно, наклонных асимптот при $x \to -\infty$ нет.

6. По результатам исследований строим график



Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение предела функции.
2. Какая величина называется бесконечно малой?
3. Сформулируйте теоремы о пределах.
4. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.
5. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.
6. Дайте определение производной функции.
7. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.
8. Какова связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.
9. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.
10. Сформулируйте лемму Ферма.
11. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.

12. Сформулируйте теорему Коши о среднем.
13. Сформулируйте правило Лопиталя.
14. Запишите формулу Тейлора.

Список рекомендуемой литературы

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. [Текст] : учебное пособие − М.: Интеграл-Пресс, Т.1. 2007. − 416с.
2. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. [Текст] : учебник − М.: Проспект, 2011. − 608с.
3. Сборник задач по математике для втузов. [Текст] : учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. Ч.1. 2009. − 288с.
4. Сборник задач по математике для втузов. [Текст] : учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова – М.: Физматлит. Ч.2 2009. − 432с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
« 19 » июня ________ 2013 г.

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания по выполнению модуля 2
для студентов технических специальностей

Курск 2013

УДК 514.12

Составители: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина

Рецензент

Старший преподаватель кафедры высшей математики *А.В. Бойков*

Векторная алгебра и аналитическая геометрия: методические указания по выполнению модуля 2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Шеставина. Курск, 2013. 18 с.

Содержит краткую теорию в форме справочного материала и образцы решения всех заданий модуля 2 и имеют своей целью оказание помощи студентам очного отделения технических специальностей при выполнении заданий.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать ___________. Формат 60х84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.

Юго-западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Задание 1

Груз весом $\left|\vec{P}\right|$ = 100кГ поддерживается двумя стержнями AB и CB. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол ACB равен 90˚, угол ABC равен α = 3˚·([n/4] + 1).

Решение

Пусть n = 101. Тогда P_4 = 1 и номер задачи из табл. 1.1 равен 2. Тогда [n/4] = 25 и α =78˚.

По условию груз поддерживается стержнями (находится в покое). Следовательно, вес груза – сила $\vec{P}=\overrightarrow{BK}$ (см. рис. 1) уравновешивается результирующей $\vec{R}=\overrightarrow{BL}$ сил, возникающих в стержнях под действием силы $\vec{P}$, т.е. $\vec{P}=-\vec{R}$ ($\left|\vec{P}\right|=\left|\vec{R}\right|$ и эти силы направлены противоположно).

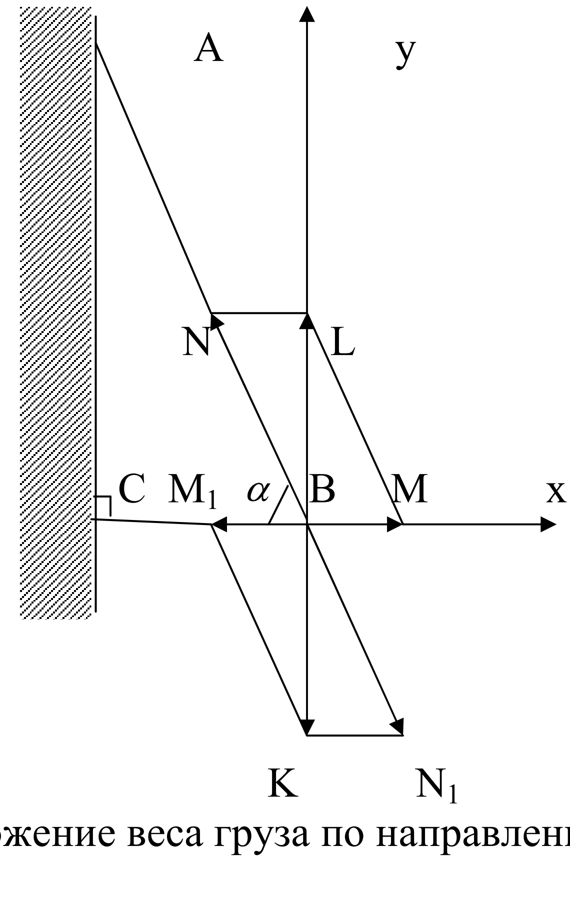


Рис. 1. Разложение веса груза по направлениям стержней

Разложим силу $\vec{R}$ по направлениям стержней BA и BC. Для этого через точку L проведём прямые LM и LN, параллельные стержням BA и BC, до их пересечения с прямыми, содержащими стержни, в точках M и N. Очевидно, что

$$\vec{R}=\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}.$$

Аналогично, раскладывается по направлениям стержней вес груза

$$\vec{P}=\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BM_1}+\overrightarrow{BN_1},$$

и

$$\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{BM_1},\ \overrightarrow{BN}=-\overrightarrow{BN},\ (\left|\overrightarrow{BM}\right|=\left|\overrightarrow{BM_1}\right|,\ \left|\overrightarrow{BN}\right|=\left|\overrightarrow{BN_1}\right|).$$

Сила $\overrightarrow{BN_1}$ вызывает растяжение стержня ВА и порождает силу $\overrightarrow{BN}$, возникающую в этом стержне, уравновешивающую силу растяжения $\overrightarrow{BN_1}$. Аналогично, сила $\overrightarrow{BM_1}$ вызывает сжатие стержня ВС и порождает силу $\overrightarrow{BM}$, возникающую в стержне ВС, уравновешивающую силу сжатия $\overrightarrow{BM_1}$.

Найдём $\left|\overrightarrow{BM}\right|$ и $\left|\overrightarrow{BN}\right|$, обозначив $\left|\overrightarrow{BM}\right|=a$, $\left|\overrightarrow{BN}\right|=b$, $\left|\vec{P}\right|=P$. Введём декартову систему координат, как показано на рис. 3.1, и разложим векторы $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{BN}$ по базису $\{\vec{i},\vec{j}\}$ этой системы координат.

Очевидно, что

$$\overrightarrow{BM}=a\cdot\vec{i},\qquad \overrightarrow{BN}=-b\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}+b\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j},\qquad \vec{P}=-P\cdot\vec{j}.$$

Поскольку груз находится в покое, то результирующая этих сил равна нулевому вектору $\vec{0}$, т.е.

$$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}+\vec{P}=\vec{0},$$

$$a\cdot\vec{i}-b\cdot\cos\alpha\cdot\vec{i}+b\cdot\sin\alpha\cdot\vec{j}-P\cdot\vec{j}=\vec{0},$$

$$(a-b\cdot\cos\alpha)\cdot\vec{i}+(b\cdot\sin\alpha-P)\cdot\vec{j}=\vec{0}.$$

Это векторное равенство равносильно системе двух уравнений

$$\begin{cases} a-b\cdot\cos\alpha=0,\\ b\cdot\sin\alpha-P=0,\end{cases}$$

откуда получаем

$$b=\frac{P}{\sin\alpha},\qquad a=b\cdot\cos\alpha=P\cdot ctg\alpha.$$

Эти формулы можно получить и иначе. Треугольник BML прямоугольный, BM = a, BL = P, ML = b, угол BML равен α, и

$$\frac{BM}{BL} = ctg\alpha , \qquad \frac{BL}{ML} = \sin\alpha ,$$

$$\frac{a}{P} = ctg\alpha , \qquad \frac{P}{b} = \sin\alpha ,$$

откуда

$$a = P \cdot ctg\alpha , \qquad b = \frac{P}{\sin\alpha} .$$

Учитывая условия задачи получим

$$a = 100 \cdot ctg78° = 100 \cdot 0.2126 = 21.26\,(k\Gamma),\ \ b = \frac{100}{\sin 78°} = \frac{100}{0.9781} = 102.24\,(k\Gamma).$$

Задание 2

1способ.

Точка O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки B, если $\overrightarrow{AB} = (-1; P_3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; P_5; -2)$, $O(2; -1; P_7)$.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

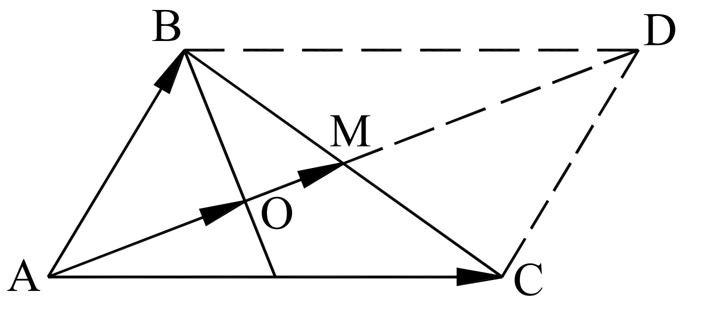


Рис. 2. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (1 способ)

Используя свойство сложения векторов по правилу параллелограмма, имеем: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, то $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \left(0; \dfrac{P_3 + P_5}{2}; -1\right) = (0; 1,5; -1)$.

Зная, что точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, начиная от вершины, имеем: $\dfrac{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{AM}} = \dfrac{2}{3}$.

Таким образом, $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\left(0;\frac{P_3+P_5}{3};-\frac{2}{3}\right)=\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)$.

$\overrightarrow{AO}=\left(2-x_A;-1-y_A;P_7-z_A\right)=\left(2-x_A;-1-y_A;3-z_A\right)$.

Так как координаты вектора задаются единственным образом, то составим систему:

$$\begin{cases}2-x_A=0;\\ -1-y_A=\frac{P_3+P_5}{3};\\ P_7-z_A=-\frac{2}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x_A=0;\\ -1-y_A=1;\\ 3-z_A=-\frac{2}{3};\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A=2;\\ y_A=-2;\\ z_A=3\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Решив данную систему, нашли координаты точки A. Составим аналогичную систему для координат $\overrightarrow{AB}$:

$$\begin{cases}x_B-x_A=-1;\\ y_B-y_A=P_3;\\ z_B-z_A=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B-2=-1;\\ y_B+2=2;\\ z_B-3\frac{2}{3}=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=1;\\ y_B=0;\\ z_B=3\frac{2}{3}.\end{cases}$$

Решением данной системы являются координаты искомой точки $B\left(1;0;3\frac{2}{3}\right)$.

2 способ.

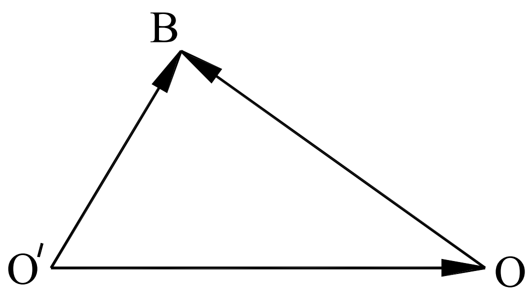


Рис. 3. Вспомогательный чертёж к заданию 2 (2способ)

Пусть O' – начало отсчёта системы координат, т.е. координаты точки O': $x=0, y=0, z=0.$

Вектор $\overrightarrow{O'B}$ и точка B имеют одинаковые координаты.

$\overrightarrow{O'B}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{O'O}=(2;-1;3)$ $\quad (P_7=3)$

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\cdot((-1;2;0)+(1;1;-2))=\frac{1}{3}\cdot(0;3;-2)=\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OB}=(-1;2;0)-\left(0;1;-\frac{2}{3}\right)=\left(-1;1;\frac{2}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{O'B} = (2;-1;3) + \left(-1;1;\frac{2}{3}\right) = \left(1;0;\frac{11}{3}\right)$$

$$B\left(1;0;\frac{11}{3}\right).$$

Задание 3

Даны три силы: $\vec{F}_1 = P_2 \cdot \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - 7 \cdot \vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3 \cdot \vec{i} + P_3 \cdot \vec{j} + 4 \cdot \vec{k}$ и $\vec{F}_3 = -2 \cdot \vec{j} + P_5 \cdot \vec{k}$. Найти равнодействующую $\vec{R}$ сил $(-\vec{F}_1)$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M_0 (0 ; 1 ; P_7) в положение M (P_6 ; 0 ; 1).

Решение

Пусть n = 101. Тогда $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_6 = 5$, $P_7 = 3$,

$\vec{F}_1 = (1; 2;-7)$, $(-\vec{F}_1) = (-1;-2;7)$, $\vec{F}_2 = (3;2;4)$, $\vec{F}_3 = (0;-2;1)$ и $\vec{R} = (-\vec{F}_1) + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = (2;-2;12)$. Если точка перемещается прямолинейно, а сила $\vec{R}$, действующая на точку постоянна, то работа A силы равна скалярному произведению силы на вектор-перемещение точки. Вектор-перемещение имеет вид:

$\overrightarrow{M_0M} = (P_6 - 0; 0 - 1; 1 - P_7) = (5; -1; -2).$

Тогда работа A будет равна

$$A = \left(\vec{R};\ \overrightarrow{M_0M}\right) = 2 \cdot 5 + (-2) \cdot (-1) + 12 \cdot (-2) = -12.$$

Задание 4

Сила $\vec{F} = (P_3; P_5; -2)$ приложена к точке $C(P_4; -2; P_7)$. Определите величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

Момент силы, приложенной к точке относительно начала координат, определяется по формуле:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки C относительно начала координат.

$\vec{r} = \overrightarrow{OC} = (P_4 - 0; -1 - 0; P_7 - 0) = (P_4; -1; P_7) = (1; -1; 3)$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ P_4 & -1 & P_7 \\ P_3 & P_5 & -2 \end{vmatrix} = M_x \cdot \vec{i} + M_y \cdot \vec{j} + M_z \cdot \vec{k};$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \vec{i} - 8 \cdot \vec{j} + 3 \cdot \vec{k}.$$

Величина момента силы:

$$\left|\vec{M}\right| = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{74}.$$

Направляющие косинусы: $\cos\alpha = \dfrac{M_x}{\left|\vec{M}\right|}$, $\cos\beta = \dfrac{M_y}{\left|\vec{M}\right|}$, $\cos\gamma = \dfrac{M_z}{\left|\vec{M}\right|}$.

Получаем: $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{74}}{74}$, $\cos\beta = -\dfrac{4\sqrt{74}}{37}$, $\cos\gamma = \dfrac{3\sqrt{74}}{74}$.

Задание 5

Найти ненулевой вектор, ортогональный векторам $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -1)$ и $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$. Сделайте проверку.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$. По условию $\vec{a} = (0; 2; -1)$, $\vec{b} = (1; 1; 1)$.

Векторное произведение двух векторов является вектором ортогональным к этим векторам. Это векторное произведение будет ненулевым вектором, тогда и только тогда, когда перемножаемые векторы неколлинеарны.

Данные векторы неколлинеарные, поэтому их векторное произведение будет ненулевым вектором ортогональным им обоим.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1-P_4 & P_5+1 & -1 \\ P_3-1 & 1 & 4-P_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \vec{i} - \vec{j} - 2 \cdot \vec{k},$$

$\vec{c} = (3; 1; -2)$.

Проверка: Два вектора ортогональны, если их скальное произведение равно нулю, тогда

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = x_c \cdot x_a + y_c \cdot y_a + z_c \cdot z_a = 0;$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = x_c \cdot x_b + y_c \cdot y_b + z_c \cdot z_b = 0.$$

$\vec{c}\cdot\vec{a} = 3\cdot 0 + (-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) = 0$, следовательно $\vec{c}\perp\vec{a}$,
$\vec{c}\cdot\vec{b} = 3\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + (-2)\cdot 1 = 0$, следовательно $\vec{c}\perp\vec{b}$.

Задание 6

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2);P_3^2+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник?

Если да, то чему равна его площадь?

Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_4=1$, $P_5=1$, $P_7=3$, $P_8=5$.

Точки *A, B, C* образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB} \\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC} \end{vmatrix} = x_i\vec{i} + y_j\vec{j} + z_k\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} = (1+1;2+2;0-2)$

$\overrightarrow{AC} = (4+1;14+2;-1-2)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -2 \\ 5 & 16 & -3 \end{vmatrix} = 20\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k} \neq \vec{0},$$

следовательно точки *A, B, C* образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{20^2+(-4)^2+12^2} = 4\sqrt{35}.$$

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35} = 2\sqrt{35}$.

Задание 7

Даны точки: A(1; $-P_2$; -1), B($1-P_3$; 0; 1), C(-1; 1; P_5-2), D(P_2; P_4; P_8). Образуют ли эти точки пирамиду? Если да, то чему равен объём пирамиды?

Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

Решение

Пусть $n = 101$. Тогда $P_2 = 1$, $P_3 = 2$, $P_4 = 1$, $P_5 = 1$, $P_8 = 5$. Точки A, B, C, D образуют пирамиду тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ некомпланарные, т.е. когда их смешанное произведение не равно нулю. Найдем координаты этих векторов
$\overrightarrow{AB}$=(1-P_3-1; 0-(-P_2); 1-(-1)) = (-2; 1; 2),
$\overrightarrow{AC}$ =(-1-1;1-(-P_2);P_5 -2-(-1)) = (-2; 2; 0),
$\overrightarrow{AD}$ = (P_2 - 1; P_4 - (- P_2); P_8 - (-1)) = (0; 2; 6),
и их смешанное произведение

$$\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 6\end{vmatrix}=-20.$$

Итак, точки A, B, C, D образуют пирамиду и её объём можно найти по формуле

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD}\right)\right|.$$

Подставляя в формулу значение смешанного произведения, получим V=$\frac{10}{3}$.

Задание 8

Даны точки $A(-1-P_7;P_5-2)$ и $B(P_5-2;P_5+4)$. Найти:
а) точку $C(x_1;y_1)$ – середину отрезка AB;
б) точку $D(x_2;y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $\frac{P_9+1}{9-P_9}$.

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_5=1$, $P_7=3$, $P_9=2$. Значит $A(-4;-1)$, $B(-1;5)$.

а) $x_1=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-4-1}{2}=-2{,}5$;

$y_1=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{-1+5}{2}=2$. Получили $C(-2{,}5;2)$.

б) Если $\lambda=\frac{P_9+1}{9-P_9}=\frac{3}{8}$, то $x_2=\frac{x_A+\lambda\cdot x_B}{1+\lambda}=\frac{-4+\frac{3}{8}\cdot(-1)}{1+\frac{3}{8}}=-\frac{35}{11}$,

$$y_2 = \frac{y_A + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{-1 + \frac{3}{8} \cdot 5}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{7}{11}.$$ Получили $D\left(-\frac{35}{11}; \frac{7}{8}\right)$.

Задание 9

На плоскости даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Сделать чертёж треугольника *ABC* и найти:

а) длину и уравнение стороны *BC* (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);

б) косинус угла *A* и угол *A* (в градусах);

в) уравнение прямой, проходящей через точку *A* параллельно стороне ВС;

г) высоту, проведённую к стороне *BC* и её уравнение;

д) уравнение медианы, проведённой к стороне *BC*;

е) уравнение биссектрисы угла *A*.

Решение

Даны точки $A(11;-5)$, $B(6;7)$, $C(-10;-5)$.

а) Каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ рассчитывается по формуле: $\frac{x - x_2}{x_3 - x_2} = \frac{y - y_2}{y_3 - y_2}$ или $\frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m}$.

Тогда каноническое уравнение прямой *BC* будет иметь вид: $\frac{x-6}{-10-6} = \frac{y-7}{-5-7}$, или $\frac{x-6}{-16} = \frac{y-7}{-12}$, или $\frac{x-6}{4} = \frac{y-7}{3}$.

Общее уравнение прямой: $m \cdot x - l \cdot y + (l \cdot y_2 - m \cdot x_2) = 0$ или $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$.

Тогда общее уравнение прямой *BC* будет иметь вид: $3(x-6) = 4(y-7)$, $3x - 18 = 4y - 28$, $3x - 4y + 10 = 0$.

Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку В имеют вид: $\begin{cases} x = x_2 + l \cdot t; \\ y = y_2 + m \cdot t. \end{cases}$

В качестве направляющего вектора берем вектор $\overrightarrow{BC} = (4;3)$и параметрические уравнения прямой *BC* будут иметь вид: $\begin{cases} x = 6 + 4t; \\ y = 7 + 3t. \end{cases}$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом: $y=-\frac{A\cdot x}{B}-\frac{C}{B}$ или y = kx + b.

Тогда уравнение с угловым коэффициентом прямой *BC* будет иметь вид: $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$.

б) $\cos A=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{(x_3-x_1)\cdot(x_2-x_1)+(y_3-y_1)\cdot(y_2-y_1)}{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}\cdot\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}=g$.

A=arccos(g).

$\overrightarrow{AC}=(-10-11;-5-(-5))=(-21;0)$, тогда $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-21)^2+0^2}=21$,

$\overrightarrow{AB}=(6-11;7-(-5))=(-5;12)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$,

$\cos A=\frac{-21\cdot(-5)+0\cdot 12}{21\cdot 13}=\frac{5}{13}$, $A=\arccos\frac{5}{13}$.

в) **1 способ.**

Прямая, параллельная *BC* имеет такой же угловой коэффициент *k*, как и *BC*. Подставим координаты точки *A* в уравнение с угловым коэффициентом у = *k*х + b_1 и найдем b_1.

Уравнение с угловым коэффициентом прямой *BC*, полученное в пункте а) имеет вид: $y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$. По условию $A(11;-5)$.

При подстановке координат точки *A* в уравнение $y=\frac{3}{4}x+b_1$ получим: $-5=\frac{3}{4}\cdot 11+b_1$, откуда $b_1=-\frac{53}{4}$. Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид: $y=\frac{3}{4}x-\frac{53}{4}$ или $3x-4y-53=0$.

2 способ.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(x_1;y_1)$ имеют вид $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}$, где $(l;m)$- направляющий вектор прямой. В качестве направляющего вектора прямой направляющего вектора прямой параллельной ВС можно взять направляющий вектор прямой ВС, вектор $\overrightarrow{BC}=(4;3)$.

Тогда искомое уравнение примет вид: $\frac{x-11}{4}=\frac{y-(-5)}{3}$, т.е. $3x-4y-53=0$.

г) **1 способ.**

Уравнение высоты к стороне *BC*: $y=-\frac{1}{k}\cdot x+b_2$.

b_2 находится подстановкой значений x и y точки A в это уравнение.

При подстановке координат точки A в уравнение $y=-\frac{4}{3}x+b_2$ получим: $-5=-\frac{4}{3}\cdot 11+b_2$, откуда $b_1=\frac{29}{3}$. Таким образом, уравнение искомой прямой примет вид: $y=-\frac{4}{3}x+\frac{29}{3}$ или $4x+3y-29=0$.

Для нахождения длины высоты, найдём точку пересечения стороны BC и полученной высоты:

$$\begin{cases}3x-4y+10=0;\\4x+3y-29=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}12x-16y+40=0;\\12x+9y-87=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-25y+127=0;\\3x-4y+10=0;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5{,}08;\\x=3{,}44.\end{cases}$$

Получили точку $A_1(3{,}44;5{,}08)$.

Длина высоты: $h=\left|\overrightarrow{AA_1}\right|=\sqrt{(3{,}44-11)^2+(5{,}08-(-5))^2}=12{,}6$.

2 способ.

Уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (x_1,y_1) перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n}=(A,B)$ имеет вид:

$$A\cdot(x-x_1)+B\cdot(y-y_1)=0.$$

В качестве нормального вектора высоты, проведенной к стороне ВС можно взять направляющий вектор прямой ВС, например вектор $\overrightarrow{BC}=(4;3).$

Тогда уравнение высоты будет иметь вид:

$4\cdot(x-1)+3\cdot(y-(-5))=0$ или $4\cdot x+3\cdot y-29=0.$

Длина высоты– это расстояние от точки А до прямой ВС. Расстояние от точки $A(x_1,y_1)$ до прямой a, имеющей общее уравнение $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ можно найти по формуле:

$$h=d(A,(a))=\frac{|A\cdot x_1+B\cdot y_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Общее уравнение прямой ВС имеет вид: $3\cdot x-4\cdot y+10=0.$ Поэтому $h=\frac{|3\cdot 11-4\cdot(-5)+10|}{\sqrt{3^2+4}}=\frac{63}{5}=12{,}6.$

д) Если точка M – середина BC, то $x_M=\frac{x_2+x_3}{2}$; $y_M=\frac{y_2+y_3}{2}$.

Уравнение медианы: $\frac{x-x_1}{x_M-x_1}=\frac{y-y_1}{y_M-y_1}$.

По условию, $B(6;7)$, $C(-10;-5)$, тогда $x_M = \frac{6+(-10)}{2} = -2$, $y_M = \frac{7+(-5)}{2} = 1$. Значит $M(-2;1)$.

Уравнение медианы, проведённой к стороне BC: $\frac{x-11}{-2-11} = \frac{y-(-5)}{1-(-5)}$ или $\frac{x-11}{-13} = \frac{y+5}{6}$.

е) По свойству биссектрисы угла: $\frac{A_2B}{A_2C} = \frac{AB}{AC}$.

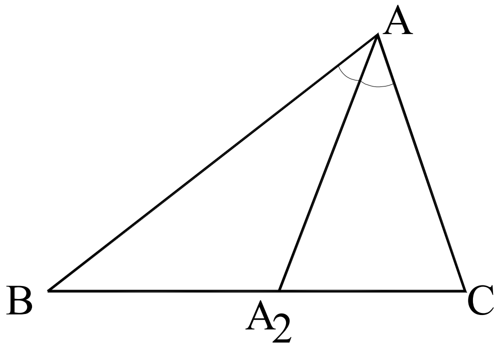


Рис. 4. Вспомогательный чертёж к заданию 9

Пусть $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \lambda$, тогда координаты точки A_2 находяться по формулам: $x_{A_2} = \frac{x_2 + \lambda \cdot x_3}{1+\lambda}$; $y_{A_2} = \frac{y_2 + \lambda \cdot y_3}{1+\lambda}$, где $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$.

Из пункта б) мы имеем: $|\overrightarrow{AC}| = 21$, $|\overrightarrow{AB}| = 13$, значит $\lambda = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{13}{21}$, тогда $x_{A_2} = \frac{6 + \frac{13}{21}\cdot(-10)}{1+\frac{13}{21}} = -\frac{2}{17}$, $y_{A_2} = \frac{7+\frac{13}{21}\cdot(-5)}{1+\frac{13}{21}} = \frac{41}{17}$.

Искомое уравнение биссектрисы мы находим как уравнение прямой, проходящей через точки $A(11;-5)$ и $A_2\left(-\frac{2}{17};\frac{41}{17}\right)$.

$$\frac{x-11}{-\frac{2}{17}-11} = \frac{y-(-5)}{\frac{41}{17}-(-5)} \text{ или } \frac{x-11}{-\frac{189}{17}} = \frac{y+5}{\frac{126}{17}}, \text{ или } \frac{x-11}{-3} = \frac{y+5}{2}.$$

Задание 10

Дана точка (0;2) пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон 5x - 4y + 15 = 0 и 4x + y - 9 =0. Найти координаты вершин треугольника и уравнение третьей стороны.

Решение

Координаты одной вершины найдем как координаты точки пересечения данных сторон, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5x-4y+15=0, \\ 4x+\ y-\ 9=0. \end{cases}$$

Получаем $\begin{cases} y=9-4x, \\ 5x-4(9-4x)+15=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=1, \\ y=5. \end{cases}$

Точка O пересечения медиан треугольника называется его центром. Отметим одно свойство центра треугольника, которое используем для нахождения координат остальных вершин:

$$x_Ц = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad x_Ц = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},$$

где $x_Ц$, $y_Ц$ - координаты центра треугольника;

x_i , y_i - координаты i-ой вершины треугольника, i = 1,2,3.

Для доказательства этих формул рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$, где A (x_i ; y_i), i = 1,2,3 (см. рис. 3.2)

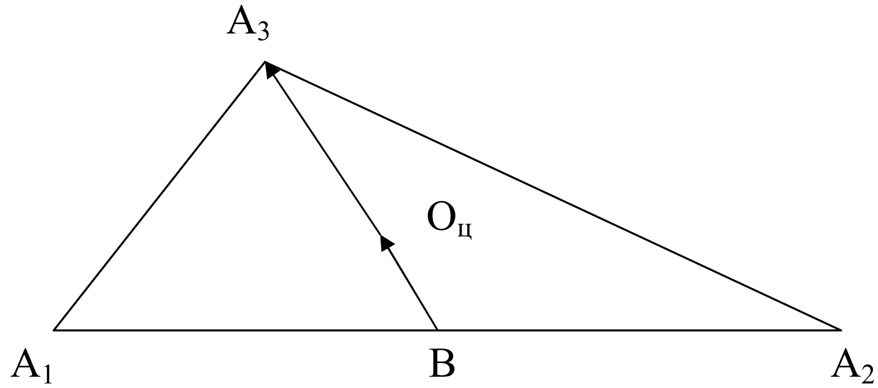


Рис. 5. Вспомогательный чертёж к заданию 10

Пусть B – середина стороны A_1A_2. Тогда A_3B – медиана треугольника $A_1A_2A_3$. По известному из элементарной геометрии свойству медиан треугольника $A_3O_ц = 2 \cdot BO_ц$. Тогда координаты точки B найдем по формулам:

$$x_B = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad и \qquad y_B = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

а координаты центра $O_ц$ из векторного соотношения $\overrightarrow{O_Ц A_3} = 2 \cdot \overrightarrow{BO_Ц}$, которое в координатной форме записывается так:

$$x_3 - x_Ц = 2 \cdot (x_Ц - \frac{x_1 + x_2}{2}), \qquad y_3 - y_Ц = 2 \cdot (y_Ц - \frac{y_1 + y_2}{2}).$$

Отсюда, выражая $x_Ц$ и $y_Ц$ через x_i, x_i, получим требуемые формулы.

Используя доказанные формулы, полагая в них $x_1 = 1$ и $y_1 = 5$, $x_Ц = 0$ и $y_Ц = 2$, получим два уравнения, которым должны удовлетворять координаты остальных двух вершин

$$0 = \frac{1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad 2 = \frac{5 + y_2 + y_3}{3}, \text{ откуда}$$

$$x_2 + x_3 = -1, \quad y_2 + y_3 = 1.$$

Еще два уравнения получим если потребуем, чтобы искомые точки, вершины треугольника, принадлежали заданным сторонам, т.е. их координаты удовлетворяли уравнениям этих сторон

5x - 4y + 15 = 0, 4x + y - 9 = 0.

Итак, для определения четырех неизвестных x_2, x_3, y_2, y_3, мы имеем четыре независимых условия:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = -1, \\ y_2 + y_3 = 1, \\ 5x_2 - 4y_2 + 15 = 0, \\ 4x_3 + y_3 - 9 = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_2 = -3$, $y_2 = 0$, $x_3 = 2$, $y_3 = 1$.

Уравнение третьей стороны запишем как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (-3;0) и (2;1)

$$\frac{x - (-3)}{2 - (-3)} = \frac{y - 0}{1 - 0} \text{ или } \frac{x + 3}{5} = y.$$

Итак, уравнение третьей стороны x - 5y + 3 = 0, а вершины треугольника имеют координаты (1;5), (-3;0), (2;1).

Задание 11

В пространстве даны точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$ и $D(x_4;y_4;z_4)$. Сделать чертёж пирамиды *ABCD* и найти:

а) длину и уравнение ребра *AB*;

б) уравнение грани *ABC*;

в) высоту, проведённую из вершины *D* и её уравнение;

г) проекцию вершины *D* на плоскость *ABC*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *D* параллельно ребру *AB*;

е) уравнение плоскости, проходящей через вершину *D* параллельно грани *ABC*;

ж) уравнение плоскости, проходящей через ребро *AD* перпендикулярно грани *ABC*;

з) уравнение проекции ребра *AD* на грань *ABC*;

и) угол между ребрами *AB* и *AD*;

к) угол между ребром *AD* и гранью *ABC*;

л) угол между гранями *ABC* и *ABD*.

Решение

Даны точки $A(1;-5;3)$, $B(4;-1;2)$, $C(-3;3;5)$, $D(2;1;-1)$.

а) Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Тогда прямая AB задаётся уравнением: $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-(-5)}{-1-(-5)}=\frac{z-3}{2-3}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

Длина ребра AB может быть рассчитана как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ по формуле: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

$\overrightarrow{AB}=(4-1;-1-(-5);2-3)=(3;4;-1)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$.

б) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$ и $C(x_3;y_3;z_3)$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Найдём уравнение грани ABC, используя данную формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ -3-1 & 3-(-5) & 5-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ -4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 16x-2y+40z-146$$

Получим уравнение плоскости $16x-2y+40z-146=0 \Leftrightarrow 8x-y+20z-73=0$.

в) Уравнение прямой, проходящей через данную точку $D(x_4;y_4;z_4)$ перпендикулярно к плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ имеет вид: $\frac{x-x_4}{A}=\frac{y-y_4}{B}=\frac{z-z_4}{C}$.

Искомая высота проходит через точку $D(2;1;-1)$ перпендикулярно грани ABC, то есть перпендикулярно плоскости, заданной уравнением $8x-y+20z-73=0$. Значит уравнение прямой, содержащей эту высоту имеет вид: $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{20}$.

Расстояние от точки $D(x_4;y_4;z_4)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ рассчитывается по формуле:

$$h=\frac{|A\cdot x_4+B\cdot y_4+C\cdot z_4+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|8\cdot 2+(-1)\cdot 1+20\cdot(-1)|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{465}}=\frac{\sqrt{465}}{93}.$$

г) Чтобы найти проекцию вершины D на плоскость ABC, необходимо отыскать основание D_1 перпендикуляра, опущенного из точки $D(x_4;y_4;z_4)$ на плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Уравнение этого перпендикуляра найдено в пункте в): $\frac{x-2}{8}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{20}$. Запишем данное уравнение в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=2+8t, \\ y=1-t, \\ z=-1+20t. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения для x, y, z в уравнение плоскости ABC, найденное в пункте б): $8x-y+20z-73=0$.

$8(2+8t)-(1-t)+20(-1+20t)-73=0$, откуда находим t:

$-78+465t=0$, $t=\frac{26}{155}$.

