МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра уникальных зданий и сооружений

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

____________ О.Г. Локтионова

«15» 12 2017 г.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине «Теория упругости с основами теории пластичности и ползучести» для студентов направления подготовки 08.05.01

Курск 2017

УДК 624.04

Составитель: С.Ю. Савин

Рецензент
Доктор технических работ, профессор *В.И. Колчунов*

Решение задач теории упругости: методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине «Теория упругости с основами теории пластичности и ползучести» для студентов специальности 08.05.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; С.Ю. Савин. - Курск, 2017. - 14 с.: ил.5, табл. 1. - Библиогр.: 14 с.

Методические указания содержат примеры решения задач по дисциплине «Теория упругости с основами теории пластичности и ползучести»».

Методические указания предназначены для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017 . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,93 . Уч.-изд.л. 0,84 . Тираж 100 экз. Заказ. 3650. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

Оглавление

Введение

Цель дисциплины «Теория упругости с основами теории пластичности и ползучести» сформировать у обучающихся научное представление о теоретических основах методов исследования напряженно-деформированного состояния в твердых телах для осуществления проектно-расчетной и экспериментально-исследовательской профессиональной деятельности.

1. Задача о чистом изгибе стержня постоянного прямоугольного сечения

Для стержня, схема которого приведена на рисунке 1, определим перемещения любых точек. Напряженное состояние будем считать известным, оно было получено в курсе сопротивления материалов.

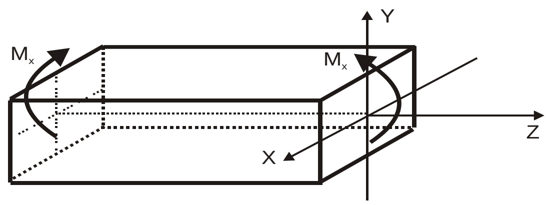


Рисунок 1

В случае чистого изгиба в плоскости Z0Y имеет место только одно напряжение σ_z, остальные составляющие напряжения $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$.

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{I_x} y = -\frac{EI_x y''}{I_x} y = -\frac{E}{R} y,$$

где $\frac{1}{R} \approx y''$ — приближенное значение кривизны.

Уравнения равновесия (1) автоматически удовлетворяются, так как σ_z не зависит от переменной z.

Проверим условия на поверхности (Г).

Верхняя грань. Направляющие косинусы для нее имеют значения $l = 0$, $m = 1$, $n = 0$.

Проверим только третье уравнение из условий на поверхности, поскольку σ_z входит лишь в него. $Z_\nu = \sigma_z \cdot n \equiv 0$. На верхней грани действительно нет нагрузки по оси z.

Боковые грани. Направляющие косинусы для них равны $l = \pm 1$, $m = 0$, $n = 0$. И вновь убеждаемся, что третье уравнение обращается в нуль, что подтверждает отсутствие нагрузки на боковых гранях.

Торцы. Для них $l=0$, $m=1$, $n=\pm 1$. $Z_\nu=\sigma_z\cdot n=\pm\sigma_z$.

$$M_x=\int\limits_{x=-b/2}^{b/2}\int\limits_{y=-h/2}^{h/2}\sigma_z y\,dy\,dx=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\frac{E}{R}by^2dy=\frac{Eb}{R}\cdot\frac{h^3}{12}\equiv M_x\,.$$

Следовательно, условия (Г) выполняются на всех поверхностях.

Запишем составляющие деформации, используя закон Гука (уравнения В) и соотношения Коши (уравнения Б).

$$\varepsilon_z=-\frac{y}{R}=\frac{\partial w}{\partial z}\quad\rightarrow\quad w=-\frac{y}{R}z+f_1(x,y);$$

$$\varepsilon_x=-\mu\varepsilon_z=\mu\frac{y}{R}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad\rightarrow\quad u=\mu\frac{y}{R}x+f_2(y,z);$$

$$\varepsilon_y=-\mu\varepsilon_z=\mu\frac{y}{R}=\frac{\partial v}{\partial y}\quad\rightarrow\quad v=\mu\frac{y^2}{2R}+f_3(x,z).$$

