

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 04.09.2023 15:19:24

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d088

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



### ФИЛЬТР КАЛМАНА

Методические указания по выполнению практической и  
самостоятельной работ по курсу  
«Управление мехатронными системами и роботами»  
по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника»

Курск 2016

УДК 681.5.01

Составитель: П.А. Безмен

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры механики,  
мехатроники и робототехники

Е.Н. Политов

**Фильтр Калмана:** методические указания по выполнению практической и самостоятельной работ по дисциплине «Управление мехатронными системами и роботами» по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: П.А. Безмен; Курск, 2016. 15 с.: ил. 3, табл. 1.

Содержат сведения по вопросам синтеза систем автоматического управления для мехатронных систем и роботов. Приведены краткие сведения из теории, методика выполнения работы, варианты заданий, примеры.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.  
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ.  
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.  
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## Практическая работа № 5 ФИЛЬТР КАЛМАНА

### Постановка задачи

Исследуется модель объекта управления в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases} \quad (1)$$

с известными входами  $u$  и возмущениями по входам  $w$  и измерениям  $v$ , которые являются «белым» шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau), \\ M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau), \\ M\{v(t)w(\tau)^T\} &= N\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}. \quad (3)$$

### Краткие сведения из теории

Пусть многомерная система определяется как система с  $l$ -входами и  $n$ -выходами, у которой преобразование «вход-выход» задано в виде матричной импульсной переходной функции  $K(t, \tau)$ . Пусть  $U(t)$  -  $l$ -мерный вектор входа фильтра, а  $\hat{X}(t)$  -  $n$ -мерный вектор выхода. Тогда связь между векторами  $\hat{X}(t)$  и  $Y(t)$  определена интегралом:

$$\hat{X}(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) Y(\tau) d\tau, \hat{X}(t_0) = 0.$$

Пусть  $Y(t)$  – действительный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_{YY}(t, \tau)$ .

Обозначим норму произвольной квадратной матрицы  $B$  через  $\|B\|$  и определим её следующим образом:

$$\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)},$$

где  $\text{tr}()$  – след, т.е. сумма диагональных элементов матрицы.

Пусть на вход многомерного фильтра поступает искаженный сигнал как сумма полезного сигнала  $M(t)$  и помехи  $N(t)$ , т.е.

$$Y(t) = M(t) + N(t),$$

где  $M(t)$  и  $N(t)$  -  $l$ -мерные векторы с известными корреляционными функциями  $R_{MM}(t, \tau)$  и  $R_{NN}(t, \tau)$ .

Предположим, что существует идеальный вход  $X(t)$  некоторой системы, который определяет желаемый выход и связан с полезным сигналом соотношением

$$X(t) = \int_{t_0}^t K_{ID}(t, \tau) M(\tau) d\tau,$$

где  $K_{ID}(t, \tau)$  – матрица импульсной передаточной функции идеальной системы. Рассмотрим вектор ошибок

$$X'_\sigma(t) = X(t) - \hat{X}(t).$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать такую физически реализуемую матричную импульсную переходную функцию  $K^*(t, \tau)$  так, чтобы математическое ожидание квадрата нормы ошибок было минимальным

$$M \left\{ \|X'_\sigma(t)\|^2 \right\} = \min_{K(t, \tau)}, \quad (4)$$

где  $K(t, \tau) = 0$ .

В зависимости от того, какая задача стоит: прогнозирование, фильтрации или сглаживание, определяется  $K_{ID}(t, \tau)$  идеальной системы. В задаче фильтрации  $X(t) = M(t)$ , т.е.  $K_{ID}(t, \tau) = E^* \delta(t - \tau)$ . При такой постановке задачи минимум среднеквадратической ошибки (4) определяется МИПФ  $K^*(t, \tau)$ , получаемой из обобщенного уравнения Винера-Хопфа для многомерных систем

$$R_{MT}(t, \tau) = \int_0^t K^*(t, s) R_{TT}(s, \tau) ds.$$

Известно, что если на вход системы поступает случайный сигнал  $Y(t)$ , являющийся стационарным, в широком смысле, случайным процессом, оптимальную матричную передаточную функцию  $W(s)$  многомерного фильтра можно получить факторизацией рациональной матрицы спектральных плоскостей. В случае нестационарного случайного процесса решение интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода даже для скалярного случая представляет серьезные трудности, не говоря уже о векторном.

Калман в своих работах модифицировал постановку задачи многомерной фильтрации Винера, придав ей форму проблемы пространства состояния. В результате такой модификации был получен фильтр Калмана, осуществляющий процедуру рекурсивного оценивания, когда подлежащий оцениванию сигнал является входным сигналом линейной нестационарной динамической системы.

