

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 19.01.2022 18:25:44

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d088

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Методические указания по выполнению практической и
самостоятельной работ по курсу

«Управление мехатронными системами и роботами»
по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника»

Курск 2016

УДК 681.5.01

Составитель: П.А. Безмен

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент кафедры механики,
мехатроники и робототехники

Е.Н. Политов

Синтез оптимального управления с полной обратной связью: методические указания по выполнению практической и самостоятельной работ по дисциплине «Управление мехатронными системами и роботами» по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: П.А. Безмен; Курск, 2016. 16 с.: ил. 3, табл. 2.

Содержат сведения по вопросам синтеза систем автоматического управления для мехатронных систем и роботов. Приведены краткие сведения из теории, методика выполнения работы, варианты заданий, примеры.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическая работа № 5 СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Цель работы

Целью работы является ознакомление с методикой построения линейных оптимальных систем управления с полной обратной связью методом динамического программирования Беллмана.

Постановка задачи

Математическая модель системы, описывающая поведение объекта управления, имеет вид

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\k &= 0, 1, \dots, N-1,\end{aligned}\tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,\tag{2}$$

задан функционал качества управления –

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)\tag{3}$$

где $Q(k)$, - неотрицательно определенная симметрическая матрица размера $(n \times n)$, $R(k)$ - положительно определенная симметрическая матрица $(q \times q)$.

Требуется найти управление $u^*(k, x)$ с полной обратной связью, минимизирующее функционал (3).

Краткие сведения из теории

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\tag{4}$$

где x - вектор состояния системы,

$$x \in \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n$$

- n -мерное евклидово пространство;

u - вектор управления, и

$$u \in U \subset \mathbf{R}^n,$$

U – некоторое заданное множество допустимых значений управления,

$$t \in T = [t_0, t_1]$$

- интервал времени функционирования системы, моменты начала процесса t_0 и окончания процесса t_1 заданы, $f(t, x, u)$:

$$T \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

Задан функционал качества управления:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt + F(x(t_1)), \quad (5)$$

где $f^0(t, x, u)$, $F(x)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции. Предполагается, что при управлении используется информация о текущем времени и векторе состояния x .

Применяемое в каждый момент времени

$$t \in T$$

управление имеет вид управления с полной связью по всем переменным вектора состояния (рис. 1).

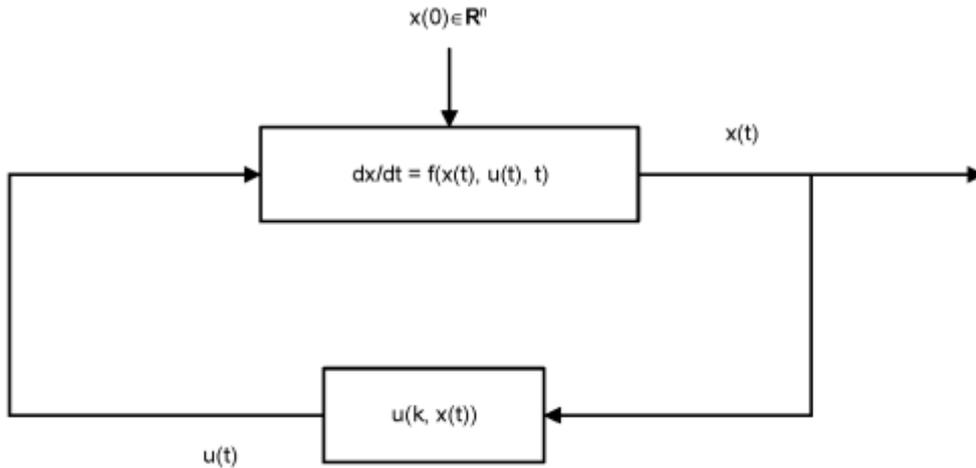


Рис. 1. Схема управления с полной обратной связью по вектору состояния

Требуется найти такую функцию

$$u^*(t, x) \in U_m$$

что:

$$J = \min_{u \in U} J, \quad (6)$$

$$\forall x_0 \in \mathbf{R}^n.$$

Функция

$$u^*(t, x) \in U_n$$

называется оптимальным управлением с полной обратной связью. Для любого начального состояния x_0 из множества \mathbf{R}^n она порождает соответствующую оптимальную пару, т.е. оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$ и оптимальное программное управление $u^*(\cdot)$.

