МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 22 » ноября 2016 г.

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Методические указания по выполнению практической и самостоятельной работ по курсу
«Управление мехатронными системами и роботами»
по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника»

Курск 2016

УДК 681.5.01

Составитель: П.А. Безмен

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент кафедры механики,
мехатроники и робототехники
Е.Н. Политов

Синтез оптимального управления с полной обратной связью: методические указания по выполнению практической и самостоятельной работ по дисциплине «Управление мехатронными системами и роботами» по направлению 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: П.А. Безмен; Курск, 2016. 16 с.: ил. 3, табл. 2.

Содержат сведения по вопросам синтеза систем автоматического управления для мехатронных систем и роботов. Приведены краткие сведения из теории, методика выполнения работы, варианты заданий, примеры.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 - «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж 100 экз. Заказ.
Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическая работа № 5
СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Цель работы

Целью работы является ознакомление с методикой построения линейных оптимальных систем управления с полной обратной связью методом динамического программирования Беллмана.

Постановка задачи

Математическая модель системы, описывающая поведение объекта управления, имеет вид

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k), \tag{1}$$
$$y(k) = C(k)\,x(\kappa) + D(k)\,u(k)$$
$$k = 0, 1, ..., N-1,$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

задан функционал качества управления –

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k) \tag{3}$$

где $Q(k)$, - неотрицательно определенная симметрическая матрица размера $(n\times n)$, $R(k)$ - положительно определенная симметрическая матрица $(q\times q)$.

Требуется найти управление $u^*(k,\ x)$ с полной обратной связью, минимизирующее функционал (3).

Краткие сведения из теории

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$x(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{4}$$

где x - вектор состояния системы,

$$x \in \mathbf{R}^n, \ \mathbf{R}^n$$

- n-мерное евклидово пространство;
u - вектор управления, и

$$u \in \mathrm{U} \subset \mathbf{R}^n,$$

U – некоторое заданное множество допустимых значений управления,

$$t \in \mathrm{T} = [t_0, t_1]$$

- интервал времени функционирования системы, моменты начала процесса t_0 и окончания процесса t_1 заданы, $f(t, x, u)$:

$$\mathrm{T} \times \mathbf{R}^n \times \mathrm{U} \to \mathbf{R}^n.$$

Задан функционал качества управления:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt + F(x(t_1)), \tag{5}$$

где $f^0(t, x, u)$, $F(x)$ - заданные непрерывно дифференцируемые функции. Предполагается, что при управлении используется информация о текущем времени и векторе состояния x.

Применяемое в каждый момент времени

$$t \in \mathrm{T}$$

управление имеет вид управления с полной связью по всем переменным вектора состояния (рис. 1).

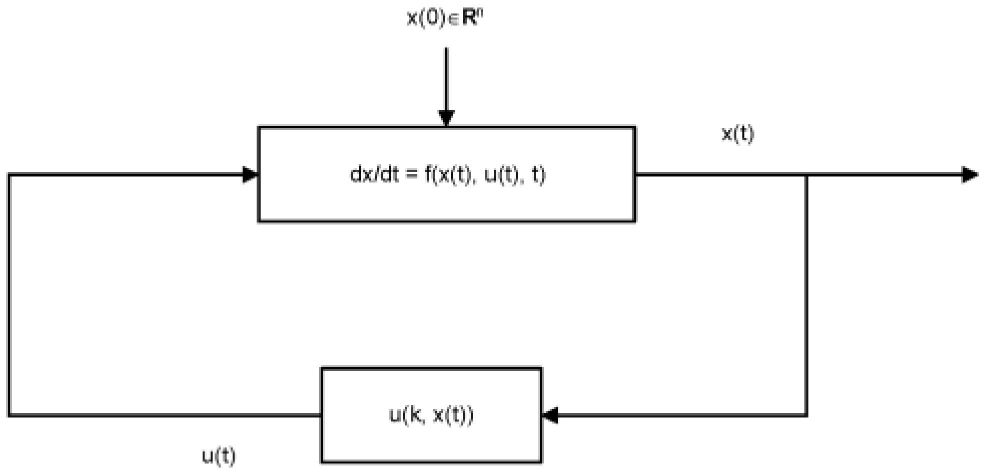

Рис. 1. Схема управления с полной обратной связью по вектору состояния

Требуется найти такую функцию

$$u^*(t, x) \in \mathrm{U}_m,$$

что:

$$J = \min_{u \in U} J, \qquad \forall x_0 \in \mathrm{R}^n. \tag{6}$$

Функция

$$u^*(t, x) \in \mathrm{U}_n$$

называется оптимальным управлением с полной обратной связью. Для любого начального состояния x_0 из множества $\mathbf{R}^n$ она порождает соответствующую оптимальную пару, т.е. оптимальную траекторию $x^*()$ и оптимальное программное управление $u^*()$.