Подставляя значения перемещений во вторую группу соотношений Коши, получим:

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0\quad\rightarrow\quad \mu\frac{x}{R}+\frac{\partial f_2(y,z)}{\partial y}+\frac{\partial f_3(x,z)}{\partial x}=0; \qquad (1)$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0\quad\rightarrow\quad -\frac{z}{R}+\frac{\partial f_3(x,z)}{\partial z}+\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}=0; \qquad (2)$$

$$\gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0\quad\rightarrow\quad \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f_2(y,z)}{\partial z}=0. \qquad (3)$$

Аппроксимируем функции $f_1(x,y)$, $f_2(y,z)$, $f_3(x,z)$ многочленами.

Чтобы установить порядок аппроксимирующих многочленов для каждой из функций, проделаем следующие операции:

Функция $f_1(x,y)$. После дифференцирования уравнения (3) по x, а уравнения (2) – по y, получим следующие соотношения $\frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial x^2}=0$, $\frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y^2}=0$, а это означает, что функция $f_1(x,y)$ может быть представлена многочленом, в котором переменные x, y в первой степени.

$$f_1(x,y) = a_1x + b_1y + c_1xy + d_1.$$

Функция $f_2(y,z)$. После дифференцирования уравнения (1) по y, а уравнения (2) — по z, получим соотношения $\frac{\partial^2 f_2(y,z)}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f_2(y,z)}{\partial z^2} = 0$, то есть функция $f_2(y,z)$ может быть представлена многочленом

$$f_2(y,z) = a_2y + b_2z + c_2yz + d_2.$$

Функция $f_3(x,z)$. После дифференцирования уравнения (1) по x, а уравнения (2) — по z, получим соотношения $\frac{\partial^2 f_3(x,z)}{\partial x^2} = -\frac{\mu}{R}$, $\frac{\partial^2 f_3(x,z)}{\partial z^2} = \frac{1}{R}$, из чего следует, что

$$f_3(x,z) = -\frac{\mu x^2}{2R} + \frac{z^2}{2R} + a_3x + b_3z + c_3xz + d_3.$$

Таким образом, перемещения произвольной точки определятся уравнениями:

$$u = \mu\frac{y}{R}x + a_2y + b_2z + c_2yz + d_2,$$

$$v = \mu\frac{y^2}{2R} - \frac{\mu x^2}{2R} + \frac{z^2}{2R} + a_3x + b_3z + c_3xz + d_3,$$

$$w = -\frac{y}{R}z + a_1x + b_1y + c_1xy + d_1.$$

В полученных уравнениях имеем двенадцать неизвестных констант, но только шесть из них независимые, а остальные константы можно выразить через эти шесть. Для этого воспользуемся еще раз соотношениями Коши для углов сдвига (в рассматриваемом примере они равны нулю).

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \mu\frac{x}{R} + a_2 + c_2z - \frac{\mu}{R}x + a_3 + c_3z = 0;$$

Полученное уравнение может быть выполнено, если $a_3 = -a_2$ и $c_3 = -c_2$.

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \to \quad \frac{z}{R} + b_3 + c_3 x - \frac{z}{R} + b_1 + c_1 x = 0.$$

Следовательно, $c_3 = -c_1$ и $b_3 = -b_1$.

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \to \quad a_1 + c_1 y + b_2 + c_2 y = 0,$$

откуда следует, что $c_2 = -c_1$ и $b_2 = -a_1$.