Рассмотрим непрерывную модель объекта управления

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases}$$

с известными входами  $u$  и возмущениями по входам  $w$  и измерениям  $v$ , которые являются «белым» шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned}
M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\
M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau), \\
M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau), \\
M\{v(t)w(\tau)^T\} &= N\delta(t - \tau).
\end{aligned}$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}$$

Оптимальным решением является фильтр Калмана, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y_v - C\hat{x} - Du), \\ \begin{bmatrix} \hat{y}_v \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u + Hw + v, \end{cases}$$

где матрица коэффициентов обратных связей  $L$  определяется на основе решения алгебраического матричного уравнения Риккати. Например, при  $H = 0$  дисперсия  $P$  определяется из уравнения

$$AP + PA^T - (PC^T + GN)R^{-1}(CP + N^T G^T) + GQG^T = 0,$$

матрица  $L = APC^T(N + CPC^T)^{-1}$ .

Наблюдатель (рис. 1) объединяет фильтр Калмана и объект управления.



Рис. 1. Наблюдатель Калмана

Наблюдатель использует известные входы  $u$  и результаты измерений  $y_v$ , искаженные случайными помехами, для того, чтобы вычислить оценки вектора переменных состояния  $\hat{x}$  и выходов  $\hat{y}$ .

Пусть задана дискретная модель объекта управления

$$\begin{cases} x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] + Gw[n] \\ y_v[n] = Cx[n] + Du[n] + Hw[n] + v[n] \end{cases}$$

с известными входами  $u$  и возмущениями по входам  $w$  и измерениям  $v$ , которые являются «белым» шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w[n]w[m]^T\} &= Q\delta_{nm}, \\ M\{v[n]v[m]^T\} &= R\delta_{nm}, \\ M\{v[n]w[m]^T\} &= N\delta_{nm}. \end{aligned}$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта управления, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания,

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}.$$

В этом случае фильтр Калмана описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \hat{x}[n+1] = A\hat{x}[n] + Bu[n] + L(y_v - C\hat{x}[n] - Du[n]), \\ \begin{bmatrix} \hat{x}[n] \\ \hat{y}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(I - MC) \\ I - MC \end{bmatrix} \hat{x}[n] + \begin{bmatrix} (I - CM)D & CM \\ -MD & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n] \\ y_v[n] \end{bmatrix}; \end{cases}$$

где матрица коэффициентов обратных связей  $L$  и новая матрица коэффициентов обратных связей  $M$  определяются на основе решения матричного алгебраического уравнения Риккати.

Наблюдатель объединяет фильтр Калмана и объект управления; он использует известные входы  $u[n]$  и результаты измерений  $y_v[n]$ , искаженные случайными помехами, для того, чтобы вычислить оценки вектора переменных состояния  $x[n]$  и выходов  $y[n]$ .

Обновленная матрица коэффициентов обратных связей  $M$  применяется для того, чтобы уточнить предсказание  $x[n]$  на основе измерения  $y_v[n]$ :

$$\hat{x}[n+1] = \hat{x}[n] + M(y_v[n] - C\hat{x}[n] - Du[n]).$$

### Методика выполнения работы

Для синтеза фильтра Калмана предназначены следующие функции Control System Toolbox:

`[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)`

`[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn, sensors, known)`

для дискретных моделей

`[kest, L, P, M, Z] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)`

для синтеза дискретного фильтра Калмана для непрерывных систем

`[kest, L, P, M, Z] = kalmz(sys, Qn, Rn, Nn)`



Приведенные выше функции выполняют синтез фильтров Калмана для оценки переменных состояния объекта управления на основе данных о случайных внешних возмущениях и ошибках измерений.

На систему, описывающую объект управления и случайные воздействия накладываются следующие ограничения:

- пара матриц  $(C, A)$  должна быть обнаруживаемой;
- необходимо выполнение неравенств

$$\bar{R} > 0, \bar{Q} - \bar{N} \bar{R}^{-1} \bar{N}^T,$$

с учетом обозначений

$$\bar{Q} = GQG^T, \bar{R} = HN + N^T H^T + HQH^T, \bar{N} = G(QH^T + N).$$

Для выполнения практической работы необходимо выполнить следующие действия:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Произвести расчет фильтра Калмана.
4. Выполнить моделирование системы управления с наблюдателем.
5. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
6. Ответить на контрольные вопросы.
7. Оформить отчет и защитить работу.

### Методический пример

Произведем расчет фильтра Калмана для системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100},$$

и параметрами:  $Q = 1, R = 0,01$ .