Достаточным условием минимума функционала (5) является уравнение Беллмана для непрерывных детерминированных систем.

Если существуют функция

$$\phi(t, x) \in \mathrm{C}^{1,1},$$

удовлетворяющая уравнению Беллмана с граничным условием:

$$\max_{u \in \mathrm{U}} \left\{ \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0, \quad \forall (t, x), \tag{7}$$

$$\phi(t_1, x) = -F(x),$$
$$\forall x \in \mathrm{R}^n,$$

и управление

$$u^*(t, x) \in \mathrm{U}_n,$$

удовлетворяющее условию

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in \mathrm{U}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\, \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\},$$

то $u^*(t, x)$ является оптимальным управлением с полной обратной связью. При этом минимальное значение функционала (5)

$$\min_u J = -\phi(t_0, x_0),$$
$$\forall x_0 \in \mathrm{R}^n. \qquad (8)$$

Пусть система, описывающая поведение модели объекта управления, имеет вид
(5.9)

$$\dot{x}(t) = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t),$$
$$y(t) = C(t)\, x(t) \ + D(t)\, u(t) \qquad (9)$$

Пусть функционал качества управления квадратичный:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[x^T(t) S(t) x(t) + u^T(t) Q(t) u(t)\right] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1) \Lambda x(t_1) \qquad (10)$$

где $S(t)$, Λ – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера (n×n), а $Q(t)$ - положительно определенная симметрическая матрица (q×q).

Используем известные правила и обозначения:

$$1. \frac{\partial (Ax)}{\partial x} = A^T;$$

$$2. \frac{\partial (x^T A x)}{\partial x} = Ax + A^T x;$$

$$3.(AB)^T = B^T A^T;$$

$$4.\ x^T A x \equiv 0 \Leftrightarrow A + A^T = 0;$$
$$5.\ \operatorname{tr} A = \sum\nolimits_i a_{ii}.$$

Уравнение Беллмана для данной задачи имеет вид:

$$\max_{u\in R^q}\left\{\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}\right)^T\left[A(t)x+B(t)u\right]-\frac{1}{2}\left[x^T(t)S(t)x(t)+u^T(t)Q(t)u(t)\right]\right\}=0,$$

$$\varphi(t_1,x)=-\frac{1}{2}x^T\Lambda x \tag{11}$$

Отсюда

$$\mathrm{u}^*(t,x)=\arg\max_{u\in \mathrm{U}}\left\{\left(\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}\right)^T B(t)u-\frac{1}{2}u^T(t)Q(t)u(t)\right\}.$$

Найдем максимум в последнем выражении по управлению с использованием необходимых условий экстремума и правила 1-3. Дифференцируя выражение в квадратных скобках по *u* и приравнивая результат нулю, получаем структуру оптимального управления:

$$\mathrm{u}^*(t,x)=Q^{-1}(t)B^T(t)\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}. \tag{12}$$

Решение уравнения (11) ищется в виде:

$$\varphi(t,x)=\frac{1}{2}x^T K_2 x, \tag{13}$$

где $K_2(t)$ - неизвестная симметрическая матрица ($n\times n$).

Подставляя (13) в уравнение (11), приравнивая нулю квадратичные формы, получаем:

$$\dot{K}_2(t)=-A^T(t)K_2(t)-K_2(t)A(t)-K_2(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t)+S(t), \tag{14}$$
$$K_2(t_1)=-\Lambda$$

Решая уравнение Риккати (14), можно получить явный вид оптимального управления (12) с полной обратной связью

$$u^*(t,x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t). \tag{15}$$

Минимальная величина функционала вычисляется по формуле:

$$\min J = -\varphi(t_0, x_0) = -\frac{1}{2}x_0^T K_2(t_0)x_0.$$

Рассмотрим дискретный случай

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k), \tag{16}$$
$$y(k) = C(k)\,x(k) + D(k)\,u(k)$$
$$k = 0, 1, ..., N\text{-}1,$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{17}$$

и функционалом качества

$$J = \sum_{k=0}^{N-1}\left(x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)\right) + \left(x^T(N)\Lambda x(N)\right) \tag{18}$$

где $Q(k)$, Λ - неотрицательно определенные симметрические матрицы размера ($n\times n$), $R(k)$ – положительно определенная симметрическая матрица ($q\times q$).

Требуется найти управление $u^*(k, x)$ с полной обратной связью, минимизирующее функционал.

