9ba7d3e34c012eba476ffd2d064cf2781953be730df2374d16f3c0ce536f0fc6

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра уникальных зданий и сооружений

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г.Локтионова
«_15_»___12_________2017 г.

РАСЧЕТЫ НА НАДЕЖНОСТЬ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Вероятностные методы строительной механики
и теория надежности строительных конструкций»
для студентов направления подготовки
08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений

Курск 2017

УДК 624.04

Составитель: С.Ю. Савин

Рецензент
Доктор технических наук, профессор *В.И. Колчунов*

Расчеты на надежность: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций» для студентов направления подготовки 08.05.01 Строительство уникальных зданий и сооружений / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.Ю. Савин. Курск, 2017. - 31 с.: ил.23, табл.4, прилож.4. Библиогр.: 31 с.

Приводятся краткие теоретические сведения и указания по решению типовых задач по учебной дисциплине «Вероятностные методы строительной механики и теория надежности строительных конструкций».

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017 . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,80 . Уч.-изд.л. 1,63 . Тираж 100 экз. Заказ. 3625. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

Содержание

Расчеты на надежность……………………………………… 4
1 Функции случайных величин и методы оценки надежности …………………………….............................. 4
2 Метод двух моментов………………………………… 4
3 Метод статистической линеаризации…………………… 7
4 Метод статистических испытаний………………………. 13
5 Пример расчета стальной балки на надежность………... 13
Литература………………………………………………… 20
Приложение А……………………………………………… 21

РАСЧЕТЫ НА НАДЕЖНОСТЬ

1 Функции случайных величин и методы оценки надежности

При оценке надежности (определении вероятности отказа) задача вероятностного расчета сводится к построению функции случайных величин. В общем случае это весьма сложная задача. На этапе проектирования обычно ограничиваются определением только числовых характеристик функций случайных величин, основными из которых являются математическое ожидание и дисперсия (или стандарт). Для этого используют несколько методов. Рассмотрим некоторые из них.

2 Метод двух моментов

Этот метод применяется в простейшем случае, когда определяются числовые характеристики линейной функции случайных аргументов, распределенных по нормальному закону.

Пример 1. Рассмотрим статически определимую стальную балку постоянного поперечного сечения, свободно лежащую на двух опорах и нагруженную вертикальной сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 4.5).

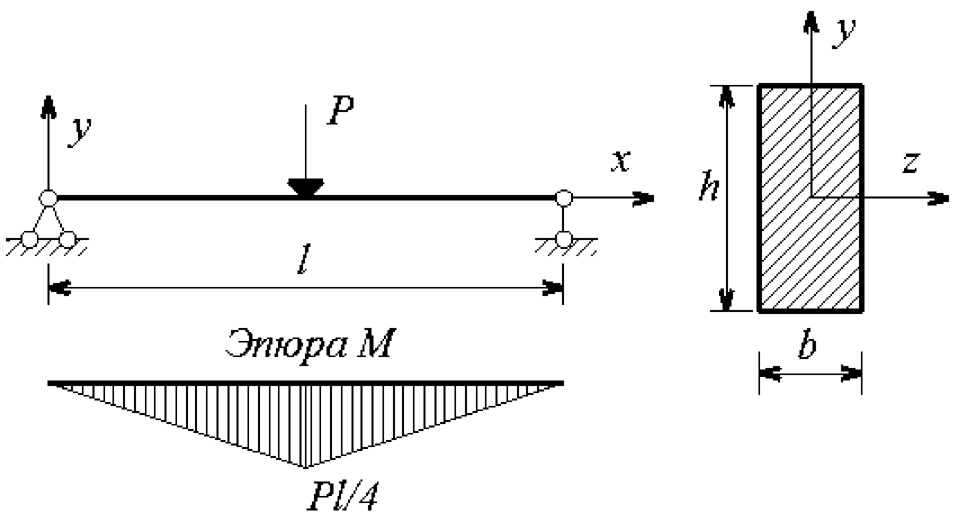


Рис. 4.5 – К определению надежности и вероятности отказа стальной балки

Условие прочности при изгибе имеет вид

$$\sigma = \frac{M_X}{W_X} \le \sigma_\tau, \tag{4.11}$$

где M_x – максимальный изгибающий момент; W_x – момент сопротивления сечения; $\sigma_т$ – предел текучести стали.