Достаточным условием минимума функционала (5) является уравнение Беллмана для непрерывных детерминированных систем.

Если существуют функция

$$\phi(t, x) \in C^{1,1},$$

удовлетворяющая уравнению Беллмана с граничным условием:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0, \quad \forall(t, x), \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\phi(t_1, x) &= -F(x), \\ \forall x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

и управление

$$u^*(t, x) \in U_n,$$

удовлетворяющее условию

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\},$$

то $u^*(t, x)$ является оптимальным управлением с полной обратной связью. При этом минимальное значение функционала (5)

$$\begin{aligned}\min_u J &= -\phi(t_0, x_0), \\ \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}\tag{8}$$

Пусть система, описывающая поведение модели объекта управления, имеет вид
(5.9)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}\tag{9}$$

Пусть функционал качества управления квадратичный:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1)\Lambda x(t_1)\tag{10}$$

где $S(t)$, Λ – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $(n \times n)$, а $Q(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица $(q \times q)$.

Используем известные правила и обозначения:

$$\begin{aligned}1. \frac{\partial(Ax)}{\partial x} &= A^T; \\ 2. \frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} &= Ax + A^T x;\end{aligned}$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T;$$

$$4. x^T Ax \equiv 0 \Leftrightarrow A + A^T = 0;$$

$$5. \operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}.$$

Уравнение Беллмана для данной задачи имеет вид:

$$\max_{u \in R^q} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right)^T [A(t)x + B(t)u] - \frac{1}{2} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] \right\} = 0,$$

$$\varphi(t_1, x) = -\frac{1}{2} x^T \Lambda x \quad (11)$$

Отсюда

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \right)^T B(t)u - \frac{1}{2} u^T(t)Q(t)u(t) \right\}.$$

Найдем максимум в последнем выражении по управлению с использованием необходимых условий экстремума и правила 1-3. Дифференцируя выражение в квадратных скобках по u и приравнявая результат нулю, получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}. \quad (12)$$

Решение уравнения (11) ищется в виде:

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} x^T K_2 x, \quad (13)$$

где $K_2(t)$ - неизвестная симметрическая матрица ($n \times n$).

Подставляя (13) в уравнение (11), приравнявая нулю квадратичные формы, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{K}_2(t) &= -A^T(t)K_2(t) - K_2(t)A(t) - K_2(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t) + S(t), \\ K_2(t_1) &= -\Lambda \end{aligned} \quad (14)$$

Решая уравнение Риккати (14), можно получить явный вид оптимального управления (12) с полной обратной связью

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t). \quad (15)$$

Минимальная величина функционала вычисляется по формуле:

$$\min J = -\varphi(t_0, x_0) = -\frac{1}{2}x_0^T K_2(t_0)x_0.$$

Рассмотрим дискретный случай

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\ k &= 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (16)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad (17)$$

и функционалом качества

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) + (x^T(N)\Lambda x(N)) \quad (18)$$

где $Q(k)$, Λ - неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $(n \times n)$, $R(k)$ - положительно определенная симметрическая матрица $(q \times q)$.

Требуется найти управление $u^*(k, x)$ с полной обратной связью, минимизирующее функционал.

Уравнение Беллмана принимает вид:

$$B(k, x) = \min_u [x^T Q(k)x + u^T R(k)u + B(k+1, A(k)x + B(k)u)] \quad (19)$$

Функция Беллмана $B(k, x)$ ищется в форме:

$$B(k, x) = x^T P(k)x, \quad (20)$$

где $P(k)$ - неизвестная неотрицательно определенная симметрическая матрица размера $(n \times n)$.

