МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра уникальных зданий и сооружений

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«15» 12 2017 г.

РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Методические указания по выполнению практических работ
по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек»
для студентов направления подготовки 08.05.01

Курск 2017

УДК 624.04

Составитель: С.Ю. Савин

Рецензент
Доктор технических работ, профессор *В.И. Колчунов*

Расчет тонких пластин: методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек» для студентов специальности 08.05.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; С.Ю. Савин. - Курск, 2017. - 15 с.: - Библиогр.: 15 с.

Методические указания содержат примеры решения задач по дисциплине «Теория расчета пластин и оболочек».

Методические указания предназначены для студентов специальности 08.05.01 «Строительство уникальных зданий и сооружений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.2017 . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 0,93 . Уч.-изд.л. 0,84 . Тираж 100 экз. Заказ. 3649. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50лет Октября, 94.

Оглавление

Введение

Цель дисциплины «Теория расчета пластин и оболочек» сформировать у обучающихся научное представление о теоретических основах методов исследования напряженно-деформированного состояния в твердых телах для осуществления проектно-расчетной и экспериментально-исследовательской профессиональной деятельности.

1 Расчет прямоугольной пластины, нагруженной распределенной нагрузкой, с использованием двойных тригонометрических рядов

Рассмотрим шарнирно опертую по контуру прямоугольную пластинку, находящуюся под действием поперечной нагрузки интенсивностью $q(x, y)$.

Решение уравнения поперечного изгиба пластины будем искать в виде двойного ряда по синусам:

$$w(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad \text{(а)},$$

где A_{mn} ─ коэффициенты ряда, представляющие собой постоянные числа;

m и n ─ целые положительные числа: 1, 2, 3,...

Убедимся, что этот ряд удовлетворяет граничным условиям рассматриваемой пластинки, которые имеют следующий вид:

при $x=0$ и $x=a$ $\rightarrow$ $w = 0$, $M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$;

при $y=0$ и $y=b$ $\rightarrow$ $w = 0$, $M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$.

Подставив в ряд (а) значение $x=0$, получаем $\sin\frac{m\pi x}{a}=\sin 0=0$ и, следовательно, прогиб $w(0, y) = 0$. На грани $x=a$ $\sin\frac{m\pi x}{a}=\sin m\pi=0$, и это значит, что прогиб $w(a, y) = 0$. Точно также обращаются в нуль прогибы на гранях с координатами $y=0$ и $y=b$.

Вторые производные функции прогибов

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

содержат синусы тех же аргументов, что и сама функция. Поэтому производные обращаются в нуль на всех гранях пластинки, то есть при $x=0$, $x=a$ и $y=0$, $y=b$. Следовательно, граничные условия для шарнирно опертой пластинки при задании функции прогиба в виде ряда (а) удовлетворяются на всех гранях.

Подставим значение прогиба в основное уравнение изгиба пластинки (4.1), для чего предварительно найдем четвертые производные прогибов

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{mn\pi^2}{ab}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

В результате получим следующее уравнение:

$$D\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = q(x,y).$$

(б)

Чтобы определить значения коэффициентов ряда (б), входящих в левую часть уравнения, необходимо представить нагрузку также в виде двойного тригонометрического ряда, аналогичного ряду (а):

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

(в)

Коэффициенты этого ряда определяются по формуле, известной из курса математического анализа:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy\ .$$

(г)

Подставляя ряд (в) в уравнение (б), получаем

$$D\pi^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\ .$$

Два ряда равны между собой, если равны их соответствующие члены, то есть

$$D\pi^4A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 = C_{mn}\ .$$

С учетом значения $C_{mn},$ выражение (г), находим коэффициенты ряда (а)

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b q(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy\ .$$

(д)

Рассмотрим частные случаи нагружения пластинки:

1. Нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки $q(x, y) = const$.

В этом случае коэффициенты A_{mn}, согласно формуле (г), будут равны

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\int_0^a\int_0^b \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy\ .$$

Вычислим значение двойного интеграла:

$$\int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}dx = \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a} d\frac{m\pi x}{a} * \frac{a}{m\pi} = -\frac{a}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big|_0^a = \frac{2a}{m\pi} \quad (\mathrm{m} = 1, 3, 5, \ldots)$$

$$\int_0^a \int_0^b \sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy = \frac{2a}{m\pi}\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b} d\frac{n\pi y}{b} * \frac{b}{n\pi} = -\frac{2a}{m\pi}\frac{b}{n\pi}\cos\frac{n\pi y}{b}\Big|_0^b = \frac{2a}{m\pi}\frac{2b}{n\pi}$$

(m = 1, 3, 5, …; n = 1, 3, 5, …).

Подставив значение интеграла в формулу, получаем окончательное значение коэффициентов A_{mn}

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \quad (\mathrm{m} = 1, 3, 5, \ldots;\ \mathrm{n} = 1, 3, 5, \ldots).$$

Таким образом, функция прогибов пластинки запишется в следующем виде:

$$w(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D}\sum_m \sum_n \frac{\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}}{mn\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2}$$

(е)

(*m = 1, 3, 5, ...; n = 1, 3, 5, …*).