В нашем случае максимальное напряжение возникает в точке приложения силы в середине пролета и равно:

$$M_X = \frac{Pl}{4}, \tag{4.12}$$

Момент сопротивления сечения:

$$W_X = \frac{bh^2}{6}, \tag{4.13}$$

С учетом (4.12) и (4.13) условие прочности стальной балки будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{3Pl}{2bh^2} \le \sigma_\tau, \tag{4.14}$$

За отказ в работе конструкции примем появление краевой текучести. С учетом (4.14) функция работоспособности (4.2) примет вид:

$$g = \sigma_\tau - \frac{3Pl}{2bh^2}, \tag{4.15}$$

В данном случае сопротивление конструкции *R* равно:

$$R = \sigma_\tau, \tag{4.16}$$

а нагрузочный эффект *S* равен:

$$S = \frac{3Pl}{2bh^2}. \tag{4.17}$$

Наибольшей изменчивостью, как правило, обладает внешняя нагрузка *P* и предел текучести стали $\sigma_т$, поэтому примем их случайными. В качестве закона распределения этих величин принимаем нормальный закон с соответствующими параметрами распределения (математическим ожиданием и стандартом): для нагрузки — m_p и S_p; для предела текучести – m_σ и S_σ. Остальные параметры, а именно геометрические размеры, в выражении (4.15) обладают значительно меньшей изменчивостью по сравнению с P и $\sigma_т$, и их случайностью можно пренебречь и принять детерминированными.

Итак, имеем функцию работоспособности g, линейно зависящую от случайных величин P и $\sigma_т$. Величина g также является случайной и в данном случае из курса теории вероятностей следует, что ее распределение подчиняется нормальному закону. Определим математическое ожидание m_g и стандарт S_g случайной величины g. Для этого воспользуемся основными свойствами числовых характеристик функций случайных величин, которые приведены в таблице 4.2.

Таблица 1– Основные свойства числовых характеристик функций случайных величин

	Свойства математического ожидания	Свойства стандарта
1	$M[C]=C$	$S[X]\geq 0$; $S[C]=0$
2	$M[C\cdot X]=C\cdot M[X]$	$S[C\cdot X]=\lvert C\rvert\cdot S[X]$
3	$M[X\pm Y]=M[X]\pm M[Y]$	$S[X\pm Y]=\sqrt{S^2[X]+S^2[Y]}$
4	$M\left[X^2\right]=M^2[X]+D[X]$	$D\left[X^2\right]=M\left[X^4\right]-\left[M^2[X]+D[X]\right]^2$
5	$M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$	$D[X\pm Y]=D[X]\pm D[Y]$
6	–	$D[X\cdot Y]=D[X]\cdot D[Y]+D[X]M^2[Y]+D[Y]M^2[X]$
Примечание: *C* – константа; для свойств 5 и 6 – *X*, *Y* – независимые случайные величины.		

С учетом приведенных соотношений (таблица 4.2), получим:

$$m_g = m_\sigma - \frac{3m_p l}{2bh^2}, \qquad (4.18)$$

$$S_g = \sqrt{S_\sigma^2 + \left(\frac{3S_p l}{2bh^2}\right)^2}. \qquad (4.19)$$

Зная характеристики распределения случайной величины *g*, с помощью таблицы 4.1 можем определить вероятность безотказной работы:

$$H = P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right). \qquad (4.20)$$

Соответствующая вероятность отказа:

$$P_f = 1 - P_s = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right). \qquad (4.21)$$

Пусть для рассмотренной балки даны следующие исходные данные: длина балки l=2 м; ширина сечения b=0,05 м; высота сечения h=0,1 м.

Внешняя случайная нагрузка P, распределенная по нормальному закону, имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание m_p =26 кН; стандарт распределения S_p =2,6 кН.