Подставляя (20) в (19) получаем, что в задаче (16)-(18) оптимальное управление определяется соотношением

$$u^*(k, x) = -K(k)x, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (21)$$

где $K(k)$ - матрица коэффициентов усиления регулятора размера $(q \times n)$

$$K(k) = [R(k) + B^T P(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k) P(k+1) A(k), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (22)$$

а матрица $P(k)$ размера $(n \times n)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} P(k) &= Q(k) + K^T(k)R(k)K(k) + [A(k) - B(k)K(k)]^T P(k+1) [A(k) - B(k)K(k)], \\ k &= \overline{N-1, 0}, \\ P(N) &= \Lambda. \end{aligned} \quad (23)$$

Минимальная величина функционала определяется по формуле

$$\min J = x_0^T P(0) x_0 \quad (24)$$

Структурная схема регулятора системы управления с обратной связью по всем переменным состояния изображена на рис 2.

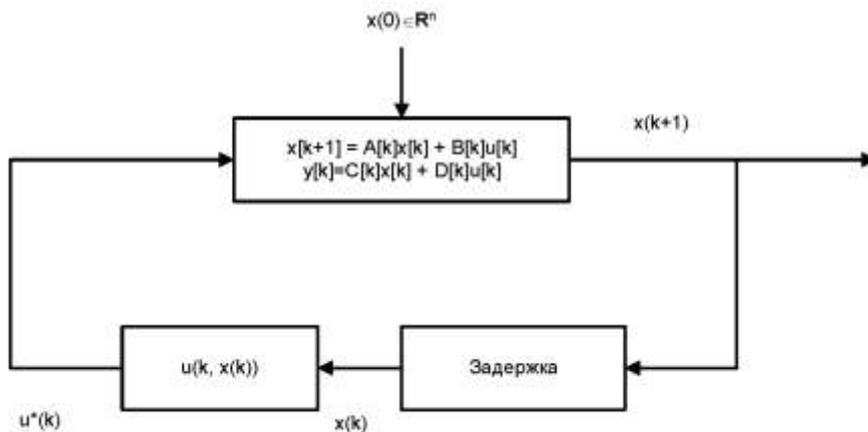


Рис. 2. Структурная схема регулятора системы управления

Для каждого начального состояния x_0 оптимальный линейный регулятор порождает оптимальное программное управление $u^*(x, k)$ и оптимальную траекторию $x^*(k)$.

Методика выполнения работы

Для синтеза оптимальных регуляторов линейных стационарных систем в Control System Toolbox имеются функции решений уравнений Беллмана (таблица 1).

Таблица 1 - Функции Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
[K P e] = lqr(A, B, Q, S)	Синтез непрерывного регулятора
[K P e] = lqr(A, B, Q, S, N)	Синтез непрерывного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R, N)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, Ts)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, N, Ts)	Синтез дискретного регулятора

Функция lqr вычисляет матрицу коэффициентов регулирования K со среднеквадратичным функционалом качества без терминального члена:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + u^T S u + 2x^T N u] dt,$$

при этом вычисляются матрица P , являющаяся решением уравнения Риккати, и собственные значения e матрицы $(A - BK)$.

Функция dlqr вычисляет матрицу коэффициентов регулирования по всем переменным состояниям K для дискретной системы со среднеквадратичным функционалом качества без терминального члена:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + x^T(k) N u(k)),$$

при этом вычисляются матрица P , являющаяся решением уравнения Риккати, и собственные значения e матрицы $(A - BK)$.

Функция `lqrd` предназначена для синтеза оптимального дискретного регулятора непрерывной системы со среднеквадратичным функционалом качества:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + u^T S u + 2x^T N u] dt.$$

В качестве параметра в функцию передается шаг дискретизации T_s , возвращаются значения матрицы K дискретного управления, матрица P , являющаяся решением уравнения Риккати и собственные значения e матрицы системы управления, полученные в результате дискретизации.