Анализируя полученные результаты, приходим к выводу, что $c_3 = c_1 = 0$, так как

$$c_3 = -c_2 = -(-c_1) = c_1 \text{ и одновременно } c_3 = -c_1.$$

Таким образом, имеем шесть неизвестных независимых констант a_1, b_1, d_1, a_2, d_2, d_3.

$$w = -\frac{y}{R} z + a_1 x + b_1 y + d_1,$$

$$v = \mu \frac{y^2}{2R} - \frac{\mu x^2}{2R} + \frac{z^2}{2R} - a_2 x - b_1 z + d_3,$$

$$u = \mu \frac{y}{R} x + a_2 y - a_1 z + d_2.$$

Константы определяем из граничных условий. Пусть левый край бруса защемлен. Начало координат поместим в левый край. Тогда, если $x = y = z = 0$, перемещения отсутствуют из условий закрепления, то есть $u = v = w = 0$. Это условие приведет к результату

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0.$$

В начале координат на левом крае бруса отсутствуют также углы поворота относительно осей x и y, то есть $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$, что позволяет утверждать о равенстве нулю констант a_1 и b_1.

Отсутствуют в начале координат и углы закручивания $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$

.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_2 = 0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad a_2 = 0.$$

Таким образом, перемещения защемленного с одного края бруса можно описать следующими уравнениями:

$$w = -\frac{y}{R} z, \quad u = \mu \frac{y}{R} x, \quad v = \mu \frac{y^2}{2R} - \mu \frac{x^2}{2R} + \frac{z^2}{2R}. \qquad (4)$$

2 Расчет подпорной стенки треугольного профиля

Рассмотрим подпорную стенку (рисунок 2), подвергающуюся нагрузке от давления грунта и собственного веса.

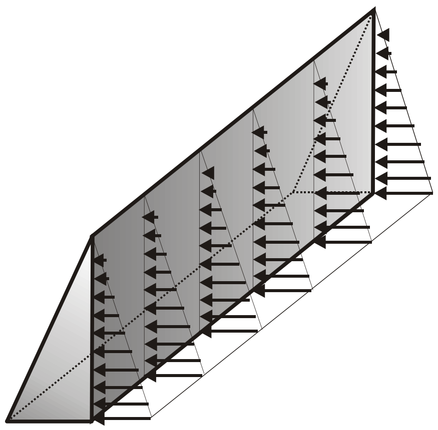


Рисунок 2

Для расчета вырежем из тела подпорной стенки двумя вертикальными плоскостями пластинку толщиной, равной безразмерной единице. Давление грунта на высоте y равно γy (объемный вес материала стенки обозначим γ_1). Выберем систему координат как показано на рисунке 3.

.Для решения данной задачи необходимо подобрать функцию напряжений так, чтобы она удовлетворяла уравнению и условиям на поверхности. Зададимся полиномом третьей степени для функции φ, что позволит автоматически удовлетворить уравнение:

$$\varphi = a_1\frac{x^3}{6} + a_2\frac{x^2y}{2} + a_3\frac{xy^2}{2} + a_4\frac{y^3}{6}.$$

Формулы для определения напряжений примут следующий вид:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = a_3x + a_4y; \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = a_1x + a_2y;$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - X_\rho y - Y_\rho x = -a_2x - a_3y - \gamma_1 x = -x(a_2+\gamma_1) - a_3y.$$

$$X_\rho = 0, \quad . \; Y_\rho = \gamma_1.$$

Запишем условия на поверхности:

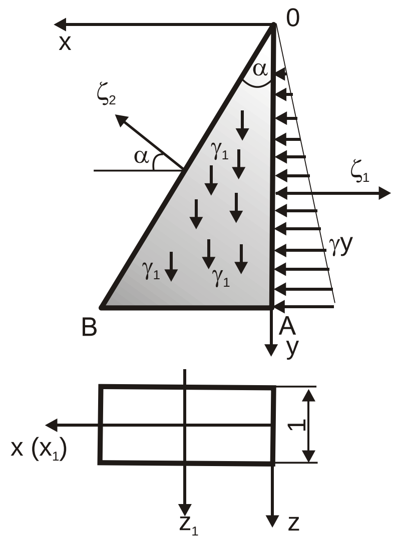


Рисунок 3

Боковая поверхность 0А, *x = 0.*

$$l = \cos 180^0 = -1, \quad m = \cos(-90^0) = 0.$$

$$X_\varsigma = \gamma y = \sigma_x \cdot l + \tau_{xy}\cdot m = a_4y(-1) = -a_4y, \text{ т.е. } \quad d = -\gamma.$$

$$Y_\varsigma = 0 = \tau_{xy}\cdot l + \sigma_y \cdot m = a_3y, \text{ т.е. } \quad a_3 = 0.$$