1. Произведем расчет фильтра Калмана

```

>> sys=ss(tf(100,[1 1 100]))
a =
      x1      x2
x1      -1  -3.125
x2      32      0
b =
      u1
x1      2
x2      0
c =
      x1      x2
y1      0  1.563
d =
      u1
y1      0

Continuous-time model.
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
A =
  -1.0000  -3.1250
  32.0000      0
B =
      2
      0
C =
      0  1.5625
D =
      0
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
A =
  -1.0000  -3.1250
  32.0000      0
B =
      2
      0
C =
      0  1.5625
D =
      0
>> P=ss(A, [B B], C, [D D])
a =
      x1      x2
x1      -1  -3.125
x2      32      0
b =
      u1  u2
x1      2  2
x2      0  0
c =
      x1      x2
y1      0  1.563
d =
      u1  u2
y1      0  0

Continuous-time model.
>> Kest=kalman(P,1,0.01)
a =
      x1_e  x2_e
x1_e      -1  -30.11
x2_e      32  -41.56
b =
      u1      y1
x1_e      2  17.27
x2_e      0  26.6
c =
      x1_e  x2_e
y1_e      0  1.563
x1_e      1      0
x2_e      0      1

```

```
d =
      u1  y1
y1_e    0   0
x1_e    0   0
x2_e    0   0
```

```
I/O groups:
  Group name      I/O      Channel(s)
  KnownInput      I         1
  Measurement     I         2
  OutputEstimate  O         1
  StateEstimate   O         2,3
```

Continuous-time model.

2. Выполним моделирование системы управления с наблюдателем. Для этого с учетом  $x_1 = x1$ ,  $x_2 = x2$ ,  $\hat{x}_1 = x3$ ,  $\hat{x}_2 = x4$  введем следующие матрицы:

```
>> A1=[-1 -6.25 0 0; 16 0 0 0; 0 54 1 -60.2; 0 41.5 16 -41.5]
A1 =
   -1.0000   -6.2500         0         0
   16.0000         0         0         0
         0   54.0000    1.0000  -60.2000
         0   41.5000   16.0000  -41.5000
>> B1= [2 2 0; 0 0 0; 2 0 17.3; 0 0 13.3]
B1 =
    2.0000    2.0000         0
         0         0         0
    2.0000         0   17.3000
         0         0   13.3000
>> C1=[0 3.125 0 0; 0 0 0 3.125]
C1 =
         0    3.1250         0         0
         0         0         0    3.1250
```

3. Входом системы управления с наблюдателем является вектор  $u1 = [u; w; v]$ , выходом –  $y1 = [y; \hat{y}]$ . Здесь  $y = 3,125u_2$ ,  $\hat{y} = 3,125u_4$ .

Ниже приведен фрагмент программы моделирования и его результаты (рис. 2-3).

```

t=0:0.001:5;
u=ones(size(t));
w=randn(size(t))*1000^0.5;
v=randn(size(t))*10^0.5;
S=ss(A1, B1, C1, 0);
u1=[u; w; v];
[y1 y4]= lsim(S, u1', t);
plot(t, y1(:,1),'-b',t,y1(:,2),':b')
plot(t, v'+y1(:,1), ':g', t,y1(:,2),'-b')