Случайный предел текучести $\sigma_т$ имеет параметры: математическое ожидание $m_\sigma = 2{,}4\cdot10^5$ кН/м^2; стандарт распределения S_σ=$2{,}4\cdot10^4$ кН/м^2.

Тогда:

$$m_g = m_\sigma - \frac{3m_p l}{2bh^2} = 2{,}4\cdot10^5 - \frac{3\cdot26\cdot2}{2\cdot0{,}05\cdot0{,}1^2} = 84000 \text{ кН/м}^2;$$

$$S_g = \sqrt{S_\sigma^2 + \left(\frac{3S_p l}{2bh^2}\right)^2} = \sqrt{\left(2{,}4\cdot10^4\right)^2 + \left(\frac{3\cdot2{,}6\cdot2}{2\cdot0{,}05\cdot0{,}1^2}\right)^2} = 28624{,}5 \text{ кН/м}^2.$$

Вероятность безотказной работы:

$$P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{84000}{28624{,}5}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(2{,}935) = 0{,}9984;$$

вероятность отказа:

$$P_f = 1 - P_s = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016.$$

3 Метод статистической линеаризации

Этот метод применяется в случае, когда определяются числовые характеристики нелинейной функции случайных аргументов. Наиболее эффективен метод статистической линеаризации при вероятностях отказа $P_f > 0{,}001$. Данный метод основан на разложении функции работоспособности в рад Тейлора.

Пусть имеется нелинейная функция нескольких переменных непрерывная и дифференцируемая в точке A с координатами $(a_1, a_2, \ldots a_n)$:

$$g = f(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{4.22}$$

При разложении данной функции в ряд Тейлора в окрестности точки *A* получим:

$$g = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (x_1 - a_1)\frac{\partial g}{\partial x_1} + (x_2 - a_2)\frac{\partial g}{\partial x_2} + , \ldots, + (x_n - a_n)\frac{\partial g}{\partial x_n} + W, \tag{4.23}$$

где $\frac{\partial g}{\partial x_i}$ — значения частных производных, которые берутся при $x_i = a_i \, (i = 1, 2, \ldots, n)$; W — нелинейные члены ряда.

Предположим, что функция работоспособности имеет вид (4.23). Разложим ее в окрестности математического ожидания случайных аргументов $x_1, x_2, \ldots x_n$, т.е. в окрестности точки с координатами $\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right)$ и отбросим нелинейные члены ряда *W*:

$$g = f\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right) + \left(x_1 - m_{x_1}\right)\frac{\partial g}{\partial x_1} +$$

$$+ \left(x_2 - m_{x_2}\right)\frac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots + \left(x_n - m_{x_n}\right)\frac{\partial g}{\partial x_n}. \tag{4.24}$$

Используя таблицу 4.2, определим математическое ожидание случайной величины *g:*

$$m_g = f\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right) + \left(m_{x_1} - m_{x_1}\right)\frac{\partial g}{\partial x_1} +$$

$$+ \left(m_{x_2} - m_{x_2}\right)\frac{\partial g}{\partial x_2} + \ldots + \left(m_{x_n} - m_{x_n}\right)\frac{\partial g}{\partial x_n}\frac{\partial g}{\partial x_n} =$$

$$= f\left(m_{x_1}, m_{x_2}, \ldots, m_{x_n}\right), \tag{4.25}$$

стандарт будет равен:

$$S_g = \sqrt{\left(S_{x_1}\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2 + \left(S_{x_2}\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(S_{x_n}\frac{\partial g}{\partial x_n}\right)^2}\,. \qquad (4.26)$$

Отметим, что случайная величина g в общем случае не будет подчиняться нормальному закону, даже если аргументы $x_1, x_2, \ldots x_n$ распределены по нормальному закону. Но при выполнении вероятностных расчетов часто делается допущение о подчинении функции g нормальному закону. Тогда вероятность безотказной работы определится по формуле (4.20).

Пример 2. Рассмотрим пример расчета. Определим вероятность отказа внецентренно сжатого стального стержня, изображенного на рис. 4.6.