Поверхность 0В, $x = ytg\alpha$.

$$l = \cos\alpha, \quad m = \cos(90^0 + \alpha) = -\sin\alpha.$$

$$X_\varsigma = -\gamma y\cos\alpha + ytg\alpha(a_2+\gamma_1)\sin\alpha = 0.$$

Из этого уравнения определяем константу a_2.

$$a_2 = \frac{\gamma\cos\alpha}{tg\alpha\sin\alpha} - \gamma_1 = \frac{\gamma}{tg^2\alpha} - \gamma_1.$$

$$Y_\varsigma = 0 \quad \rightarrow \quad -ytg\alpha(a_2+\gamma_1)\cos\alpha - (a_1x + a_2y)\sin\alpha = 0.$$

Подставив в полученное уравнение значение константы a_2, определим константу a_1:

$$a_1 = \frac{\gamma_1}{tg\alpha} - \frac{2\gamma}{tg^3\alpha}.$$

Окончательная запись формул для компонентов напряжений принимает вид:

$$\sigma_x = -\gamma y\,,$$

$$\sigma_y = (\frac{\gamma_1}{tg\alpha} - \frac{2\gamma}{tg^3\alpha})x + (\frac{\gamma}{tg^2\alpha} - \gamma_1)y\,,$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\gamma}{tg^2\alpha}x\,.$$

Для наглядности построим эпюры напряжений в сечении стенки с координатой $y = H$, приняв значения $\alpha = 30^0$, $\gamma = 10$ *кН/м*^{3}, $\gamma_1 = 20$ *кН/м*^{3} (рисунок 15).

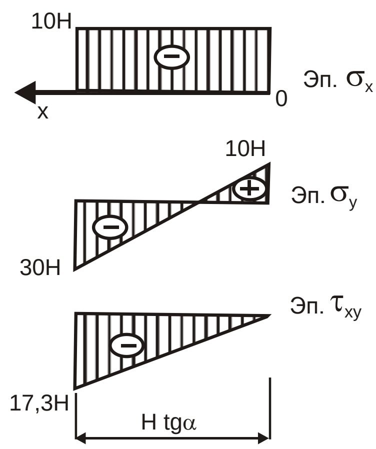


Рисунок 4

При $x = 0$ $\quad \sigma_x = -\gamma H\,, \quad \sigma_y = 10H\,,$

$\tau_{xy} = 0\,.$

При $x = Htg30^0 \quad \sigma_x = -\gamma H \quad \sigma_y = -30H$

$$\tau_{xy} = -17{,}3H\,.$$

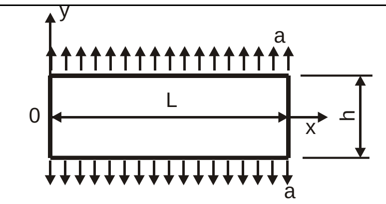
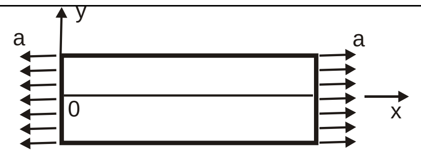
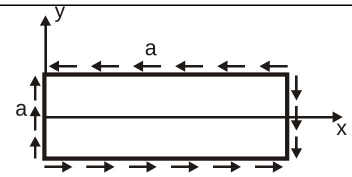
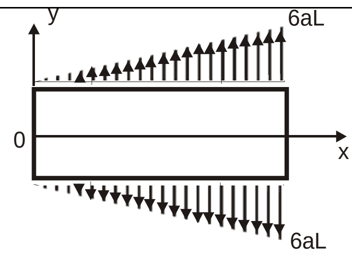
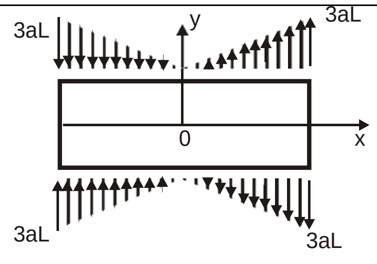
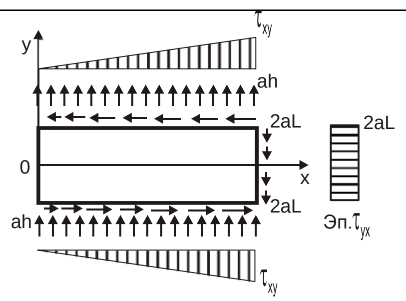
Определим, при каком значении α не появятся растягивающие напряжения σ_y в точке А.