Уравнение Беллмана принимает вид:

$$B(k,x) = \min_u[x^T Q(k)x + u^T R(k)u + B(k+1, A(k)x + B(k)u)] \tag{19}$$

Функция Беллмана $B(k, x)$ ищется в форме:

$$B(k, x) = x^T P(k)x, \tag{20}$$

где $P(k)$ – неизвестная неотрицательно определенная симметрическая матрица размера ($n\times n$).

Подставляя (20) в (19) получаем, что в задаче (16)-(18) оптимальное управление определяется соотношением

$$u^*(k, x) = -K(k)\,x,\ k = \overline{0, N-1}, \tag{21}$$

где $K(k)$ - матрица коэффициентов усиления регулятора размера $(q \times n)$

$$K(k) = [R(k) + B^{\mathrm{T}}P(k+1)B(k)]^{-1}B^{\mathrm{T}}(k)P(k+1)A(k),\ k = \overline{0, N-1}, \tag{22}$$

а матрица $P(k)$ размера $(n \times n)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{gathered} P(k) = Q(k) + K^{\mathrm{T}}(k)R(k)K(k) + [A(k) - B(k)K(k)]^{\mathrm{T}}\,P(k+1)\,[A(k) - B(k)K(k)], \\ k = \overline{N-1, 0}, \\ P(N) = \Lambda. \end{gathered} \tag{23}$$

Минимальная величина функционала определяется но формуле

$$min\,J = x_0^T P(0) x_0 \tag{24}$$

Структурная схема регулятора системы управления с обратной связью по всем переменным состояния изображена на рис 2.

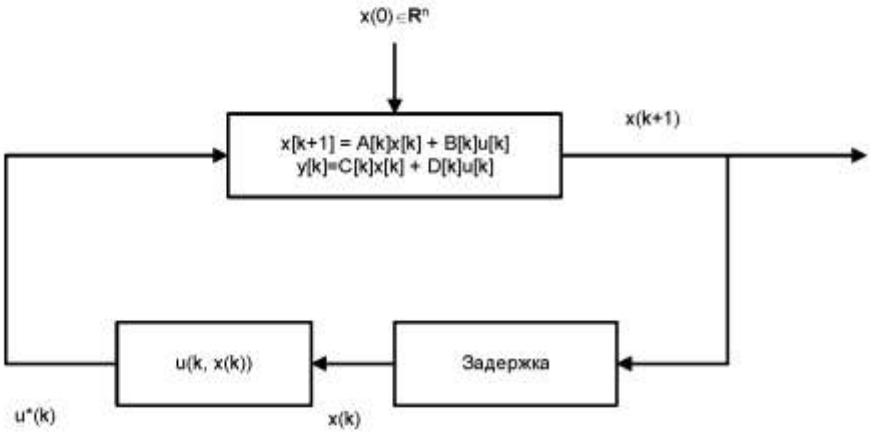

Рис. 2. Структурная схема регулятора системы управления

Для каждого начального состояния x_0 оптимальный линейный регулятор порождает оптимальное программное управление $u^*(x, k)$ и оптимальную траекторию $x^*(k)$.

Методика выполнения работы

Для синтеза оптимальных регуляторов линейных стационарных систем в Control System Toolbox имеются функции решений уравнений Беллмана (таблица 1).

Таблица 1 - Функции Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
[K P e] = lqr(A, B, Q, S)	Синтез непрерывного регулятора
[K P e] = lqr(A, B, Q, S, N)	Синтез непрерывного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R, N)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, Ts)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, N, Ts)	Синтез дискретного регулятора

Функция lqr вычисляет матрицу коэффициентов регулирования K со среднеквадратичным функционалом качества без терминального члена:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[x^T Qx + u^T Su + 2x^T Nu\right]dt,$$

при этом вычисляются матрица P, являющаяся решением уравнения Риккати, и собственные значения e матрицы $(A - BK)$.

Функция dlqr вычисляет матрицу коэффициентов регулирования по всем переменным состояния K для дискретной системы со среднеквадратичным функционалом качества без терминального члена:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1}\left(x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) + x^T(k)Nu(k)\right),$$

при этом вычисляются матрица *P*, являющаяся решением уравнения Риккати, и собственные значения *e* матрицы $(A - BK)$.

Функция lqrd предназначена для синтеза оптимального дискретного регулятора непрерывной системы со среднеквадратичным функционалом качества:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \left[x^T Qx + u^T Su + 2x^T Nu \right] dt .$$

В качестве параметра в функцию передается шаг дискретизации T_s, возвращаются значения матрицы *K* дискретного управления, матрица *P*, являющаяся решением уравнения Риккати и собственные значения *e* матрицы системы управления, полученные в результате дискретизации.