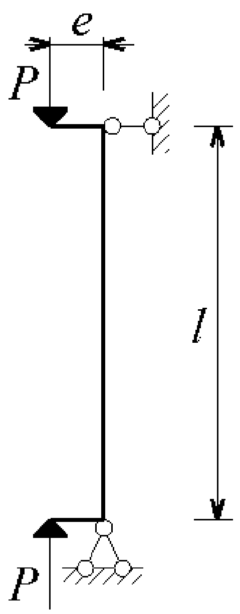


Рис. 4.6 – К определению надежности и отказа внецентренно сжатого стального стержня

За отказ в работе стержня примем появление краевой текучести. При выполнении вероятностных расчетов прежде всего необходимо иметь детерминированное решение. Будем исходить из упрощенного подхода к расчету сжато-изогнутых стержней, в котором искривленная ось стержня принимается за синусоиду. При этом сжато-изогнутый стержень сводится к системе с одной степенью свободы, что не вносит большой погрешности в результаты расчета и приемлемо для практики.

При сделанных предположениях максимальный изгибающий момент в стержне выражается известной формулой:

$$M_0 = \frac{Pe}{1 - P/P_э}\,. \qquad (4.27)$$

где Pe = M_0 – тот же момент, но определенный без учета изгиба стержня, возникающего в результате действия продольной силы; P – осевая сжимающая сила; e – эксцентриситет приложения силы; $P_э$ – первая эйлерова критическая сжимающая сила:

$$P_э = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}, \qquad (4.28)$$

l – свободная длина стержня; EJ – жесткость поперечного сечения стержня.

Краевое напряжение в расчетном сечении стержня равно:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{M}{W}, \qquad (4.29)$$

или с учетом формулы (4.27):

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W\left(1 - P/P_э\right)}, \qquad (4.30)$$

где W – момент сопротивления; F – площадь поперечного сечения.

Расчетная формула прочности сжато-изогнутого стержня, положенная в основу обычных практических расчетов, имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{Pe}{W\left(1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}\right)} \le \sigma_\tau, \qquad (4.31)$$

где $\sigma_т$ – передел текучести стали.

Тогда функция работоспособности будет

$$g = \sigma_\tau - \frac{P}{F} - \frac{Pe}{W\left(1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}\right)}, \qquad (4.32)$$

Примем внешнюю нагрузку P и предел текучести $\sigma_т$ в качестве нормально распределенных случайных величин. Так как функция работоспособности нелинейна относительно случайной нагрузки, то для нахождения математического ожидания и стандарта случайной величины g применим метод статической линеаризации. Для этого вычислим частные производные функции работоспособности (4.31) по ее случайным аргументам:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_\tau} = 1; \qquad \frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{1}{F} - \frac{e}{W\left(1 - \frac{Pl^2}{\pi^2 EJ}\right)^2}. \qquad (4.33)$$

Для математического ожидания величины g в соответствии с (4.25) получим выражение:

$$m_g = m_{\sigma\tau} - \frac{m_P}{F} - \frac{m_P e}{W\left(1 - \frac{m_P l^2}{\pi^2 EJ}\right)}. \qquad (4.34)$$

Разложение функции выполняется в окрестности математического ожидания, т.е. при $\sigma_т = m_{\sigma т}$ и $P = m_p$, поэтому для стандарта получим:

$$S_g = \sqrt{\left(S_{\sigma_\tau} \frac{\partial g}{\partial S_\tau}\right)^2 + \left(S_P \frac{\partial g}{\partial P}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(S_{\sigma\tau}\right)^2 + \left(S_P\left(-\frac{1}{F} - \frac{e}{W\left(1 - \frac{m_P l^2}{\pi^2 EJ}\right)^2}\right)\right)}. \qquad (4.35)$$

Определив m_g и S_g, по формуле (4.20) вычисляем вероятность безотказной работы внецентренно сжатого стержня.

Пусть дан внецентренно сжатый стержень в виде сварного стального двутавра.

Геометрические характеристики сечения: площадь поперечного сечения $F = 48 \cdot 10^{-4}$ м^2; момент инерции сечения $I_x = 1920 \cdot 10^{-8}$ м^4; момент сопротивления сечения $W_x = 240 \cdot 10^{-8}$ м^6.