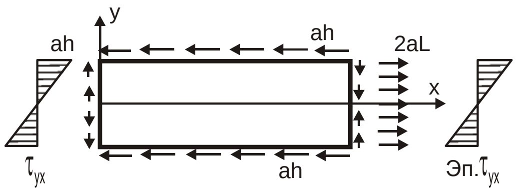
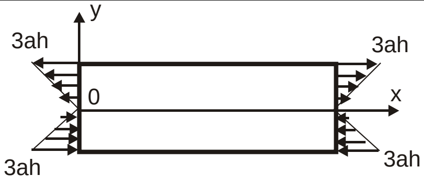
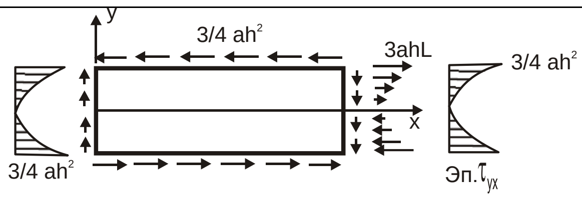
$$\sigma_y\,|_{x=0} = (\frac{\gamma}{tg^2\alpha} - \gamma_1)y \le 0\,, \quad \rightarrow \quad tg^2\alpha \ge \frac{\gamma}{\gamma_1}\,.$$

$$tg\alpha \ge \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}$$

В точке А будет отсутствовать растяжение, если угол наклона грани *0B* будет больше 35^0.

Таблица 1 – Вид функции напряжений для некоторых вариантов условий на контуре

№ схемы	Вид функций напряжений	Контурные условия
1	$\varphi = a\dfrac{x^2}{2}$	
2	$\varphi = a\dfrac{y^2}{2}$	
3	$\varphi = axy$	
4	$\varphi = ax^3$	
5	$\varphi = ax^3$	
6	$\varphi = ax^2y$	

№ схемы	Вид функций напряжений	Контурные условия
7	$\varphi = axy^2$	
8	$\varphi = ay^3$	
9	$\varphi = axy^3$	

Решение при помощи полиномов для функций напряжений представляет практический интерес потому, что позволяет с помощью отдельных известных результатов для простых задач получить непосредственно решения и для реальных поверхностных условий.

Рассмотрим примеры решения некоторых задач, для которых функция напряжений задается в виде полиномов различной степени.

Литература

1. Кожаринова, Л.В. Основы теории упругости и пластичности: учебное пособие для студентов строительных специальностей / Л.В Кожаринова. - Орел: ОрелГТУ, 2009. - 85 с.

2. Лебедев А.В. Численные методы расчета строительных конструкций [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Лебедев. – Электрон. Текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 55 с. // Режим доступа: http:www.iprbookshop.ru/19055.html. – ЭБС «IPRbooks»

3. Ханефт, А.В. Основы теории упругости. Теория упругости [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Ханефт. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2009. - 100 с. // Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232319

4. Коробко, Виктор Иванович. Строительная механика пластинок: техническая теория [Текст] : [учебное пособие для вузов] / под ред. В. И. Коробко. - М. : Спектр, 2010. - 409 с. - Библиогр.: с. 73. - ISBN 978-5-904270-19-3