Далее необходимо подставить найденное значение t в систему уравнений (1). Получим координаты искомой точки.

$$\begin{cases} x = 2 + 8 \cdot \dfrac{26}{155}, \\ y = 1 - \dfrac{26}{155}, \\ z = -1 + 20 \cdot \dfrac{26}{155}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{518}{155}, \\ y = \dfrac{129}{155}, \\ z = \dfrac{365}{155}. \end{cases}$$

Значит, проекция D_1 вершины D на плоскость ABC имеет координаты $\left(\dfrac{518}{155}; \dfrac{129}{155}; \dfrac{365}{155}\right)$.

д) Уравнение прямой, проходящей через вершину D параллельно ребру AB представляет собой уравнение прямой, проходящей через точку $D(x_4; y_4; z_4)$ параллельно направляющему вектору $\overrightarrow{AB} = (l; m; n)$ и находится по формуле: $\dfrac{x - x_4}{l} = \dfrac{y - y_4}{m} = \dfrac{z - z_4}{n}$.

По условию $D(2;1;-1)$, а вектор был найден в пункте а) $\overrightarrow{AB} = (3;4;-1)$. Тогда искомая прямая имеет вид: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+1}{-1}$.

е) Плоскость, параллельная плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и проходящая через $D(x_4; y_4; z_4)$ имеет вид: $A(x - x_4) + B(y - y_4) + C(z - z_4) = 0$.

Тогда, искомая плоскость, проходящая через точку $D(2;1;-1)$ параллельно плоскости $8x - y + 20z - 73 = 0$, задаётся уравнением: $8(x-2) - (y-1) + 20(z+1) = 0 \Leftrightarrow 8x - y + 20z + 5 = 0$.

ж) Уравнение плоскости, проходящей через ребро AD перпендикулярно грани ABC находится как уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x - x_1}{x_4 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_4 - z_1}$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Найдём уравнение прямой AD: $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y-(-5)}{1-(-5)} = \dfrac{z-3}{-1-3}$
$\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+5}{6} = \dfrac{z-3}{-4}$.

Уравнение плоскости ABC было получено в пункте б): $8x - y + 20z - 73 = 0$.

Тогда искомое уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 8 & -1 & 20 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 116x-52y-49z-229=0.$$

з) Проекция ребра AD на грань ABC является прямой, проходящей через точки $A(1;-5;3)$ и точку, найденную в пункте г), имеющую координаты $\left(\frac{518}{155};\frac{129}{155};\frac{365}{155}\right)$.

Каноническое уравнение проекции получим используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.

$$\frac{x-1}{\frac{518}{155}-1}=\frac{y-(-5)}{\frac{129}{155}-(-5)}=\frac{z-3}{\frac{365}{155}-3} \Leftrightarrow \frac{x-1}{363}=\frac{y+5}{904}=\frac{z-3}{-100}.$$

и) Угол φ между ребрами AB и AD находится как угол между векторами $\overrightarrow{AB}=(l_1;m_1;n_1)$ и $\overrightarrow{AD}=(l_2;m_2;n_2)$:

$$\cos\varphi=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}},$$

Имеем: $\overrightarrow{AB}=(3;4;-1)$, тогда $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$,

$\overrightarrow{AD}=(1;6;-4)$, тогда $\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{1^2+6^2+(-4)^2}=\sqrt{53}$,

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot1+4\cdot6+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{53}}=\frac{31}{\sqrt{1378}},\ \varphi=\arccos\frac{31}{\sqrt{1378}}\approx 37^0.$$

к) Угол ψ между ребром AD и гранью ABC находится по формуле: $\sin\psi=\dfrac{|A\cdot l+B\cdot m+C\cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$,

где $(A;B;C)$ – координаты нормального вектора $\vec{n}$ плоскости ABC,

$(l;m;n)$ – координаты направляющего вектора $\vec{q}$ прямой AD.

Имеем: $\vec{n}=(8;-1;20)$ и $\vec{q}=(1;6;-4)$ – соответственно.

$$\sin\psi=\frac{|8\cdot1+(-1)\cdot6+20\cdot(-4)|}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2}\cdot\sqrt{1^2+6^2+(-4)^2}}=\frac{78}{\sqrt{24645}},$$

$$\psi=\arcsin\frac{78}{\sqrt{24645}}\approx 33^o.$$

л) Угол θ между гранями ABC и ABD находится как угол между нормальными векторами плоскостей ABC и ABD. Нормальный вектор плоскости ABC имеет координаты $(8;-1;20)$.

Найдём уравнение плоскости ABD аналогично пункту б):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-(-5) & z-3 \\ 4-1 & -1-(-5) & 2-3 \\ 2-1 & 1-(-5) & -1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 10x+11y+14z+23$$

Получим уравнение плоскости $10x+11y+14z+23=0$. Для данной плоскости направляющий вектор имеет координаты: $(10;11;14)$.

$$\cos\theta = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}} = \frac{8 \cdot 10 + (-1) \cdot 11 + 20 \cdot 14}{\sqrt{8^2+(-1)^2+20^2} \cdot \sqrt{10^2+11^2+14^2}} = \frac{349}{\sqrt{193905}},$$

$$\theta = \arccos\frac{349}{\sqrt{193905}} \approx 42^o.$$

Задание 12

Дана точка $M(1;0;-2)$. Найти:

а) точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, симметричную М относительно точки $S(-1-P_7;P_5;3-P_3)$;

б) точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, симметричную М относительно прямой $\frac{x+1}{-1-P_7} = \frac{y-2}{P_5} = \frac{z-1}{3-P_3}$

в) точку $M_3(x_3;y_3;z_3)$, симметричную М относительно плоскости $(-1-P_7) \cdot x + P_5 \cdot y + (3-P_3) \cdot z = 0$

Решение

Пусть n=101. Тогда $P_3 = 2$, $P_5 = 1$, $P_7 = 3$.

а) Согласно заданным условиям, $S(-4;1;1)$.

Точки M и M_1 называются симметричными относительно точки S (центр симметрии), если S – середина отрезка MM_1. Общая формула середины отрезка: $x_S = \frac{x_M + x_{M_1}}{2}$. Откуда получаем:

$x_{M_1} = 2 \cdot x_S - x_M = 2 \cdot (-4) - 1 = -9$,

$y_{M_1} = 2 \cdot y_S - y_M = 2 \cdot 1 - 0 = 2$,

$z_{M_1} = 2 \cdot z_S - z_M = 2 \cdot 1 - (-2) = 4$.

Таким образом, $M_1(-9;2;4)$.

б) Согласно заданным условиям, исходная прямая имеет вид: $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{5}$.

Точки M и M_2 называются симметричными относительно прямой a (ось симметрии), если прямая a проходит через середину отрезка MM_2 и перпендикулярна к этому отрезку.

Находим уравнение плоскости, которая перпендикулярна данной прямой и проходит через точку $M(1;0;-2)$. Так плоскость перпендикулярна заданной прямой, то в качестве её вектора нормали можно взять направляющий вектор этой прямой с координатами $(-4;1;5)$.

Следовательно уравнение плоскости имеет вид:

$$-4\cdot(x-1)+1\cdot(y-0)+5\cdot(z-(-2))=0 \;\Leftrightarrow\; -4x+y+5z+6=0.$$

Найдем координаты точки пересечения данной плоскости и нашей прямой. Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x=-1-4\cdot t; \\ y=2+t; \\ z=1+5t. \end{cases} \qquad (1)$$

Далее необходимо подставить данные выражения x, y, z в уравнение плоскости и вычислить значение *t*.

$-4(-1-4t)-(2+t)+5(1+5t)+6=0$, откуда находим $t=-\dfrac{17}{42}$.

Затем подставим найденное значение *t* в систему уравнений (1):

$$\begin{cases} x=-1-4\cdot\left(-\dfrac{17}{42}\right); \\ y=2-\dfrac{17}{42}; \\ z=1+5\cdot\left(-\dfrac{17}{42}\right). \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{13}{42}; \\ y=\dfrac{67}{42}; \\ z=-\dfrac{43}{42}. \end{cases}$$

Получится искомая точка $G\left(-\dfrac{13}{42};\dfrac{67}{42};-\dfrac{43}{42}\right)$ пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_2}=2\cdot x_G-x_M=2\cdot\left(-\frac{13}{42}\right)-1=-\frac{34}{21},$$

$$y_{M_2}=2\cdot y_G-y_M=2\cdot\frac{67}{42}-0=\frac{67}{21},$$

$$z_{M_2}=2\cdot z_G-z_M=2\cdot\left(-\frac{43}{42}\right)-(-2)=-\frac{1}{21}.$$

Таким образом, $M_2\left(-\dfrac{34}{21};\dfrac{67}{21};-\dfrac{1}{21}\right)$.

в) Согласно заданным условиям, исходная плоскость имеет вид: $-4x+y+z+1=0$.

Точка M_3 называется симметричной точке M относительно плоскости α, если плоскость α перпендикулярна отрезку MM_3 и проходит через его середину.

Находим уравнение прямой, которая перпендикулярна данной плоскости и проходит через точку $M(1;0;-2)$. Так как прямая перпендикулярна заданной плоскости, то в качестве её направляющего вектора можно взять вектор нормали плоскости с координатами $(-4;1;1)$.

Уравнение этой прямой в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases} x=1-4\cdot t; \\ y=0+t; \\ z=-2+t. \end{cases} \qquad (2)$$

Далее найдём точку пересечения этой прямой с исходной плоскостью. Для этого необходимо подставить данные выражения x, y, z в уравнение плоскости и вычислить значение *t*.

$-4(1-4t)+(0+t)+(-2+t)+1=0$, откуда находим $t=-\frac{5}{14}$.

Далее подставить найденное значение *t* в систему уравнений (2).

$$\begin{cases} x=1-4\cdot\frac{5}{14}; \\ y=0+\frac{5}{14}; \\ z=-2+\frac{5}{14}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{17}{7}; \\ y=-\frac{5}{14}; \\ z=-\frac{33}{14}. \end{cases}$$

Получится искомая точка $R\left(\frac{17}{7};-\frac{5}{14};-\frac{33}{14}\right)$ пересечения прямой и плоскости. Далее см. пункт а).

$$x_{M_3}=2\cdot x_R-x_M=2\cdot\frac{17}{7}-1=\frac{27}{7},$$

$$y_{M_3}=2\cdot y_R-y_M=2\cdot\left(-\frac{5}{14}\right)-0=-\frac{5}{7},$$

$$z_{M_3}=2\cdot z_R-z_M=2\cdot\left(-\frac{33}{14}\right)-(-2)=-\frac{19}{7}.$$

Таким образом, $M_3\left(\frac{27}{7};-\frac{5}{7};-\frac{19}{7}\right)$.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2003.-240с.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987.-320с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука,1984. 192с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш.шк. ,1996. 304с.
5. Сборник задач по математике для втузов: В 4 частях: Ч.1 / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова. М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2003.-288с.
6. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004.-240с.
7. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика. М.: Проспект, 2011. -608с.
8. Гусятников П.Б. Векторная алгебра в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1985. -232с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
________ О.Г.Локтионова
«19» июня 2013г.

Собственные числа. Собственные векторы.

Методические указания и индивидуальные задания к лабораторной работе

Курск 2013

УДК 510 (083)

Составитель А.Ф.Пихлап

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики

Собственные числа. Собственные векторы. Методические указания и индивидуальные задания к лабораторной работе / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.Ф.Пихлап. Курск, 2012. с. табл. . Библиогр.: с.

Настоящие методические указания содержат теоретические положения и индивидуальные задания к ЛР «Собственные числа. Собственные векторы». Предназначены для студентов технических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Цель работы:

1. Ознакомиться с понятиями и освоить методику нахождения собственных чисел и векторов.
2. Освоить методику применения ЭВМ для нахождения собственных чисел и собственных векторов.
3. Решить конкретную задачу.

1. Задание

Задание 1. Для матрицы линейного оператора

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & n & 5 \\ n & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

найти собственные числа и собственные векторы. Проверить нормированность и ортогональность собственных векторов.

Задание 2. Заданную квадратичную форму привести к диагональному виду. Для этого составить матрицу квадратичной формы, найти собственные числа и собственные векторы. Собственные числа использовать для записи квадратичной формы в базисе собственных векторов. Изобразить на плоскости XOY старую и новую системы координат. Определить тип кривой. Индивидуальные задания.

Квадратичная форма имеет вид:

1. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 13 = 0$
2. $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 2 = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 + 25 = 0$
4. $5x^2 + 12xy - 19 = 0$
5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 4 = 0$
6. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 1 = 0$
7. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 7 = 0$
8. $27x^2 - 10xy + 3y^2 - 4 = 0$
9. $2x^2 + 8xy + 8y^2 - 10 = 0$
10. $3x^2 + 12xy + 5y^2 - 11 = 0$

11. $6x^2 + 8xy - 5 = 0$
12. $7x^2 + 6xy + 2y^2 - 6 = 0$
13. $2x^2 + 4xy + 6y^2 - 4 = 0$
14. $x^2 - 6xy + 9y^2 - 2 = 0$
15. $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 8 = 0$

2. Краткие теоретические сведения

Пусть число λ и ненулевой вектор $\overline{x}$ таковы, что

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x} \tag{1}$$

Тогда число λ называется собственным числом матрицы A, а вектор $\overline{x}$ − собственным вектором этой матрицы, соответствующим собственному числу λ. Векторное равенство (1) эквивалентно матричному равенству.

$$(A - \lambda E)X = 0, \quad X \neq 0 \ . \tag{2}$$

Отсюда следует, что число λ есть собственное число матрицы A тогда и только тогда, когда det $(A-\lambda E)=0$, т.е. λ - есть корень многочлена

$P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, называемого характеристическим многочленом матрицы A. Столбец координат X любого собственного вектора, соответствующего собственному числу λ, есть некоторое нетривиальное решение однородной системы (2).

Рассмотрим общее алгебраическое уравнение второго порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0 \tag{3}$$

Линия L, определяемая этим уравнением, не меняется, если от данной декартовой прямоугольной системы координат перейти к другой декартовой системе координат.

Для квадратичной формы

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$$

можно задать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Для того, чтобы перейти к новой системе координат, в которой линия будет иметь канонический вид, необходимо провести два преобразования:

1) поворот координатных осей на такой угол, чтобы их направление совпадало с направлением осей симметрии кривой (если она имеет две оси)

2) параллельный перенос, при котором начало координат совмещается с участком симметрии кривой (если он существует).

Замечание. Для параболы новые оси координат должны располагаться параллельно и перпендикулярно директрисе, а начало координат – совпасть с вершиной параболы.

Поскольку в канонических уравнениях кривых второго порядка отсутствуют произведения переменных, необходимо перейти к координатной системе, определяемой базисом из ортонормированных собственных векторов матрицы A. В этом базисе уравнение (3) примет вид:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2\tilde{b}_1 x' + 2\tilde{b}_2 y' + \tilde{c} = 0$$

(в предположении, что $\lambda_{1,2} \neq 0$)

Зададим последующий параллельный перенос формулами:

$$x'' = x' + \frac{\tilde{b}_1}{\lambda_1}; \qquad y'' = y' + \frac{\tilde{b}_2}{\lambda_2}.$$

Получим в новой координатной системе уравнение:

$$\lambda_1 (x'')^2 + \lambda_2 (y'')^2 = \tilde{\tilde{c}}. \tag{5}$$

Рассмотрим возможные геометрические образы, определяемые этим уравнением в зависимости от знаков λ_1, λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$:

1) Если собственные числа матрицы A λ_1, λ_2 и $\tilde{\tilde{c}}$ одного знака, уравнение (5) представляет собой каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{(x'')^2}{a^2} + \frac{(y'')^2}{b^2} = 1; \qquad a = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{\lambda_1}};\ b = \sqrt{\frac{\tilde{\tilde{c}}}{\lambda^2}}$$

2) Если λ_1, λ_2 имеют разные знаки, уравнение (5) является каноническим уравнением гиперболы:

$$\frac{(x'')^2}{a^2} - \frac{(y'')^2}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{(x'')^2}{a^2} - \frac{(y'')^2}{b^2} = -1.$$

в зависимости от знака $\tilde{\tilde{c}}$.

В случае, когда одно из собственных чисел матрицы A равно 0, уравнение (5) можно привести к виду:

$$(y'')^2 = 2\tilde{\tilde{b}}x'',$$

являющимся каноническим уравнением параболы.

3. Порядок выполнения работы

Задание 1

Для матрицы линейного оператора:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & N & 5 \\ n & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти собственные числа и собственные векторы. Проверить нормированность и попарную ортогональность собственных векторов.

Пусть n=40, N=6

Введем матрицу A.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 40 \\ 0 & 6 & 5 \\ 40 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Вводим характеристическую матрицу

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 40 \\ 0 & 6-\lambda & 5 \\ 40 & 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен

$$|A(\lambda)| \to -9607 + 1598\lambda + 10\lambda^2 - \lambda^3$$

Для нахождения корней многочлена используем функцию «Polyroots», предварительного введя вектор-столбец из коэффициентов характеристического многочлена, начиная с нулевой степени.

$$b := \begin{pmatrix} -9607 \\ 1598 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Polyroots} \quad (b) = \begin{pmatrix} -38,289 \\ 5,922 \\ 42,366 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, собственные числа

$$\lambda_1 = -38,236$$
$$\lambda_2 = 5,922$$
$$\lambda_3 = 42,366$$

Найдем собственные векторы, используя встроенную функцию «Eigenvecs» Вводим $\lambda := 0$

$$\text{eigenvecs}(A(\lambda)) = \begin{pmatrix} -0,125 & 0,692 & 0,711 \\ 0,992 & 0,098 & 0,079 \\ -0,015 & 0,715 & -0,699 \end{pmatrix}.$$

Введем векторы-столбцы:

$$X_1 := \begin{pmatrix} -0,125 \\ 0,692 \\ 0,711 \end{pmatrix} \qquad X_2 := \begin{pmatrix} 0,992 \\ 0,098 \\ 0,079 \end{pmatrix} \qquad X_3 := \begin{pmatrix} -0,015 \\ 0,715 \\ -0,693 \end{pmatrix}$$

Проверим условие нормированности векторов $(\left|\overline{X}_i\right| = 1)$. Для этого используем скалярное произведение векторов.

$$X_1 \cdot X_1 = 1 \qquad X_2 \cdot X_2 = 1 \qquad X_3 \cdot X_3 = 1$$

Проверим условие ортогональности собственных векторов

$$X_1 \cdot X_2 = -1,5 \cdot 10^{-5}; \quad X_1 \cdot X_3 = -3,34 \cdot 10^{-4}; \; X_2 \cdot X_3 = -3,1 \cdot 10^{-5};$$

В пределах допустимой точности $\varepsilon = 10^{-4}$ равенство выполняется (значения практически равны 0).

Задание 2

(Рекомендуем начать с новой чистой страницы).

Заданную квадратичную форму привести к диагональному виду

$$2X^2 - 4XY + 5Y^2 - 6 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{12}}{2} \\ \dfrac{a_{12}}{2} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическую матрицу

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

Найдем характеристический многочлен

$$|A(\lambda)| \rightarrow 6 - 7\lambda + \lambda^2$$

Найдем собственные числа

$$b := \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{polyroots}\ (b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

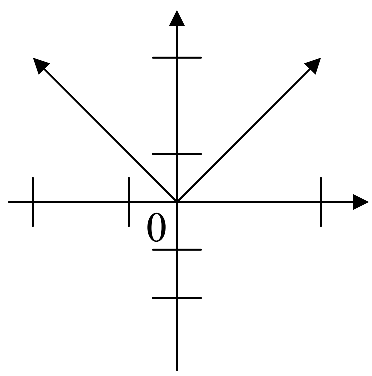
Собственные числа $\lambda_1 = 1; \lambda_2 = 6$

Найдем собственные векторы $\lambda := 0$

$$\text{eigenvecs}(A(\lambda)) = \begin{pmatrix} 0{,}894 & -0{,}447 \\ 0{,}447 & 0{,}894 \end{pmatrix}$$

$$X_1 := \begin{pmatrix} 0{,}894 \\ 0{,}447 \end{pmatrix} \qquad X_2 := \begin{pmatrix} -0{,}447 \\ 0{,}894 \end{pmatrix}$$

Построим старую и новую системы координат



Запишем квадратичную форму

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - C = 0$$

$$1X^2 + 6Y^2 = 6$$

Определим тип кривой

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{6} = 1$$

Имеем каноническое уравнение эллипса.

Контрольные вопросы

1. Какие числа называют собственными числами матриц?
2. Какие векторы называют собственными векторами?
3. Какой вид имеет характеристический многочлен матрицы?
4. Какие векторы называют нормированными?
5. Как проверить ортогональность векторов?
6. Как определить тип кривой второго порядка по квадратичной форме матрицы?

Библиографический список

1. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Линейная алгебра. М.: Наука, 1984. 340с.
2. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука, 1985.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1987. 292с.
4. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. М.: Наука, 1980. 312с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
« 3 » октября 2013 г.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Индивидуальные задания к модулю 1.4
для студентов технических специальностей

Курск 2013

УДК 512

Составители: Т.В. Шевцова, И.В. Сулименко

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, с.н.с.
доцент кафедры высшей математики *В. И. Дмитриев*

Алгебраические структуры: индивидуальные задания к модулю 1.4 /Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.В. Шевцова, И.В. Сулименко. Курск, 2013. 28 с. Библиогр.: с. 28.

В данной работе содержатся теоретические упражнения и практические задания по теме «Алгебраические структуры» дисциплин «Алгебра и геометрия», «Алгебра и теория чисел». Индивидуальные задания разбиты на три уровня сложности.

Предназначено для студентов технических специальностей и направлений подготовки.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 1.6 . Уч.-изд. л. 1.5. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Введение

Данная методическая разработка является частью методического обеспечения модульно-рейтинговой системы, функционирующей в Юго-Западном государственном университете.

Разработка предназначена для организации и контроля индивидуальной самостоятельной работы студентов технических специальностей и направлений подготовки, изучающих дисциплины «Алгебра и геометрия», «Алгебра и теория чисел», где детально изучается тема «Алгебраические структуры». Подобранные задания предполагают наличие знаний студентов по темам «Линейная алгебра» и «Векторная алгебра».

Разработка содержит теоретические упражнения на доказательство основных свойств алгебраических структур, тест с заданиями в закрытой форме и практические задания для проверки знаний основных определений и свойств структур и умений пользоваться ими.

В теоретическом упражнении и практических задачах предложено 25 вариантов заданий. Выбор варианта осуществляется каждым студентом согласно его номеру n в журнале группы.

Выполнение работы разделяется по трем уровням сложности.

Уровень сложности	Тест	Теоретические упражнения	Практические задания
Первый	Тест 1		1, 3, 4, 5
Второй	Тест 2	Упражнение под номером n	1, 2, 4, 5, 7
Третий	Тест 3	Упражнение под номером n	1, 2, 4, 5, 6, 7

Выбранный уровень влияет на общее количество баллов, получаемых за модуль.

Разработку можно использовать при выполнении домашних заданий и при подготовке к зачету или экзамену.

При выполнении модуля рекомендуется воспользоваться учебными пособиями, список которых приведен в конце настоящей разработки.

Основные обозначения и сокращения

$\in$ $a \in A$	Символ принадлежности Объект a является элементом множества A
$\{x \mid P(x)\}$	Множество, состоящее из объектов x, для которых выполняется $P(x)$
$\forall$ $\forall a \in A$	Квантор всеобщности Для любого (то есть для каждого) элемента множества A
$\exists$ $\exists a \in A$	Квантор существования Найдется (существует) элемент множества A
$\exists !$ $\exists ! a \in A$	Квантор существования единственности Найдется единственный элемент множества A
N	Множество натуральных чисел
Z	Множество целых чисел
$2Z$	Множество четных чисел
$2Z+1$	Множество нечетных чисел
Q	Множество рациональных чисел
R	Множество действительных чисел
R^+	Множество действительных положительных чисел
$(G,*)$	Алгебраическая структура с одной бинарной алгебраической операцией *
$(G,*.\circ)$	Алгебраическая структура с двумя бинарными алгебраическими операциями *, °
$G0$	Аксиома замкнутости: $\forall a,b \in G\ \exists!\ c \in G(c = a * b)$
$G1$	Аксиома ассоциативности: $\forall a,b,c \in G(a * (b * c) = (a * b) * c)$
$G1'$	Аксиома коммутативности $\forall a,b \in G(a * b = b * a)$
$G2$	Аксиома обратимости: $\exists \theta \in G\ \forall a \in G(a * \theta = \theta * a = a)$, $\forall a \in G\ \exists a' \in G(a * a' = a' * a = \theta)$.
$D0$	Аксиома дистрибутивности: $\forall a,b,c \in G\,(a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c), (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a))$
θ	Нейтральный элемент
a'	Элемент, симметричный элементу a

Индивидуальные задания

Теоретические упражнения

1. Доказать, что в группоиде может существовать не более одного нейтрального элемента.
2. Доказать, что в полугруппе для каждого элемента может существовать не более одного симметричного ему.
3. Доказать, что в группе существует единственный нейтральный элемент и для каждого элемента существует единственный симметричный ему.
4. Доказать, что в полугруппе выполняется обобщенный закон ассоциативности, то есть результат многократного выполнения операции не зависит от расстановки скобок:
   $(a_1 * a_2 * \ldots * a_k) * (a_{k+1} * a_{k+2} * \ldots * a_n) =$
   $= (a_1 * a_2 * \ldots * a_l) * (a_{l+1} * a_{l+2} * \ldots * a_n)$.
5. Доказать, что в группе элемент, симметричный композиции элементов, есть композиция элементов, симметричных данным, взятых в обратном порядке:
   $(a_1 * a_2 * \ldots * a_{n-1} * a_n)' = a_n' * a_{n-1}' * \ldots * a_2' * a_1'$.
6. Доказать, что $(H, *)$ – подгруппа группы $(G, *)$, где H – подмножество множества G, тогда и только тогда, когда выполняются условия:
   1) $\forall\, a, b \in H\, (a * b \in H)$,
   2) $\forall\, a \in H\, (a' \in H)$.
7. Доказать, что $(H, *)$ – подгруппа группы $(G, *)$, где H – подмножество множества G, тогда и только тогда, когда выполняется условие:
   $\forall\, a, b \in H\, (a * b' \in H)$.
8. Доказать, что в кольце и в поле существует единственный нулевой элемент и для каждого элемента найдется единственный противоположный ему.
9. Доказать, что в кольце может существовать не более одного единичного элемента и для каждого элемента не более одного обратного ему.

10. Доказать, что в поле существует единственный единичный элемент и для каждого элемента, отличного от нулевого, существует единственный обратный ему.
11. Доказать, что в кольце $(K,+,\cdot)$ выполняется условие: $\forall\, a \in K\, (a \cdot 0 = 0 \cdot a \in K)$.
12. Доказать, что в кольце $(K,+,\cdot)$ выполняются условия: $\forall\, a,b,c \in K$ (если $a \neq 0$ и a не является делителем нуля, то $a \cdot b = a \cdot c \to b = c$ и $b \cdot a = c \cdot a \to b = c$).
13. Доказать, что для элементов кольца $(K,+,\cdot)$ имеет место обобщенный закон дистрибутивности:
$$\forall\, a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m \in K\left((a_1+\ldots+a_n)\cdot(b_1+\ldots+b_m) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i \cdot b_j \right)$$
14. Доказать, что если $(K,+,\cdot)$ – кольцо, то выполняется условие $\forall\, a,b \in K\big((-a)\cdot b = a \cdot (-b) = -a \cdot b \big)$.
15. Доказать, что если $(K,+,\cdot)$ – кольцо, то выполняется условие $\forall\, a,b \in K\big((-a)\cdot(-b) = a \cdot b \big)$.
16. Доказать, что если $(K,+,\cdot)$ – кольцо, то выполняется условие $\forall\, a \in K\big(-(-a) = a \big)$.
17. Доказать, что если $(K,+,\cdot)$ – кольцо, то выполняются условия $\forall\, a,b,c \in K\big(a\cdot(b-c) = a\cdot b - a\cdot c, (b-c)\cdot a = b\cdot a - c\cdot a \big)$.
18. Доказать, что $(H,+,\cdot)$ – подкольцо кольца $(K,+,\cdot)$, где H – подмножество множества K, тогда и только тогда, когда выполняются условия:
1) $\forall\, a,b \in H\, (a - b \in H)$,
2) $\forall\, a,b \in H\, (a \cdot b \in H)$.
19. Доказать, что в поле нет делителей нуля.
20. Доказать, что если $(P,+,\cdot)$ – поле, то выполняется условие
$$\forall\, a,b,c,d \in P\left(\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \right), \text{ где } b \neq 0,\ d \neq 0.$$
21. Доказать, что если $(P,+,\cdot)$ – поле, то выполняется условие
$$\forall\, a,b,c,d \in P\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} \right), \text{ где } b \neq 0,\ d \neq 0.$$

22. Доказать, что если $(P,+,\cdot)$ – поле, то выполняется условие
$\forall\, a,b,c,d \in P\left(\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}\right)$, где $b\neq 0$, $d\neq 0$.

23. Доказать, что если $(P,+,\cdot)$ – поле, то выполняется условие
$\forall\, a,b \in P\left(-\dfrac{a}{b}=\dfrac{-a}{b}=\dfrac{a}{-b}\right)$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$.

24. Доказать, что если $(P,+,\cdot)$ – поле, то выполняется условие
$\forall\, a,b \in P\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}=\dfrac{b}{a}\right)$, где $a\neq 0$, $b\neq 0$.

25. Доказать, что $(H,+,\cdot)$ – подполе поля $(P,+,\cdot)$, где H – подмножество множества P, тогда и только тогда, когда выполняются условия:
1) $\forall\, a,b\in H\,(a-b\in H)$,
2) $\forall\, a,b\in H\,(a\cdot b\in H)$,
3) $\forall\, a,b\in H\,(b\neq 0 \Rightarrow a\cdot b^{-1}\in H)$.

Тесты[1]

Тест 1

1. На множестве M задана бинарная алгебраическая операция *, если
   1) $\forall a,b \in M\ \exists c \in M (c = a * b)$,
   2) $\forall a,b \in M\ \exists!\ c \in M (c = a * b)$,
   3) $\forall a,b,c \in M\ (c = a * b)$,
   4) $\forall a,b \in M\ \exists! c \in M (a * b = b * a = c)$.
2. Бинарными алгебраическими операциями являются
   1) сложение матриц одного и того же размера $m \times n$,
   2) сложение квадратных матриц,
   3) умножение квадратных матриц,
   4) сложение многочленов.
3. Множество M относительно операции * образует коммутативный группоид, если выполняются аксиомы
   1) аксиома замкнутости *G0*,
   2) аксиома ассоциативности *G1*,
   3) аксиома коммутативности *G1'*,
   4) аксиома обратимости *G2*.
4. Бинарная алгебраическая операция * задана таблицей Кэли. В каких случаях операция коммутативна?

1)

*	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*a*	*a*

2)

*	*a*	*b*
a	*b*	*b*
b	*b*	*a*

3)

*	*a*	*b*
a	*a*	*b*
b	*b*	*a*

4)

*	*a*	*b*
a	*a*	*a*
b	*a*	*a*

5. Ассоциативной операцией является
   1) вычитание, заданное на множестве целых чисел,
   2) умножение, заданное на множестве квадратных матриц одного и того же порядка,
   3) сложение, заданное на множестве всех векторов,
   4) деление, заданное на множестве рациональных положительных чисел.

[1] В некоторых вопросах всех трех тестов возможен множественный выбор ответа.

6. Элемент θ множества M, на котором задана бинарная алгебраическая операция *, называется нейтральным элементом относительно операции *, если
   1) $\exists a \in M(a * \theta = \theta * a = a)$,
   2) $\exists a \in M(a * \theta = \theta * a = \theta)$,
   3) $\forall a \in M(a * \theta = \theta * a = a)$,
   4) $\forall a \in M(a * \theta = \theta * a = \theta)$.
7. Множество M относительно операций сложения и умножения образует кольцо, если выполняются условия:
   1) относительно умножения M образует абелеву группу,
   2) относительно сложения M образует абелеву группу,
   3) относительно умножения M образует полугруппу,
   4) относительно умножения M образует группу,
   5) выполняется аксиома дистрибутивности.
8. Относительно операций сложения и умножения поле образует
   1) множество квадратных невырожденных матриц одного и того же порядка,
   2) множество целых чисел,
   3) множество рациональных чисел,
   4) множество многочленов.
9. Верными являются утверждения:
   1) коммутативная группа содержит только коммутативные подгруппы,
   2) не коммутативная группа может содержать коммутативные подгруппы,
   3) если группа не коммутативна, то любая ее подгруппа не коммутативна,
   4) коммутативная группа может содержать не коммутативные подгруппы.
10. Говорят, что отображение $\varphi:(A,*) \to (B,\circ)$ сохраняет бинарную алгебраическую операцию, если
   1) $\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1 \circ a_2)$,
   2) $\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) \circ \varphi(a_2)$,
   3) $\varphi(a_1 \circ a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2)$,
   4) $\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2)$ и $\varphi(a_1 \circ a_2) = \varphi(a_1) \circ \varphi(a_2)$.

Тест 2

1. Бинарными алгебраическими операциями являются
   1) векторное произведение векторов,
   2) скалярное произведение векторов,
   3) сложение векторов,
   4) вычитание векторов.
2. Какие из указанных множеств образует группоид относительно операции *, если $a * b = (a - b) : 2$
   1) множество рациональных неотрицательных чисел,
   2) множество рациональных чисел,
   3) множество целых чисел,
   4) множество действительных положительных чисел.
3. Множество M относительно операции * образует коммутативную полугруппу, если выполняются аксиомы
   1) аксиома замкнутости *G0*,
   2) аксиома ассоциативности *G1*,
   3) аксиома коммутативности *G1'*,
   4) аксиома обратимости *G2*.
4. Бинарная алгебраическая операция * задана таблицей Кэли. В каких случаях операция ассоциативна?

1)

*	a	b
a	a	b
b	a	a

2)

*	a	b
a	b	b
b	b	a

3)

*	a	b
a	a	b
b	b	a

4)

*	a	b
a	a	a
b	a	a

5. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие коммутативности для операции умножения квадратных матриц 2-го порядка выполняется для матриц
   1) A и C,
   2) B и C,
   3) A и B,
   4) для всех матриц.