Эксцентриситет приложения нормальной силы e = 0,007 м; длина стержня l=6 м.

Внешняя случайная нагрузка, распределенная по нормальному закону, имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание $m_p = 64{,}1$ кН; стандарт распределения $S_p = 6{,}41$ кН.

Предел текучести стали, принимаемый также распределенным по нормальному закону, имеет параметры распределения: математическое ожидание $m_\sigma = 3\cdot 10^5$ кН/м^2; стандарт распределения $S_\sigma = 3\cdot 10^4$ кН/м^2.

Подставляя соответствующие значения в (4.33), получим для математического ожидания $m_g = 118582$ кН/м^2. Для стандарта в соответствии с (4.34) получим $S_g = 39447$ кН/м^2. Тогда по (4.20) для вероятности безотказной работы получим:

$$P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{118582}{39447}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(3{,}006) = 0{,}99857.$$

Пример 3. Далее рассмотрим другой пример вероятностного расчета для статически определимой балки (рис. 4.5), когда функция работоспособности является нелинейной.

Возьмем те же исходные данные, но примем высоту балки h случайной нормально распределенной величиной с параметрами: математическое ожидание $m_h = 0{,}1$ м; стандарт $S_h = 0{,}001$ м. Тогда функция работоспособности (4.15) относительно случайных аргументов будет нелинейной:

$$g = \sigma_\tau - \frac{3Pl}{2bh^2}.$$

Принимаем метод статической линеаризации и определим:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_\tau} = 1; \qquad \frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{3l}{2bh^2}; \qquad \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{3Pl}{bh^3}.$$

Следовательно:

$$m_g = m_\sigma - \frac{3m_P l}{2b(m_h)^2};$$

$$S_g = \sqrt{\left(S_{\sigma_T}\frac{\partial g}{\partial \sigma_T}\right)^2 + \left(S_P\frac{\partial g}{\partial P}\right)^2 + \left(S_h\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(S_{\sigma_\tau}\right)^2 + \left(S_P\left(-\frac{3l}{2b\left(m_h\right)^2}\right)\right)^2 + \left(S_h\left(\frac{3m_P l}{b\left(m_h\right)^3}\right)\right)^2}$$

Подставляя значения, получим:

$$m_g = 84000 \text{ кН/м}^2; \quad S_g = 28794 \text{ кН/м}^2.$$

Вероятность безотказной работы:

$$P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{84000}{28794}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(2{,}917) = 0{,}9982.$$

4 Метод статистических испытаний

Производится достаточно большое число статистических испытаний, при этом на каждом испытании генерируются случайные реализации всех исходных величин по заданной программе с помощью ЭВМ. Проверяется условие (4.2), при его невыполнении фиксируется отказ. Далее процедура повторяется.

Частота появления отказа ν рассматривается как оценка вероятности отказа P_f:

$$\nu = \frac{k}{m} \approx P_f, \tag{4.36}$$

где k – число отказов; m – общее число испытаний.

Метод крайне прост и универсален, однако он требует обязательного анализа близости оценки ν к искомой вероятности P_f, которая зависит от числа испытаний m.

5 Пример расчета стальной балки на надежность

Задание. Для однопролетной статически определимой стальной балки длиной l = 2 м, свободно лежащей на двух опорах (см. рис. 4.5). Ширина поперечного сечения балки b=0,05 м, допускаемый прогиб

[f]=l/280=2/280=0,00714 м (таблица 4.3) и предполагая, что случайные величины: P — внешняя сила, h — высота поперечного сечения, $\sigma_т$ — предел текучести материалов конструкции, распределены по нормальному закону, требуется определить:

1 Вероятность появления краевой текучести $P_f^{\ т}$.

2 Вероятность образования пластического шарнира и превращения конструкции в механизм (вероятность разрушения) $P_f^{\ р}$.

3 Определить вероятность невыполнения условия жесткости балки, т.е. превышения $P_f^{[f]}$.

Внешняя случайная нагрузка P имеет следующие параметры распределения: математическое ожидание $m_р$ = 30 кН; стандарт распределения $S_р$= 3 кН.