```

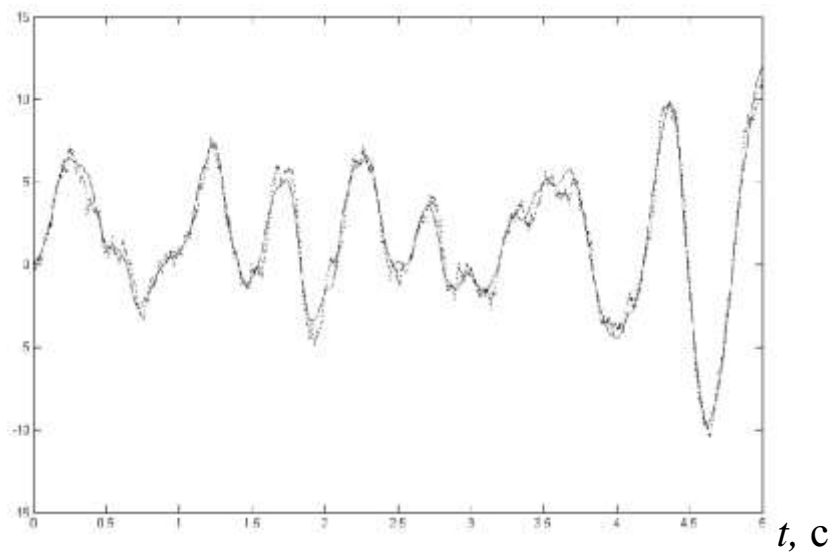


Рис. 2. Сравнение измеренного и точного выходных сигналов

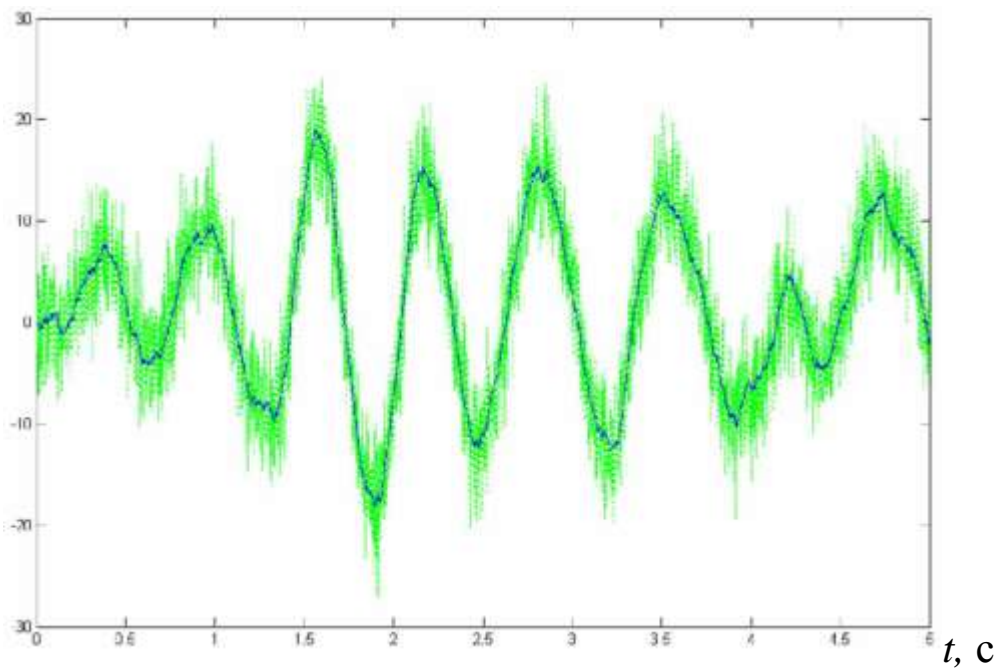


Рис. 3. Сравнение зашумленного и точного значения выхода системы

## **Отчет о работе**

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Наименование и цель работы.
3. Постановка задачи в соответствии с вариантом.
4. Порядок и результаты выполнения работы.
5. Результаты моделирования динамики системы в числовом и графическом виде.
6. Анализ результатов и выводы.

## **Контрольные вопросы**

1. Сформулировать задачи фильтрации по Калману.
2. Привести схему системы управления с наблюдателем и пояснить ее смысл.
3. Показать, что для применения метода необходимо, чтобы система была обнаруживаема.
4. Дать определение гауссовского «белого шума».
5. Разработать в среде MATLAB интерфейс для интерактивного синтеза фильтра Калмана.

## Варианты заданий

Таблица 1 - Варианты заданий

№	Вид передаточной функции	№	Варианты параметров
	$W_p(s), Q, R$		Значения $T_i$ [с]
1.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.1$
		2.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.01$
		3.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.9$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1$
		5.	$T_1 = 0.15, T_2 = 0.2$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T = 0.1, \zeta = 1$
		2.	$T = 0.05, \zeta = 0.707$
		3.	$T = 0.03, \zeta = 0.1$
		4.	$T = 0.08, \zeta = 0.5$
		5.	$T = 0.01, \zeta = 0.15$
3.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T_1 = 0.03, T_2 = 0.5,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		2.	$T_1 = 0.05, T_2 = 0.4,$ $T_3 = 0.08, T_4 = 0.033$
		3.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.45,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		4.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.02$
		5.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
4.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4^2s^2 + 2T_4\zeta s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		2.	$T_1 = 0.07, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		3.	$T_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$

## Литература

1. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами в системе MATLAB. -СПб.: Наука, 1999.
3. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов /Под общ. ред. Потемкина В.Г. - М.: Диалог-МИФИ, 1999.
4. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. - М.: МАИ, 1997.
5. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. - М.: Машиностроение, 1972.
6. Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник. - СПб.: Питер, 2002
7. Лазарев Ю.Ф. MATLAB 5.x. Библиотека студента. - К.: Издательская группа BHV, 2000.
8. Мальшев С. А. Метод корневого годографа: Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. - М.: МИП, 1992.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Под общ. ред. Н.Д. Егупова - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.
10. Мороз А.И. Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. - М.: МИП, 1989.
11. Using the Control System Toolbox with MATLAB 6: Computation. Visualization. Programming - The MathWorks, Inc., 2000.