6. Бинарная алгебраическая операция *, заданная на множестве M, содержащем нейтральный элемент θ, обратима, если
   1) $\forall a \in M\ \exists a' \in M (a * a' = a' * a = \theta)$,
   2) $\forall a \in M\ \exists \theta \in M (a * \theta = \theta * a = a)$,
   3) $\exists a \in M\ \forall a' \in M (a * a' = a' * a = \theta$,
   4) $\exists \theta \in M\ \forall a \in M (a * \theta = \theta * a = a)$.
7. Операция умножения дистрибутивна относительно операции сложения, если
   1) $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$,
   2) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$,
   3) $b \cdot c + a = (b + a) \cdot (c + a)$,
   4) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
8. Относительно операций сложения и умножения кольцо образуют
   1) множество квадратных невырожденных матриц одного и того же порядка,
   2) множество целых чисел,
   3) множество многочленов,
   4) множество многочленов одной степени.
9. Выбрать верные утверждения:
   1) коммутативное кольцо содержит только коммутативные подкольца,
   2) не коммутативное кольцо может содержать коммутативные подкольца,
   3) если кольцо не коммутативно, то любое его подкольцо не коммутативно,
   4) коммутативное кольцо может содержать не коммутативные подгруппы.
10. Изоморфное отображение $\varphi : A \to B$, где $(A,*)$ и $(B,\circ)$ – алгебры, является
    1) рефлексивным,
    2) симметричным,
    3) транзитивным,
    4) связным.

Тест 3

1. Операция деления определена для ненулевых элементов множества
   1) целых чисел,
   2) отрицательных рациональных чисел,
   3) квадратных матриц 2-го порядка,
   4) положительных рациональных чисел.
2. Множество M относительно операции * образует полугруппу, если выполняются аксиомы
   1) аксиома замкнутости G0,
   2) аксиома ассоциативности G1,
   3) аксиома коммутативности G1',
   4) аксиома обратимости G2.
3. Для множества прямоугольных матриц размера $m \times n$, бинарными алгебраическими операциями являются
   1) сложение,
   2) вычитание,
   3) умножение,
   4) деление.
4. Среди операций, заданных на множестве M, коммутативными являются
   1) $a * b = a - b$, M – множество действительных чисел,
   2) $a * b = a^b$, M – множество действительных положительных чисел,
   3) $a * b = НОК(a,b)$, M – множество натуральных чисел,
   4) $a * b = a \cdot (-b)$, M – множество действительных чисел.
5. Даны матрицы
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$
   Условие ассоциативности для операции умножения квадратных матриц 2-го порядка выполняется
   1) только для A, B и D,
   2) только для B, C и D,
   3) только для A, C и D,
   4) для всех матриц.
6. Бинарная алгебраическая операция * задана таблицей Кэли.

*	*a*	*b*	*c*

a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	c	b

Какой элемент является нейтральным относительно операции *?

1) a,
2) b,
3) c,
4) нейтрального элемента нет.

7. Множество M относительно операций сложения и умножения образует коммутативное кольцо, если выполняются условия:
    1) относительно умножения M образует абелеву группу,
    2) относительно сложения M образует абелеву группу,
    3) относительно умножения M образует коммутативную полугруппу,
    4) относительно умножения M образует группу,
    5) выполняется аксиома дистрибутивности.
8. Относительно операций сложения и умножения поле образуют
    1) множество квадратных невырожденных матриц одного и того же порядка,
    2) множество целых действительных положительных чисел,
    3) множество рациональных чисел,
    4) множество многочленов третьей степени.
9. Известно, что $(H,*)$ – подгруппа группы $(G,*)$, тогда верными являются утверждения
    1) $(H,*)$ – абелева группа,
    2) $H \subset G$,
    3) $\theta \in H$, где θ – нейтральный элемент,
    4) $\forall a,b \in H(a * b' \in H)$.
10. Отображение $\varphi : A \to B$, где $(A,*)$ и $(B,\circ)$ – группы, есть изоморфизм, если
    1) $\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1 \circ a_2)$,
    2) $\varphi(a_1 * a_2) = \varphi(a_1) \circ \varphi(a_2)$,
    3) $\varphi(a_1 \circ a_2) = \varphi(a_1) * \varphi(a_2)$,
    4) φ инъективно,
    5) φ сюрьективно.

Практические задания

Задание 1.
На каких из множеств: N (множество натуральных чисел), Z (множество целых чисел), $2Z$ (множество четных чисел), $2Z+1$ (множество нечетных чисел), Q (множество рациональных чисел), R (множество действительных чисел), R^+ (множество действительных положительных чисел) задана бинарная алгебраическая операция *.

Таблица 1

n	Задание	n	Задание
1.	$a*b=\frac{a+b}{3}$	14.	$a*b=\frac{a}{b^2+1}$
2.	$a*b=(a-b)^2$	15.	$a*b=b:a$
3.	$a*b=b^a$	16.	$a*b=a^2+b^2$
4.	$a*b=\min(a,b)$	17.	$a*b=a+2b$
5.	$a*b=a\cdot b-b\cdot a$	18.	$a*b=\lvert a\cdot b\rvert$
6.	$a*b=2a\cdot b$	19.	$a*b=a^{b+1}$
7.	$a*b=(a+b)^2$	20.	$a*b=\max(a,b)$
8.	$a*b=a+b+1$	21.	$a*b=\sqrt[3]{a\cdot b}$
9.	$a*b=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$	22.	$a*b=a^2-b^2$
10.	$a*b=\lvert a+b\rvert$	23.	$a*b=2(a+b)+1$
11.	$a*b=\sqrt{a\cdot b}$	24.	$a*b=(a+b)^3$
12.	$a*b=a+\frac{b}{2}$	25.	$a*b=\frac{a\cdot b}{2}$
13.	$a*b=2(a-b)$		

Задание 2.

Является ли операция * из задания 1 на тех множествах, на которых она задана, а) коммутативной, б) ассоциативной?

Задание 3.

Какую алгебраическую структуру образует указанное множество M относительно указанной операции?

Таблица 2

n	Задание
1.	Множество целых чисел, запись которых оканчивается 0, относительно операции сложения
2.	Множество $\{x \mid x = 2a + \sqrt{3}b,\ a, b \in Q\}$ относительно операции сложения
3.	Множество целых чисел, кратных 3, относительно операции умножения
4.	Множество целых чисел, кратных 5, относительно операции сложения
5.	Множество целых чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1, относительно операции умножения
6.	Множество $\{x \mid x = 2a + \sqrt{3}b,\ a, b \in Z \setminus \{0\}\}$ относительно операции сложения
7.	Множество целых чисел, которые при делении на 6 дают в остатке 3, относительно операции умножения
8.	Множество $\{x \mid x = a + \sqrt{3}b,\ a, b \in Z\}$ относительно операции сложения
9.	Множество целых чисел, кратных 3, относительно операции сложения
10.	Множество целых чисел, запись которых оканчивается 0, относительно операции умножения
11.	Множество целых чисел, сумма цифр которых делится на 3, относительно операции умножения

Продолжение таблицы 2

12.	Множество $\{x \mid x = a + \sqrt{5}b,\ a, b \in Q\}$ относительно операции сложения
13.	Множество целых чисел, кратных 5, относительно операции умножения
14.	Множество $\{x \mid x = 2a + \sqrt{2}b,\ a, b \in Q\}$ относительно операции сложения
15.	Множество целых чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 1, относительно операции умножения
16.	Множество целых чисел, сумма цифр которых делится на 9, относительно операции умножения
17.	Множество $\{x \mid x = 3a + \sqrt{3}b,\ a, b \in Z \setminus \{0\}\}$ относительно операции сложения
18.	Множество целых чисел, кратных 4, относительно операции сложения
19.	Множество целых чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 1, относительно операции умножения
20.	Множество $\{x \mid x = a + \sqrt{2}b,\ a, b \in Z\}$ относительно операции сложения
21.	Множество целых чисел, сумма цифр которых делится на 9, относительно операции сложения
22.	Множество целых чисел, запись которых оканчивается 0 или 5, относительно операции умножения
23.	Множество $\{x \mid x = a + \sqrt{5}b,\ a, b \in Q \setminus \{0\}\}$ относительно операции сложения
24.	Множество целых чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 1, относительно операции умножения
25.	Множество $\{x \mid x = 3a + \sqrt{5}b,\ a, b \in Q\}$ относительно операции сложения

Задание 4.

Какую алгебраическую структуру образует указанное множество M относительно указанной операции?

Таблица 3

n	Задание
1.	M – множество квадратных матриц фиксированного порядка, определитель которых равен 1, относительно умножения
2.	M – множество пар (a,b), где $a,b \in R$, $a \neq 0$ относительно операции *, если $(a,b)*(a',b') = (a \cdot a', a \cdot b' + b \cdot a)$.
3.	M – множество всех подмножеств множества $\{1,2\}$ относительно симметрической разности
4.	M – множество многочленов относительно операции вычитания
5.	$M = \{-1,1\}$ относительно операции умножения
6.	$M = \{1,2,4,8\}$ относительно операции нахождения наименьшего общего кратного элементов множества M
7.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in Q$ относительно операции умножения
8.	M – множество всех подмножеств множества $\{1,2\}$ относительно операции объединения
9.	M – множество прямоугольных матриц размера $m \times n$ относительно вычитания
10.	M – множество пар (a,b), где $a,b \in R$, $a \neq 0$ относительно операции *, если $(a,b)*(a',b') = (a \cdot a', b + b')$.
11.	M – множество вех подмножеств множества $\{1,2\}$ относительно операции пересечения
12.	M – множество всех векторов, параллельных фиксированной прямой, относительно операции сложения

Продолжение таблицы 3

13.	M – множество прямоугольных матриц размера $m \times n$ относительно сложения
14.	M – множество всех подмножеств множества $\{1,2\}$ относительно разности
15.	$M = \{1,2,4,8\}$ относительно операции нахождения наибольшего общего делителя элементов множество M
16.	M – множество квадратных диагональных матриц фиксированного порядка, все элементы главной диагонали которых отличны от 0, относительно умножения
17.	M – множество пар (a,b), где $a,b \in R$, $a \neq 0$ относительно операции *, если $(a,b)*(a',b') = (a \cdot a', b \cdot b')$.
18.	M – множество всех поворотов на некоторый угол относительно композиции
19.	M – множество пар (a,b), где $a,b \in R$, $a \neq 0$ относительно операции *, если $(a,b)*(a',b') = (a \cdot a', a \cdot b' + b)$.
20.	M – множество треугольных квадратных матриц фиксированного порядка относительно умножения
21.	M – множество подстановок n-й степени относительно операции умножения (композиции)
22.	M – множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in R$ относительно умножения
23.	M – множество всех векторов, параллельных фиксированной плоскости, относительно операции сложения
24.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in Z$ относительно операции сложения
25.	M – множество всех параллельных переносов фигуры на вектор относительно композиции

Задание 5.

Выяснить, образует ли множество M относительно операций сложения и умножения кольцо или поле

Таблица 4

n	Задание
1.	M – множество многочленов с целыми коэффициентами
2.	M – множество функций действительного переменного, непрерывных на отрезке $[-2;2]$
3.	M – множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in Q$
4.	M – множество квадратных матриц третьего порядка, у которых две последние строки нулевые
5.	M – множество пар (a,b), где $a,b \in Z$, если сложение и умножение определяется следующим образом: $(a,b)+(a',b')=(a+a',b+b')$, $(a,b)\cdot(a',b')=(a\cdot a',b\cdot b')$
6.	M – множество квадратных симметричных матриц фиксированного порядка
7.	M – множество чисел вида $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$, где $a,b,c \in Q$
8.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in R$
9.	M – множество всех подмножеств множества $\{x,y\}$, роль операции сложения играет симметрическая разность, роль операции умножения играет пересечение
10.	M – множество непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций
11.	M – множество диагональных квадратных матриц фиксированного порядка
12.	M – множество всех подмножеств множества $\{1,2\}$, роль операции сложения играет симметрическая разность, а роль операции умножения играет пересечение
13.	M – множество рациональных дробей вида $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x), g(x)$ – функции действительного переменного, $g(x)\neq 0$

Продолжение таблицы 4

14.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, $x, y \in Q$
15.	M – множество треугольных квадратных матриц фиксированного порядка
16.	$M = \{0;1\}$, операции сложения и умножения задаются таблицами: $\begin{array}{c\|c\|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$
17.	M – множество ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in R$
18.	M – множество всех рациональных чисел, которые можно представить в виде дроби со знаменателем, равным степени числа 2
19.	M – множество чисел вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in Z$
20.	$M = \{0;1\}$, операции сложения и умножения задаются таблицами: $\begin{array}{c\|c\|c} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{c\|c\|c} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}$
21.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 5y \\ y & x \end{pmatrix}$, $x, y \in Z$
22.	M – множество чисел вида $a + b\sqrt[3]{3}$, где $a, b \in Q$
23.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x \in Q$
24.	M – множество всех рациональных чисел, которые можно представить в виде дроби с нечетным знаменателем
25.	M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$, $x \in Q$

Задание 6.

В задачах вариантов 1-10 проверить, является ли $(H,*)$ подгруппой группы $(G,*)$

В задачах вариантов 11-20 проверить, является ли $(H,*,\circ)$ подкольцом кольца $(K,*,\circ)$

В задачах вариантов 21-25 проверить, является ли $(H,*,\circ)$ подполем поля $(P,*,\circ)$

Таблица 5

n	Задание
1.	$H = nZ$, где n – некоторое натуральное число, $G = Z$, * – операция сложения
2.	H – множество квадратных матриц фиксированного порядка, определитель которых равен 1, G – множество квадратных матриц фиксированного порядка, * – операция сложения
3.	H – множество пар вида $(0;b)$, где $b \in R$, G – множество пар вида $(a;b)$, где a, $b \in R$, * определяется следующим образом: $(a,b)*(a',b') = (a+a',b+b')$
4.	H – множество чисел вида $a + b\sqrt{3} + c\sqrt[4]{3}$, где $a,b,c \in Z$, $G = R$, * – операция сложения
5.	$H = Z^+$, то есть H – множество целых положительных чисел, $G = Q^+$, то есть G – множество рациональных положительных чисел, * – операция умножения
6.	H – множество векторов плоскости, параллельных фиксированной прямой, G – множество всех векторов плоскости, * – операция сложения
7.	H – множество многочленов первой степени с действительными коэффициентами, G – множество многочленов с действительными коэффициентами, * – операция сложения

Продолжение таблицы 5

8.	H – множество чисел вида $a+b\sqrt{3}$, где $a,b \in Z$, $G=R^{+}$, то есть G – множество действительных положительных чисел, * – операция умножения
9.	H – множество единичных векторов на плоскости, G – множество всех векторов на плоскости, * – операция сложения
10.	$H=2Z+1$, $G=Z$, * – операция сложения
11.	$H=N$, $K=Z$, * – операция сложения, ° – операция умножения
12.	H – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$, где $x, y \in Z$, K – множество квадратных невырожденных матриц 2-го порядка, * – операция сложения, ° – операция умножения
13.	$H=N$, $K=Z$, * – операция сложения, ° – операция умножения
14.	H – множество целых чисел, кратных 5, $K=Z$, * – операция сложения, ° – операция умножения
15.	H – множество многочленов 1-ой степени, K – множество всех многочленов, * – операция сложения, ° – операция умножения
16.	$H=2Z$, $K=Z$, * – операция сложения, ° – операция умножения
17.	H – множество многочленов с целыми коэффициентами, K – множество многочленов с действительными коэффициентами, * – операция сложения, ° – операция умножения

Продолжение таблицы 5

18.	H – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, где $x \in R \setminus \{0\}$, K – множество квадратных невырожденных матриц 2-го порядка, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения
19.	H – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$, где $x, y \in R$, K – множество квадратных невырожденных матриц 2-го порядка, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения
20.	$H=2Z+1$, $K=Z$, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения
21.	$H = \{x \mid x = a + b\sqrt{3},\ a, b \in Q\},\ P = R$, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения
22.	$H = \{x \mid x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in Z\}$, $P = \{x \mid x = a + b\sqrt{2},\ a, b \in Q\}$, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения
23.	H – множество пар вида $(b;0)$, где $b \in Q$, P – множество пар вида $(a;0)$, где $a \in R$, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения: $(a,0)+(a',0)=(a+a',0)$, $(a,0)\cdot(a',0)=(a\cdot a',0)$
24.	$H = \{x \mid x = 2a + b\sqrt{5},\ a, b \in Z\},\ P = R$, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения
25.	$H=Q$, $P = R$, * – операция сложения, $\circ$ – операция умножения

Задание 7.
Доказать, что указанные структуры являются изоморфными.

Таблица 6

n	Задание
1.	Кольцо $(Q,+,\cdot)$ и кольцо $(Q,\oplus,\circ)$, в котором операции $\oplus$ и $\circ$ определены так: $x\oplus y = x+y-1$, $x\circ y = x+y-xy$
2.	Поле $(M,+,\cdot)$ и поле $(C,\otimes,\circ)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in R$, C – множество пар вида (a,b), $a,b\in R$, операции $\oplus$ и $\circ$ определены следующим образом: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)\circ(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$
3.	Группа $(S_2,\circ)$ и группа $(M,*)$, где S_2 – множество поворотов плоскости на 0^0 и на 180^0, $\circ$ – операция композиции, $M=\{-1,1\}$, * определена так: $\begin{array}{c\|c\|c} * & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array}$
4.	Кольцо $(Q,+,\cdot)$ и кольцо $(M,+,\cdot)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a\in Q$
5.	Алгебра $(M,+,\cdot)$ и алгебра $(G,+,\cdot)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in Q$, G – множество чисел вида $a+b\sqrt{2}$, $a,b\in Q$
6.	Группа S_3 = <(1,2,3),$^\circ$ > множества всех подстановок с операцией умножения и группа симметрий правильного треугольника на плоскости: поворотов вокруг центра треугольника на 120° , 240°
7.	Поле $(R,+,\cdot)$ и поле $(K,\otimes,\circ)$, где K – множество пар вида $(a,0)$, $a\in R$, операции $\oplus$ и $\circ$ определены так: $(a,0)\oplus(c,0)=(a+c,0)$, $(a,0)\circ(c,0)=(a\cdot c,0)$

Продолжение таблицы 6

8.	Группа симметрий куба и группа S_4
9.	Алгебра $(M,+,\cdot)$ и алгебра $(D,\otimes,\circ)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in R$, D – множество пар вида (a,b), $a,b \in R$, операции $\oplus$ и $\circ$ определены следующим образом: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$, $(a,b)\circ(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$
10.	Группа $(M,\cdot)$ и группа $(C,\circ)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in R$, C – множество пар вида (a,b), $a,b \in R$, операция $\circ$ определена следующим образом: $(a,b)\circ(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$
11.	Группа $(R\setminus\{0\},\cdot)$ и группа $(R\setminus\{0\},\cdot)$, если задано отображение φ, где $\varphi: x \mapsto \frac{1}{x}$
12.	Группа $(R,+)$ и группа $(M,\cdot)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in R$
13.	Аддитивные группы множества целых чисел и множества целых чисел, кратных некоторому числу n
14.	Группа $(R,+)$ и группа $(M,+)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in R$
15.	Группа $(M,+)$ и группа $(C,\oplus)$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b \in R$, C – множество пар вида (a,b), $a,b \in R$, операция $\oplus$ определена следующим образом: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$.

Продолжение таблицы 6

16.	Аддитивные группы множества Z и множества $2Z$
17.	Группа $(2Z,+)$ и группа $(2^z,\cdot)$, где 2^z – множество целых степеней числа 2
18.	Группа $(G,*)$ и группа $(M,\circ)$, где G – множество пар вида (a,b), $a\in R\setminus\{0\}$, $b\in R$, операция * определена следующим образом: $(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$, М – множество многочленов вида $ax+b$, $a\in R\setminus\{0\}$, $b\in R$, операция $\circ$ – операция композиции
19.	Группа $(R\setminus\{0\},\cdot)$ и группа $(K,\circ)$, где K – множество пар вида $(a,0)$, $a\in R\setminus\{0\}$, операция $\circ$ определена следующим образом: $(a,0)\circ(c,0)=(a\cdot c,0)$
20.	Группа $(R,+)$ и группа $(R^+,\cdot)$, если задано отображение $\varphi:R^+\to R$, где $\varphi:x\mapsto a^x$, $a>0, a\neq 1$
21.	Группа $(V,+)$ и группа $(G,\oplus)$, где V – множество направленных отрезков на плоскости, G – множество пар вида (a,b), $a,b\in R$, операция $\oplus$ определена следующим образом: $(a,b)\oplus(c,d)=(a+c,b+d)$.
22.	Аддитивные группы множества четных и нечетных чисел
23.	Группа $(M,*,^{-1})$ и группа $(R\setminus\{0\},*,^{-1})$, где M – множество матриц вида $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x\in R\setminus\{0\}$, $*$ – операция умножения
24.	Группа $(R^+,\cdot)$ и группа $(R,+)$, если задано отображение $\varphi:R^+\to R$, где $\varphi:x\mapsto \log_a x$, $a>0, a\neq 1$
25.	Группа $(R,+)$ и группа $(K,\oplus)$, где K – множество пар вида $(a,0)$, $a\in R$, операция $\oplus$ определена следующим образом: $(a,0)\oplus(c,0)=(a+c,0)$.

Список рекомендуемой литературы

1. Винберг Э.Б. Курс алгебры – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2001, 544 с.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть 1. Основы алгебры. – М., Наука, 2004, 272 с.
3. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие. – М.: Высшая школа, 2002, 559 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры: Учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2011, 432 с.
5. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре: Учебник – СПб. : Лань, 2007, 560 с.
6. Милованов М.В. и др. Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. I. – Мн.: Амалфея, 2001, 400 с.
7. Сборник задач по математике для втузов в 4 частях: Ч I / А.В. Ефимов, А.С. Поспелов. – М.: Физматлит, 2009, 288 с.
8. Фаддеев Д. К. Задачи по высшей алгебре: Учебное пособие для студ. вузов. – СПб.: «Лань», 2007, 288 с.
9. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – М.: Наука, 2007, 416 с.
10. Шевцова Т.В. Основы алгебры. Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика». – Курск, Изд-во РОСИ, 2007, 41 с.

(3)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______ О.Г. Локтионова
«30» июня ______ 2016 г.

Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений

Индивидуальные задания к модулю

Курск 2016

УДК 512.64

Составители: Е.А. Бойцова, Т.В. Шевцова

Рецензент:
Кандидат педагогических наук, доцент кафедры
высшей математики *Л.И. Студеникина*

Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А. Бойцова, Т.В. Шевцова. – Курск, 2016. – 26 с.: табл. 4. Библиогр.: с. 26.

Представлены индивидуальные задания, состоящие из теоретических упражнений и практических заданий по разделу математики «Линейная алгебра», и даны примеры выполнения типовых заданий.

Индивидуальные задания предназначены для студентов технических и экономических специальностей и направлений подготовки дневной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ_____. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Данная методическая разработка предназначена для организации самостоятельной работы студентов, изучающих алгебру в качестве отдельной дисциплины или как раздел в курсе математики или высшей математики. Она является составной частью рейтинговой интенсивной технологии модульного обучения, действующей в Юго-Западном государственном университете.

В разработке содержатся теоретические упражнения, практические задания и контрольные вопросы по следующим темам: вычисление определителей матриц, действия над матрицами, решение и исследование систем линейных уравнений.

Теоретические упражнения представлены в 35 вариантах, что должно обеспечить заданиями всех студентов конкретной группы. Практические упражнения даны в 50 вариантах, выбор номера варианта осуществляется согласно номеру n в журнале. Количество вариантов практических заданий больше, чем теоретических. Это сделано для того, чтобы студенты имели возможность использовать методическую разработку не только для отчета по соответствующей теме во время текущего контроля, но и при подготовке к итоговому контролю.

Контрольные вопросы даны для самопроверки теоретических знаний студентов.

Список литературы в конце данной разработки отражает некоторые учебные пособия, которые рекомендуется использовать при выполнении модуля.

Индивидуальные задания

Теоретические упражнения

1. На основе понятия инверсии вывести формулу для вычисления определителя квадратной матрицы 2-го порядка.
2. На основе понятия инверсии вывести формулу для вычисления определителя квадратной матрицы 3-го порядка.
3. Доказать, что число различных чётных перестановок порядка n равно числу нечётных.
4. Перечислить все перестановки 4-го порядка с 0,1,2,3,4,5 и 6 инверсиями (сгруппировать по числу инверсий).
5. Определить знак, с которым в определитель 4-го порядка входит произведение $a_{21}a_{45}a_{34}a_{53}a_{12}$.
6. Доказать, что всякая транспозиция символов в перестановке меняет четность перестановки.
7. Доказать, что существует ровно $n!$ перестановок n элементов.
8. Среди перестановок порядка n указать перестановку с наибольшим числом инверсий.
9. Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если эта матрица содержит нулевую строку.
10. Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если эта матрица содержит две одинаковые строки.
11. Доказать, что определитель матрицы равен нулю, если эта матрица содержит две пропорциональные строки.
12. Доказать, что определитель матрицы меняет знак на противоположный при перестановке двух строк матрицы.
13. Доказать, что определитель матрицы не меняется при транспонировании матрицы.
14. Доказать, что если все элементы какой-либо строки определителя умножить на любое число k, то величина определителя изменится в k раз.

15. Доказать, что если определитель матрицы равен нулю, то одну из ее строк можно представить в виде суммы других строк с некоторыми коэффициентами.

16. Доказать, что определитель произведения квадратных матриц одного и того же порядка равен произведению определителей этих матриц.

17. Доказать, что если элементы некоторой строки определителя представлены в виде суммы двух слагаемых, то определитель равен сумме двух определителей: в первом из которых элементы отмеченной строки равны первым слагаемым, а во второй – вторым.

18. Доказать теорему анулирования: сумма произведений элементов некоторой строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

19. Доказать, что для любых матриц A, B, C для которых определены $A \cdot B$ и $B \cdot C$, имеет место равенство: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, то есть доказать ассоциативность операции умножения матриц.

20. Доказать, что для любых матриц A, B, C для которых определены $A \cdot B$ и $A \cdot C$, имеют место равенства: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, то есть доказать левую и правую дистрибутивность операции умножения относительно сложения.

21. Доказать, что для любых матриц A и B, для которых определено произведение $A \cdot B$, имеет место равенство: $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

22. Матрица A называется симметрической, если $A = A^t$, и кососимметрической, если $A = -A^t$ Доказать, что любую квадратную матрицу можно представить в виде суммы симметрической и кососимметрической матриц.

23. Доказать, что если A, B – квадратные матрицы одного и того же порядка, то сумма коэффициентов по главной диагонали для матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$ одинакова.

24. Вывести формулы Крамера для решения систем линейных уравнений.

25. Доказать, что всякую матрицу можно с помощью элементарных преобразований привести к ступенчатому виду.

26. Доказать, что ранг суммы матриц не более суммы рангов слагаемых.
27. Доказать, что вырожденная матрица не обратима.
28. Доказать, что ранг произведения матриц не выше любого из рангов сомножителей.
29. Доказать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
30. Вывести формулу для нахождения матрицы, обратной матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
31. Доказать, что если для любой квадратной матрицы X и некоторой квадратной матрицы A выполняется равенство: $A \cdot X = X \cdot A$, то $A = \lambda \cdot E$ для некоторого λ, где E – единичная матрица соответствующего порядка.
32. Квадратная матрица A называется ортогональной, если выполняется равенство: $A \cdot A^{t} = E$, где E – единичная матрица Доказать, что произведение ортогональных матриц есть ортогональная матрица.
33. Квадратная матрица A называется ортогональной, если выполняется равенство: $A \cdot A^{t} = E$, где E – единичная матрица. Доказать, что матрица, обратная ортогональной, также есть ортогональная матрица.
34. Доказать, что если A и B –квадратные матрицы одного и того же порядка и $A \cdot B = E$, то $B \cdot A = E$, где E –единичная матрица.
35. Доказать, что множество решений системы линейных уравнений не меняется при следующих элементарных преобразованиях расширенной матрицы системы:

    а) перестановка строк;

    б) умножение строки на число не равное нулю;

    в) прибавление к одной строке другой строки, умноженной на любое число;

    г) перестановка столбцов, исключая последний (при этом меняются местами соответствующие неизвестные системы).

Практические задания

Задание 1

Найти значение выражения $(n-10)\cdot A + B\cdot C$, если n нечетно,
и значение выражения $C\cdot B-(n-10)\cdot A$, если n нечетно.

Матрицы A, B, C взять из таблицы 1 согласно числу n, которое определяется номером студента по списку в журнале.

Таблица 1

n	A	B	C
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -9 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
9	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -8 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 5 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
18	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
19	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
20	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
22	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
24	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
26	$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
27	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
28	$\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
29	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
30	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
32	$\begin{pmatrix} -5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
34	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
35	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
36	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
38	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
39	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$
40	$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$
41	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
42	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
43	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
44	$\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
45	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$
46	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 30 & 2 \\ -5 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
47	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 1

n	A	B	C
48	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
49	$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
50	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Задание 2

Найти определитель матрицы A по правилу треугольников.

Матрицу A взять из таблицы 2.

Таблица 2

n	A	B	n	A	B
1	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 \\ -2 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

9	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$
19	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
21	$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$
23	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$
25	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

n	A	B	n	A	B
27	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
29	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$
31	$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$
33	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$
35	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$	36	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$
37	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$	38	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$
39	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$	40	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
41	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$	42	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
43	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$	44	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 2

n	A	B	n	A	B
45	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$	46	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$
47	$\begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	48	$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
49	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 5 \end{pmatrix}$	50	$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Задание 3

Найти матрицу, обратную матрице A. Проверить, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

Матрицу А взять из таблицы 2.

Задание 4

Записать систему линейных уравнений, соответствующую уравнению в матричной форме:

$A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Решить полученную систему методом Крамера.

Матрицы А и В взять из таблицы 2. Значение главного определителя матрицы взять из решения задания 2.

Задание 5

Полученную в задании 4 систему линейных уравнений решить методом обратной матрицы.
Обратную матрицу взять из решения задания 3.

Задание 6

Полученную в задании 4 систему линейных уравнений решить методом Гаусса.

Задание 7
Вычислить определитель 4-го порядка, пользуясь элементарными преобразованиями.
Определитель взять из таблицы 3

Таблица 3

n	$\lvert A\rvert$	n	$\lvert A\rvert$	n	$\lvert A\rvert$
1	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	2	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 9 & -4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	3	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	5	$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	6	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	8	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	9	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ 7 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

Таблица 3

13	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
16	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -5 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 & 3 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 3 \\ -1 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ -2 & 5 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & 10 & 2 & 2 \\ 2 & -5 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
31	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ 9 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	32	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$	33	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Продолжение таблицы 3

34	$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	35	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	36	$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
37	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	38	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & -4 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 2 \\ -1 & 5 & -5 & 3 \end{vmatrix}$	39	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$
40	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$	41	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 & 2 \\ 9 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	42	$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 & 6 \\ -1 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
43	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	44	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$	45	$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$
46	$\begin{vmatrix} 6 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	47	$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & -1 & -3 \\ -2 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$	48	$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 & 2 \\ -9 & 4 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
49	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$	50	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & -4 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$		

Задание 8

Выразить матрицу X через матрицы A, B,C и D из матричного уравнения. Найти матрицу X.