Случайный предел текучести $\sigma_т$ характеризуется параметрами: математическое ожидание $m_\sigma = 2{,}4 \cdot 10^5$ кН/м^2; стандарт распределения $S_\sigma = 2{,}4 \cdot 10^4$ кН/м^2.

Высота сечения имеет параметры распределения: математическое ожидание m_h= 0,1м; стандарт распределения S_h = 0,001 м.

Примечание. Если по заданию вместо внешней сосредоточенной силы P стоит распределенная нагрузка q, то все расчеты будут выполняться аналогично, а параметры распределения будут обозначаться m_q и S_q.

Таблица 3 – Вертикальные предельные прогибы элементов конструкций (выборка из таблицы Е1)

Элементы конструкций	Вертикальные предельные прогибы f_u
Балки, фермы, ригели, прогоны, плиты, настилы (включая поперечные ребра плит и настилов): а) покрытий и перекрытий, открытых для обзора, при пролете l (м):	
$l \le 1$	l/120
$l = 3$	l/150
$l = 6$	l/200
$l = 24$	l/250
$l \ge 36$	l/300
Примечание. Для промежуточных значений пролета предельный прогиб f_u принимается по интерполяции.	

Решение

1 Определим вероятность появления краевой текучести $P_f^{\text{т}}$. Функция работоспособности имеет вид:

$$g = \sigma\tau - \frac{3Pl}{2bh^2}.$$

Так как функция работоспособности нелинейна относительно случайных аргументов, то применим метод статистической линеаризации. Определим частные производные:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma\tau} = 1; \qquad \frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{3l}{2bh^2}; \qquad \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{3Pl}{bh^3}.$$

Далее находим математическое ожидание и стандарт функции работоспособности

$$m_g = m_\sigma - \frac{3m_P l}{2b(m_h)^2};$$

$$S_g = \sqrt{\left(S_{\sigma_\tau}\frac{\partial g}{\partial \sigma_\tau}\right)^2 + \left(S_P\frac{\partial g}{\partial P}\right)^2 + \left(S_h\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(S_{\sigma\tau})^2 + \left(S_P\left(-\frac{3l}{2b(m_h)^2}\right)\right)^2 + \left(S_h\left(\frac{3m_P l}{b(m_h)^3}\right)\right)^2}.$$

Подставив значения, получим:

$$m_g = 2{,}4\cdot 10^5 - \frac{3\cdot 30\cdot 2}{2\cdot 0{,}05\cdot (0{,}1)^2} = 60000\ \text{кН/м}^2;$$

$$S_g = \sqrt{\left(2.4\cdot 10^4\right)^2 + \left(3\cdot\left(-\frac{3\cdot 2}{2\cdot 0{,}05\cdot(0{,}1)^2}\right)\right)^2 + \left(0{,}001\cdot\left(\frac{3\cdot 30\cdot 2}{0{,}05\cdot(0{,}1)^3}\right)\right)^2} =$$

$$= 30215\ \text{кН/м}^2.$$

Вероятность безотказной работы:

$$P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{60000}{30215}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(1{,}986) = 0{,}9765,$$

тогда вероятность появления краевой текучести:

$$P_f^{\tau} = 1 - P_s = 1 - 0{,}9765 = 0{,}0235.$$

2 Определим вероятность образования пластического шарнира и превращения конструкции в механизме (вероятность разрушения)$P_f^{\ p}$.

Для сечения в форме прямоугольника, пластический момент сопротивления прямоугольного сечения равен:

$$W_{x(p)} = 1{,}5W_x.$$

Тогда функция работоспособности примет вид:

$$g = \sigma\tau - \frac{Pl}{bh^2}.$$

Применяя метод статической линеаризации, получим:

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_\tau} = 1; \qquad \frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{l}{bh^2}; \qquad \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{Pl}{bh^3}.$$