При использовании всех команд синтеза оптимального линейного регулятора по всем переменным состояния на исходные данные накладываются следующие ограничения:

- система, определяемая матрицами (A, B) должна быть стабилизируема;
- должны выполняться неравенства $S > 0$, $Q - NR^{-1}N^T > 0$,
- пара матриц $(Q - NR^{-1}N^T, A - BR^{-1}B^T)$ не должна иметь наблюдаемые моды с собственными значениями на действительной оси.

Для выполнения практической работы необходимо выполнить следующие действия:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать ss-объект, в соответствии с заданным вариантом.
4. Определить матрицы $P(k)$, $K(k)$.
5. Построить оптимальный регулятор $u^*(k, x) = -K(k)x$.
6. Определить значение функционала на оптимальном управлении.
7. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
8. Ответить на контрольные вопросы.
9. Оформить отчет и защитить работу.

Методический пример

Ниже приведен пример script-файла, моделирующего систему управления и синтез оптимального регулятора.

```
% Параметры системы
A=[1 0; -2 1];
B=[1 0; 1 0]';

% Параметров критерия качества управления
Q=[1/2 0; 0 1/2];
R=[1/2 0; 0 1/2];

% Время регулирования
T=10;
% Величина шага
SS=0.5;
% Количество шагов
N=T/SS

% Вычисление параметров регулятора
[k p e]= dlqr(A, B, Q, R)

x = zeros(2, N);
u= zeros(2, N-1);

% Начальные условия
x(1,1)=2;
x(2,1)=1;

% Построение графиков динамики системы
for i=1:N-1,
    u(:, i)= - k*x(:, i);,
    x(:, i+1)=A*x(:, i)+B*u(:, i);
end

x1= x(1,:);
x2= x(2,:);
t = 0:SS:T-SS;

subplot(4, 1, 1);
plot(t, x1, 'b');
subplot(4, 1, 2);
plot(t, x2, 'g');

subplot(4, 1, 3);
plot(SS:SS:T-SS, u(1, :), 'y');

subplot(4, 1, 4);
plot(SS:SS:T-SS, u(2, :), 'r');
```

Результаты вычисления следующие: значения параметров оптимального регулятора:

$$\begin{aligned}
 k &= \\
 &\quad 0.8229 \quad -0.1771 \\
 &\quad 0.8229 \quad -0.1771 \\
 p &= \\
 &\quad 3.7343 \quad -1.4114 \\
 &\quad -1.4114 \quad 1.1614 \\
 e &= \\
 &\quad 0.1771 + 0.1771i \\
 &\quad 0.1771 - 0.1771i
 \end{aligned}$$

Зависимости величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ представлены на рис. 3.