Матричное уравнение и матрицы A, B и C приведены в таблице 4

Таблица 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
1	$A\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\-2&-1\end{pmatrix}$
2	$(A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\-4&2\end{pmatrix}$
3	$A\cdot X+B=C$	$\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&1\\2&-2\end{pmatrix}$
4	$X\cdot A+X=B+C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-4\\-3&1\end{pmatrix}$
5	$A^{-1}\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}5&1\\-1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\-5&2\end{pmatrix}$
6	$A+X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&1\\-3&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0\\-5&1\end{pmatrix}$
7	$A\cdot X+X=B+C$	$\begin{pmatrix}-2&2\\3&-6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}8&-1\\-5&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-4\\3&0\end{pmatrix}$
8	$A\cdot X\cdot B^{-1}=-C$	$\begin{pmatrix}3&-2\\-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&1\\5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$
9	$A\cdot X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&7\\-1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&3\\2&-1\end{pmatrix}$
10	$A^{-1}\cdot X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-3\\1&4\end{pmatrix}$
11	$X\cdot A-B=C$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-3\\5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\4&-2\end{pmatrix}$
12	$X\cdot A+X=B+C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\-3&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-2\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&4\\-3&1\end{pmatrix}$
13	$A\cdot X+2B=C$	$\begin{pmatrix}7&2\\4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$
14	$A\cdot X\cdot B^{-1}=C$	$\begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&1\\5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&1\\2&-1\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
15	$A\cdot X\cdot B=-3C$	$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-4\\1&-1\end{pmatrix}$
16	$A-X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-3&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&1\\-2&1\end{pmatrix}$
17	$X\cdot A+B=C$	$\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\-4&2\end{pmatrix}$
18	$A\cdot X+B=2C$	$\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-2&6\end{pmatrix}$
19	$A\cdot(X+B)=C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\3&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\9&2\end{pmatrix}$
20	$(A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\-4&2\end{pmatrix}$
21	$A\cdot X+3B=C$	$\begin{pmatrix}-1&2\\-3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&1\\2&-2\end{pmatrix}$
22	$A+X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}4&1\\-3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-1\\-5&1\end{pmatrix}$
23	$(2A-B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&4\\-3&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-9&1\\0&-3\end{pmatrix}$
24	$X\cdot A-2B=C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-3\\7&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1\\-3&-2\end{pmatrix}$
25	$A\cdot X+X=B-C$	$\begin{pmatrix}5&-1\\-3&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-2\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-6&2\\3&0\end{pmatrix}$
26	$X\cdot A+B=C$	$\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\-4&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&-1\\1&2\end{pmatrix}$
27	$(A+B)\cdot X=-C$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-4&2\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
28	$A^{-1}\cdot X\cdot B=2C$	$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-3\\5&4\end{pmatrix}$
29	$A\cdot X\cdot B=2C$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\-3&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\-2&-1\end{pmatrix}$
30	$A\cdot X-B=C$	$\begin{pmatrix}-2&7\\-1&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&5\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$
31	$X\cdot(A-B)=C$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3&0\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-4\\1&-5\end{pmatrix}$
32	$(2A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-4\\3&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&1\\8&2\end{pmatrix}$
33	$A\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}-3&-1\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&8\\0&1\end{pmatrix}$
34	$X\cdot A+X=B-C$	$\begin{pmatrix}2&7\\2&4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&2\\3&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-4\\0&1\end{pmatrix}$
35	$X\cdot(A+B)=C$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&7\\4&2\end{pmatrix}$
36	$A+X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}-3&1\\2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-1\\-5&1\end{pmatrix}$
37	$X\cdot A-X=B+C$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-2\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\-3&-3\end{pmatrix}$
38	$A\cdot(X+B)=-C$	$\begin{pmatrix}7&2\\4&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&4\\6&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-3\\0&2\end{pmatrix}$
39	$X\cdot A-B=2C$	$\begin{pmatrix}-4&-1\\3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\4&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-3\\5&2\end{pmatrix}$
40	$(A+B)\cdot X=C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\1&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\0&2\end{pmatrix}$

Продолжение таблицы 4

n	Матричное уравнение	A	B	C
41	$A\cdot X\cdot B=3C$	$\begin{pmatrix}3&-7\\-2&5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-3\\2&-1\end{pmatrix}$
42	$X\cdot(A-B)=C$	$\begin{pmatrix}-5&1\\-1&-3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&0\\-2&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$
43	$A\cdot(X-B)=-C$	$\begin{pmatrix}7&2\\-4&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&1\\2&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&-3\\0&2\end{pmatrix}$
44	$X\cdot A+2B=C$	$\begin{pmatrix}6&-1\\-5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&-1\\2&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-2\\2&5\end{pmatrix}$
45	$A^{-1}\cdot X\cdot B=-C$	$\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4&-1\\-3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&5\\1&4\end{pmatrix}$
46	$X\cdot A-X=B+C$	$\begin{pmatrix}7&-1\\-5&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&-2\\5&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&-1\\4&-3\end{pmatrix}$
47	$A\cdot X\cdot B=C$	$\begin{pmatrix}2&-1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&-2\\-3&-5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&3\\-2&-1\end{pmatrix}$
48	$X\cdot(A+B)=C$	$\begin{pmatrix}5&-1\\1&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-3&0\\-2&-2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-1&3\\4&-5\end{pmatrix}$
49	$A\cdot X+B=3C$	$\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&-1\\3&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6&-1\\-3&2\end{pmatrix}$
50	$A\cdot(X+B)=-C$	$\begin{pmatrix}-4&-1\\-3&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-2&1\\6&2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&-1\\0&2\end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.
2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?
3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?
4. Что такое перестановка порядка n?
5. Что такое инверсия?
6. Какие перестановки называются чётными, какие нечётными?
7. Сколько существует различных перестановок порядка n, сколько из них чётных?
8. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.
9. В чём заключается правило треугольников?
10. Перечислить свойства определителей.
11. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?
12. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?
13. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?
14. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.
15. Сформулировать лемму о транспонировании произведения матриц.
16. Какие системы называются эквивалентными?
17. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?
18. Как записать и решить систему в матричной форме?
19. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.

20. Написать формулы Крамера.

21. Что такое элементарные преобразования матрицы?

22. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений

23. Как найти определитель матрицы методом Гаусса?

24. Как найти обратную матрицу методом Гаусса?

25. Как найти ранг матрицы методом Гаусса?

26. Как методом Гаусса определить, будет ли система совместной или нет, определённой или нет?

27. Как записать базисное множество решений неопределённой системы?

28. Какие неизвестные называются главными, какие свободными?

29. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

30. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?

Список рекомендуемой литературы

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра [Текст]: учеб. пособие – СПб.: Лань, 2008. – 392 с.
2. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра [Текст]: учебник в 2-х т. Т I , – М.: ГелиосАРВ, 2003. – 336 с.
3. Глухов М.М., Елизаров В.П., Нечаев А.А. Алгебра [Текст]: Учебник в 2-х т. Т II – М.: ГелиосАРВ, 2003. – 416 с.
4. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник для вузов – М.: Проспект, 2011. – 608 с.
5. Ильин В. А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра [Текст]: учебник для вузов. – М.: Физматлит, 2005. – 280 с.
6. Куликов, Л.Я. Алгебра и теория чисел [Текст]: учеб. Пособие – М.: Высшая школа, 2002. – 559 с.
7. Курош А.Г. Курс высшей алгебры [Текст]: учебник для вузов – М.: Физматгиз, 2007. – 432 с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г.Локтионова
«__» ________ 2014г.

Векторная алгебра. Аналитическая геометрия

Индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля

Курск 2014

УДК 514.12

Составитель А.В.Бойков

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры высшей математики *Дмитриев В.И.*

Векторная алгебра. Аналитическая геометрия: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.В.Бойков. Курск, 2014. 30 с. табл. 3. Ил.: 2, Библиогр.: с.30.

Методические указания отражают требования образовательных стандартов 3-го поколения подготовки бакалавров и специалистов по техническим специальностям. Работа содержит теоретические индивидуальные упражнения, практические индивидуальные задания, контрольные вопросы, указания к использованию ЭВМ, рекомендуемую литературу по темам “Векторная алгебра” и “Аналитическая геометрия”.

Предназначены для студентов технических специальностей

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л.1,75. Уч.-изд. л.1,58. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель преподавания математики в вузе – ознакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения теоретических и практических задач; привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умение перевести задачу на математический язык.

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельная работа студента. В Юго-Западном государственном университете самостоятельная работа студентов организуется на основе положения о бально-рейтинговой системе оценки качества освоения основных образовательных программ и имеет модульную структуру. Опыт нашего и других вузов показывает, что эта система активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса математики.

Предлагаемые методические указания являются пособием к одному из модулей этой системы. Методические указания посвящены разделам “Векторная алгебра” и “Аналитическая геометрия” (до тем кривые и поверхности второго порядка) и содержат индивидуальные задания (теоретическое упражнение и практические задания), контрольные вопросы, рекомендуемую литературу, указания к использованию ЭВМ (Mathcad) при выполнении заданий модуля. Указания по выполнению заданий модуля приводятся в пособии [7].

Предусмотрены три уровня сложности заданий модуля. Студенту предлагается выполнить одно теоретическое упражнение и некоторое количество практических заданий, в зависимости от выбранного им (или преподавателем) уровня сложности (или направления подготовки):

первый уровень - №№ 3-5, 8, 9(а,б), 11(а,б);
второй уровень - №№ 1-9, 11(а-е,и-л);
третий уровень - №№ 1-12.

1. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Выбор индивидуального задания к модулю-2 осуществляется по номеру варианта студента n. При этом используются параметр $P_к$ − остаток от деления номера варианта n на число к, и выражение [n / k] − целая часть от деления n на k. Например, если n = 7, то $P_2=1$, $P_3=1$, $P_4=3$, $P_5=2$, $P_6=1$, $P_7=0$, $P_8=7$, $P_9=7$ и т.д. Если n = 7 и к = 4, то [n/k] = [7/4] = 1.

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

Выполнить теоретическое упражнение номер m, где $m = P_{30} + 1$.

1. Сформулировать и доказать свойства проекции вектора на ось.
2. Записать и доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек “начала” и “конца” вектора.
3. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.
4. Записать и доказать формулы, выражающие координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении, через координаты концов этого отрезка.
5. Записать и доказать формулы для длины и направляющих косинусов вектора, выражающие эти величины через декартовы координаты вектора.
6. Доказать свойства скалярного произведения векторов.
7. Записать и доказать формулу, выражающую скалярное произведение векторов через их декартовы координаты.
8. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
9. Записать и доказать формулы для косинуса угла между двумя векторами в пространствах V_2 и V_3.
10. Доказать свойство $[\vec{a};\vec{b}] = -[\vec{b};\vec{a}]$ векторного произведения векторов.
11. Используя свойства векторного произведения, доказать формулу, выражающую векторное произведение векторов через их декартовы координаты.

12. Записать и доказать формулы для вычисления площади параллелограмма и треугольника с помощью векторного произведения векторов.
13. Записать и доказать формулу, выражающую смешанное произведение векторов через их декартовы координаты.
14. Доказать свойства смешанного произведения векторов.
15. Записать и доказать формулы для вычисления объема параллелепипеда и треугольной пирамиды с помощью смешанного произведения векторов.
16. Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие компланарности векторов пространства V_3.
17. Доказать, что любая прямая на плоскости имеет уравнение $Ax + By + C = 0$, где $\vec{N} = (A; B)$ нормальный вектор этой прямой.
18. Вывести уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ с угловым коэффициентом k.
19. Доказать, что любая прямая на плоскости имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + m \cdot t, \\ y = y_0 + n \cdot t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $(x_0; y_0)$ − произвольная точка прямой, а вектор $\vec{q} = (m; n)$ – направляющий вектор этой прямой. Записать каноническое уравнение прямой.
20. Доказать, что любая прямая в пространстве имеет параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + k \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty,$$

где $(x_0; y_0; z_0)$, − произвольная точка прямой, а вектор $\overline{q} = (k; m; n)$ − направляющий вектор этой прямой. Записать каноническое уравнение прямой.
21. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными общими уравнениями. Доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.

22. Вывести формулу для тангенса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными уравнениями с угловым коэффициентом. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
23. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми на плоскости, заданными каноническими (параметрическими) уравнениями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
24. Записать и доказать формулы для расстояния от точки до прямой на плоскости и от точки до плоскости в пространстве.
25. Записать и доказать формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.
26. Доказать, что любая плоскость в пространстве имеет уравнение $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{Cz} + \mathrm{D} = 0$, где $\vec{N} = (\mathrm{A};\mathrm{B};\mathrm{C})$ нормальный вектор этой плоскости.
27. Вывести уравнение плоскости проходящей через три заданные точки, не лежащие на одной прямой.
28. Вывести формулу для косинуса угла между двумя плоскостями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
29. Вывести формулу для косинуса угла между двумя прямыми в пространстве, заданными каноническими (параметрическими) уравнениями. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямых.
30. Вывести формулу для синуса угла между прямой и плоскостью. Сформулировать и доказать условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

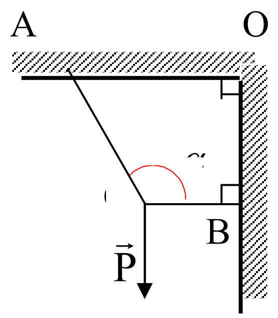
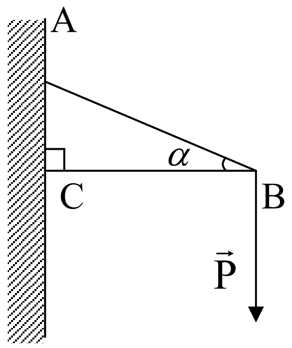
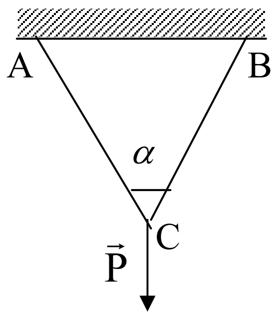
1.2. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1.2.1. ЗАДАНИЕ 1

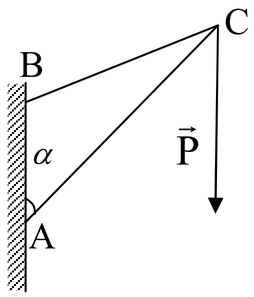
Решить задачу номер m из табл.1.1, где $m = P_4 + 1$.

Таблица 1.1

Индивидуальные условия к заданию 1

№ задачи m	Условие задачи		Угол α
1	2		3
1		К двум тросам подвешен груз $\lvert\vec{P}\rvert = 100$ кГ Определить силы (в кГ), возникающие в тросах, если угол АСВ равен α, угол ОВС равен 90°	$\alpha = 90^\circ + 2^\circ \cdot ([n/4]+1)$
2		Груз весом $\lvert\vec{P}\rvert$=100кГ поддерживается двумя стержнями АВ и СВ. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол АСВ равен 90°, угол АВС равен α	$\alpha = 3^\circ \cdot ([n/4] + 1)$
3		К двум тросам АС и ВС, одинаковой длины, подвешен груз весом $\lvert\vec{P}\rvert = 100$ кГ. Определить силы (в кГ), возникающие в тросах, если угол АСВ равен α	$\alpha = 6^\circ \cdot ([n/4] + 1)$

Продолжение табл. 1.1

1	2	3
4	 Груз весом $\lvert\vec{P}\rvert = 100$ кГ поддерживается двумя стержнями AC и BC. Определить силы (в кГ), возникающие в стержнях, если угол BAC равен α, и угол ABC равен 120°	$\alpha = 2^\circ \cdot ([n/4] + 1)$

1.2.2. ЗАДАНИЕ 2

Решить задачу номер m из табл.1.2, где $m = P_5 + 1$

Таблица 1.2

Индивидуальные условия к заданию 2

№ задачи m	Условие задачи
1	2
1	Точка O − точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки B, если $\overrightarrow{AB} = (-1; P_3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; P_5; -2)$, $O(2; -1; P_7)$
2	Точка O − точка пересечения медиан треугольника ABC. Найти координаты точки O, если $A(P_3; -1; -2)$, $C(-3; P_5; 1)$, $\overrightarrow{AB} = (4; 0; P_7)$

Продолжение табл. 1.2

1	2
3	В параллелограмме ABCD точка К − середина стороны CD. Найти координаты точки А, если $\overrightarrow{AK}$ = (1;−5;P_3), $\overrightarrow{BD}$ = (−2;P_7;−3), B(P_5;0;7)
4	В параллелограмме ABCD точка О − точка пересечения диагоналей. Найти координаты точки К, − середины стороны AD, если B(P_3; P_5; P_7), C(−2;1;−3), O(4;0;−1)
5	В трапеции ABCD стороны AB и CD - основания, Точка N(P_7;P_3;P_5) − середина стороны BC. Найти координаты точки А, если $\overrightarrow{AB}$ = (8;12;−4), $\overrightarrow{CD}$ = (−2;−3;1), $\overrightarrow{AD}$ = (5;0;7)

1.2.3. ЗАДАНИЕ 3

Даны три силы: $\vec{F}_1 = P_2\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} - 7\cdot\vec{k}$, $\vec{F}_2 = 3\cdot\vec{i} + P_3\cdot\vec{j} + 4\cdot\vec{k}$ и $\vec{F}_3 = -2\cdot\vec{j} + P_5\cdot\vec{k}$. Найти равнодействующую $\vec{R}$ сил $(-\vec{F}_1), \vec{F}_2, \vec{F}_3$ и работу, которую она производит, когда точка её приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения $M_0(0;1;P_7)$ в положение $M(P_6;0;1)$.

1.2.4. ЗАДАНИЕ 4

Сила $\vec{F} = (P_3;P_5;-2)$ приложена к точке $C(P_4;-1;P_7)$. Определить величину (модуль) и направление (направляющие косинусы) момента этой силы относительно начала координат.

1.2.5. ЗАДАНИЕ 5

Найти ненулевой вектор ортогональный векторам $\vec{a} = (1 - P_4; P_5 + 1; -3)$ и $\vec{b} = (P_3 - 1; 1; 4 - P_7)$. Сделайте проверку.

1.2.6. ЗАДАНИЕ 6

Даны точки: $A(-1; -P_3; 2)$, $B(P_5; 2; 0)$ и $C(P_5 \cdot (P_3 + 2); P_3^2 + 3 \cdot P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1))$. Образуют ли эти точки треугольник?
Если да, то чему равна его площадь?
Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

1.2.7. ЗАДАНИЕ 7

Даны точки: $A(1; -P_2; -1)$, $B(1-P_3; 0; 1)$, $C(-1; 1; P_5-2)$, $D(P_2; P_4; P_8)$. Образуют ли эти точки пирамиду?
Если да, то чему равен объём пирамиды?
Если нет, то запишите формулу для нахождения объёма пирамиды средствами векторной алгебры.

1.2.8. ЗАДАНИЕ 8

Даны точки $A(-1-P_7; P_5 - 2)$ и $B(P_5 - 2; P_5 + 4)$. Найти:
а) точку $C(x_1; y_1)$ − середину отрезка AB;
б) точку $D(x_2; y_2)$, которая делит отрезок AB в отношении $(P_9 + 1) : (9 - P_9)$.

1.2.9. ЗАДАНИЕ 9

На плоскости даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Координаты точек взять в табл. 1.3.

Сделайте чертёж треугольника ABC и найдите:

а) длину и уравнение стороны BC (записать общее уравнение, каноническое, параметрические и с угловым коэффициентом);

б) косинус угла A и угол A (в градусах);

в) уравнение прямой, проходящей через точку A параллельно стороне BC;

г) высоту, проведенную к стороне BC, и её уравнение;

д) уравнение медианы, проведенной к стороне BC;

е) уравнение биссектрисы угла A.

Таблица 1.3

Координаты точек A, B, C к заданию 9

n	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	2	3	4	5	6	7
1	14	−1	−1	7	−7	−1
2	−1	−1	2	−1	2	3
3	−7	−2	7	−2	2	10
4	−1	−1	4	1	−5	−1
5	−5	−2	3	13	−5	7
6	−1	6	−1	−2	5	−2
7	8	−6	8	1	−4	10
8	−5	−6	11	6	0	6
9	−2	1	2	−2	6	1
10	−3	−11	5	4	−3	10
11	5	−7	5	7	−7	2
12	9	−4	−3	5	−3	1
13	8	7	−1	7	−7	−1
14	15	9	8	9	−1	−3
15	1	−9	1	2	−11	7
16	4	2	−5	14	−14	2
17	−3	−1	12	7	−9	7
18	9	9	−5	9	0	−3
19	−9	3	−9	−5	6	−5
20	−7	−3	−7	1	5	6
21	6	−6	−2	9	−2	0
22	−2	8	3	−4	8	8
23	−1	−1	8	11	−8	−1
24	−7	12	−7	1	5	−4

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5	6	7
25	1	3	7	3	4	7
26	−6	13	−14	7	−6	−8
27	2	10	−7	−2	7	−2
28	−5	−1	−1	−1	4	11
29	−5	12	7	−4	7	12
30	8	−3	14	5	−1	−3
31	−1	2	5	−6	11	2
32	0	0	12	−9	0	7
33	8	−7	13	5	−3	−7
34	12	7	−9	7	−3	−1
35	−3	−8	−8	4	−3	16
36	−7	2	5	−7	5	7
37	5	9	−4	9	−4	−3
38	−1	7	−7	−1	8	7
39	8	11	−8	−1	−1	−1
40	5	−4	−7	12	−7	1
41	−3	−1	1	−1	1	2
42	−7	−1	14	−1	−1	7
43	−5	9	0	−3	9	9
44	14	−9	−1	−1	14	7
45	5	6	−7	−3	−7	1
46	−2	9	−2	0	6	−6
47	11	6	0	6	−5	−6
48	−4	10	8	−6	8	1
49	−3	−3	5	3	13	−3
50	−2	7	2	7	7	−5
51	−6	−8	−6	13	−14	7
52	7	−5	−2	7	2	7
53	−1	−2	3	1	−1	4
54	−5	7	−5	−2	3	13
55	−3	−6	9	−1	−3	8
56	1	1	−11	1	−11	−8
57	12	−9	0	7	0	0
58	1	2	−11	7	1	−9
59	−3	−2	5	13	13	−2
60	5	4	−3	10	−3	−11
61	5	7	−7	2	5	−7
62	14	5	−1	−3	8	−3
63	13	5	−3	−7	8	−7
64	−4	−6	8	−6	8	−1

Продолжение табл. 1.3

1	2	3	4	5	6	7
65	−1	−3	15	9	8	9
66	−1	7	−7	−1	14	−1
67	−2	0	6	−6	−2	9
68	7	−2	1	−10	7	−18
69	0	−3	9	9	−5	9
70	−3	5	−3	1	9	−4
71	7	1	−7	−5	1	−5
72	0	6	−5	−6	11	6
73	8	1	−4	10	8	−6
74	−8	−6	4	−1	−8	4
75	−3	8	−3	−6	9	−1
76	−11	7	1	−9	1	2
77	−14	7	−6	−8	−6	13
78	−1	−3	8	−3	14	5
79	−6	10	−6	−8	6	1
80	−9	7	−3	−1	12	7
81	0	7	0	0	12	−9
82	−7	1	5	6	−7	−3
83	9	−1	−3	8	−3	−6
84	−7	11	9	−1	9	11
85	−3	−7	8	−7	13	5
86	−7	−1	8	7	−1	7
87	2	7	7	−5	−2	7
88	−3	−5	−3	7	−11	1
89	−3	10	−3	−11	5	4
90	4	11	−5	−1	−1	−1
91	3	11	3	−4	11	−4
92	3	13	−5	7	−5	−2
93	−8	−1	−1	−1	8	11
94	2	−5	5	−1	2	3
95	−7	1	5	−4	−7	12
96	7	−2	2	10	−7	−2
97	−13	4	−1	−1	11	4
98	−3	1	9	−4	−3	5
99	−2	1	3	1	3	13
100	8	9	−1	−3	15	9

1.2.10. ЗАДАНИЕ 10

Решить задачу номер n.

1. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудалённую от двух данных точек A(1;1), B(3,0).
2. Найти координаты точки, симметричной точке (2,−4) относительно прямой $4x+3y+1=0$.
3. Найти уравнение диагонали параллелограмма, проходящей через точку пересечения его сторон $x+y-1=0$ и $y+1=0$, если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке P(−1;0).
4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(2;6) и образующей с осями координат треугольник, который находится во второй четверти и имеет площадь 3 кв.ед.
5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(−1,2) так, что середина её отрезка, заключённого между параллельными прямыми $x+2y+1=0$ и $x+2y-3=0$ лежит на прямой $x-y-6=0$.
6. Даны уравнения двух сторон треугольника $4x-5y+9=0$ и $x+4y-3=0$. Найти уравнение третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке (3;1).
7. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $2x - y + 4 = 0$ и $2x - y + 10 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $x + y + 2 = 0$.
8. Составить уравнения сторон треугольника, если точки A(−5;5), B(3;1) - две его вершины, а D(2;5) − точка пересечения его высот.
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x+3y-7=0$ и точка пересечения его диагоналей P(0;−1). Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Даны уравнения одной из сторон ромба $x -3y + 10 = 0$ и одной из его диагоналей $x + 4y - 4 =0$. Диагонали ромба пересекаются в точке P(0;1). Найти уравнения трех остальных сторон ромба.
11. Уравнения двух сторон параллелограмма $x + 2y + 2 = 0$ и $x+y-4=0$, а уравнение одной из его диагоналей $x-2=0$. Найти координаты вершин.

12. Даны вершины $A(-3;-2)$ и $B(8;-4)$ трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$). Известно, что диагонали трапеции равны и точка пересечения диагоналей $O(0,2)$. Найти координаты вершин C и D этой трапеции.
13. Даны вершины $A(2;-2)$ и $B(3;-1)$ и точка $P(1;0)$ пересечения медиан треугольника. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной через третью вершину C.
14. Даны уравнения двух высот треугольника $3x + 2y - 34 = 0$ и $x + y - 1 = 0$ и одна из вершин $A(6;5)$. Составить уравнения сторон.
15. Даны уравнения медиан $2x - 11y + 28 = 0$, $5x + 7y - 22 = 0$ и одна из вершин $(-2;-2)$ треугольника. Составить уравнения сторон.
16. Две стороны треугольника заданы уравнениями $2x + y - 1 =0$ и $x - 3y + 14 =0$, а середина третьей стороны совпадает с началом координат. Составить уравнение третьей стороны.
17. Даны уравнения сторон треугольника: (AB) $7x - 2y + 32 = 0$; (AC) $x +y + 2 = 0$; (BC) $4x + y - 1 = 0$. Найти точку пересечения его высот.
18. Составьте уравнения катетов прямоугольного равнобедренного треугольника, если уравнение гипотенузы $3x - y + 11 = 0$ и $C(4;3)$ − вершина прямого угла.
19. В равнобедренном треугольнике известны: уравнение основания $5x + 3y - 53 = 0$, уравнение одной из боковых сторон $x +4y-14 = 0$ и точка на второй боковой стороне $M(3;7)$. Найдите уравнение второй боковой стороны.
20. Одна из сторон квадрата лежит на прямой $x - 5y + 32 = 0$, а одна из вершин находится в точке $M(2;1)$. Найдите уравнения остальных сторон квадрата.
21. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $4x - 7y + 28 = 0$, концы которого лежат на осях координат.
22. Точки $K(1;3)$ и $L(-1;1)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки $P(3;0)$ и $Q(-3;5)$ лежат на её боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
23. Даны стороны треугольника: (AC) $2x - 15y - 55 = 0$; (AB) $4x - 3y + 25 = 0$; (BC) $14x + 3y - 61 = 0$. Составить урав-

нение прямой, проходящей через вершину C и через точку на стороне AB, делящую ее (считая от вершины A) в отношении 1:4.

24. Точки $B(7;1)$ и $D(9;-3)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты двух других вершин.

25. В треугольнике известны уравнения высоты $x + y - 3 = 0$ и медианы $11x - 4y + 10 = 0$, проведенных из различных вершин. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $(8;9)$.

26. Написать уравнение сторон треугольника, зная одну его вершину $(6;3)$, уравнения высоты $11x - 9y + 75 = 0$ и биссектрисы $11x - 13y + 79 = 0$, проведенных из одной вершины.

27. Точка A $(2;0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x + y -1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

28. Длина стороны ромба с острым углом 60 равна 2. Диагонали ромба пересекаются в точке $M(1;2)$, причем большая диагональ параллельна оси абсцисс. Составить уравнение сторон ромба.

29. Точка $A(1;2)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $B(3;-1)$ - серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $4x - 3y + 10 = 0$. Составить уравнения остальных сторон трапеции.

30. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $(9;2)$, уравнения биссектрисы $x + y - 5 = 0$ и медианы $x - y = 0$, проведенных из различных вершин.

31. Даны координаты двух вершин треугольника $A(-1;3)$, $B(2;5)$ и ортоцентр − точка $H(1;4)$. Найти координаты третьей вершины треугольника. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот).

32. Точка $H(-3;2)$ является точкой пересечения высот треугольника, две стороны которого лежат на прямых $2x - y = 0$ и $x + y -3 =0$. Составить уравнение третьей стороны.

33. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1;3)$ и касающейся прямых $7x + y = 0$ и $x - y + 8 = 0$.

34. Окружность проходит через точки $M(1;0)$ и $N(2;1)$. Найдите центр этой окружности, если известно, что он лежит на прямой $5x - y - 4 = 0$.

35. Точки $B(1;2)$ и $C(3;-6)$ симметричны относительно некоторой прямой. Составить уравнение этой прямой.
36. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке $K(-2;4)$. Составить уравнение диагонали, не проходящей через точку пересечения сторон $4x - y + 4 = 0$ и $4x + 3y + 20 = 0$.
37. Площадь прямоугольного треугольника, катетами которого являются оси координат, равна 8. Составить уравнение гипотенузы, если известно, что она проходит через точку $A(-4;8)$.
38. Составить уравнение прямой L_1, параллельной прямой L_2 : $2x + 3y - 23 = 0$, если середина отрезка прямой L_3: $5x+2y+3 = 0$, заключенного между параллельными прямыми L_1 и L_2 лежит на прямой L_4: $6x - y + 24 = 0$.
39. Составить уравнение стороны треугольника, в котором известны точка пересечения медиан $M(-1;7)$ и уравнения двух других сторон $x + 4y - 37 = 0$, $2x - y + 16 = 0$.
40. Даны две стороны $x - y + 6 = 0$ и $x - y + 10 = 0$ и диагональ $3x + y - 10 = 0$ ромба. Найти вершины ромба.
41. В треугольнике известны две вершины $A(-2;9)$, $B(2;-3)$ и точка пересечения высот $O(2;7)$. Написать уравнения сторон.
42. Точка $A(3;-2)$ является вершиной квадрата, а точка $M(1;1)$ − точкой пересечения его диагоналей. Составить уравнения сторон квадрата.
43. Даны уравнения одной из сторон ромба $x + y - 39 = 0$ и одной из его диагоналей $x - 3y + 11 = 0$. Найти уравнения остальных сторон ромба, если его центр - точка $N(-2;3)$.
44. Найти координаты вершин параллелограмма, в котором известны две стороны $2x - 5y - 5 = 0$ и $2x + 5y - 15 = 0$ и диагональ $6x + 5y - 35 = 0$.
45. Найти координаты точек C и D четырехугольника ABCD, в котором отрезки AB и DC параллельны, BD и AC перпендикулярны друг другу и заданы вершины $A(9;-1)$, $B(5;5)$.
46. Даны две вершины $(3;-1)$, $(1;4)$ и центр тяжести $(0;2)$ треугольника. Найти координаты третьей вершины треугольника и составить уравнения его сторон.
47. Даны уравнения двух высот треугольника $3x + 4y - 23 = 0$ и $12x - 5y - 24 = 0$ и одна из его вершин $A(1;1)$. Составить уравнения сторон.

48. Написать уравнения сторон треугольника, две медианы которого лежат на прямых $x + y - 3 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$, а точка $A(1;1)$ является вершиной треугольника.
49. Две стороны треугольника заданы уравнениями, $x +3y - 21 = 0$ и $7x + y + 13 = 0$, а середина третьей стороны − точка $(2;3)$. Составить уравнение третьей стороны.
50. Даны уравнения сторон треугольника:(MN) $3x - 5y + 17 = 0$, (NP) $8x + 6y - 32 = 0$, (MP) $5x + 11y + 9 = 0$. Найти ортоцентр треугольника. (Ортоцентром треугольника называется точка пересечения его высот).
51. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $2x + y - 2 = 0$, а точка $C(3;-1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна 9/4. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты.
52. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $x +2y - 2 = 0$, а одна из боковых сторон - на прямой $y +2x - 1= 0$. Составить уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что её расстояние от точки пересечения данных прямых равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.
53. Составить уравнения сторон квадрата, в котором одна из вершин-точка $A(8;7)$ и одна из сторон лежит на прямой $5x + 2y + 4=0$.
54. Составить уравнения трех сторон квадрата, если известно, что четвертой стороной является отрезок прямой $2x + y - 8 = 0$, концы которого лежат на окружности $(x - 3)^2 + y^2 = 4$.
55. Точки $M(3;7)$ и $N(2;3)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции. Точки $K(1;7\ )$ и $P(4;6{,}5)$ лежат на её боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
56. Даны стороны треугольника: (AB) $4x + 3y - 10 =0$; (BC) $3x + 2y - 8 = 0$; (AC) $8x + 5y - 18 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку C и делящей сторону AB в отношении 2:3 (считая от вершины A).
57. Противоположными вершинами квадрата являются точки $A(-5;-3)$ и $C(3;17)$. Найти координаты двух других вершин.
58. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(2;7)$, уравнения медианы $9x + y + 4 = 0$ и высоты $x + 5y -11 = 0$, проведенных из различных вершин.

59. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(-5;4)$, уравнения высоты $6x + y - 61 = 0$ и биссектрисы $4x - 3y + 7 = 0$.
60. Точка $M(6;4)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $3x - y + 2 = 0$. Найти уравнения остальных сторон треугольника.
61. Длина стороны ромба с тупым углом 120° равна $6\sqrt{2}$. Меньшая диагональ параллельна биссектрисе 2 и 4 координатных углов. Диагонали пересекаются в точке $P(-4;6)$. Составьте уравнения сторон ромба.
62. Точка $P(8;1)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $N(2;3)$ − серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $4x + 3y +1 = 0$. Составить уравнения сторон.
63. Составьте уравнения трех сторон треугольника, в котором медиана $3x + 2y - 6 =0$ и биссектриса $x - y = 0$ проведены не из вершины $A(4;0)$, а из двух других вершин.
64. Даны стороны треугольника: $4x - 3y + 26 = 0$ (AB); $x + 2y+1 = 0$ (AC); $7x + 3y - 37 = 0$ (BC). Найти точку пересечения медианы, проведенной из вершины B и высоты, проходящей через вершину C.
65. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1;8)$ и касающейся прямых $x + 10 = 0$ и $4x - 3y + 10 = 0$.
66. Точка K отстоит на одинаковых расстояниях от точек $P(7;8)$ и $Q(1;2)$. Найти координаты точки K, если известно, что она лежит на прямой $4x - 5y + 27 = 0$.
67. Найти координаты точки N, симметричной точке M относительно прямой $x + y - 5 = 0$. Точка M отстоит от прямой на расстоянии вдвое большем, чем точка $K(-2;7)$ и находится с ней по одну сторону от прямой, причем отрезок KM перпендикулярен прямой.
68. В параллелограмме две стороны заданы уравнениями $x-5y + 7 = 0$ и $5x - 3y - 9 = 0$. Составить уравнение диагонали параллелограмма, не проходящей через точку пересечения этих сторон, если известно, что диагонали пересекаются в точке $M(2;4)$.
69. Найти координаты вершин треугольника, симметричного треугольнику ABC относительно центра описанной около треугольника ABC окружности, если $A(9;-1)$, $B(5;1)$, $C(0;-5)$.

70. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $x+3y-13=0$ и образующей с осями координат треугольник, площадь которого равна 6.
71. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ так, что отрезок этой прямой, заключённый между прямыми $3x+y+2=0$ и $4x+y-1=0$, в точке A делится пополам.
72. Центр тяжести треугольника − точка $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$. Уравнения двух его сторон $4x+y+14=0$ и $x-6y-9=0$. Составить уравнение третьей стороны.
73. Известны уравнения двух сторон ромба $7x-9y-39=0$ и $3x+11y-91=0$ и одной из его диагоналей $5x+y-13=0$. Вычислить координаты вершин ромба.
74. Составить уравнение третьей стороны треугольника, если известны уравнения двух его сторон $6x-y-11=0$ и $4x+5y+13=0$ и ортоцентр − точка $H(-1;2)$.
75. Написать уравнения сторон квадрата, центр которого − точка $O(1;-3)$, а одна из вершин − точка $A(-4;7)$.
76. Написать уравнения сторон ромба, если известны диагональ $x+y-2=0$, точка её пересечения с другой диагональю $P(0;2)$ и одна из сторон $3x-y-10=0$.
77. Вычислить координаты вершин параллелограмма, в котором две стороны лежат на прямых $2x-5y-5=0$ и $2x+5y-15=0$, а одна из диагоналей на прямой $6x+5y-35=0$.
78. Диагонали трапеции ABCD $(AD\|BC)$ перпендикулярны друг другу и заданы вершины $A(4;-1)$ и $B(13;6)$. Найти координаты вершин C и D трапеции.
79. Составить уравнения сторон треугольника, в котором даны две вершины $A(-7;6)$ и $B(7;4)$ и точка пересечения отрезков, соединяющих эти вершины с серединами противоположных сторон $\left(\frac{5}{3};4\right)$.
80. Даны уравнения двух высот треугольника $x-5y+16=0$ и $9x+7y+14=0$ и одна из его вершин $M(-5;-3)$. Написать уравнения сторон треугольника.

81. Даны уравнения двух медиан $x - 3y + 2 = 0$ и $2x + 2y - 21 = 0$ треугольника и одна из вершин $A(5;-1)$. Найти уравнения сторон треугольника.
82. Середина одной из сторон треугольника − точка $M(0;3)$. Две другие стороны лежат на прямых $x - 9y + 52 = 0$ и $x + y - 8 = 0$. Составить уравнение третьей стороны.
83. Найти точку пересечения высот треугольника, стороны которого лежат на прямых $6x + y - 23 = 0$, $9x - 4y - 7 = 0$, $3x - 5y - 17=0$.
84. Точка $C(6;1)$ − вершина прямого угла в треугольнике, а гипотенуза лежит на прямой $2x - 3y + 5 = 0$. Написать уравнения катетов, один из которых лежит на прямой, содержащей точку $K(-4;-25)$.
85. Точки $A(1;2)$ и $B(3;0)$ − вершины равнобедренного треугольника ABC, углы A и B при основании равны $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Найти координаты вершины C, зная, что она лежит по ту же сторону от прямой AB, что и точка $M(2;3)$.
86. Составить уравнения сторон квадрата по известному уравнению одной из сторон $x + 8y - 17 = 0$ и одной из вершин $A(2;9)$.
87. Даны уравнения сторон квадрата $4x + y - 9 = 0$ и $4x + y + 36 = 0$. Составить уравнения двух других его сторон при условии, что точка $A(6;2)$ лежит на стороне этого квадрата.
88. Точки $M(5;-1)$ и $N(-3;7)$ являются серединами оснований равнобедренной трапеции, а точки $P(-1;-2)$ и $Q(4;6)$ лежат на боковых сторонах. Составить уравнения сторон трапеции.
89. Даны стороны треугольника $9x - 2y - 51 = 0$ (AC), $4x + 3y + 24 = 0$ (AB), $x + 2y + 1 = 0$ (BC). Составить уравнение прямой, проходящей через вершину C и точку K на стороне AB, делящую её в отношении 3:7 (считая от вершины B).
90. Точки $A(9;8)$ и $D(-1;4)$ являются противоположными вершинами квадрата. Определить координаты других вершин.
91. Известны одна из вершин треугольника $A(4;-5)$, уравнения высоты $7x - y + 17 = 0$ и медианы $2x - 11y - 13 = 0$. Составить уравнения сторон.
92. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну его вершину $A(4;1)$, уравнения высоты $2x - y + 11 = 0$ и биссектрисы $7x - 8y + 25 = 0$, проведенных из одной вершины.

93. Стороны треугольника заданы уравнениями: $4x - 3y = 0$ (AB); $3x - 4y = 0$ (BC); $5x + 12y - 10 = 0$ (AC). Найти радиус вписанной окружности.
94. Известны уравнение одной из сторон правильного треугольника $5x - y + 1 = 0$ и одна из вершин $A(5;-3)$. Составить уравнения двух других сторон треугольника.
95. Диагонали ромба пересекаются в точке $K(3;-7)$. Большая диагональ образует с осью ординат угол 45°, а со сторонами угол 30°. Длина стороны равна $4\sqrt{2}$. Составить уравнения сторон ромба.
96. Точка $M(6;1)$ является серединой одного из оснований прямоугольной трапеции, а точка $N\left(\frac{7}{4};1\right)$ − серединой средней линии. Боковая сторона, перпендикулярная основаниям, лежит на прямой $x + 4y + 7 = 0$. Составить уравнения остальных сторон трапеции.
97. Из одной вершины треугольника проведена биссектриса $3x + y - 1 = 0$, из другой − медиана $11x - 5y - 25 = 0$, а третья вершина − точка $A(-3;-2)$. Составить уравнения стороны треугольника.
98. Ортоцентр треугольника ABC − точка $O(-1;5)$. Составить уравнения сторон треугольника, если известны вершины $A(2;1)$,$B(2;11)$.
99. Даны уравнения сторон треугольника $x + 2y +1= 0$, $2x - y - 2 = 0$, $2x + y + 2 = 0$. Найти точку пересечения высот.
100. Найти координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-3;5)$ и касающейся прямых $x - 3y - 2 = 0$ и $13x - 7y + 102 = 0$.

1.2.11. ЗАДАНИЕ 11

В пространстве даны точки $A(-2; -1-P_7; 1)$, $B(3; P_5;-1)$, $C(5; 3-P_3;1)$, $D(1; -1-P_7; 0)$. Сделать чертёж пирамиды ABCD и найти :

а) длину и уравнение ребра AB;

б) уравнение грани ABC;

в) высоту, проведенную из вершины D, и её уравнение;

г) проекцию вершины D на плоскость ABC;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину D параллельно ребру AB;

е) уравнение плоскости, проходящей через вершину D параллельно грани ABC;

ж) уравнение плоскости, проходящей через ребро AD перпендикулярно грани ABC;

з) уравнение проекции ребра AD на грань ABC;

и) угол между ребрами AB и AD;

к) угол между ребром AD и гранью ABC;

л) угол между гранями ABC и ABD.

1.2.12. ЗАДАНИЕ 12

Дана точка $M(1;0;-2)$. Найти:

а) точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$, симметричную точке M относительно точки $S(-1-P_7;P_5;3-P_3)$;

б) точку $M_2(x_2;y_2;z_2)$, симметричную точке M относительно прямой

$$\frac{x+1}{-1-P_7}=\frac{y-2}{P_5}=\frac{z-1}{3-P_3};$$

в) точку $M_3(x_3;y_3;z_3)$, симметричную точке M относительно плоскости

$$(-1-P_7)\cdot x+P_5\cdot y+(3-P_3)\cdot z+1=0.$$

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭВМ

Задания раздела 1 можно выполнять с помощью ЭВМ, используя, например, пакет Mathcad, а также совместимые с ним программные разработки кафедры. Однако ЭВМ дает готовые ответы и не отражает процесс вычислений. Поэтому в целях усвоения темы, предполагается подробное "ручное" решение заданий и применение ЭВМ ограничивается проверкой правильности ответов.

Рассмотрим решение некоторых задач с помощью пакета Mathcad.

1.Вызов шаблона вектора и его ввод

Из окна матричной и векторной палитры вызвать панель ввода матрицы. Для этого щелкнуть (левой кнопкой мыши) по кнопке $[\vdots\vdots\vdots]$.

Указать размеры n,1 матрицы в соответствующих полях открывшегося окна и щелкнуть по кнопке ОК (n - размерность вектора, число строк; 1 − число столбцов).

Набрать матрицу-вектор, передвигаясь с помощью кнопок со стрелками. После набора последнего числа нажать клавишу ПРОБЕЛ.

2. Операции над векторами

Операции над векторами можно выполнять используя кнопки матричной и векторной палитры, калькулятора и клавиатуры. Последовательность действий иллюстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 2.1

Введём векторы $\vec{a} = (1;-3;2), \vec{b} = (-3;0;1)$ и число $\lambda = -1.5$:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \vec{b} := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \lambda := -1.5.$$

Найдем сумму $\overrightarrow{x_1}$ и разность $\overrightarrow{x_2}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, произведение $\overrightarrow{x_3}$ вектора $\vec{a}$ на число λ, скалярное (x_4) и векторное ($\overrightarrow{x_5}$) произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\overrightarrow{x_1} := \vec{a} + \vec{b}; \quad \overrightarrow{x_2} := \vec{a} - \vec{b}; \quad \overrightarrow{x_3} := \lambda \cdot \vec{a}; \quad x_4 := \vec{a} \cdot \vec{b}; \quad \overrightarrow{x_5} := \vec{a} \times \vec{b};$$

$$\overrightarrow{x_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{x_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{x_3} = \begin{bmatrix} -1.5 \\ 4.5 \\ -3 \end{bmatrix}; \quad x_4 = -1; \quad \overrightarrow{x_5} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ -9 \end{bmatrix}.$$

3. Вычисление длины и направляющих косинусов вектора

Длину и направляющие косинусы вектора можно найти используя кнопки матричной и векторной палитры, калькулятора, палитры греческих букв, клавиатуры. Последовательность действий иллюстрирует следующий пример.

ПРИМЕР 2.2

Введём вектор $\vec{a}$ и его координаты:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad x := -2; \qquad y := 1; \qquad z := 2.$$

Найдём длину вектора $\vec{a}$ и его направляющие косинусы:

$$\Delta := |\vec{a}|; \qquad \cos\alpha := \frac{x}{\Delta}; \qquad \cos\beta := \frac{y}{\Delta}; \qquad \cos\gamma := \frac{z}{\Delta};$$

$$\mathbf{\Delta} = 3; \qquad \cos\alpha = -0.667; \qquad \cos\beta = 0.333; \qquad \cos\gamma = 0.667.$$

Направляющие косинусы вектора можно найти иначе, - умножая вектор $\vec{a}$ на число $\frac{1}{\Delta}$, т.е. найдя орт $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектора $\vec{a}$:

$$\vec{e}_{\vec{a}} := \frac{1}{\Delta} \cdot \vec{a}; \qquad \vec{e}_{\vec{a}} = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.333 \\ 0.667 \end{bmatrix}.$$

4. Нахождение угла между векторами

Рассмотрим следующий пример.

ПРИМЕР 2.3

Введём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \vec{b} := \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Найдём косинус угла φ и угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\varphi := \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}; \qquad \varphi := a\cos(\cos\varphi); \qquad \Phi := \varphi \cdot \frac{180}{\pi};$$

$$\cos\varphi = 0.467; \qquad \varphi = 1.085 \text{ (рад.)}; \qquad \Phi = 62.188^\circ.$$

Чтобы вызвать функцию arccos нужно нажать клавишу $f(x)$ на панели инструментов и в открывшемся списке выбрать acos.

5. Составление уравнений

Составление уравнений рассмотрим на примере нахождения уравнения плоскости проходящей через три заданные точки, не принадлежащие одной прямой.

Пусть заданы точки $A_1(2;-1;3)$, $A_2(1;1;1)$, $A_3(-4;0;3)$. Их радиус векторы $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ имеют такие же координаты. Пусть $\overrightarrow{r_{12}} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{r_{13}} = \overrightarrow{A_1A_3}$. Тогда, вводя векторы

$$\vec{r_1} := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \vec{r_2} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \vec{r_3} := \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \overrightarrow{r_{12}} := \vec{r_2} - \vec{r_1}; \quad \overrightarrow{r_{13}} := \vec{r_3} - \vec{r_1},$$

получим

$$\overrightarrow{r_{12}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}; \qquad \overrightarrow{r_{13}} = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Убедимся, что точки A_1, A_2, A_3 не принадлежат одной прямой.

Действительно

$$\frac{-6}{-1} = 6, \quad \frac{1}{2} = 0.5, \quad \frac{0}{-2} = 0,$$

и, следовательно, векторы $\overrightarrow{r_{12}}$ и $\overrightarrow{r_{13}}$ неколлинеарные.

Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель с помощью ЭВМ. Для этого нужно набрать

$$A(x,y,z) := \begin{pmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad f(x,y,z) := |A(x,y,z)|;$$

$$f(x,y,z) \to 2 \cdot x - 25 + 11 \cdot z + 12 \cdot y.$$

Итак, плоскость $A_1A_2A_3$ имеет уравнение

$$2x + 12y + 11z - 25 = 0.$$

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Векторные и скалярные величины. Определения направленного отрезка, вектора. Линейные операции над векторами в геометрической форме (сумма, разность, произведение вектора на число) и их свойства.
2. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах.
3. Определения векторного пространства, базиса и размерности векторного пространства, координат вектора в базисе. Операции над векторами в координатной форме. Сформулировать теоремы о базисах в пространствах V_1, V_2, V_3.
4. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек "начала" и "конца" вектора.
5. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.
6. Выражение модуля (длины) и направляющих косинусов вектора через декартовы координаты вектора.
7. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.
8. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.
9. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.
10. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.
11. Понятие об уравнении линии на плоскости.

12. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.
13. Уравнение прямой "с угловым коэффициентом" (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями "с угловым коэффициентом").
14. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).
15. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.
16. Понятие уравнения поверхности в пространстве.
17. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.
18. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.
19. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениям).
20. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).
21. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Физматлит, 2009. − 224с.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. М.: Физматлит, 2004. − 224с.
3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Издательство «Лань», 2010. − 224с.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: В 2-х ч. Ч.1. М.: Высш. шк., 2000. −304с.
5. Сборник задач по математике для ВТУЗов. В 4-х частях: Ч1. / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова.- М.: Издательство физико-математической литературы, 2009. −288с.
6. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Джангар, Большая Медведица, 2001. −863с.
7. Бредихина О.А., Шеставина С.В. Векторная алгебра и аналитическая геометрия. [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М2 / ЮЗГУ. Курск. 2013. −18с.
8. Плис А. И. Mathcad 2000. Математический практикум для экономистов и инженеров: Учеб. пособие для студ. вуз. / А. И. Плис, Н. А. Сливина. - М.: Финансы и статистика, 2000. − 656 с.

(12)

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет» (ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_______ О.Г.Локтионова
«___» ________ 2014г.

Интегрирование функций одной переменной. Приложения.

Методические указания по выполнению модуля-5

Курск 2014

УДК 517

Составители: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры
высшей математики *К.В.Жилина*

Интегрирование функций одной переменной. Приложения: методические указания по выполнению модуля 5 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н.А.Моргунова, А.Ф.Пихлап; Курск, 2014. 53 с., табл. 1. Рис.13. Библиогр.: с.53

Излагаются краткие методические рекомендации по темам математического анализа: неопределенные интегралы и методы их решения, определенный интеграл и его вычисления, несобственные интегралы, приложения определенных интегралов.

Методические указания предназначены для студентов технических и экономических специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Цель настоящего методического пособия – научить студента технике интегрирования и умению решать различные задачи на приложения определенных интегралов.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, где приводятся основные определения, формулы, теоремы без доказательств. При подборе задач авторы прежде всего исходили из учета тех трудностей, с которыми могут встретиться студенты на пути овладения методами интегрирования.

В работе приведены 52 примера с подробными решениями по указанной тематике. При вычислении площадей плоских фигур, длины дуги кривой, объемов тел вращения решения иллюстрировались для наглядности рисунками и подробными пояснениями.

Данное пособие является приложением к модулю 5 «Интегрирование функций», в котором приведены индивидуальные задания по темам «Неопределенные интегралы», «Несобственные интегралы» и «Определенные интегралы и их приложения». Методическое пособие предназначено для студентов первого курса технических и экономических специальностей.

Авторы надеются, что это методическое издание поможет студентам в самостоятельной работе по выполнению модуля и изучению данного материала.

1. Неопределенный интеграл

1.1. Табличное интегрирование. Замена переменной в неопределенном интеграле

Введем несколько определений, свойств интегралов, формул.

Функция F(x) называется *первообразной* для функции f(x) на отрезке [a,b], если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция имеет первообразную, то функции вида $F(x) + C$, где C – постоянная, также являются первообразными.

Неопределенным интегралом от функции f(x) называется совокупность (или семейство) всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Отыскание неопределенного интеграла называется интегрированием функции и основывается на следующих правилах интегрирования:

а) $\int dF(x) = F(x) + C;$

б) $(\int f(x)dx)' = f(x);$

в) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

г) $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$ где C – постоянная;

д) $\int (f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_n(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm ... \pm \int f_n(x)dx$

е) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C;$

ж) Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $t = \varphi(x)$, то $\int f(t)dt = F(t) + C.$

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок двух видов:

1) $x = \varphi(t)$

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt,$$

где $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция новой переменной t;

2) $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$

$u = g(x)$, u – новая переменная.

Таблица основных интегралов

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$;

3) $\int \dfrac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$;

4) $\int a^{x} dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C$;

5) $\int e^{x} dx = e^{x} + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

8) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg} x + C$;

9) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg} x + C$;

10) $\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch} x + C$;

11) $\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh} x + C$;

12) $\int \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} dx = -\mathrm{cth} x + C$;

13) $\int \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\, dx = \mathrm{th} x + C$;

14) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\, dx = \mathrm{arctg} x + C = -\mathrm{arcctg} x + C$;

15) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin x + C = -\arccos x + C$;

16) $\int \dfrac{1}{x^2+a^2}\, dx = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;

17) $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\, dx = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$;

18) $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$;

20) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$;

21) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$;

22) $\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

23) $\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

24) $\int \operatorname{tg}x\,dx = -\ln|\cos x| + C;$

25) $\int \operatorname{ctg}x\,dx = \ln|\sin x| + C.$

Пример 1. Найти интеграл $\int (2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8)dx$.

Решение. Используя свойства степеней и правила интегрирования, получим

$$\int\left(2\sqrt{x} - \frac{7}{x^2} + 3x - 8\right)dx = 2\int x^{\frac{1}{2}}dx - 7\cdot\int x^{-2}dx + 3\int x\,dx - 8\int dx =$$

$$= 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} - 7\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 8\cdot x + C =$$

$$= \frac{4}{3}x\sqrt{x} + \frac{7}{x} + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$.

Решение. Правило ж) позволяет найти интеграл с помощью метода подведения функции под знак дифференциала. Исходный интеграл можно привести к формуле 2 из таблицы интегралов, преобразовав его следующим образом

$$\int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}\,dx = \int \ln^3 x \cdot d(\ln x), \quad \text{где} \quad d(\ln x) = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx$$

Далее в качестве переменной выберем $t = \ln x$, тогда получим интеграл от степенной функции

$$\int \ln^3 x\,d(\ln x) = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sqrt{\sin x + 8}\cdot\cos x\,dx$.

Решение. Применяя тот же прием, что и в предыдущем примере, получим

$$\int \sqrt{\sin x + 8} \cdot \cos x dx = \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x) =$$

$$= \int (\sin x + 8)^{1/2} d(\sin x + 8) = \{t = \sin x + 8\} = \int t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(\sin x + 8)^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\sin x + 8) \cdot \sqrt{\sin x + 8} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (3x + 10)^{15} dx$.

Решение. Введем новую переменную $t = 3x + 10$, тогда $x = \frac{1}{3}(t - 10)$, $dx = \frac{1}{3}(t - 10)' dt = \frac{1}{3} dt$.

Отсюда получаем

$$\int (3x + 10)^{15} dx = \int t^{15} \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{16}}{16} + C = \frac{1}{48} \cdot (3x + 10)^{16} + C.$$

Замечание. Можно было воспользоваться формулой е).

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{7x + 1}} dx$.

Решение. Выполним подстановку $t = \sqrt{7x + 1}$, тогда $7x + 1 = t^2$, $x = \frac{1}{7}(t^2 - 1)$, $dx = \frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1)' dt = \frac{2}{7} \cdot t dt$.

Применив формулу 17, имеем:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{7x + 1}} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{7} \cdot (t^2 - 1) \cdot t} \cdot \frac{2}{7} \cdot t \cdot dt = 2 \int \frac{1}{t^2 - 1^2} dt =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \ln\left| \frac{\sqrt{7x + 1} - 1}{\sqrt{7x + 1} + 1} \right| + C.$$

1.2. Формула интегрирования по частям

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Применение данной формулы целесообразно в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение разных по смыслу функций – степенной и показательной, степенной и тригонометрической, показательной и тригонометрической, логарифмической и степенной и т.п.

При этом за u(x) обозначают такую функцию, которая при дифференцировании упрощается, а за dv – ту часть подынтегрального выражения, интеграл от которой может быть найден.

К таким интегралам, например, относятся

$\int P_n(x)\ln x\,dx,\ \int P_n(x)\cdot\sin\alpha x dx,$

$\int P_n(x)\cdot\cos\beta x dx,\ \int a^{kx}\cdot\sin\beta x dx,\ \int P_n(x)\cdot\arcsin x dx$ и т.д.,

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

Пример 6. Найти интеграл $\int(2x+3)\cdot\sin x dx$.

Решение. Пусть $u=2x+3$, тогда $du=2\cdot dx$; $dv=\sin x dx$, тогда $v=-\cos x$.

По формуле интегрирования по частям находим

$$\int(2x+3)\cdot\sin x dx=-(2x+3)\cdot\cos x-\int(-\cos x)\cdot 2\cdot dx=$$

$$=-(2x+3)\cdot\cos x+2\sin x+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int x^3\cdot\ln x dx$.

Решение. Используя тот же прием интегрирования, что и в примере 6, получим

$$\int x^3\cdot\ln x dx=\left\{\begin{array}{l} u=\ln x,\ \ du=\dfrac{1}{x}\cdot dx \\ dv=x^3\cdot dx,\ \ v=\dfrac{x^4}{4}\end{array}\right\}=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\int x^3dx=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}+C=\frac{x^4}{4}\cdot\ln x-\frac{x^4}{16}+C.$$

При отыскании некоторых интегралов формулу интегрирования по частям нужно применить несколько раз, прежде чем сведем его к табличному или получим исходный интеграл.

Пример 8. Найти интеграл $J=\int 3^x\cdot\cos 5x\cdot dx$.

Решение. Используем дважды формулу интегрирования по частям.

$$J=\int 3^x\cdot\cos 5x\cdot dx=\left\{\begin{matrix} u=3^x,\ \ du=3^x\cdot\ln 3\cdot dx \\ dv=\cos 5xdx,\ \ v=\dfrac{\sin 5x}{5}\end{matrix}\right\}=$$

$$=3^x\cdot\frac{1}{5}\cdot\sin 5x-\int\frac{1}{5}\cdot\sin 5x\cdot 3^x\cdot\ln 3dx=\left\{\begin{matrix} u=3^x,\ \ du=3^x\cdot\ln 3dx \\ dv=\sin 5xdx,\ \ v=-\dfrac{\cos 5x}{5}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x-\frac{1}{5}\cdot\ln 3\cdot\left(3^x\cdot\left(-\frac{\cos 5x}{5}\right)+\int\frac{\cos 5x}{5}\cdot 3^x\cdot\ln 3dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x-\frac{\ln^2 3}{25}\cdot\int 3^x\cdot\cos 5xdx.$$

Таким образом, приходим к уравнению с неизвестным интегралом J:

$$J=\frac{1}{5}\cdot 3^x\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x-\frac{\ln^2 3}{25}\cdot J\quad\text{или}$$

$$J+\frac{\ln^2 3}{25}\cdot J=\frac{3^x}{5}\cdot\sin 5x+\frac{\ln 3}{25}\cdot 3^x\cdot\cos 5x,$$

$$\frac{25+\ln^2 3}{25}\cdot J=\frac{3^x}{25}(5\sin 5x+\ln 3\cdot\cos 5x),$$

$$J=\frac{3^x}{25+\ln^2 3}\cdot(5\sin 5x+\ln 3\cdot\cos 5x)+C.$$

1.3. Интегрирование рациональных функций

Рассмотрим интегралы от простейших дробей:

I. $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C;$

II. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,\quad k\neq 1;$

III. $\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx;$

IV. $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^2}dx,$

где A, B, p, q, a – действительные числа.

На конкретных примерах покажем, как интегрируются простейшие дроби III и IV типов.

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

Решение. В квадратном трехчлене, содержащемся в знаменателе подынтегральной функции, выделим полный квадрат:

$x^2-6x+18=(x^2-2\cdot 3\cdot x+9)+9=(x-3)^2+3^2.$

Имеем

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+18}=\int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+3^2}=\{t=x-3\}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2+3^2}=\frac{1}{3}\cdot \operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3}+C.$$

Использована формула 16 из таблицы интегралов.

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}dx$.

Решение. Выделим в числителе дроби такую линейную функцию, которая равнялась бы производной знаменателя:

$(x^2+4x-1)'=2x+4,$

$5x+1=\frac{5}{2}(2x+4)-10+1=\frac{5}{2}(2x+4)-9.$

Имеем

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4x-1}\,dx=\int \frac{\frac{5}{2}(2x+4)-9}{x^2+4x-1}\,dx=$$

$$=\frac{5}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x-1}-9\cdot\int \frac{dx}{x^2+4x-1}=J.$$

Заметим, что в первом из полученных интегралов $(2x+4)dx=d(x^2+4x-1)$. Введем новую переменную $t=x^2+4x-1$, получим табличный интеграл 3. Во втором интеграле в квадратном трехчлене выделим полный квадрат: $x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$, а интеграл сведем к табличному (формула 17). Тогда

$$J = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2 + 4x - 1)}{x^2 + 4x - 1} - 9 \cdot \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 - (\sqrt{5})^2} =$$

$$= \{t = x^2 + 4x - 1, z = x + 2\} =$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{dt}{t} - 9\int \frac{dz}{z^2 - (\sqrt{5})^2} = \frac{5}{2}\ln|t| - 9 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{z - \sqrt{5}}{z + \sqrt{5}}\right| + C =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot \ln|x^2 + 4x - 1| - \frac{9}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x + 2 - \sqrt{5}}{x + 2 + \sqrt{5}}\right| + C.$$

При интегрировании рациональных дробей IV типа необходимо воспользоваться, так называемой, рекуррентной формулой:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = J_n;$$

$$J_n = \frac{x}{2a^2(n - 1)(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{2n - 3}{2n - 2} \cdot J_{n-1}.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = J_2$

Решение. Здесь $n = 2$; $a^2 = 4$. После применения рекуррентной формулы получим

$$J_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x}{2 \cdot 4 \cdot (2 - 1) \cdot (x^2 + 4)^{2-1}} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} \cdot J_1 =$$

$$= \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{8} \cdot \int \frac{dx}{x^2 + 4} = \frac{x}{8(x^2 + 4)} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Если $n > 2$, то рекуррентной формулой нужно пользоваться несколько раз, пока интеграл не будет сведен к табличному.

Пример 12. Найти интеграл $\int \frac{x + 5}{(x^2 + 4x + 5)^2}\,dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию. Сначала в числителе выделим производную от квадратного трехчлена, стоящего в знаменателе, далее разобьем интеграл на сумму двух, один из которых легко свести к табличному, а другой найдем по рекуррентной формуле:

$$d(x^2+4x+5)=(2x+4)dx.$$

$$\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{\frac{1}{2}(2x+4)+3}{(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}+\frac{3}{(x^2+4x+5)^2}.$$

Имеем

$$\int\frac{x+5}{(x^2+4x+5)^2}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+4}{(x^2+4x+5)^2}\,dx+\int\frac{dx}{(x^2+4x+5)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}+3\int\frac{d(x+2)}{((x+2)^2+1)^2}=$$

$$=\{x^2+4x+5=t;\quad x+2=z\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+3\int\frac{dz}{(z^2+1)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+3\cdot\left(\frac{z}{2\cdot1\cdot(z^2+1)}+\frac{2\cdot2-3}{2\cdot2-2}\cdot\int\frac{dz}{z^2+1}\right)=$$

$$=\frac{-1}{2t}+\frac{3z}{2(z^2+1)}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}z+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x^2+4x+5)}+\frac{3(x+2)}{2(x^2+4x+5)}+\frac{3}{2}\mathrm{arctg}(x+2)+C.$$

Если под знаком интеграла стоит сложная рациональная функция, то с ней предварительно выполняют следующие преобразования:

1) если рациональная дробь неправильная, то сначала представляют ее в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби $\frac{Q(x)}{P(x)}$;

2) многочлен, стоящий в знаменателе рациональной функции, следует разложить на линейные и квадратичные множители в зависимости от того, каковы корни этого многочлена

$$P(x) = (x-a)^m \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^n \cdot \ldots,$$

где квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, а p и q – действительные числа;

3) правильную рациональную дробь $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ (степень многочлена

$P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$) раскладывают на простейшие дроби:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_m}{x-a} + \ldots +$$

$$+ \frac{B_1 x + C_1}{(x^2+px+q)^n} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \ldots + \frac{B_n x + C_n}{x^2+px+q};$$

4) вычисляют неопределенные коэффициенты $A_1, A_2, \ldots,$ $B_1, C_1, \ldots,$ B_n, C_n.

В конечном итоге интегрирование рациональной функции сводится к отысканию интеграла от суммы многочлена и простейших рациональных дробей.

Любую правильную рациональную дробь можно представить в виде простейших дробей. Поясним это на примерах.

Пример 13. $\dfrac{5x^2+14}{(x-1)(x+3)(x+5)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{x+5}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе уже разложен на простые множители, корни действительные и различные. Каждому действительному некратному корню многочлена в знаменателе соответствует простейшая дробь I типа.

Пример 14. $\dfrac{7x^2+8x-1}{(x+3)^4} = \dfrac{A}{(x+3)^4} + \dfrac{B}{(x+3)^3} + \dfrac{C}{(x+3)^2} + \dfrac{D}{x+3}.$

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет один корень кратности 4.

Пример 15. $\dfrac{5x^2+2x+4}{(x^2+x+1)(x^2+x+5)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+x+5}.$

Дробь правильная, множители знаменателя неприводимые, т.к. $D_1 = 1 - 4 < 0$, $D_2 = 1 - 20 < 0$, многочлен 4-ой степени в знаменателе имеет две пары комплексно-сопряженных различных корней.

Пример 16. $\dfrac{3x^2 + x - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \dfrac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^2} + \dfrac{Cx + D}{x^2 + x + 1}$.

Дробь правильная, многочлен в знаменателе имеет комплексные корни, является кратной парой комплексно-сопряженных корней.

Пример 17.

$$\frac{3x^4 + 7x - 1}{(x+2)x^2(x^2 + x + 5)^2(x^2 - x + 2)} =$$

$$= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{Dx + F}{(x^2 + x + 5)^2} + \frac{Cx + E}{x^2 + x + 5} + \frac{Lx + M}{x^2 - x + 2}.$$

Данное представление правильной рациональной дроби вытекает из анализа примеров 13–16.

Коэффициенты A, B, C, D, … в разложении правильных рациональных дробей на простейшие дроби можно вычислить методом неопределенных коэффициентов. Суть его в следующем. Приводя дроби к общему знаменателю, получим равные многочлены в числителе справа и слева. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов.

Пример 18. Найти $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx$.

Решение. Подынтегральная функция не является правильной рациональной дробью.

Выполним преобразования:

$$\frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} = \frac{x(x + 2) + 5}{x + 2} = x + \frac{5}{x + 2}.$$

$$\int \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 2} dx = \int (x + \frac{5}{x + 2}) dx = \frac{x^2}{2} + 5 \ln|x + 2| + C.$$

Пример 19. Найти $\int \frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь. Разложим ее на простейшие:

$$\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}=\frac{7x-3}{(x^3-x^2)+(x-1)}=\frac{7x-3}{x^2(x-1)+(x-1)}=$$

$$=\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}=\frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Сравним четвертую дробь и последнюю. Два многочлена считаются равными, если будут равны коэффициенты при одинаковых сте-
пенях x:

$$7x-3=(Ax+B)\cdot(x-1)+C(x^2+1)$$

$$7x-3=(A+C)x^2+(-A+B)x+C-B.$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+C=0, \\ x & -A+B=7, \\ x^0 & C-B=-3 \end{array}\Bigg\}$$

Складывая все три равенства, получим

$2C=4$ или $C=2$.

Из первого уравнения системы $A=-C$ или $A=-2$.

Из второго уравнения системы получим

$B=7+A$ или $B=7-2=5$.

Следовательно,

$$\frac{7x-3}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}.$$

В результате получаем

$$\int\frac{7x-3}{x^3-x^2+x-1}dx=\int\left(\frac{-2x+5}{x^2+1}+\frac{2}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{2x}{x^2+1}dx+5\int\frac{dx}{x^2+1}+2\ln|x-1|=$$

$$=-\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}+5\mathrm{arctg}x+2\ln|x-1|=$$

$$= -\ln(x^2+1) + 5\operatorname{arctg}x + 2\ln|x-1| + C =$$

$$= 5\operatorname{arctg}x + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} + C.$$

Пример 20. Найти $\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит неправильная рациональная дробь. Представим ее в виде суммы целой части и правильной дроби. Предварительно поделим эту дробь «уголком»

$$\begin{array}{r|l} x^5+1 & x^4-8x^2+16 \\ \cline{2-2} -\underline{x^5-8x^3+16x} & x \\ 8x^3-16x+1 & \end{array}$$

Получим

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = x + \frac{8x^3-16x+1}{(x^2-4)^2} =$$

$$= x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = x + \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2}.$$

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

Дроби с равными знаменателями будут равны, если равны и их числители.

$$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2 + B(x-2)(x+2)^2 + C(x-2)^2 + D(x+2)(x-2)^2.$$

Коэффициенты A, B, C, D найдем комбинированным методом: A и C – методом подстановки, а B и D – методом неопределенных коэффициентов.