Для числовых характеристик функции работоспособности будем иметь:

$$m_g = m_\sigma - \frac{m_P l}{b(m_h)^2} = 2.4 \cdot 10^5 - \frac{30 \cdot 2}{0{,}05 \cdot (0{,}1)^2} = 120000 \text{ кН/м}^2;$$

$$S_g = \sqrt{\left(S_{\sigma\tau}\frac{\partial g}{\partial \sigma_\tau}\right)^2 + \left(S_P\frac{\partial g}{\partial P}\right)^2 + \left(S_h\frac{\partial g}{\partial h}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(S_{\sigma_\tau}\right)^2 + \left(S_P\left(-\frac{l}{b(m_h)^2}\right)\right)^2 + \left(S_h\left(\frac{2m_P l}{b(m_h)^3}\right)\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(2.4 \cdot 10^4\right)^2 + \left(3 \cdot \left(-\frac{2}{0{,}05 \cdot (0{,}1)^2}\right)\right)^2 + \left(0{,}001 \cdot \left(\frac{2 \cdot 30 \cdot 2}{0{,}05 \cdot (0{,}1)^3}\right)\right)^2} = 26940 \text{ кН/м}^2.$$

Вероятность безотказной работы в данном случае значение:

$$P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{120000}{26940}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(4{,}454) = 0{,}9999958,$$

Тогда вероятность разрушения:

$$P_f^P = 1 - P_s = 1 - 0{,}9999958 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}.$$

3 Определим вероятность превышения допускаемого значения прогиба $P_f^{[f]}$.

Для рассматриваемой балки максимальный прогиб имеет место в середине пролета. Его значение можно определить одним из известных способов, например, по методу начальных параметров или по формуле Мора (таблица 4.4).

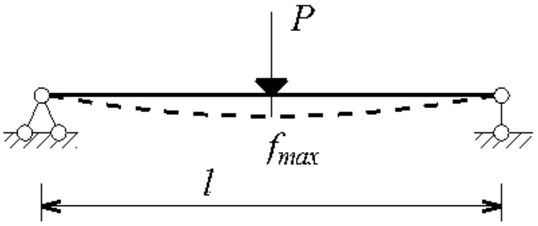
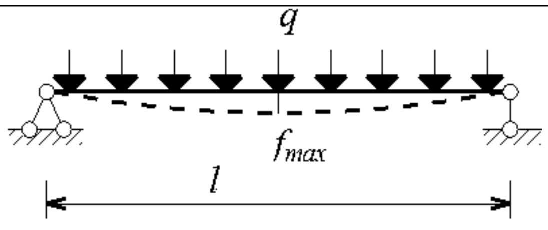
В результате будем иметь:

$$f_{max} = \frac{Pl^3}{48EI_x},$$

где E – модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м^2; I_x – момент инерции сечения, для прямоугольного сечения:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Таблица 3 – Выражения для определения прогибов балки при некоторых основных видах нагружения

Вид нагружения балки	Выражение для прогиба
	$f_{max} = \frac{Pl^3}{48EI_x}$
	$f_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{ql^4}{EI_x}$

Функция работоспособности записывается в виде:

$$g = [f] - f_{max} = 0{,}00714 - \frac{Pl^3}{4Ebh^3}.$$

Из предыдущего выражения видно, что прогиб не зависит от предела текучести $\sigma_т$, а функция работоспособности нелинейна относительно случайных аргументов. Поэтому применяем метод статистической линеаризации. Получим:

$$\frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{l^3}{4Ebh^3}; \qquad \frac{\partial g}{\partial h} = \frac{3Pl^3}{4Ebh^4}.$$

Для числовых характеристик функции работоспособности получим:

$$m_g = 0{,}00714 - \frac{m_P l^3}{4Eb(m_h)^3} = 0{,}00714 - \frac{30 \cdot 2^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}05 \cdot (0{,}1)^3} = 0{,}00114\,м;$$

$$S_g = \sqrt{\left(S_P \frac{\partial g}{\partial P}\right)^2 + \left(S_h \frac{\partial g}{\partial h}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(S_P\left(-\frac{l^3}{4Eb(m_h)^3}\right)\right)^2 + \left(S_h\left(\frac{3m_P l^3}{4Eb(m_h)^4}\right)\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(3 \cdot \left(-\frac{2^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}05 \cdot (0{,}1)^3}\right)\right)^2 + \left(0{,}001 \cdot \left(\frac{3 \cdot 30 \cdot 2^3}{4 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0{,}05 \cdot (0{,}1)^4}\right)\right)^2} = 0.0006264\ м$$

Далее определяется вероятность безотказной работы для принятого вида отказа:

$$P_s = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{m_g}{s_g}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0.00114}{0.0006264}\right) = \frac{1}{2} + \Phi(1{,}820) = 0{,}9656,$$

тогда вероятность повышения допустимого значения прогиба:

$$P_f^{[f]} = 1 - P_s = 1 - 0{,}9656 = 0{,}0344.$$

Сведем полученные результаты в таблицу 4.