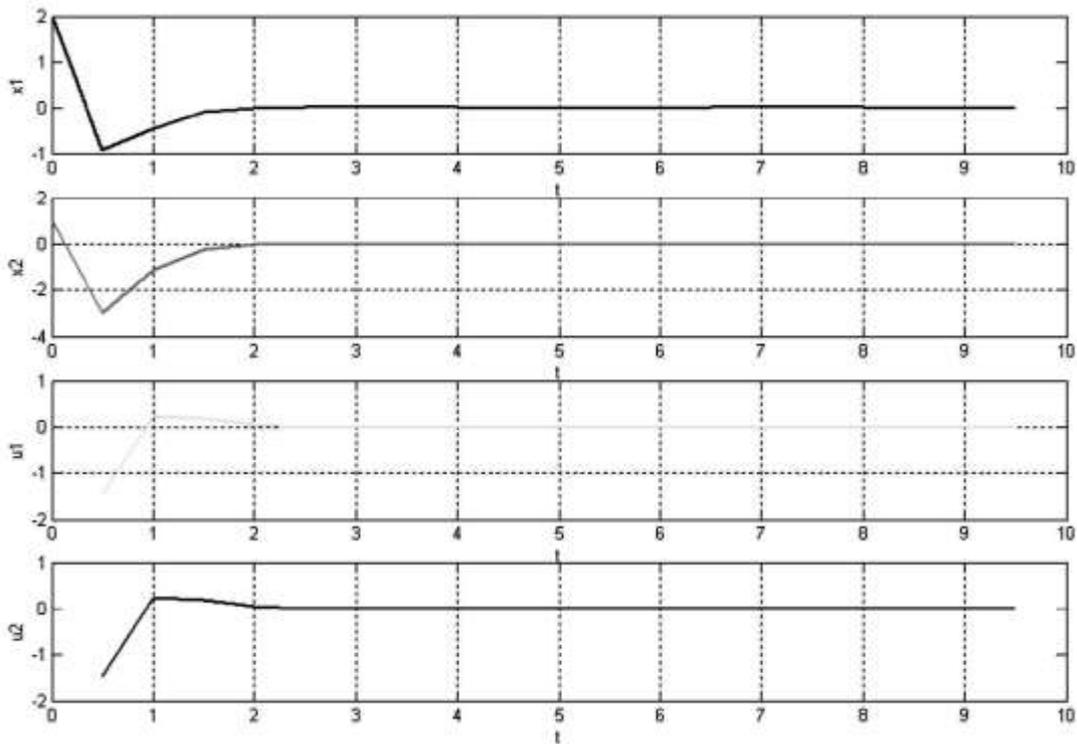


Рис. 3. Динамика состояний и управлений: зависимости $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$

Отчет о работе

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Наименование и цель работы.
3. Постановка задачи в соответствии с вариантом.
4. Порядок и результаты определения вычисления матриц P и K .
5. Уравнение Беллмана для решаемой задачи.
6. Значение минимальной величины функционала качества управления.
7. Результаты моделирования динамики системы в числовом и графическом виде.
8. Анализ результатов и выводы.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основную задачу оптимального управления.
2. Дать определение критерия качества. Привести примеры критериев и дать их физическую интерпретацию.
3. Вывести необходимое условие оптимальности.
4. Показать, что для применения метода необходимо, чтобы система была стабилизируема.
5. Разработать в среде MATLAB интерфейс для интерактивного построения регулятора с полной обратной связью.
6. Выяснить влияние задержки при синтезе дискретного регулятора непрерывной системы.

Варианты заданий

Таблица 2 - Варианты заданий

Модель системы	Функционал качества управления
1. $x_1(k+1) = 3x_1(k) - u_1(k) + 3u_2(k)$ $x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + u_1(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 3$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 3u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + 8x_2^1(k) + 12x_2^1(k)$
2. $x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) - 2u_1(k) - 3u_2(k)$ $x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) - 4u_1(k) - u_2(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 7u_1^2(k) + u_2^2(k) + 5x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 9x_2^1(k) + x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + 6x_2^1(k) + 8x_2^1(k)$
3. $x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_1(k) - u_1(k)$ $x_2(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) - 2u_2(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 3x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u_1^2(k) + 2u_2^2(k) + 3x_2^1(k) + 7x_2^1(k)$
4. $x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) - u(k)$ $x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) - 2u(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 4u^2(k) + 8x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) + x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 3u^2(k) + 3x_2^1(k) + x_2^1(k)$

Литература

1. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами в системе MATLAB. -СПб.: Наука, 1999.
3. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов /Под общ. ред. Потемкина В.Г. - М.: Диалог-МИФИ, 1999.
4. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. - М.: МАИ, 1997.
5. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. - М.: Машиностроение, 1972.
6. Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник. - СПб.: Питер, 2002
7. Лазарев Ю.Ф. MATLAB 5.x. Библиотека студента. - К.: Издательская группа BHV, 2000.
8. Мальшев С. А. Метод корневого годографа: Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. - М.: МИП, 1992.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Под общ. ред. Н.Д. Егупова - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.
10. Мороз А.И. Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. - М.: МИП, 1989.
11. Using the Control System Toolbox with MATLAB 6: Computation. Visualization. Programming - The MathWorks, Inc., 2000.