Пусть $x=-2$, тогда

$$8\cdot(-2)^3 + 16\cdot 2 + 1 = A\cdot 0 + B\cdot 0 + C\cdot 16 + D\cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16C = -31; \qquad C = -\frac{31}{16}.$$

Пусть $x=2$, тогда

$$8\cdot 2^3-16\cdot 2+1=16A+B\cdot 0+C\cdot 16+D\cdot 0 \quad \text{или}$$

$$16A=33; \qquad\qquad A=\frac{33}{16}.$$

Преобразуем выражение

$$A(x-2)^2+B(x-2)(x+2)^2+C(x-2)^2+D(x-2)^2(x+2)=$$

$$=A(x^2-4x+4)+B(x^3+2x^2-4x+8)+C(x^2-4x+4)+$$

$$+D(x^3-2x^2-4x+8)=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$

$$+(-4A-4B-4C-4D)x+(4A+8A+4C+8D)$$

или

$$8x^3-16x+1=(B+D)x^3+(A+2B+C-2D)x^2+$$

$$+(-4A-4B-4C-4D)x+4A+8B+4C+8D.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в последнем равенстве, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B, C и D.

$$\left.\begin{array}{l|l} x^3 & B+D=8, \\ x^2 & A+2B+C-2D=0, \\ x & -4A-4B-4C-4D=-16, \\ x^0 & 4A+8B+4C+8D=1 \end{array}\right\}$$

Учитывая, что $A=\frac{33}{16}$, $C=-\frac{31}{16}$, воспользуемся только первым и вторым уравнениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} D=8-B, \\ \frac{33}{16}+2B-\frac{31}{16}-2(8-B)=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D=\frac{129}{32}, \\ B=\frac{127}{32}. \end{cases}$$

Далее найдем исходный интеграл

$$\int\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16}dx=$$

$$=\int(x+\frac{33}{16}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{127}{32}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{31}{16}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+\frac{129}{32}\cdot\frac{1}{x+2})\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{33}{16(x-2)}+\frac{127}{32}\ln|x-2|+\frac{31}{16(x+2)}+\frac{129}{32}\cdot\frac{1}{x+2}+C.$$

Пример 21. Найти $\int\frac{x^3}{(x+5)^5}\,dx$.

Решение. Под знаком интеграла стоит правильная рациональная дробь и можно было бы найти интеграл, представив эту дробь в виде суммы простейших дробей. Однако нахождение интеграла можно значительно упростить, если произвести замену переменной: $x+5=t;\ x=t-5;\ dx=dt$.

Тогда

$$\int\frac{x^3}{(x+5)^5}\,dx=\int\frac{(t-5)^3}{t^6}dx=\int\frac{t^3-15t^2+75t-125}{t^6}dt=$$

$$=\int\left(\frac{1}{t^3}-15\cdot\frac{1}{t^4}+75\cdot\frac{1}{t^5}-125\cdot\frac{1}{t^6}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2}+\frac{15}{-3t^3}+\frac{75}{-4t^4}-\frac{125}{-5t^5}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x+5)^2}-\frac{5}{(x+5)^3}-\frac{75}{4(x+5)^4}+\frac{25}{(x+5)^5}+C.$$

1.4. Интегрирование некоторых выражений, содержащих радикалы

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В дальнейшем будем стремиться отыскивать такие подстановки $t=\omega(x)$, которые привели бы подынтегральное выражение к рациональному виду. Если при этом функция $\omega(x)$ выражается через элементарные функции, то интеграл представится в конечном виде и в функции от x.

Назовем этот прием *методом рационализации подынтегрального выражения.*

1) ***Интегралы вида*** $\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)dx$,

где R означает рациональную функцию от двух аргументов,

$m \in N, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ – постоянные.

Полагаем,

$$t = \omega(x) = \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \quad t^m = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \; x = \varphi(x) = \frac{\delta t^m - \beta}{\alpha - \gamma t^m}.$$

Интеграл приводится к виду

$$\int R(\varphi(t), t) \cdot \varphi'(t) dt,$$

здесь $R, \varphi(t), \varphi'(t)$ – рациональные функции.

Вычислив этот интеграл по правилам интегрирования рациональных функций, вернемся к старой переменной, подставив $t = \omega(x)$.

К интегралу вида (1) сводятся более общие интегралы

$$\int R\left(x, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^r, \left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)^s, \ldots\right) dx,$$

где показатели r, s,… – рациональны.

Нужно привести эти показатели к общему знаменателю m, чтобы под знаком интеграла получить рациональную функцию от x и радикала $\sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$.

Пример 22. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$.

Решение:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \frac{dx}{x+1} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \; dx = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{t \cdot (-6t^2) dt}{\left(\frac{t^3+1}{t^3-1} + 1\right)(t^3-1)^2} = \int \frac{-3dt}{t^3-1} = \int \frac{-3dt}{(t-1)(t^2+t+1)} =$$

$$= \int \left(-\frac{1}{t-1} + \frac{t+2}{t^2+t+1}\right) dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} \right| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C,$$

где $t=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$.

2) *Интегралы вида* $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы сводятся к табличному, если в квадратном трехчлене выделить полный квадрат.

Пример 23. Найти $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$.

Решение. Преобразуем квадратный трехчлен

$x^2-6x+8=(x-3)^2-1;\quad x-3=t,\quad x=t+3,\quad dx=dt$.

Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}=\int\frac{d(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2-1}}=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=\begin{Bmatrix}\text{табличный}\\ \text{интеграл 19}\end{Bmatrix}$$

$$=\ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C=\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+8}|+C.$$

3) *Интегралы вида* $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$**.**

Для отыскания этого интеграла в числителе необходимо выделить такую линейную функцию, которая равнялась бы производной квадратного трехчлена. Далее разбиваем интеграл на сумму двух, один из которых табличный, а второй рассмотрен в предыдущем пункте.

Пример 24. Найти $\int\frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$.

Решение. Выделим в числителе производную подкоренного выражения

$(-x^2+4x+5)'=-2x+4$.

$$7x+2=-\frac{7}{2}(-2x+4-4)+2=-\frac{7}{2}(-2x+4)+16.$$

Тогда

$$\int \frac{7x+2}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx = \int \frac{-7/2(-2x+4)+16}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{(-2x+4)dx}{-x^2+4x+5} + 16\cdot\int \frac{dx}{-x^2+4x+5} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (-2x+4)dx = d(-x^2+4x+5) \\ -x^2+4x+5 = -(x^2-4x+4-4)+5 = -(x-2)^2+9 \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{d(-x^2+4x+5)}{\sqrt{-x^2+4x+5}} + 16\cdot\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{9-(x-2)^2}} =$$

$$= \left\{-x^2+4x+5 = t;\;\; x-2 = z\right\} =$$

$$= -\frac{7}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} + 16\int \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} = -7\sqrt{t} + 16\arcsin\frac{z}{3} + C =$$

$$= -7\sqrt{-x^2+4x+5} + 16\arcsin\frac{x-2}{3} + C.$$

4) ***Интегралы вида*** $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx,\ (a \neq 0)$

Эти интегралы приводятся к интегралу от рациональной функции нового переменного с помощью следующих подстановок Эйлера.

I –я подстановка Эйлера. Если $a > 0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\cdot x + t$.

Для определенности рассмотрим случай

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t$. Тогда

$ax^2+bx+c = ax^2 + 2\sqrt{a}\cdot x\cdot t + t^2, \quad x = \dfrac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}\cdot t}$, то

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot x + t = \sqrt{a}\cdot\dfrac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} + t$ – рациональная функция от t, dx также выражается рационально через t.

II-я подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то полагаем

$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$.

Для определенности считаем, что перед c стоит знак «+». Тогда

$$ax^2+bx+c = x^2t^2+2xt\sqrt{c}+c, \quad x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}.$$

При этом dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются рационально через t, поэтому $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ сводится к интегралу рациональной функции зависящей от t.

Пример 25. Найти интеграл $\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx$.

Решение. Применим 2-ю подстановку Эйлера

$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1;\ 1+x+x^2 = x^2t^2+2xt+1,$

$$x = \frac{2t-1}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2t^2-2t+2}{(1-t^2)^2}dt;$$

$$\sqrt{1+x+x^2} = xt+1 = \frac{t^2-t+1}{1-t^2}, \quad 1-\sqrt{1+x+x^2} = \frac{-2t^2+1}{1-t^2}.$$

$$\int \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}dx = \int \frac{(-2t^2+t)^2(1-t^2)^2\cdot(1-t^2)(2t^2-2t+2)}{(1-t^2)^2(2t-1)^2(t^2-t+1)(1-t^2)^2}dt =$$

$$= 2\int \frac{t^2}{1-t^2}dt = -2\int \frac{-t^2+1-1}{1-t^2}dt = -2\int \left(1+\frac{2}{1-t^2}\right)dt =$$

$$= -2t+\ln\left|\frac{t+1}{1-t}\right|+C,$$

где $t = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$.

III-я подстановка Эйлера. Квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни α и β. Тогда $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

сводится к интегралу от рациональной функции от t с помощью замены

$$a \neq 0 \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad \text{или}$$

$$\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t, \qquad x = \frac{\alpha\beta - at^2}{a - t^2}.$$

1.5. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными называются дифференциалы вида

$$x^m(a + bx^n)^p dx,$$

где m,n,p – рациональные числа, a,b – постоянные величины.

Рассмотрим интеграл $\int x^m(a + bx^n)^p dx$. (1.5)

1) n – целое число. Данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции от t, если положить $t = \sqrt[\lambda]{x}$, λ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число, тогда рационализации подынтегрального выражения можно достигнуть, используя замену

$t = \sqrt[\nu]{a + bx^n}$, ν – знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое.

Замена $t = \sqrt[\nu]{ax^{-n} + b}$, ν – знаменатель дроби p, позволяет рационализировать подынтегральную функцию в исходном интеграле.

Эти случаи интегрируемости были известны еще Ньютону. Однако, только в середине прошлого столетия П.Л.Чебышев установил факт, что других случаев интегрируемости в конечном виде для биномиальных дифференциалов нет. Поэтому подстановки 1-3 называют *подстановками Чебышева*.

Пример 26. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x\sqrt[3]{1 + x^5}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \int x^{-1}(1+x^5)^{-\frac{1}{3}}dx$.

$m=-1, n=5, p=-\frac{1}{3}; \quad \nu=3.$

Применим II подстановку Чебышева, т.к. $\frac{m+1}{n}=0$ – целое число

$$t=\sqrt[3]{1+x^5}, \quad 1+x^5=t^3, \quad x=(t^3-1)^{1/5}; \quad dx=\frac{3}{5}t^2(t^3-1)^{-\frac{4}{5}}dt.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\int \frac{tdt}{t^3-1} = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)dt =$$

$$=\left\{(t^2+t+1)'=2t+1, \quad t-1=\frac{1}{2}(2t+1)-\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\int\frac{d(t^2+t+1)}{t^2+t+1}+\frac{3}{10}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} =$$

$$=\frac{1}{5}\ln|t-1|-\frac{1}{10}\ln(t^2+t+1)+\frac{3}{10}\cdot\frac{1\cdot 2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C =$$

$$=\frac{1}{10}\ln\frac{(t-1)^2}{t^2+t+1}+\frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример 27. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение. Подынтегральную функцию можно записать в виде $x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}$. Здесь $m=-3; \; n=3; \; p=-\frac{1}{3}$ и $\frac{(m+1)}{n}+p=\frac{(-3+1)}{3}-\frac{1}{3}=-1$ – целое число. Поэтому имеет место третий случай интегрируемости дифференциального бинома. Произведем замену переменной: $2x^{-3}-1=t^3$, тогда $d(2x^{-3}-1)=dt^3$ или $-6x^{-4}dx=3t^3dt$ или $x^{-4}dx=-\frac{1}{2}t^2dt$.

Преобразуем исходный интеграл

$$\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}=\int x^{-3}\cdot(2-x^3)^{-\frac{1}{3}}dx=\int x^{-3}\cdot\left(x^3(2x^{-3}-1)\right)^{-\frac{1}{3}}dx=$$

$$=\int x^{-3}\cdot x^{-1}\cdot(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}dx=\int(2x^{-3}-1)^{-\frac{1}{3}}x^{-4}dx=$$

$$=\int(t^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}t^2\right)dt=-\frac{1}{2}\int tdt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2}+C=-\frac{1}{4}t^2+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(2x^{-3}-1)^2}+C=-\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x^3}-1\right)^2}+C=-\frac{\sqrt[3]{(2-x^3)^2}}{4x^2}+C.$$

1.6. Интегрирование некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции

1) ***Интегралы вида*** $\int R(\sin x,\cos x)dx$

Применим так называемую универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, $x=2\operatorname{arctg}t$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

С помощью указанной подстановки интеграл $\int R(\sin x,\cos x)dx$ сводится к интегралу от рациональной функции

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 28. Найти интеграл $\int\frac{dx}{3\sin x+2}$.

Решение:

$$\int\frac{dx}{3\sin x+2}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{6t}{1+t^2}+2}=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\frac{d\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt5}{2}}\ln\left|\frac{t+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt5}{2}}{t+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt5}{2}}\right|+C=\frac{\sqrt5}{5}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt5}{2t+3+\sqrt5}\right|+C=$$

$$=\frac{\sqrt5}{5}\ln\left|\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3-\sqrt5}{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3+\sqrt5}\right|+C.$$

2) *Интегралы вида* $\int R(\sin x)\cdot\cos xdx$ или $\int R(\cos x)\cdot\sin xdx$.

а) $\int R(\sin x)\cdot\cos xdx$ приводится к $\int R(t)dt$ с помощью подстановки $\sin x=t,\ \cos xdx=dt.$

б) $\int R(\cos x)\cdot\sin xdx$ приводится к $\int(-R(t)dt)$, если $\cos x=t$, $\sin xdx=-dt.$

3) *Интегралы вида* $\int R(\mathrm{tg}x)dx,\quad \int R(\sin^{2k}x,\cos^{2m}x)dx$.

Если подынтегральная функция зависит только от tgx или только от sinx и cosx, входящих в четных степенях, то применяется подстановка

$$\mathrm{tg}x=t,\ \ x=\mathrm{arctg}x,\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2x}=\frac{1}{1+t^2};\qquad \sin^2x=\frac{\mathrm{tg}^2x}{1+\mathrm{tg}^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

в результате которой получим интеграл от рациональной функции:

Пример 29. $\int\frac{dx}{3+\sin^2x}$

Решение:

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x} = \{tgx = t\} = \int \frac{dt}{\left(3+\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{4t^2+3} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2tgx}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

4) ***Интегралы вида*** $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

а) m и n таковы, что по крайней мере одно из них нечетное число. Пусть для определенности n-нечетное. Тогда полагаем $n = 2p+1$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int sim^m x \cdot \cos^{2p} x \cdot \cos x dx =$$

$$= \int \sin^m x \cdot (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \{\sin x = t\} = \int t^m \cdot (1-t^2)^p dt = \int R(t)dt.$$

б) m и n – неотрицательные, четные числа. Полагаем $m = 2p$, $n = 2q$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x); \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int (\sin^2 x)^p \cdot (\cos^2 x)^q dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим интегралы, содержащие $\cos 2x$ как в четных, так и нечетных степенях. Интегралы с нечетными степенями cos2x интегрируются как в случае а). Четные показатели степеней cos2x снова понижаем по выше указанным формулам. Продолжая так поступать, получим в конце концов слагаемые вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 30. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cdot (1-\sin^2 x)\, d\sin x = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

.

Пример 31. Найти интеграл $\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx$.

Решение:

$$\int \sin^2 3x \cdot \cos^2 3x dx = \frac{1}{4}\int \ (1-\cos 6x)(1+\cos 6x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 6x) dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1+\cos 12x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{\sin(12x)}{12} + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{96}\sin(12x) + C.$$

в) m и n – четные числа, но хотя бы одно из них отрицательное.

В этом случае следует сделать замену $tgx = t$ (или $ctgx = t$).

Пример 32. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$.

Решение: $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\sin^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^2 x \cdot \cos^4 x} dx =$

$$= \int tg^2 x \cdot (tg^2 x + 1)^2 dx = \left\{ \begin{matrix} tgx = t;\ x = arctg\, t \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\} = \int t^2 (1+t^2)^2 \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 (1+t^2) dt = \int (t^2 + t^4) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

5) *Интегралы вида* $\int \cos mx \cdot \sin nx dx; \int \cos mx \cdot \cos nx dx;$ $\int \sin mx \cdot \sin nx dx \quad (m \neq n)$.

Чтобы проинтегрировать данные функции, достаточно применить тригонометрические формулы:

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]$$

Тогда

$$\int \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(m+n)x + \sin(m-n)]dx =$$

$$= -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$

Аналогично вычисляются два других интеграла.

Пример 33. Найти интеграл $\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx$.

Решение:

$$\int \sin 4x \cdot \cos 6x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{\cos 10x}{10} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C = -\frac{\cos 10x}{20} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

2. Определенный интеграл

2.1. Определение и свойства определенного интеграла

Пусть на сегменте [a,b] задана функция f(x). Выполним следующие операции:

1. С помощью точек деления $x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$ разобьем [a,b] на n малых сегментов: $[x_0, x_1]; [x_1, x_2]; ...; [x_{k-1}, x_k]; ...[x_{n-1}, x_n];\ x_0 = a,\ x_n = b$.

2. На каждом малом сегменте выберем произвольную точку ξ_k, $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$, составим произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

3. Составим, так называемую, интегральную сумму всех таких произведений

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k .$$

Определенный интеграл есть число, равное пределу, к которому стремится интегральная сумма J_n, когда $\max\Delta x_k$ стремится к нулю.

Таким образом,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max\Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x_k .$$

Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами (границами) интегрирования, f(x) – подынтегральной функцией, а интервал [a,b] – областью интегрирования.

Функция f(x), для которой существует конечный $\int\limits_a^b f(x)dx$, называется интегрируемой на промежутке [a,b], причем указанный предел не зависит ни от способа разбиения сегмента [a,b] на части, ни от выбора точек ξ_k в каждой из них.

В теореме существования определенного интеграла указывается на то, что всякая непрерывная на промежутке [a,b] функция f(x) является интегрируемой на нем.

Впредь подынтегральную функцию будем считать непрерывной.

Без подробных объяснений приведем некоторые свойства определенных интегралов.

1. $\int\limits_a^b (f(x)\pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

2. $\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)dx, \quad c = \text{const}.$

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c\in(a,b)$.

4. Если $f(x)\ge 0$ на [a,b], то $\int\limits_a^b f(x)dx \ge 0$.

5. Если $f(x)\le g(x)$ для $\forall x\in[a,b]$, то

a) $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx;$

б) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$

6. Теорема о среднем: $\exists \xi \in [a,b]$,

$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$, где $f(x)$ – непрерывна на [a,b].

7. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

8. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

2.2. Методы вычисления определенного интеграла

Вычисление определенных интегралов как пределов интегральных сумм связано в большими трудностями даже в тех случаях, когда подынтегральные функции являются простыми. Поэтому естественно возникает задача: найти практически удобный метод вычисления определенных интегралов.

Ниже будет сформулирована теорема Ньютона-Лейбница, позволяющая сводить вычисления определенного интеграла к неопределенному. Эта теорема играет фундаментальную роль в математическом анализе (см.подробнее [1] с.397).

2.2.1. Теорема Ньютона-Лейбница

Пусть f(x) непрерывна на сегменте [a,b] и F(x) – одна из ее первообразных, тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 34. Вычислить $\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx$.

Решение. Используя формулу Ньютона-Лейбница, а также табличный интеграл 16, получим

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}.$$

2.2.2. Методы замены переменной в определенном интеграле

а) Необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$,

где f(x) непрерывная функция на [a,b].

Перейдем к новой переменной t, полагая $x = \varphi(t)$. Пусть $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, кроме того, при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы сегмента [a,b]. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha,\beta]$, то справедлива следующая формула замены переменной

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 35. Вычислить $\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}\,dx$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение, выделив полный квадрат

$$4x - x^2 - 3 = 1 - (x^2 - 4x + 4) = 1 - (x-2)^2.$$

Введем новую переменную: $x - 2 = \sin t$, тогда $x = 2 + \sin t$,

$dx = d(2 + \sin t)$ или $dx = (2 + \sin t)'dt = \cos t\,dt$.

Найдем пределы интегрирования новой переменной t:

если $x_1 = 2$, то $0 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0$

если $x_2 = 3$, то $1 = \sin t \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_2^3 \sqrt{4x - x^2 - 3}dx = \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Заметим, что в данном случае при применении формулы замены переменной отпадает необходимость возвращения к старой переменной x по сравнению с неопределенным интегралом. Это вполне объяснимо, ибо определенный интеграл есть некоторое постоянное число, в то время как неопределенный интеграл от той же самой функции есть некоторая функция.

б) Часто вместо замены переменной $x = \varphi(t)$ употребляют обратную замену переменной $t = g(x)$. На конкретном примере покажем, как это делается.

Покажем это на конкретном примере.

Пример 36. Вычислить $\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)}$.

Решение. Пусть $t = \ln x$, тогда $\frac{1}{x}dx = d\ln x = dt.$

Если $x_1 = 1,$ то $t_1 = \ln 1 = 0,$ если $x_2 = e,$ то $t_2 = \ln e = 1.$

Следовательно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x(5+\ln x)} = \int_1^e \frac{d(\ln x)}{5+\ln x} = \int_0^1 \frac{dt}{5+t} = \ln|t+5|\Bigg|_0^1 = \ln 6 - \ln 5 =$$

$$= \ln\frac{6}{5} = \ln 1{,}2.$$

2.2.3. Формула интегрирования по частям в определенном интеграле

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – непрерывные функции вместе со своими первыми производными на [a,b], тогда справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 37. Вычислить интеграл $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Решение. Применим полученную формулу

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{aligned} & u = \ln x, \ \ du = \frac{1}{x} dx \\ & dv = x^2 dx, \ v = \frac{x^3}{3} \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \ln 1 \right) - \frac{1}{3} \int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{8}{3} \ln 2 - \left(\frac{1}{9} \cdot 8 - \frac{1}{9} \cdot 1 \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}.$$

Подробнее о методах интегрирования в определенном интеграле см.[1] с.399-403.

3. Несобственные интегралы

Определение определенного интеграла, его свойства и методы интегрирования рассматривались в предположении, что промежуток интегрирования [a,b] конечен и функция f(x) непрерывна на нем.

Иногда приходится отказываться от одного или обоих этих предположений. В этом случае мы приходим к понятию несобственного интеграла.

3.1. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, непрерывную на бесконечном промежутке $[a; +\infty)$.

Несобственным интегралом от функции f(x) по промежутку $[a;+\infty)$ называется $\lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx.$$

Если указанный предел существует и конечен, то несобственный интеграл с бесконечным пределом интегрирования называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Если $f(x) > 0$ на $[a,+\infty)$ и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx < \infty$, то данный интеграл представляет собой площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямой $x = a$ и бесконечным интервалом $[a;+\infty)$.

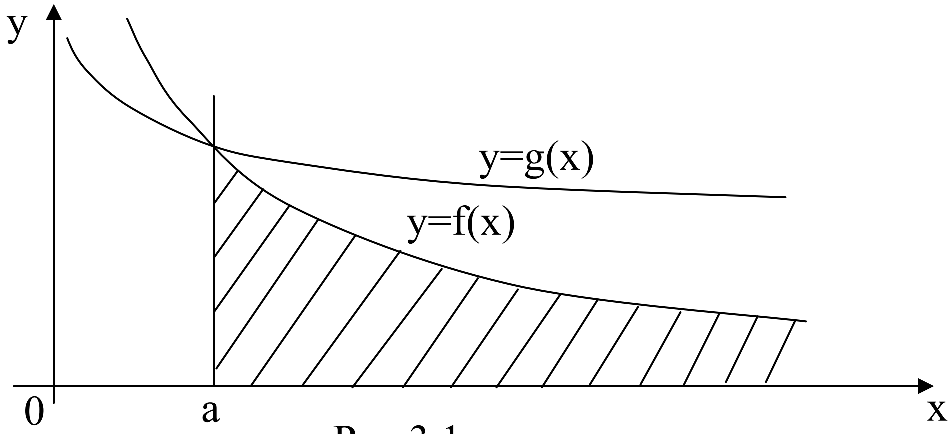


Рис.3.1

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке (–∞; b]:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{B\to-\infty}\int\limits_B^b f(x)dx,$$

а на интервале $(-\infty;+\infty)$ определяется формулой

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx,$$

где c – любое действительное число.

Если сравнить две криволинейные трапеции на рис.3.1, то конечность или бесконечность их соответствующих несобственных интегралов зависит от скорости убывания функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to +\infty$.

Так, например, $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$.

В этом легко убедится, вычислив $\int\limits_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx$, если $A \to +\infty$.

Если $f(x) = \frac{1}{x}$, то $\int\limits_1^A \frac{1}{x} dx = \ln|x| \Big|_1^A = \ln A - \ln 1 = \ln A \to +\infty$ при $A \to \infty$, поэтому $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ – расходится, следовательно, и площадь соответствующей криволинейной трапеции бесконечна.

$$\int\limits_1^A \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big|_1^A = -\frac{1}{A} + 1$$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim\limits_{A \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 1$ – несобственный интеграл сходящийся, следовательно, площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$ и бесконечным промежутком $[1; +\infty)$, является конечной и равна 1.

Пример 38. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} x \cdot e^x dx$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечным нижним пределом интегрирования и далее – формулой интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{0} x\cdot e^x dx = \lim_{\beta\to-\infty}\int_{\beta}^{0} x\cdot e^x dx = \begin{Bmatrix} u = x, & du = dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}\left(x\cdot e^x\Big|_{\beta}^{0} - \int_{\beta}^{0} e^x dx \right) = \lim_{\beta\to-\infty}(x\cdot e^x - e^x)\Big|_{\beta}^{0} =$$

$$= \lim_{\beta\to-\infty}(0-\beta\cdot e^{\beta} - e^0 + e^{\beta}) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(-\frac{\beta}{e^{-\beta}} - 1 + \frac{1}{e^{-\beta}} \right) = -1.$$

Несобственный интеграл сходится.

Пример 39. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

Решение. Воспользуемся определением несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования. Полагаем $c = -2$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} = \lim_{B\to-\infty}\int_{B}^{-2} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{A\to+\infty}\int_{-2}^{A} \frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{B\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_{B}^{-2} + \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}\frac{(x+2)}{\sqrt{5}}\Bigg|_{-2}^{A} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{B\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}0 - \operatorname{arctg}\frac{B+2}{\sqrt{5}} \right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{A+2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}0 \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(0+\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\pi.$$

Признак сравнения. Пусть в промежутке $[a;+\infty)$ функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$. Если интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то и $\int\limits_{a}^{+\infty} g(x)dx$ также расходится.

Замечание. Аналогичное утверждение верно для несобственных интегралов и по другим бесконечным пределам интегрирования.

Пример 40. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x dx}{\sqrt{(x^2+3)^4}}$.

Решение. Проведем сравнительный анализ подынтегральной функции при $x \to +\infty$.

$$\frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^4}} < \frac{x}{\sqrt{x^8}} = \frac{x}{x^4} = \frac{1}{x^3} \quad (1 \le x < +\infty).$$

Но $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ сходится, т.к. $\alpha = 3$ (см. рассуждения выше). Следовательно, по признаку сравнения сходится и данный интеграл.

3.2 Несобственные интегралы от неограниченной функции

Пусть функция $y = f(x)$ имеет разрыв II рода на [a,b] либо в точках a и b, либо в точке $c \in (a,b)$, тогда несобственные интегралы от разрывной функции определяются следующим образом:

1) $x = a$ – точка разрыва, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx;$$

2) $x = b$ – точка разрыва, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx,$$

3) $x = c,\ c \in (a,b)$, c – точка разрыва, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \int\limits_{a}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{b} f(x)dx.$$

Если указанные пределы существуют и конечны, то несобственные интегралы называются сходящимися, в противном случае расходящимися.

Признак сравнения. Пусть функции f(x) и g(x) в промежутках [a,b) непрерывны, а в точке $x = b$ имеют разрыв II рода; кроме того $0 \le f(x) \le g(x)$. Если $\int_a^b g(x)$ сходится, то сходится $\int_a^b f(x)dx$.

Если $\int_a^b f(x)$ расходится, то расходится $\int_a^b g(x)dx$.

Пример 41. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Функция $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x = 1$ имеет разрыв II рода, поэтому

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{3}\frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} +$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x-1}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{1-\varepsilon-1}+\frac{1}{-1}\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{3-1}+\frac{1}{1+\varepsilon-1}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)+\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{\varepsilon}\right)=\infty+\infty=\infty$$

.

Интеграл расходящийся.

Пример 42. Исследовать на сходимость несобственный интеграл от неограниченной функции

$$\int_0^1 \frac{2x + \mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2 + \mathrm{sh}x}}dx.$$

Решение. При $x = 0$ знаменатель функции обращается в 0, а числитель равен 1, следовательно, $x = 0$ – точка разрыва II рода. Во всех остальных точках промежутка (0;1] подынтегральная функция непрерывна.

Заметим также, что $(2x + \mathrm{ch}x)dx = d(x^2 + \mathrm{sh}x)$,

$$\int \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx = \int (x^2+\mathrm{sh}x)^{-\frac{1}{4}}\,d(x^2+\mathrm{sh}x) = \{x^2+\mathrm{sh}x = t\} =$$

$$= \int t^{-\frac{1}{4}}dt = \frac{4t^{3/4}}{3} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x} + C.$$

Используя определение несобственного интеграла от неограниченной функции, а также формулу Ньютона-Лейбница получим

$$\int_0^1 \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{2x+\mathrm{ch}x}{\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^2+\mathrm{sh}x}\Big|_{\varepsilon}^{1} =$$

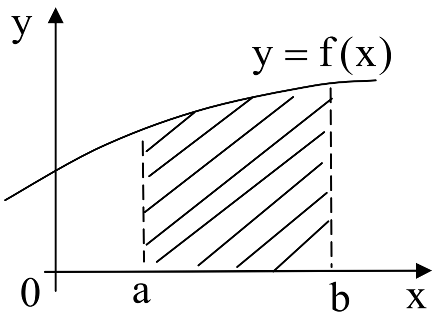
$$= \frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sqrt[4]{1+\mathrm{sh}1} - \sqrt[4]{\varepsilon^2+\mathrm{sh}\,\varepsilon}\right) = \frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{1+\mathrm{sh}1}.$$

Интеграл сходящийся.

4. Приложения определенного интеграла

4.1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовых координатах

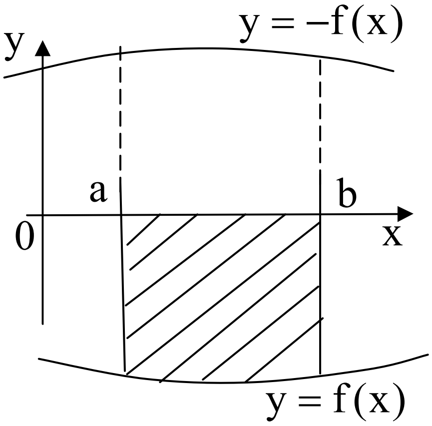
Если задана непрерывная функция $y = f(x)$ на [a,b], $f(x) > 0$, то определенный интеграл с геометрической точки зрения представляет собой площадь так называемой, криволинейной трапеции (рис.4.1).



$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (4.1)$$

Рис.4.1

Пусть криволинейная трапеция с основанием [a,b] ограничена снизу кривой $y = f(x)$ (рис.4.2), то из соображений симметрии видим, что



$$S = -\int_a^b f(x)dx \qquad (4.2)$$

Рис.4.2

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить ее на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций и применить формулы (4.1) или (4.2) (рис.4.3. и 4.4)

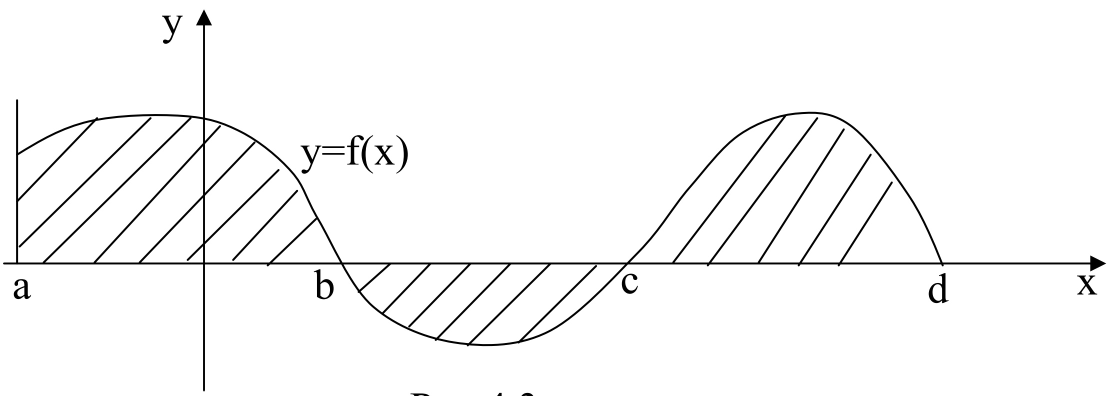
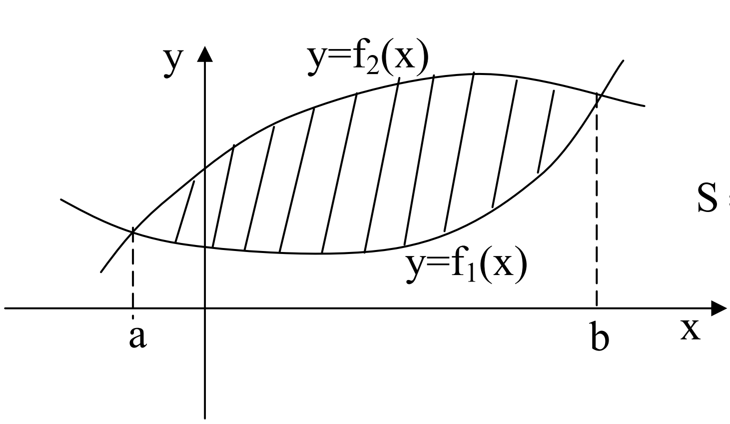


Рис.4.3

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx \qquad (4.3)$$



$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (4.4)$$

Рис.4.4

Пример 43. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = -x$.

Решение. $y = 2x - x^2$ – парабола. Найдем ее вершину и точки пересечения с осями координат.