При использовании всех команд синтеза оптимального линейного регулятора по всем переменным состояния на исходные данные накладываются следующие ограничения:

- система, определяемая матрицами (*A*, *B*) должна быть стабилизируема;

- должны выполняться неравенства $S > 0$, $Q - NR^{-1}N^T > 0$,

- пара матриц $(Q - NR^{-1}N^T,\ A - BR^{-1}B^T)$ не должна иметь наблюдаемые моды с собственными значениями на действительной оси.

Для выполнения практической работы необходимо выполнить следующие действия:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать ss-объект, в соответствии с заданным вариантом.
4. Определить матрицы $P(k)$, $K(k)$.
5. Построить оптимальный регулятор $u^*(k, x) = - K(k)\, x$.
6. Определить значение функционала на оптимальном управлении.
7. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
8. Ответить на контрольные вопросы.
9. Оформить отчет и защитить работу.

Методический пример

Ниже приведен пример script-файла, моделирующего систему управления и синтез оптимального регулятора.

```
% Параметры системы
A=[1 0; -2 1];
B=[1 0; 1 0]';

% Параметров критерия качества управления
Q=[1/2 0;0 1/2];
R=[1/2 0; 0 1/2];

% Время регулирования
T=10;
% Величина шага
SS=0.5;
% Количество шагов
N=T/SS

% Вычисление параметров регулятора
[k p e]= dlqr(A, B, Q, R)

x = zeros(2, N);
u=  zeros(2, N-1);

% Начальные условия
x(1,1)=2;
x(2,1)=1;

% Построение графиков динамики системы
for i=1:N-1,
    u(:, i)= - k*x(:, i);,
    x(:, i+1)=A*x(:, i)+B*u(:, i);
end

x1= x(1,:);
x2= x(2,:);
t = 0:SS:T-SS;

subplot(4, 1, 1);
plot(t, x1, 'b');
subplot(4, 1, 2);
plot(t, x2, 'g');

subplot(4, 1, 3);
plot(SS:SS:T-SS, u(1, :), 'y');

subplot(4, 1, 4);
plot(SS:SS:T-SS, u(2, :), 'r');
```

Результаты вычисления следующие: значения параметров оптимального регулятора:

```
k =
    0.8229   -0.1771

    0.8229   -0.1771

p =
    3.7343   -1.4114
   -1.4114    1.1614

e =
   0.1771 + 0.1771i
   0.1771 - 0.1771i
```

Зависимости величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$ представлены на рис. 3.