Таблица 4 – Результаты расчета

Вероятность отказа	Появление краевой текучести	Возникновение механизма (разрушение)	Превышение допустимого значения прогиба
P_f	$P_f^{\tau} = 0{,}0235$	$P_f^{P} = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$	$P_f^{[f]} = 0{,}0344$

Откуда следует, что потеря жесткости балки обусловлена наибольшей вероятностью.

Литература

1 Саргсян, А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций / А.Е. Саргсян. – М.: Высшая школа. – 2004. – 462 с.

2. Коробко, В.И. Строительная механика стержневых систем / В.И. Коробко, А.В. Коробко. – М.: АСВ, 2007. – 510 с.

3. Черняев, А.А. Строительная механика. Расчет статически определимых стержневых систем / А.А. Черняев, М.О. Калашников. – Орел: ГУ-УНПК, 2013. – 31 с.

4. Черняев, А.А. Расчет стальной балки на надежность / А.А. Черняев, М.И. Чаплыгина. – Орел: ГУ-УНПК, 2014. – 26 с.

5. Черняев, А.А. Оценка жесткости металлической балки ступенчато-переменного сечения с жестко защемленными опорами / В.И. Коробко, Р.В. Алдушкин, А.А. Черняев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2009. – №3. – С. 56-61.

6. Савин, С.Ю. Устойчивость и динамика статически неопределимых рам: методические указания для выполнения расчетно-граических работ / Р.В. Алдушкин, С.Ю. Савин. – Орел: Госуниверситет-УНПК, 2013. – 26 с.

7. Савин, С.Ю. Исследование работы треугольных ферм при статических и динамических воздействиях / Р.В. Алдушкин, С.Ю. Савин // Строительство и реконструкция. – 2010. – №3 (29). – С. 3-6.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Таблица А.1 – Функция Лапласа

z	*Φ(z)*	*z*	*Φ(z)*	*z*	*Φ(z)*
0.00	0.0000	1.15	0.3749	2.35	0.4906
0.01	0.0040	1.20	0.3849	2.40	0.4918
0.05	0.0199	1.25	0.3944	2.45	0.4929
0.10	0.0398	1.30	0.4032	2.50	0.4934
0.15	0.0596	1.35	0.4115	2.55	0.4947
0.20	0.0793	1.40	0.4192	2.60	0.4953
0.25	0.0987	1.45	0.4265	2.65	0.4960
0.30	0.1179	1.50	0.4332	2.70	0.4965
0.35	0.1368	1.55	0.4394	2.75	0.4970
0.40	0.1554	1.60	0.4452	2.80	0.4974
0.45	0.1736	1.65	0.4505	2.85	0.4978
0.50	0.1915	1.70	0.4554	2.90	0.4981
0.55	0.2088	1.75	0.4599	2.95	0.4985
0.60	0.2257	1.80	0.4641	3.00	0.49865
0.65	0.2422	1.85	0.4678	3.05	0.49932
0.70	0.2580	1.90	0.4713	3.10	0.49966
0.75	0.2734	1.95	0.4744	3.20	0.49931
0.80	0.2881	2.00	0.4772	3.40	0.49966
0.85	0.3023	2.05	0.4798	3.60	0.49941
0.90	0.3159	2.10	0.4821	3.80	0.4999968
0.95	0.3285	2.15	0.4842	4.00	0.499968
1.00	0.3413	2.20	0.4861	4.50	0.499997
1.05	0.3531	2.25	0.4878	5.00	0.49999997
1.10	0.3643	2.30	0.4893		