$y' = 2 - 2x$; $y' = 0$ или $2 - 2x = 0$, $x = 1$

Если $x_0 = 1$, то $y_0 = 2 - 1 = 1$. $M_0(1; 1)$ – вершина параболы.

$y = 0$ или $2x - x^2 = 0$ или $x(2 - x) = 0$ $x = 0$; $x = 2$.

$y = -x$ – прямая линия.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и параболы:

$2x - x^2 = -x$ или $x^2 - 3x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

Для вычисления площади заштрихованной области воспользуемся формулой (4.4)

$$S = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))dx =$$

$$= \int_0^3 (3x - x^2)dx = \left(3 \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ (кв.ед.)}.$$

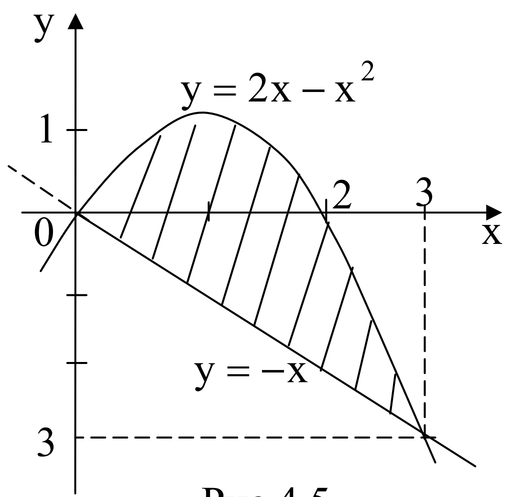


Рис.4.5

Пример 44. Вычислить площадь двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

Решение. Сделаем чертеж (рис.4.6)

$x^2 + y^2 = 8$ – окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{8}$.

$y^2 = 2x$ – парабола, имеющая вершину в т.O(0,0)

Найдем точки пересечения параболы и окружности:

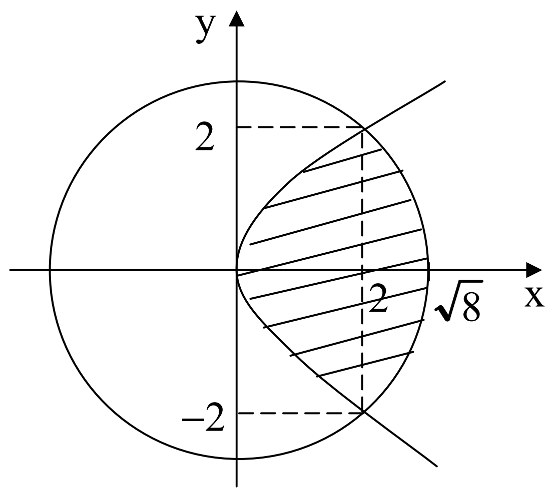


Рис.4.6

$$\begin{cases} y^2 = 8 - x^2 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow \quad 8 - x^2 = 2x \quad \Rightarrow \begin{matrix} x^2 + 2x - 8 = 0 \\ x_1 = -4; x_2 = 2 \end{matrix}$$

$x = -4$ – не удовлетворяет условию $y^2 = 2x$.

Если $x = 2$, то $y^2 = 4$ или $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

Найдем площадь заштрихованной области по формуле (4.4), в которой изменены переменные интегрирования:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (g_2(y) - g_1(y))dy.$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \sqrt{8 - y^2};$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{y^2}{2}.$$

$$s_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2\int_{0}^{2} \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \sqrt{8}\sin t; \quad dy = \sqrt{8}\cos t\, dt \\ \text{Если } y = 0, \text{ то } t = 0 \\ \text{Если } y = 2, \text{ то } 2 = \sqrt{8}\sin t, \ \sin t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}; \ t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right\}$$

$$= 2\int_{0}^{2} \sqrt{8 - y^2} dy - \left. \frac{y^3}{3} \right|_{0}^{2} = 2\int_{0}^{2} \sqrt{8 - y^2} dy - \frac{8}{3} =$$

$$= 2\int_{0}^{\pi/4} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cdot \sqrt{8}\cos t dt - \frac{8}{3} = 16\int_{0}^{\pi/4} \cos^2 t dt - \frac{8}{3} =$$

$$= 8\int_{0}^{\pi/4} (1 + \cos 2t)dt - \frac{8}{3} = 8\left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right)\Bigg|_{0}^{\pi/4} - \frac{8}{3} = 8\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Найдем площадь второй (незаштрихованной) части, на которую круг разделен параболой

$$S_{кр.} = \pi R^2; \quad S_{кр.} = \pi \cdot (\sqrt{8})^2 = 8\pi$$

$$S_2 = S_{кр.} - S_1 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3}\right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

4.2. Вычисление площади фигуры, ограниченной линией, заданной параметрически

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$ и $y = b$ и отрезком [a,b] оси OX, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt, \tag{4.5}$$

где $t_1 \le t \le t_2$, $y(t) \ge 0$, t_1 и t_2 определяются из условий $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример 45. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OX и одной аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой (4.5). Предварительно найдем $x'(t)$:

$$x'(t) = (a(t - \sin t))' = a(1 - \cos t).$$

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t) \cdot a(1-\cos t)dt = \int_0^{2\pi} a^2 (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{1}{4}\sin 4\pi\right) - 0 = 3a^2\pi \text{ (кв.ед.)}$$

4.3. Вычисление площади плоской фигуры в полярных координатах

В полярных координатах положение точки на плоскости $M(\varphi, r)$ определяется двумя координатами: полярным радиусом $r (r \geq 0)$ и полярным углом φ. Связь между декартовыми координатами (x,y) и полярными (φ, r) осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

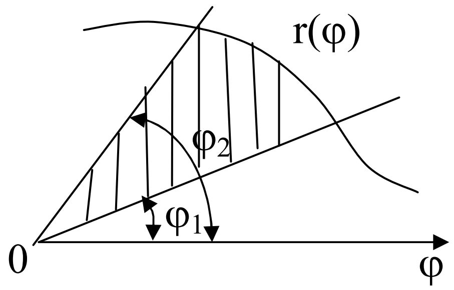


Рис.4.7

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$ $(\alpha < \beta)$ (рис.4.7), выражается интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (4.6)$$

Пример 46. Найти площадь фигуры, ограниченной улиткой Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.6). Чтобы найти пределы интегрирования α и β, необходимо построить чертеж кривой $r = 2 + \cos\varphi$ в полярных координатах. Результаты вычислений занесем в таблицу 1.

Таблица 1

φ	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	120^o	135^o	150^o	180^o
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$r = 2 + \cos\varphi$	3	$2+\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$	2,5	2	1,5	$2-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$2-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Так как функция $\cos\varphi$ – четная, то график функции $r = 2 + \cos\varphi$ строим симметрично относительно горизонтальной оси для значений углов из промежутка $\varphi \in (180^o, 360^o]$. Для построения графика функции при $\varphi \in [0; 180^{\circ})$ проводим полярную ось r; на лучах, составляющих с осью r углы, значение которых указано в таблице 1, откладываем соответствующее расстояние, затем точки последовательно соединяем. Получаем замкнутую кривую, называемую улиткой Паскаля (рис.4.8).

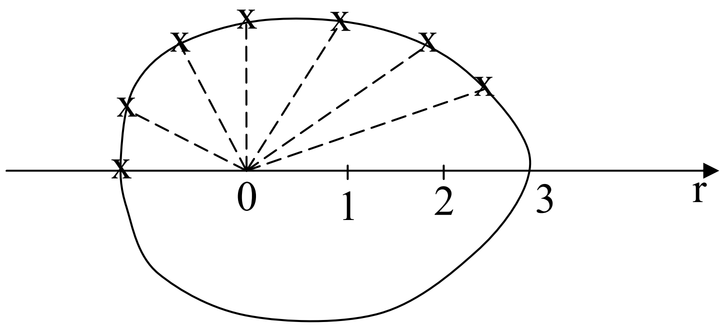


Рис.4.8

Площадь искомой фигуры равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(4+4\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4{,}5\varphi + 4\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4{,}5\pi \quad \text{(кв.ед.)}$$

4.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Пусть функция f(x) непрерывно дифференцируема на [a,b], тогда длина дуги кривой $y = f(x)$ на указанном промежутке вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \tag{4.7}$$

Если кривая гладкая и задана параметрически, то длина дуги этой кривой при $t_1 \le t \le t_2$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \tag{4.8}$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах $r = r(\varphi)$ и $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина ее дуги равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi. \tag{4.9}$$

Пример 47. Вычислить длину дуги развертки окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t - t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t), \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Решение. В нашем случае кривая задана параметрически. Воспользуемся формулой (4.8), предварительно находим производные $x'(t)$ и $y'(t)$.

$$x'(t) = a(\cos t + t\sin t)' = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t$$

$$y'(t) = a(\sin t - t\cos t)' = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t}\, dt = \int_0^{2\pi} a\cdot\sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)}\, dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} t dt = a\cdot\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = a\cdot\frac{4\pi^2}{2} = 2a\pi^2 \text{ (ед.длины).}$$

Пример 48. Найти длину дуги кривой $r = 3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Решение. Кривая $y = 3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}$ задана в полярных координатах. Воспользуемся формулой (4.9). Находим $r'(\varphi)$

$$r' = \left(3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^{/} = 3\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{4}\cdot e^{\frac{3\varphi}{4}}.$$

$$r^2 + (r')^2 = 9\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2 + \frac{81}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2 = \frac{225}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2$$

$$L = \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{225}{16}\cdot\left(r^{\frac{3\varphi}{4}}\right)^2}\, d\varphi = \frac{15}{4}\int_0^{\pi/3} e^{\frac{3}{4}\varphi} d\varphi = \frac{15}{4}\cdot\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}\varphi}\Bigg|_0^{\pi/3} =$$

$$= 5\cdot e^{\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{3}} - 5e^0 = 5\cdot(e^{\pi/4} - 1) \text{ (ед.длины).}$$

4.5. Вычисление объема тел вращения

Предположим, что площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси OX, может быть выражена функцией от x: $S = S(x)$ при $x \in [a, b]$, тогда объем тела, заключенный между перпендикулярными оси OX плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x)dx. \qquad (4.10)$$

Если криволинейную трапецию (рис.4.10) вращать вокруг оси OX, то объем тела вращения будет равен

$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (4.11)$$

Если плоская область, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, вращается вокруг оси OX, то

$$V_x = \pi \cdot \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x))dx, \quad (0 \le f_1(x) \le f_2(x)) \qquad (4.12)$$

Аналогично можно записать формулы для вычисления объемов тел вращения вокруг оси OY:

$$V_y = \pi\int_c^d x^2(y)dy, \qquad (4.13)$$

$$V_y = 2\pi\int_c^d x \cdot y(x)dx. \qquad (4.14)$$

Если кривые, ограничивающие плоскую область заданы в параметрическом виде, то к формулам (4.10 - 4.14) следует применить соответствующие замены переменной.

Если криволинейный сектор вращать вокруг полярной оси (см.рис.5.7), то

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi. \qquad (4.15)$$

Пример 49. Вычислить объем тела, полученного при вращении дуги кривой $y = \text{ch}x$, $0 \le x \le 1$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая $y=\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ называется цепной линией. График ее изображен на рис.4.9. Объем тела вращения (рис.4.10) вычислим по формуле (4.11)

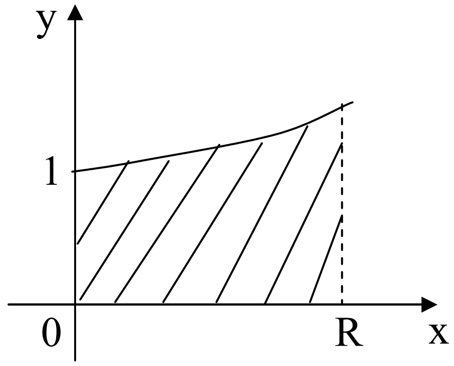


Рис.4.9

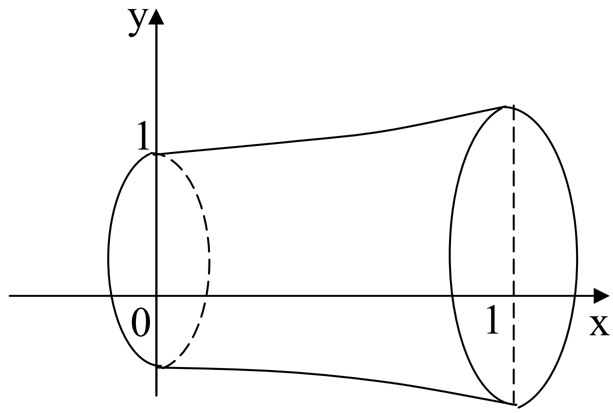


Рис.4.10

$$V_X=\pi\int_0^1 \mathrm{ch}^2 x dx=\pi\int_0^1\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx=\frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x}+2\cdot e^x\cdot e^{-x}+e^{-2x})dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1 (e^{2x}+2+e^{-2x})dx=\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}+2x-\frac{e^{-2x}}{2}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{2}+2-\frac{e^{-2}}{2}\right)-\frac{\pi}{4}\left(\frac{e^0}{2}+0-\frac{e^0}{2}\right)=\frac{\pi}{4}\left(2+\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}(2-\mathrm{sh}2).$$

Пример 50. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого равен R, а высота – H.

Решение. Искомый параболоид вращения с указанными параметрами получится, если будем вращать вокруг оси OY параболу $y=kx^2$, $0\le y\le H$ (рис.4.11; 4.12), где параметр k легко вычислить исходя из данного условия.

Если $x=R$, то $y=H$, поэтому

$$H=kR^2\Rightarrow k=\frac{H}{R^2}\Rightarrow y=\frac{H}{R^2}\cdot x^2.$$

Далее воспользуемся формулой (4.13)

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H x^2(y)dy.$$

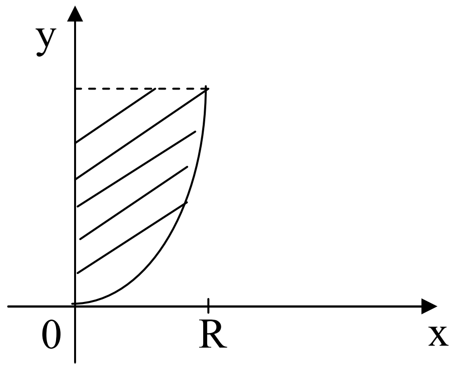


Рис.4.11

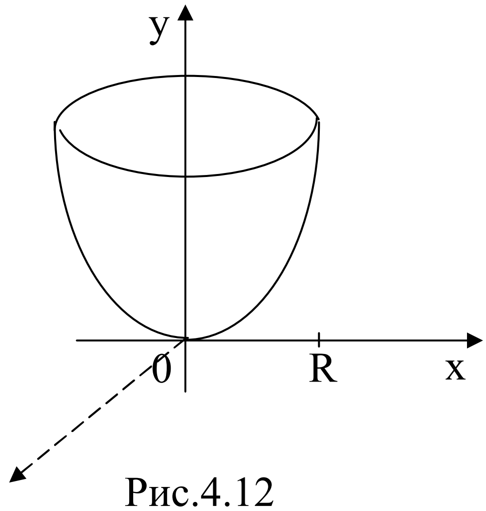


Рис.4.12

Если $y = \frac{H}{R^2} \cdot x^2$, то $x^2 = \frac{R^2}{H} \cdot y$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^H \frac{R^2}{H} \cdot ydy = \pi \cdot \frac{R^2}{H} \cdot \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^H = \frac{\pi \cdot R^2}{H} \cdot \frac{H^2}{2} = \frac{1}{2}\pi R^2 H \text{ (ед}^3\text{)}.$$

Пример 51. Найти объем тела вращения кривой $x = 3\cos t$, $y = 4\sin t$ вокруг оси OX.

Решение. Данная кривая задана в параметрическом виде – это эллипс (рис.4.13). Искомой фигурой вращения является эллипсоид. Найдем V_X по формуле (4.11)

$$V_X = \pi\int_a^b y^2(x)dx.$$

Если $x = -3$, то $3\cos t = -3$, $\cos t = -1$, $t_1 = \pi$.

Если $x = 3$, то $3\cos t = 3$, $\cos t = 1$, $t_2 = 0$.

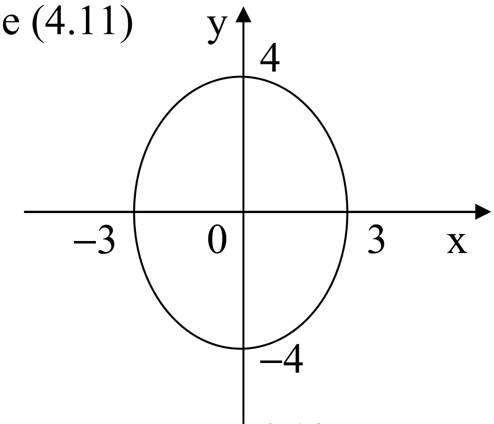


Рис.4.13

$$V_X = \pi\int_{-3}^{3} y^2 dx = \pi\int_{\pi}^{0} (4\sin t)^2 d(3\cos t) = \pi \cdot 16 \cdot 3 \cdot \int_{\pi}^{0} (\sin t)^2 d(\cos t) =$$

$$= 48\pi\int_{\pi}^{0}(1-\cos^2 t)d(\cos t) = 48\pi\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi}^{0} =$$

$$= 48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) - 48\pi\left(\cos\pi - \frac{\cos^3\pi}{3}\right) = 48\pi\cdot\frac{2}{3} - 48\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot 48\pi = 64\pi \text{ (куб.ед.).}$$

4.6. Вычисление площади поверхностей тел вращения

Площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой AB вокруг оси OX, равна

$$Q_X = 2\pi\int_A^B |y|\,d\ell, \text{ где } d\ell - \text{дифференциал дуги кривой.}$$

В зависимости от задания кривой – явное, в параметрическом виде или в полярных координатах – указанную формулу можно расписать так

$$Q_X = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx. \qquad (4.16)$$

$$Q_X = 2\pi\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt. \qquad (4.17)$$

$$Q_X = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin\varphi\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (4.18)$$

Пример 52. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $3y - x^3 = 0$, $0 \le x \le 1$.

Решение. $3y - x^3 = 0$ или $y = \frac{1}{3}x^3$

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$$

Воспользуемся формулой (4.16)

$$Q_X = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{3}x^3 \cdot \sqrt{1+(x^2)^2}dx = \frac{2\pi}{3\cdot 4}\int_0^1 (1+x^4)^{\frac{1}{2}} d(1+x^4) =$$

$$= \frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}(1+x^4)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{9}\pi(2^{\frac{3}{2}}-1) = \frac{2}{9}\pi(2\sqrt{2}-1).$$

С помощью определенного интеграла можно вычислить и многие другие геометрические и физические характеристики фигур: статические моменты и моменты инерции плоских фигур, координаты центра тяжести дуг кривых и плоских фигур, работу, давление и пр. Подробнее об этом см. [2], Гл.XII, [2] §§6,7,8,9.

Список рекомендуемой литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука, 1980. 464.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. ТТ.1- 2, М.: Интеграл-Пресс, 2001,2002, 2007. - 416с., 544с, 416с.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. ЧЧ. 1-2. - М.: Высшая школа, 1980-2000. - 304с., 416с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-
Проректор по учебной работе
___________ Е.А. Кудряшов
«2» июня _________ 2011 г.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Методические указания к ЛР-6

КУРСК 2011

УДК 519
Составители: Е.А.Бойцова, Е.В.Журавлева

Рецензент
Кандидат физ.-мат. наук, с.н.с. В.И.Дмитриев

Приближенное вычисление определенных интегралов: методические указания к ЛР-6 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова, Е.В.Журавлева. Курск, 2011. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

Излагаются методические рекомендации по вычислению определенных интегралов приближенными методами: прямоугольников, трапеций, Симпсона. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHCAD.
Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 02.06/11 Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 50 экз. Заказ 39. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Цель работы: 1. Изучить приближенные методы вычисления определенного интеграла.
2. Освоить методику применения ЭВМ к приближенному вычислению определенного интеграла.
3. Решить индивидуальное задание.

1. Задание

Вычислить значение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью:

а) формулы прямоугольников;
б) формулы трапеций;
в) формулы парабол (формулы Симпсона).

Число узлов взять равным $n = 10$.
Сравнить полученные значения между собой.
Индивидуальные задания взять из таблицы 1.1

Таблица 1.1

Индивидуальные задания

n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)^2}$	2	$\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$	3	$\int_1^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
4	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$	5	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$	6	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$
7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$	8	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\frac{2x^2}{5}dx$	9	$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$

Продолжение таблицы 1.1

n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$	n	$\int_a^b f(x)dx$
10	$\int_1^e \ln(x^2+1)dx$	11	$\int_8^{10} \sqrt{\frac{18-x}{x-6}}dx$	12	$\int_1^3 \frac{\ln(x+3)}{x}dx$
13	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{3x^2}{5}dx$	14	$\int_1^5 \frac{5^x}{7x-1}dx$	15	$\int_1^{\frac{3}{2}} \lg\frac{2-x}{1+x}dx$
16	$\int_e^{2e} \ln(x-1)^2 dx$	17	$\int_{-1}^1 x\cdot e^{-(x+1)^2}dx$	18	$\int_0^e \ln^2(x+4)dx$
19	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\frac{(2-x)^2}{4}dx$	20	$\int_\pi^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$	21	$\int_{1/2}^{3/4} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx$
22	$\int_2^9 \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}}dx$	23	$\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}dx$	24	$\int_1^3 \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$
25	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x}dx$	26	$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos x}{x}dx$	27	$\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{e^x}{x}dx$
28	$\int_2^4 \frac{(1/\sqrt{4x})+1}{(x+\sqrt{x})^2}dx$	29	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx\cdot\ln(\cos x)dx$	30	$\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$

2. Теоретические положения

2.1. Введение

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и известна её первообразная $F(x)$ (где $f(x)=F'(x)$), то определённый интеграл от этой функции в пределах от “a” до “b” может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Однако, не для всякой непрерывной функции, ее первообразная выражается через элементарные функции. В этих случаях вычисление определенных интегралов по формуле Ньютона-Лейбница невозможно. Кроме того, выражение для первообразной может оказаться очень сложным. В этих случаях, как правило, применяют различные приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Наиболее распространёнными приближенными методами вычисления определенных интегралов являются: метод прямоугольников, метод трапеций и метод парабол (метод Симпсона).

Основная идея этих методов заключается в замене подынтегральной функции $f(x)$ функцией более простой природы – многочленом, совпадающим с $f(x)$ в некоторых точках.

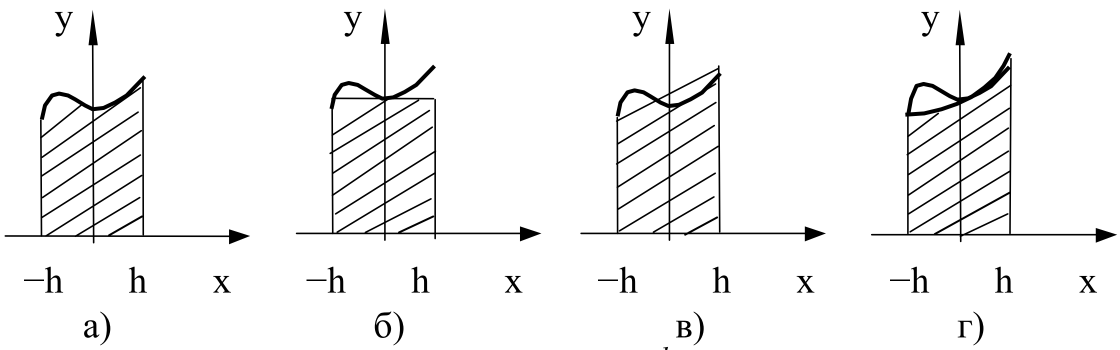


Рис.2.1

Рассмотрим при малых h интеграл $\int_{-h}^{h} f(x)dx$, представляющий собой площадь криволинейной трапеции, лежащей под графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[-h,h]$ (см. рис.2.1.а).

Заменим функцию $f(x)$ многочленом нулевого порядка, а именно константой $f(0)$. При этом интеграл $\int_{-h}^{h} f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованного прямоугольника (рис.2.1.б.)

Заменим функцию $f(x)$ многочленом первого порядка, а именно линейной функцией $y = kx + b$, совпадающей с $f(x)$ в точках $-h$ и

h. При этом интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованной прямоугольной трапеции (рис.2.1.в)

Заменим, наконец, функцию $f(x)$ многочленом второго порядка, т.е. параболой $y = ax^2 + bx + c$, совпадающей с f(x) в точках $-h$, 0, h. При этом интеграл $\int\limits_{-h}^{h} f(x)dx$ приближенно заменится площадью заштрихованной фигуры, лежащей под параболой (рис.2.1.г.)

Если требуется вычислить интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ по любому отрезку [a, b], то естественно этот отрезок разбить на достаточно большое число малых отрезков и к каждому из этих отрезков применить изложенные рассуждения. При этом мы и придем к методам прямоугольников, трапеций и парабол в их общем виде.

2.2. Формула прямоугольников

Пусть требуется вычислить интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Разобьем отрезок [$a$, b] на n равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_2 < ... < x_{2n} = b$. Обозначим через $\overset{*}{x}_{2k-1}$ точку середины отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод прямоугольников состоит в замене интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ суммой $\dfrac{b-a}{n}(f(\overset{*}{x}_1) + (f(\overset{*}{x}_3) + ... + f(\overset{*}{x}_{2n-1}))$ площадей прямоугольников с высотами соответственно равными $f(\overset{*}{x}_{2k-1})$, и основаниями, равными $x_{2k} - x_{2k-2} = \dfrac{b-a}{n}$ (рис.2.2).

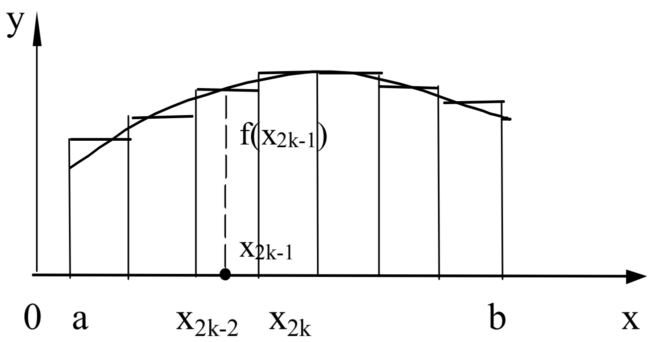


Рис.2.2

Таким образом, справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}[f(x_1^*) + (f(x_3^*) + ... + f(x_{2n-1}^*)] + R, \qquad (2.1)$$

где R – остаточный член. Формула (2.1) называется формулой прямоугольников.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η, что остаточный член R в формуле (2.1) равен

$$R = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(\eta) \qquad (2.2)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене криволинейной трапеции на прямоугольник, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^3$. Таким образом, формула (2.1) тем точнее, чем меньше $\frac{b-a}{n}$.

2.3. Формула трапеций

Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей при помощи точек
$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ (рис.2.3).

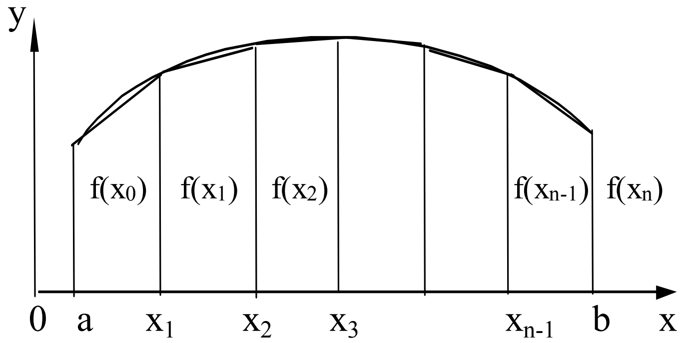


Рис.2.3

Метод трапеций состоит в замене интеграла $\int_a^b f(x)dx$ суммой

$$\frac{b-a}{2n}((f(x_0)+f(x_1))+(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+(f(x_{n-1})+f(x_n)))=$$

$$=\frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)),$$

площадей трапеций с основаниями, соответственно равными $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$, и с высотами, равными $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$.

Таким образом справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k))+R, \qquad (2.3)$$

где R – остаточный член. Формула (2.3) называется формулой трапеций.

Можно доказать, что если функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную вторую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η, что остаточный член R в формуле (2.3) имеет вид

$$R = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\eta). \qquad (2.4)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене криволинейной трапеции на прямоугольную трапецию, имеет порядок $\left(\dfrac{b-a}{n}\right)^3$.

2.4. Формула парабол (формула Симпсона)

Для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ разобьем отрезок [*a, b*] на *n* равных частей при помощи точек $a = x_0 < x_2 < ... < x_{2n} = b$ и обозначим через x_{2k-1} середину отрезка $[x_{2k-2}, x_{2k}]$. Метод парабол заключается в замене интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ суммой

$$\frac{b-a}{6n}([f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[(f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+...+$$
$$+[(f(x_{2n-2})+4f(x_{2n-1})+f(x_{2n})]) =$$
$$=\frac{b-a}{6n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}))$$

площадей фигур, (рис.2.4) представляющих собой криволинейные трапеции, лежащие под параболами, проходящими через три точки графика функции *f*(*x*) с абсциссами $x_{2k-2}, x_{2k-1}, x_{2k}$.

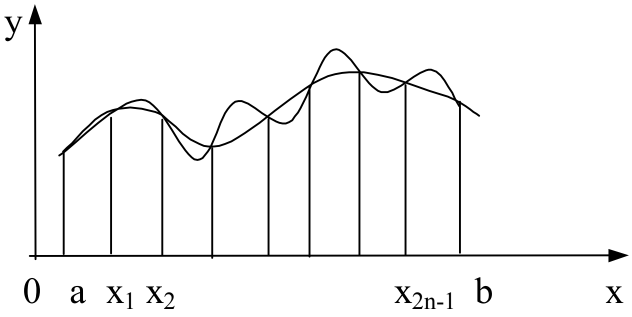


Рис.2.4

Таким образом, справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6n}(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})+4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}))+R, \qquad (2.5)$$

где *R* – остаточный член. Формула (2.5) называется формулой парабол или формулой Симпсона.

Можно доказать, что если функция *f*(*x*) имеет на отрезке [*a, b*] непрерывную четвертую производную, то на этом отрезке найдется такая точка η, что остаточный член *R* в формуле (2.5) равен

$$R = -\frac{(b-a)^5}{2880n^4} f^{(4)}(\eta). \qquad (2.6)$$

Кроме того, можно доказать, что ошибка, совершаемая при замене определенного интеграла указанной площадью, имеет порядок $\left(\frac{b-a}{n}\right)^5$.

3. Образец выполнения задания

Замечание. *В дальнейшем изложении текст, выделенный курсивом, носит пояснительный характер и включается в отчет по лабораторной работе.*

Введем пределы интегрирования, подынтегральную функцию и число разбиений

$a := 0{,}1 \qquad b := 2$

$f(x) := \dfrac{\sin x}{x} \qquad n = 10$

Зададим шаг и формулу нахождения координат точек деления отрезка $[a,b]$

$h := \dfrac{b-a}{n}$

$i := 1..19$

$x(i) = a + i \cdot \dfrac{h}{2}$

Пояснение. *Здесь, при четных* $i = 2k$ *получаем координаты точек деления отрезка на десять равных частей при нечетных* $i = 2k - 1$ *- средние точки частичных отрезков.*

а) Применим формулу прямоугольников и найдем соответствующее приближенное значение определенного интеграла

$$S_1 := h \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x(2 \cdot k - 1))$$

$$S_1 = 1.506.$$

б) Используем формулу трапеций для вычисления того же интеграла

$$S_2 := \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(x(2 \cdot k)) \right)$$

$S_2 = 1.505.$

в) По формуле Симпсона найдем

$$S_3 := \frac{h}{6} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} f(x(2 \cdot k)) + 4 \cdot \sum_{k=1}^{n} f(x(2 \cdot k - 1)) \right)$$

$S_3 = 1.505.$

Вычислим точное значение заданного интеграла

$$J := \int_a^b f(x)dx$$

$J = 1.505$

Сравнивая полученные приближенные значения между собой и с истинным значением, видим преимущество формулы Симпсона перед двумя другими формулами, а погрешность вычисления по формуле трапеций и прямоугольников приблизительно одинаковая.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Объясните, в чем заключается геометрический смысл определенного интеграла.
3. Изложите кратко суть метода прямоугольников.
4. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом прямоугольников при числе узлов *n*=4.
5. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом трапеций при числе узлов *n*=4.
6. Запишите формулу для приближенного вычисления определенного интеграла методом Симпсона при числе узлов *n*=6.
7. Дайте оценку погрешности для каждого из методов.

Библиографический список

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. ч.1. М.: Наука, 1982, 616с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1980, 432с.

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«__» июня __________ 2013 г.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Методические указания по выполнению лабораторной работы

КУРСК 2013

УДК 519
Составитель Е.А.Бойцова

Рецензент
Кандидат пед. наук, *Л.И. Студеникина*

Интегрирование рациональных дробей: Методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова. Курск, 2013. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: 2 назв.

Излагаются методические рекомендации по интегрированию рациональных дробей. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHCAD.
Предназначено для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Цель работы: 1. Изучить методы разложения многочлена на неприводимые множители
2. Изучить методы представления рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.
3. Освоить методику интегрирования рациональных дробей
4. Освоить методику применения ЭВМ при представлении рациональной дроби в виде суммы простейших дробей.
5. Решить индивидуальное задание.

1. Теоретические положения

1.1 *Основные понятия*

Многочленом n-й степени называется выражение вида

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где a_i – коэффициенты многочлена, действительные числа, число n - называется степенью многочлена.

Корнем многочлена называется такое значение x_1 (действительное или комплексное), при котором многочлен обращается в нуль, т.е. $P_n(x)\equiv 0$.