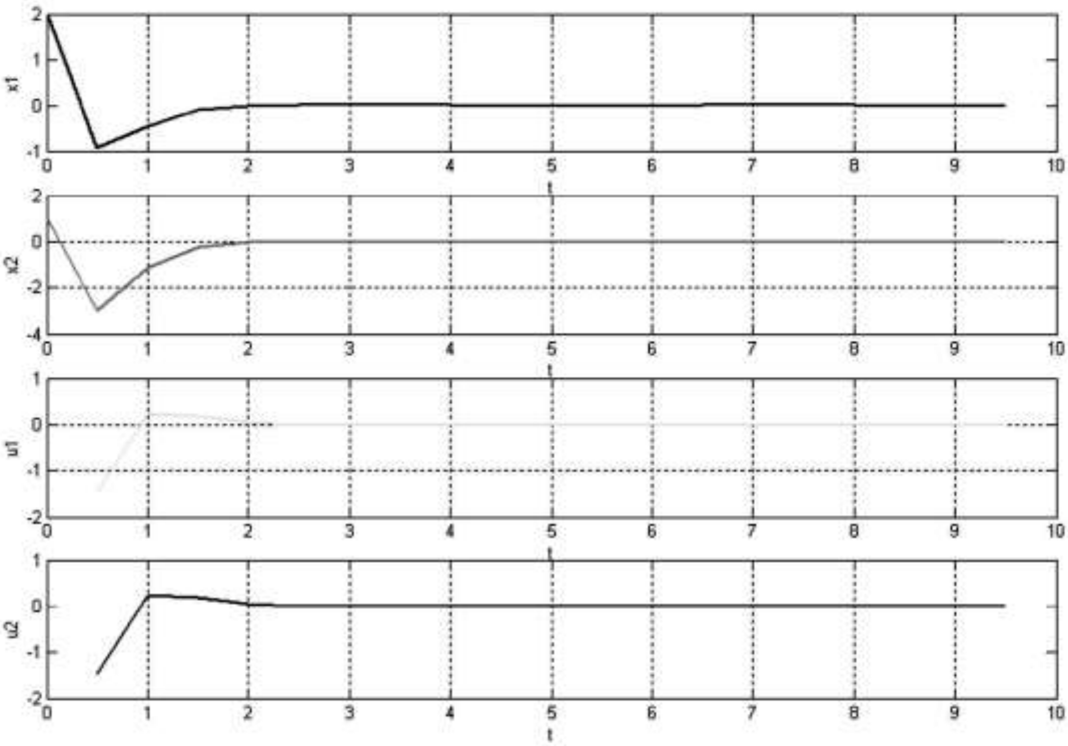

Рис. 3. Динамика состояний и управлений: зависимости $x_1(t)$, $x_2(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$

Отчет о работе

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Наименование и цель работы.
3. Постановка задачи в соответствии с вариантом.
4. Порядок и результаты определения вычисления матриц P и K.
5. Уравнение Беллмана для решаемой задачи.
6. Значение минимальной величины функционала качества управления.
7. Результаты моделирования динамики системы в числовом и графическом виде.
8. Анализ результатов и выводы.

Контрольные вопросы

1. Сформулировать основную задачу оптимального управления.
2. Дать определение критерия качества. Привести примеры критериев и дать их физическую интерпретацию.
3. Вывести необходимое условие оптимальности.
4. Показать, что для применения метода необходимо, чтобы система была стабилизируема.
5. Разработать в среде MATLAB интерфейс для интерактивного построения регулятора с полной обратной связью.
6. Выяснить влияние задержки при синтезе дискретного регулятора непрерывной системы.

Варианты заданий

Таблица 2 - Варианты заданий

Модель системы	Функционал качества управления
1. $x_1(k+1)=3x_1(k)-u_1(k)+3u_2(k)$ $x_2(k+1)=x_1(k)-x_2(k)+u_1(k)$ $x_1(0)=1, x_2(0)=3$	1. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}3u_1^2(k)+4u_2^2(k)+x_2{}^2(k)$
	2. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}2u_1^2(k)+x_2^1(k)+4x_2^1(k)$
	3. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}2u_1^2(k)+4u_2^2(k)+8x_2^1(k)+12x_2^1(k)$
2. $x_1(k+1)=x_1(k)+2x_2(k)-2u_1(k)-3u_2(k)$ $x_2(k+1)=2x_1(k)+x_2(k)-4u_1(k)-u_2(k)$ $x_1(0)=1, x_2(0)=2$	1. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}7u_1^2(k)+u_2^2(k)+5x_2{}^2(k)$
	2. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}2u_1^2(k)+9x_2^1(k)+x_2^1(k)$
	3. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}u_1^2(k)+4u_2^2(k)+6x_2^1(k)+8x_2^1(k)$
3. $x_1(k+1)=2x_2(k)+x_1(k)-u_1(k)$ $x_2(k+1)=x_1(k)+4x_2(k)-2u_2(k)$ $x_1(0)=1, x_2(0)=1$	1. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}2u_1^2(k)+4u_2^2(k)+x_2{}^2(k)$
	2. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}2u_1^2(k)+3x_2^1(k)+4x_2^1(k)$
	3. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}u_1^2(k)+2u_2^2(k)+3x_2^1(k)+7x_2^1(k)$
4. $x_1(k+1)=x_1(k)-x_2(k)-u(k)$ $x_2(k+1)=2x_1(k)+x_2(k)-2u(k)$ $x_1(0)=1, x_2(0)=1$	1. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}4u^2(k)+8x_2{}^2(k)$
	2. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}u^2(k)+x_2^1(k)+4x_2^1(k)$
	3. $J=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}3u^2(k)+3x_2^1(k)+x_2^1(k)$

Литература

1. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002.
2. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами в системе MATLAB. -СПб.: Наука, 1999.
3. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов /Под общ. ред. Потемкина В.Г. - М.: Диалог-МИФИ, 1999.
4. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. - М.: МАИ, 1997.
5. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. - М.: Машиностроение, 1972.
6. Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник. - СПб.: Питер, 2002
7. Лазарев Ю.Ф. MATLAB 5.x. Библиотека студента. - К.: Издательская группа BHV, 2000.
8. Малышев С. А. Метод корневого годографа: Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. - М.: МИП, 1992.
9. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. / Под общ. ред. Н.Д. Егупова - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000.
10. Мороз А.И. Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. - М.: МИП, 1989.
11. Using the Control System Toolbox with MATLAB 6: Computation. Visualization. Programming - The MathWorks, Inc., 2000.