Если x_1 есть корень многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x)$ делится без остатка на $(x\text{-}x_1)$, т. е. $P_n(x)=(x\text{-}x_1)Q_{n-1}(x)$*(следствие из теоремы Безу).*

Если многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на $(x\text{-}x_1)^k$ (k - натуральное число) и не делится на $(x\text{-}x_1)^{k+1}$, то число k называется кратностью корня. $P_n(x)=(x\text{-}x_1)^k Q_{n-k}(x)$

1.2 *Разложение многочлена на неприводимые множители*

Всякий многочлен степени n разлагается на n линейных множителей вида $(x\text{-}x_1)$ и множитель, равный коэффициенту при x^n, т. е. $P_n(x)=a_n(x\text{-}x_1)(x\text{-}x_2)\ldots(x\text{-}x_n)$.

Всякий многочлен n-ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Если многочлен $P_n(x)$с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a+bi$, то он имеет и сопряженный ему корень a-bi.

Многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители с действительными коэффициентами первой и второй степени соответствующей кратности, т.е.

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}...(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}...(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$$

где $k_1+k_2+...+k_r+m_1+...+m_s=n$.

Пример: Разложить на множители $P_5(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

Сгруппируем слагаемые $P_5(x)=(x^5+x^4+x^3)+(x^2+x+1)=$
$=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3+1)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x+1)$.
Дискриминанты многочленов (x^2+x+1) и (x^2-x+1) – отрицательны, следовательно, они являются неприводимыми множителями.

1.3 *Интегрирование рациональных дробей*

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т. е. в виде отношения двух многочленов

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = \frac{B_0x^m + B_1x^{m-1} + ... + B_m}{A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_n}$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Если степень числителя меньше степени знаменателя, то дробь называется правильной, в противном случае дробь называется неправильной.

Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)} = M(x) + \frac{F(x)}{f(x)}$$

здесь $M(x)$- многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь.

Пример: $$\frac{3x^4-5}{x^2+3x-1} = 3x^2-9x+30-\frac{99x-25}{x^2+3x-1}.$$

Так как интегрирование многочленов не вызывает затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных рациональных дробей.

Правильные рациональные дроби вида:

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $\left(\begin{array}{c} k\text{-целое положи-} \\ \text{тельное число} \geq 2 \end{array}\right)$

III. $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\left(\begin{array}{c} \text{корни знаменателя} \\ \text{комплексные} \end{array}\right)$

IV. $\dfrac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ $\left(\begin{array}{c} k\text{- целое } \geq 2, \\ \text{корни заменателя} \\ \text{комплексные} \end{array}\right)$

называются простейшими дробями I, II, III, IV типов.

Пусть требуется вычислить $\displaystyle\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$, если дробь, стоящая под знаком интеграла, неправильная, то мы представим ее в виде суммы многочлена $M(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{F(x)}{f(x)}$.

Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя *f(x)*. Здесь возможны следующие случаи:

I случай: Корни знаменателя действительные и различные, т. е. *f(x)=(x-a)(x-b)…(x-d)*. Тогда будем иметь:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \ldots + \frac{D}{x-d}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{F(x)}{f(x)}dx = \int \frac{A}{x-a}dx + \int \frac{B}{x-b}dx + \ldots + \int \frac{D}{x-d} =$$

$$= A \cdot ln|x-a| + B \cdot ln|x-b| + \ldots + D \cdot ln|x-d| + C$$

II случай: Корни знаменателя действительные, причем некоторые из них кратные, т. е. $f(x)=(x\text{-}a)^n(x\text{-}b)^k\ldots(x\text{-}d)^m$.

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_n}{(x-a)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-a)^{n-1}}+\ldots+\frac{A_1}{x-a}+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}}+\ldots+$$
$$+\frac{B_1}{x-b}+\ldots+\frac{D_m}{(x-d)^m}+\frac{D_{m-1}}{(x-d)^{m-1}}+\ldots+\frac{D_1}{x-d}$$

и мы приходим к интегралам от степенных функций.

III случай: Среди корней знаменателя есть комплексные не повторяющиеся, т. е. $f(x)=(x^2+px+q)(x^2+lx+k)\ldots(x^2+sx+r)$.

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{Ax+B}{x^2+px+q}+\frac{Mx+N}{x^2+lx+k}+\ldots+\frac{Cx+D}{x^2+sx+r}$$

и мы приходим к интегралам, содержащим квадратный трехчлен в знаменателе.

IV случай: Среди корней знаменателя есть комплексные кратные, т. е. $f(x)=(x^2+px+q)^m(x^2+lx+k)^n\ldots(x^2+sx+r)^v$.

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A_nx+B_n}{(x^2+px+q)^n}+\ldots+\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{M_mx+N_m}{(x^2+lx+k)^m}+\ldots+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+lx+k}+\frac{C_vx+D_v}{(x^2+sx+r)^v}+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+sx+r}$$

2. Задание

Вычислить интеграл $\int\frac{P_5(x)}{Q_6(x)}dx$

1. Разложить знаменатель $Q_6(x)$ на неприводимые множители.
2. Представить дробь $\frac{P_5(x)}{Q_6(x)}$ в виде суммы простейших дробей с неопределёнными коэффициентами.
3. Найти полученные интегралы с использованием MATHCAD.
4. Найти вручную полученные интегралы от простейших дробей.
5. Значения $P_5(x)$ и $Q_6(x)$ взять из таблицы 1.

Таблица 1

№	$P_5(x)$	$Q_6(x)$
1	$6x^5+17x^4-27x^3+12x^2-19x+9$	$x^6+3x^5-9x^4+4x^3-3x^2+9x-5$
2	$2x^5-2x^4-22x^3-13x^2+43x+43$	$-2x^6-5x^5-x^4+x^3-11x^2-16x-6$
3	$8x^5+36x^4-13x^3-286x^2-163x+490$	$-x^6-3x^5+17x^4+70x^3+117x^2+405x+675$
4	$14x^5-127x^4+403x^3-530x^2+373x+315$	$3x^6-17x^5+6x^4+58x^3+99x^2-297x-108$
5	$7x^5-51x^4+159x^3-260x^2+207x-63$	$2x^6-15x^5+45x^4-71x^3+66x^2-36x+8$
6	$7x^5+23x^4+7x^3-51x^2-69x-52$	$-x^6-6x^5-14x^4-17x^3-6x^2+20x+24$
7	$4x^5+4x^4-68x^3+21x^2+536x+321$	$-x^6-5x^5+2x^4+24x^3-27x^2-27x+162$
8	$2x^5+51x^4+387x^3+1189x^2+1206x-230$	$-x^6-11x^5-32x^4+38x^3+328x^2+544x+384$
9	$9x^5-4x^4-31x^3-48x^2-27x-9$	$3x^6+11x^5+23x^4+30x^3+17x^2-x-3$
10	$5x^5-16x^4+34x^3-7x^2-30x+20$	$-2x^6+7x^5-12x^4+12x^3-4x^2-3x+2$
11	$4x^5-x^4-36x^3+16x^2+120x-121$	$-2x^6+13x^5-29x^4+25x^3-14x^2+28x-24$
12	$5x^5+13x^4-78x^3+179x^2-257x+158$	$x^6-x^5-6x^4+34x^3-71x^2+63x-20$
13	$7x^5+42x^4+15x^3-212x^2+50x+512$	$x^6+x^5-11x^4-22x^3-28x^2-88x-96$

Продолжение таблицы 1

14	$76x^5+158x^4+103x^3+4x^2-27x-11$	$8x^6+28x^5+46x^4+45x^3+26x^2+8x+1$
15	$96x^5-186x^4+76x^3+86x^2-80x+27$	$8x^6-4x^5-14x^4+33x^3-31x^2+13x-2$
16	$3x^5-14x^4-16x^3-18x^2-6x+1$	$4x^6+13x^5+16x^4+10x^3+4x^2+x$
17	$-51x^5+151x^4-95x^3+2x^2+5$	$9x^6-25x^5+22x^4-6x^3+x^2-x$
18	$16x^5+68x^4+73x^3+91x^2+165x-121$	$4x^6+51x^5+204x^4+327x^3+186x^2+36x+56$
19	$48x^5-304x^4+659x^3-567x^2-64x+24$	$9x^6-57x^5+19x^4+480x^3-891x^2+297x-81$
20	$88x^5-76x^4-58x^3+93x^2+77x+19$	$32x^6-32x^5-136x^4-140x^3-76x^2-23x-3$
21	$16x^5+18x^4-8x^3-17x^2+2$	$3x^6+5x^5+4x^4-2x^3$
22	$49x^5+98x^4+102x^3-75x^2-73x-14$	$5x^6+27x^5+45x^4+14x^3$
23	$25x^5+49x^4+119x^3+96x^2-143x-56$	$3x^6+10x^5+31x^4+56x^3$
24	$-7x^5-21x^4-139x^3-250x^2-79x-24$	$6x^6+17x^5+39x^4+71x^3+59x^2+12x-4$
25	$25x^5-73x^4+125x^3-60x^2+34x+159$	$5x^6-13x^5+54x^4-116x^3+79x^2+9x-18$
26	$-5x^5+57x^4+720x^3+100x^2-906x+994$	$3x^6+26x^5-53x^4-445x^3+1204x^2-49x-686$

3. Образец выполнения задания

Вычислить интеграл $\int \frac{7x^5 + 51x^4 + 125x^3 + 130x^2 + 185x + 70}{x^6 + 7x^5 + 13x^4 + x^3 - 18x^2 - 108x - 216} dx$

Разложим знаменатель $Q_6(x) = x^6 + 7x^5 + 13x^4 + x^3 - 18x^2 - 108x - 216$ на неприводимые множители. Для этого воспользуемся символьным оператором «factor», т.е.

$x^6+7\cdot x^5+13\cdot x^4+x^3-18\cdot x^2-108\cdot x-216$ factor $\rightarrow (x-2)\cdot(x+3)^3\cdot(x^2+4)$

Представим исходную дробь в виде суммы простых дробей с неопределенными коэффициентами

$$\frac{P_5(x)}{Q_6(x)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} + \frac{D}{(x+3)^3} + \frac{Fx+E}{x^2+4}$$

Воспользуемся символьным оператором «parfrac» и разложим данную дробь на сумму простых дробей

$$\frac{7x^5 + 51x^4 + 125x^3 + 130x^2 + 185x + 70}{x^6 + 7x^5 + 13x^4 + x^3 - 18x^2 - 108x - 216} \, convert, parfrac, x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{4}{(x+3)^3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$$

Далее проинтегрируем получившееся выражение, используя символьный оператор « $\rightarrow$ »

$$\int \left[\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+3} + \frac{1}{(x+3)^2} + \frac{4}{(x+3)^3} + \frac{2\cdot x+1}{x^2+4} \right] dx \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\cdot\ln(x-2) - \frac{2}{(x+3)^2} - \frac{1}{(x+3)} + 2\cdot\ln(x+3) + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{atan}(\frac{1}{2}\cdot x)$$

Вычислим вручную неопределённые интегралы от каждой из полученных простых дробей:

$$\int \frac{3}{x-2}dx = 3\cdot\ln(x-2)+C; \quad \int \frac{2}{x+3}dx = 2\cdot\ln(x+3)+C;$$

$$\int \frac{2}{(x+3)^2}dx = 2\cdot\frac{(x+3)^{-2+1}}{-2+1}+C = -\frac{2}{x+3}+C;$$

$$\int \frac{2}{(x+3)^3}dx = 2\cdot\frac{(x+3)^{-3+1}}{-3+1}+C = -\frac{1}{(x+3)^2}+C;$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4}dx = \int \frac{2xdx}{x^2+4}+\int \frac{dx}{x^2+4} = \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4}+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\cdot arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Тогда интеграл от суммы нескольких функций равен сумме интегралов от каждой из этих функций, т.е. будем иметь

$$\int \left[\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x+3}+\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{4}{(x+3)^3}+\frac{2\cdot x+1}{x^2+4}\right]dx =$$

$$= \int \frac{3}{x-2}dx+\int \frac{2}{x+3}dx+\int \frac{dx}{(x+3)^2}+\int \frac{4}{(x+3)^3}dx+\int \frac{2\cdot x+1}{x^2+4}dx =$$

$$= 3\cdot\ln(x-2)+2\cdot\ln(x+3)-\frac{1}{(x+3)}-\frac{2}{(x+3)^2}+\ln(x^2+4)+\frac{1}{2}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

Контрольные вопросы

1.Дайте понятие многочлена n-й степени.
2. Что называется корнем многочлена?
3. Дайте понятие кратности корня.
4. Дайте понятие комплексного числа.
5. Сколько корней имеет многочлен n-й степени?
6. Укажите символьный оператор системы MATHCAD, используемый для разложения многочлена на неприводимые множители.
7. Какая дробь называется правильной?
8. Дайте понятие правильной и неправильной рациональной дроби.

9. Дайте понятие простейшей дроби. Укажите основные типы простейших дробей.
10. Укажите символьный оператор системы MATHCAD, используемый для разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.
11. Укажите символьный оператор системы MATHCAD, используемый для нахождения неопределённых интегралов.

Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - ISBN 5-89602-012-0
2. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : Учеб. пособие: В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевников. - 5-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 1999. - 304 с. : ил. - ISBN 5-06-003070-9.
3. Шипачев В. С. Высшая математика : Учебник для студ. вуз. / В. С. Шипачев. - 4-е изд., стер. - М. : Высшая школа, 1998. - 479 с.
4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие / Григорий Иванович Запорожец. - 6-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2010. - 464 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0912-9 :

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«__» ________ 2013 г.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОД АДАМСА И РУНГЕ-КУТТА

Методические указания по выполнению лабораторной работы

КУРСК 2013

УДК 519
Составитель Е.А.Бойцова

Рецензент
Кандидат пед. наук, доцент Л.И. Студеникина

Численное решение дифференциальных уравнений. Метод Адамса и Рунге-Кутта: методические указания по выполнению лабораторной работы/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.А.Бойцова. Курск, 2013. 12 с.: ил. 4, табл. 1. Библиогр.: с.18.

Излагаются основные численные методы решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения: метод Адамса и метод Рунге-Кутта. Проводится разбор примеров с применением программного продукта MATHCAD.
Методические указания предназначены для студентов всех специальностей.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж ___ экз. Заказ ___. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Содержание

Цель работы: 1. Изучение основных положений теории дифференциальных уравнений.
2. Изучение основных численных методов решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения.
3. Изучение методов Адамса и Рунге-Кутта решения обыкновенного дифференциального уравнения.
4. Разработка алгоритма, программы и решение на ЭВМ обыкновенного дифференциального уравнения методами Рунге-Кутта и Адамса.

I. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1. **Основные понятия. Задача Коши.**

Определение: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее функцию $y(x)$, аргумент x и производные функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $F(x,y',y',\ldots,y^{(n)})=0$.

Так как искомая функция $y=y(x)$, фигурирующая в уравнении, есть функция одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют в этом случае *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид $F(x,y,y')=0$. Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, будет иметь вид:

$$y'=f(x,y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.1}$$

Обычно такое уравнение имеет бесконечно много решений $y=y(x)$, и выделение одного конкретного (частного) решения осуществляется предъявлением к решению дополнительных требований. Часто, например, ставится так называемая задача Коши: среди всех решений дифференциального уравнения

$$y'=f(x,y)$$

найти такое решение $y = y(x)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента принимает заданное значение y_0:

$$y(x_0) = y_0 \qquad (1.2)$$

Числа x_0, y_0 называются при этом начальными данными, а условие (1.2) - начальным условием.

Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Определение: Частным решением называется любая функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$, если в последнем придать C конкретное значение $C=C_0$.

Соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$ называется в этом случае частным интегралом.

2. Метод Рунге-Кутта для решения задачи Коши

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(x,y) \qquad (2.1)$$

при начальном условии $y=y_0$ при $x=x_0$.

Требуется на данном промежутке $x_0 \le x \le X$ найти решение $y(x)$ уравнения (2.1) с заданной степенью точности ε. Для этого выберем шаг вычислений $h = \dfrac{X - x_0}{n}$, деля отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей так, чтобы $h^4<\varepsilon$. Точки деления отрезка определим по формуле $x_i=x_0+i\cdot h$ (i=0,1,2,3,…,n). Соответствующие значения $y_i=y(x_i)$ искомой функции по методу Рунге-Кутта последовательно вычисляются по формулам:

$$y_{i+1}=y_i+\Delta y_i,$$

где $\Delta y_i = \dfrac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$, i=0,1,2,…,n,

$$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)\cdot h,$$
$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)\cdot h,$$
$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)\cdot h, \qquad (2.2)$$
$$k_4^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right)\cdot h.$$

Грубую оценку погрешности метода Рунге-Кутта на данном промежутке $[x_0, X]$ можно получить, исходя из принципа Рунге:

$R = \dfrac{|y_{2m} - \tilde{y}_m|}{15}$, где n=2m, y_{2m}, $\tilde{y}_m$ результаты вычислений по схеме (2.2) с шагом h и $2h$.

3. Метод Адамса для решения задачи Коши

Для решения уравнения (2.1) по методу Адамса, исходя из начальных условий $y(x_0) = y_0$ мы находим методом Рунге-Кутта следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$y_1 = y(x_1) = y(x_0+h)$, $y_2 = y(x_2) = y(x_0+2h)$, $y_3 = y(x_3) = y(x_0+3h)$

Находим далее величины

$$q_0 = h\cdot y_0' = h\cdot f(x_0, y_0), \qquad q_1 = h\cdot y_1' = h\cdot f(x_1, y1),$$
$$q_2 = h\cdot y_2' = h\cdot f(x_2, y_2), \qquad q_3 = h\cdot y_3' = h\cdot f(x_3, y_3).$$

Составим диагональную таблицу конечных разностей значений q:

x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y_n' =$ $=f(x_n,y_n)$	$q_n =$ $= y_n' \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $= \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $= \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0,y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1,y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2,y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3,y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4,y_4)$	q_4	Δq_4		
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5,y_5)$	q_5			
x_6	y_6		$f(x_6,y_6)$				

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3} \qquad (3.\ 1)$$

Полагая в формуле (3.1) i=3, вычисляем

$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Найдя Δy_3, вычисляем $y_4=y_3+\Delta y_3$. Зная x_4 и y_4 , находим $q_4=h\cdot f(x_4,y_4)$ и вносим значения y_4, Δy_3 и q_4 в таблицу разностей и пополняем её конечными разностями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней и т.д. Аналогично находится диагональ q_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. С помощью этой диагонали мы находим значение y_6 искомого решения $y(x)$.

II. ЗАДАНИЕ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка

Таблица 1

№	Уравнение	Начальные условия
1	$y' = \frac{y+1}{x}$	y=0 при x=0
2	$2xy\,y'+x^2-y^2=0$	y=0 при x=1
3	$e^{x-y}y'=1$	y=1 при x=1
4	$y'ctgx+y=2$	y=2 при x=0
5	$e^y(y'+1)=1$	y=0 при x=0
6	$y'+y=cosx$	y=0,5 при x=0
7	$y'-2y=-x^2$	y=0,25 при x=0
8	$y'+y=2x$	y=-1 при x=0
9	$x\,y'=y$	y=1 при x=1
10	$2x\,y'=y$	y=1 при x=1
11	$2xy\,y'+x^2-y^2=0$	y=0 при x=0
12	$x\,y'=y$	y=0 при x=0
13	$2x\,y'=y$	y=0 при x=0
14	$2xy\,y'+x^2-y^2=0$	y=1 при x=0
15	$x\,y'+y-e^x=0$	y=1 при x=0

III. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$, при заданных начальных условиях y=0 при x=0. Требуется на данном промежутке $0 \le x \le 1$ найти решение $y(x)$ уравнения $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0$с заданной степенью точности ε=0,001. Для этого выберем шаг вычислений $h = \frac{1-0}{6} = \frac{1}{6}$, деля отрезок [0, 1] на 6 равных частей так, чтобы h^4<ε (0,00077<0,001). Точки деления отрезка определим по формуле x_i=0+i·0,167 (i=0,1,2,3,…,6). Соответствующие значения y_i=y(x_i) искомой функции по методу Рунге-Кутта последовательно вычисляются по формулам: y_{i+1}=y_i+Δ y_i, где $\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$, i=0,1,2,…,6,

$$k_1^{(i)} = f\left(x_i, y_i\right) \cdot h,$$

$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$

$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$

$$k_4^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \cdot h.$$

Применение программного продукта MathCad

$$f(x,y) := 1 + x + \frac{y}{1-x^2}$$

$$x_0 := 0 \qquad y_0 := 0 \qquad h := \frac{1}{6} \qquad h = 0.167 \qquad i := 0..6 \qquad x_i := x_0 + i \cdot h$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.333 \\ 0.5 \\ 0.667 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix}$$

вычисляем коэффициенты:

$$k_1^{(i)} = f\left(x_i, y_i\right) \cdot h,$$
$$k_2^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$
$$k_3^{(i)} = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right) \cdot h,$$
$$k_4^{(i)} = f\left(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}\right) \cdot h.$$

Для $i := 0$ найдём

$$k_1 := f\left(x_0, y_0\right) \cdot h \qquad k_1 = 0.167$$

$$k_2 := f\left[\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), y_0 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.195$$

$$k_3 := f\left[\left(x_0 + \frac{h}{2}\right), y_0 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.197$$

$$k_4 := f\left[\left(x_0 + h\right), y_0 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 0.228$$

Тогда $\Delta Y_0 := \frac{1}{6}\cdot\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_0 = 0.196$

$y_1 := y_0 + \Delta Y_0 \qquad y_1 = 0.196$

Для $i := 1$ найдём

$k_1 := f\left(x_1, y_1\right)\cdot h \qquad k_1 = 0.228$

$k_2 := f\left[\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), y_1 + \frac{k_1}{2}\right]\cdot h \qquad k_2 = 0.264$

$k_3 := f\left[\left(x_1 + \frac{h}{2}\right), y_1 + \frac{k_2}{2}\right]\cdot h \qquad k_3 = 0.267$

$k_4 := f\left[\left(x_1 + h\right), y_1 + k_3\right]\cdot h \qquad k_4 = 0.309$

Тогда $\Delta Y_1 := \frac{1}{6}\cdot\left(k_1 + 2\cdot k_2 + 2\cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_1 = 0.266$

$y_2 := y_1 + \Delta Y_1 \qquad y_2 = 0.463$

Для $i := 2$ найдём

$k_1 := f\left(x_2, y_2\right)\cdot h \qquad k_1 = 0.309$

$k_2 := f\left[\left(x_2 + \frac{h}{2}\right), y_2 + \frac{k_1}{2}\right]\cdot h \qquad k_2 = 0.361$

$k_3 := f\left[\left(x_2 + \frac{h}{2}\right), y_2 + \frac{k_2}{2}\right]\cdot h \qquad k_3 = 0.366$

$$k_4 := f\left[\left(x_2 + h\right), y_2 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 0.434$$

Тогда $\Delta Y_2 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_2 = 0.366$

$$y_3 := y_2 + \Delta Y_2 \qquad y_3 = 0.828$$

Для $i := 3$ найдём

$$k_1 := f\left(x_3, y_3\right) \cdot h \qquad k_1 = 0.434$$

$$k_2 := f\left[\left(x_3 + \frac{h}{2}\right), y_3 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.528$$

$$k_3 := f\left[\left(x_3 + \frac{h}{2}\right), y_3 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.54$$

$$k_4 := f\left[\left(x_3 + h\right), y_3 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 0.688$$

Тогда $\Delta Y_3 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_3 = 0.543$

$$y_4 := y_3 + \Delta Y_3 \qquad y_4 = 1.371$$

Для $i := 4$ найдём

$$k_1 := f\left(x_4, y_4\right) \cdot h \qquad k_1 = 0.689$$

$$k_2 := f\left[\left(x_4 + \frac{h}{2}\right), y_4 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 0.945$$

$$k_3 := f\left[\left(x_4 + \frac{h}{2}\right), y_4 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 0.994$$

$$k_4 := f\left[\left(x_4 + h\right), y_4 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 1.596$$

Тогда $\Delta Y_4 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_4 = 1.027$

$$y_5 := y_4 + \Delta Y_4 \qquad y_5 = 2.399$$

Для $i := 5$ найдём

$$k_1 := f\left(x_5, y_5\right) \cdot h \qquad k_1 = 1.614$$

$$k_2 := f\left[\left(x_5 + \frac{h}{2}\right), y_5 + \frac{k_1}{2}\right] \cdot h \qquad k_2 = 3.665$$

$$k_3 := f\left[\left(x_5 + \frac{h}{2}\right), y_5 + \frac{k_2}{2}\right] \cdot h \qquad k_3 = 4.735$$

$$k_4 := f\left[\left(x_5 + h\right), y_5 + k_3\right] \cdot h \qquad k_4 = 5.354 \times 10^{15}$$

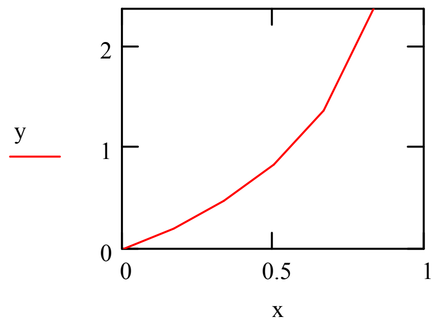
Тогда $\Delta Y_5 := \frac{1}{6} \cdot \left(k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4\right)$ $\qquad \Delta Y_5 = 8.924 \times 10^{14}$

$$y_6 := y_5 + \Delta Y_5 \qquad y_6 = 8.924 \times 10^{14}$$

Окончательно имеем:

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.167 \\ 0.333 \\ 0.5 \\ 0.667 \\ 0.833 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.196 \\ 0.463 \\ 0.828 \\ 1.371 \\ 2.399 \\ 8.924\times 10^{14} \end{pmatrix} \qquad \Delta Y = \begin{pmatrix} 0.196 \\ 0.266 \\ 0.366 \\ 0.543 \\ 1.027 \\ 8.924\times 10^{14} \end{pmatrix}$$

Построим график искомой функции на отрезке [0,1]



Для решения по методу Рунге-Кутта можно воспользоваться так же готовой программой в среде MathCad «Метод Рунге-Кутта», которая имеет следующий вид:

$$f(x,y) := \frac{y}{1-x^2} + 1 + x \qquad a := 0 \qquad b := 1 \qquad x_0 := a \qquad n := 6 \qquad y_0 := 0$$

$$h := \frac{b - x_0}{n} \qquad h = 0.167 \qquad i := 0..6 \qquad x_i := x_0 + i\cdot h$$

$$
M := \left|
\begin{array}{l}
y_0 \leftarrow 0 \\
\text{for } i \in 0..5 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
k_{i,1} \leftarrow f(x_i, y_i) \cdot h \\
k_{i,2} \leftarrow f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_{i,1}}{2}\right) \cdot h \\
k_{i,3} \leftarrow f\left(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{k_{i,2}}{2}\right) \cdot h \\
k_{i,4} \leftarrow f(x_i + h, y_i + k_{i,3}) \cdot h \\
\Delta y_i \leftarrow \dfrac{1}{6} \cdot \left(k_{i,1} + 2 \cdot k_{i,2} + 2 \cdot k_{i,3} + k_{i,4}\right) \\
y_{i+1} \leftarrow y_i + \Delta y_i
\end{array}
\right. \\
M_1 \leftarrow k \\
M_2 \leftarrow \Delta y \\
M_3 \leftarrow y \\
M
\end{array}
\right.
$$

$$k := M_1 \qquad \Delta y := M_2 \qquad y := M_3$$

$$
k = \begin{pmatrix}
0 & 0.167 & 0.195 & 0.197 & 0.228 \\
0 & 0.228 & 0.264 & 0.267 & 0.309 \\
0 & 0.309 & 0.361 & 0.366 & 0.434 \\
0 & 0.434 & 0.528 & 0.54 & 0.688 \\
0 & 0.689 & 0.945 & 0.994 & 1.596 \\
0 & 1.614 & 3.665 & 4.735 & 5.354 \times 10^{15}
\end{pmatrix}
\qquad
\Delta y = \begin{pmatrix}
0.196 \\
0.266 \\
0.366 \\
0.543 \\
1.027 \\
8.924 \times 10^{14}
\end{pmatrix}
\qquad
y = \begin{pmatrix}
0 \\
0.196 \\
0.463 \\
0.828 \\
1.371 \\
2.399 \\
8.924 \times 10^{14}
\end{pmatrix}
$$

Рассмотрим далее решение этой задачи по методу Адамса, исходя из начальных условий $y(0)=0$ мы запишем, найденные методом Рунге-Кутта, следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$y_0 = y(0)=0$, $y_1=0{,}196$, $y_2=0{,}463$, $y_3= 0{,}828$

Находим далее величины

$$q_0 = h \cdot y_0' = h \cdot f(x_0, y_0), \qquad q_1 = h \cdot y_1' = h \cdot f(x_1, y1),$$

$$q_2 = h \cdot y_2' = h \cdot f(x_2, y_2), \qquad q_3 = h \cdot y_3' = h \cdot f(x_3, y_3).$$

Используя программный продукт MathCad найдём

$q_0 := h \cdot f(x_0, y_0)$ $\qquad q_0 = 0.167$

$q_1 := h \cdot f(x_1, y_1)$ $\qquad q_1 = 0.228$

$q_2 := h \cdot f(x_2, y_2)$ $\qquad q_2 = 0.309$

$q_3 := h \cdot f(x_3, y_3)$ $\qquad q_3 = 0.434$

Составим диагональную таблицу конечных разностей значений q:

	x_n	y_n	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	$y_n' = f(x_n, y_n)$	$q_n = y_n' \cdot h$	$\Delta q_n = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125		
3	0,5	0,828		2,598	0,434			
4	0,667							
5	0,833							
6	1							

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью формулы Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$$

Используя программный продукт MathCad найдём

$q_3 = 0.434 \qquad \Delta q_2 := 0.434 \quad \Delta 2q_1 := 0.044 \quad \Delta 3q_0 := 0.2$

$$\Delta y_3 := q_3 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot \Delta q_2 + \left(\frac{5}{12}\right)\cdot \Delta 2q_1 + \left(\frac{3}{8}\right)\cdot \Delta 3q_0$$

$\Delta y_3 = 0.759 \qquad y_4 := y_3 + \Delta y_3 \qquad y_4 = 1.588$

$q_4 := h \cdot f(x_4, y_4) \qquad q_4 = 0.754$

вносим значения y_4=1,588, Δy_3=0,759 и q_4=0,754 в таблицу разностей и пополняем её конечными разностями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^3 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней.

	x_n	y_n	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	$y'_n = f(x_n,y_n)$	$q_n = y'_n \cdot h$	$\Delta q_n = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32		
4	0,667	1,588		4,515	0,754			
5	0,833							
6	1							

Аналогично находится диагональ $q_5, \Delta q_4, \Delta^2 q_3, \Delta^3 q_2$.

$q_4 = 0.754 \qquad \Delta q_3 := 0.32 \qquad \Delta 2q_2 := 0.195 \quad \Delta 3q_1 := 0.151$

$$\Delta y_4 := q_4 + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot \Delta q_3 + \left(\frac{5}{12}\right)\cdot \Delta 2q_2 + \left(\frac{3}{8}\right)\cdot \Delta 3q_1$$

$\Delta y_4 = 1.052 \qquad y_5 := y_4 + \Delta y_4 \qquad y_5 = 2.64$

$q_5 := h \cdot f(x_5, y_5) \qquad q_5 = 1.746$

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y'_n =$ $=f(x_n,y_n)$	$q_n =$ $= y'_n \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $=\Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $=\Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	0,531
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32	0,682	
4	0,667	1,588	1,052	4,515	0,754	1,002		
5	0,833	2,64		10,515	1,756			
6	1							

С помощью этой диагонали мы находим значение y_6 искомого решения $y(x)$.

$q_5 = 1.746 \qquad \Delta q_4 := 1.002 \quad \Delta 2q_3 := 0.682 \quad \Delta 3q_2 := 0.53$

$$\Delta y_5 := q_5 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Delta q_4 + \left(\frac{5}{12}\right) \cdot \Delta 2q_3 + \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \Delta 3q_2$$

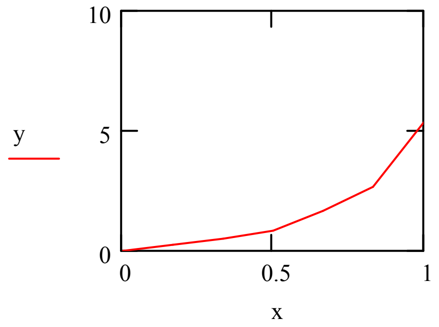
$\Delta y_5 = 2.73 \qquad y_6 := y_5 + \Delta y_5 \qquad y_6 = 5.37$

	x_n	y_n	$\Delta y_n =$ $= y_{n+1} - y_n$	$y'_n =$ $=f(x_n,y_n)$	$q_n =$ $= y'_n \cdot h$	$\Delta q_n =$ $= q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q_n =$ $=\Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q_n =$ $=\Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
0	0	0	0,196	1	0,167	0,061	0,02	0,24
1	0,167	0,196	0,266	1,365	0,228	0,081	0,044	0,151
2	0,333	0,463	0,366	1,85	0,309	0,125	0,195	0,531
3	0,5	0,828	0,759	2,598	0,434	0,32	0,682	
4	0,667	1,588	1,052	4,515	0,754	1,002		
5	0,833	2,64	2,73	10,515	1,756			
6	1	5,37						

Получили искомую функцию, заданную таблично.

x	0	0,167	0,333	0,5	0,667	0,833	1
y	0	0,196	0,463	0,828	1,588	2,64	5,37

Построим график искомой функции на отрезке [0,1]



IV. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется дифференциальным уравнением?
2. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением?
3. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением?
4. Определение частного и общего решения дифференциального уравнения.
5. Задача Коши.
6. Метод Рунге-Кутта.
7. Метод Адамса.

Библиографический список

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие. Т. 1 / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - ISBN 5-89602-012-0

4. Запорожец Г. И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Текст] : учебное пособие / Григорий Иванович Запорожец. - 6-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2010. - 464 с. : ил. - (Учебники для вузов. Специальная литература). - ISBN 978-5-8114-0912-9 :