Максимальный прогиб, возникающий в центре пластинки (при *x = a/2* и *y = b/2*), с учетом цилиндрической жесткости $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ будет равен

$$\max w = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3}(1-\mu^2)\sum_m \sum_n \frac{\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{mn\left(m^2 + \frac{n^2a^2}{b^2}\right)^2}.$$

2. Пластинка нагружена сосредоточенной силой, приложенной в точке с координатами $x = x_0$ $y = y_0$. Представим эту силу в виде нагрузки, распределенной на бесконечно малой площади *dxdy*

вокруг этой точки: $q(xy) = \frac{P}{dxdy}$. При вычислении двойного интеграла в формуле (г) надо иметь в виду, что он обращается в нуль во всех точках, кроме одной: той, где приложена нагрузка. А в этой точке он будет равен

$$\int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} dxdy = P\sin\frac{m\pi x_0}{a} \sin\frac{n\pi y_0}{b} \,.$$

Подставляя найденное значение двойного интеграла в формулу (д), находим выражение коэффициентов ряда (а):

$$A_{mn} = \frac{4P\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{D\pi^4 ab\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2} \,.$$

Окончательное значение для функции прогиба пластинки получаем после подстановки найденного значения коэффициентов A_{mn} в уравнение (а):

$$w(x,y) = \frac{4P}{D\pi^4 ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \,.$$

3. Пластинка нагружена нагрузкой, равномерно распределенной на участке длиной u, v.

Размеры сторон пластинки такие же, как в предыдущих примерах.

Для такого нагружения коэффициенты ряда (а) принимают следующие значения:

$$A_{mn} = \frac{16q\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}}{D\pi^6 mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi u}{2a}\sin\frac{n\pi v}{2b}$$

где x_0, y_0 — координаты центра тяжести нагрузки.

Функция прогиба пластинки при заданном нагружении принимает вид

$$w(x,y)=\frac{16q}{D\pi^6}a^4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi x_0}{a}\sin\frac{n\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi u}{2a}\sin\frac{n\pi v}{2b}}{mn\left(m^2+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

2 Расчет прямоугольной пластины, нагруженной распределенной нагрузкой, с использованием двойных тригонометрических рядов

Рассмотрим прямоугольную пластинку, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других имеют любое закрепление (защемление, шарнирное опирание) или свободны. У пластинки шарнирно опертыми являются края *0C* и *AB*. Граничные условия на этих краях таковы:

при $x = 0$ и $x = a$ $\rightarrow$ $w=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$. (а)

Чтобы выполнить эти условия, зададимся функцией прогиба в виде $w=\sum_{m=1}^{\infty}Y(y)\sin\frac{m\pi x}{a}$. В последующих записях будем опускать аргумент функции Y и введем величину $\alpha=\frac{m\pi}{a}$, то есть примем запись прогиба в виде

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}Y\sin\alpha x. \qquad (б)$$

Подставим четвертые производные функции (б)

$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} Y\alpha^4 \sin\alpha x$, $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} Y^{IV} \sin\alpha x$, $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} = -\sum_{m=1}^{\infty} Y^{II}\alpha^2 \sin\alpha x$ в основное уравнение изгиба пластинки (4.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty}(Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y)\sin\alpha x = \frac{q(x,y)}{D}. \qquad \text{(в)}$$

Для решения уравнения (в) разложим его правую часть в тригонометрический ряд Фурье по синусам:

$$\frac{q(x,y)}{D} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}. \qquad \text{(г)}$$

Разложение производится на отрезке $0 \le x \ge a$ и, следовательно, коэффициенты ряда можно определить по известной из курса математического анализа формуле

$$F_m(y) = \frac{2}{Da}\int_0^a q(x,y)\sin\alpha x dx. \qquad \text{(д)}$$

Подставляя ряд (г) в уравнение (в), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y - F_m(y)\right]\sin\alpha x = 0.$$

Это условие выполняется, если каждый член ряда будет равен нулю, то есть

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y = F_m(y). \qquad \text{(е)}$$

Получаем неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка, решение которого складывается из полного решения однородного уравнения и любого частного решения данного неоднородного уравнения. Однородное уравнение имеет вид

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y^{II} + \alpha^4 Y = 0. \qquad \text{(ж)}$$

Для нахождения решения уравнения (ж), составим характеристическое уравнение:

$$k^4 - 2\alpha^2 k^2 + \alpha^4 = 0 \qquad \text{или} \qquad (k^2 - \alpha^2)^2 = 0.$$

Корни характеристического уравнения действительные $k = \pm\,\alpha$, имеющие кратность, равную двум. Поэтому решение однородного уравнения есть

$$Y_{одн} = C_{1m} e^{\alpha y} + C_{2m} y e^{\alpha y} + C_{3m} e^{-\alpha y} + C_{4m} y e^{-\alpha y}.$$

Если ввести гиперболические функции $ch\alpha y = \frac{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}}{2}$, $sh\alpha y = \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{2}$, то решение примет вид:

$$Y_{одн} = A_m ch\alpha y + B_m y ch\alpha y + C_m sh\alpha y + D_m y sh\alpha y. \qquad (з)$$

Рассмотрим построение частного решения $Y_m^{част}(y)$ дифференциального уравнения (е). Согласно правилу Коши, частное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка выражается интегралом

$$Y_m^{част}(y) = \int_0^y \psi(y - t) F_m(t)\,dt, \qquad (и)$$

где $F_m(t)$ — правая часть решаемого уравнения, которая определяется выражением (д) при замене аргумента y на t, а $\psi(y)$ — частное решение соответствующего однородного уравнения. Это решение должно удовлетворять следующим условиям:

$$\psi(0) = \psi^{I}(0) = \psi^{II}(0) = 0, \quad \psi^{III}(0) = 1. \qquad (к)$$

При рассмотрении однородного уравнения получены четыре независимых частных решения: $ch\alpha y$, $ych\alpha y$, $sh\alpha y$, $ysh\alpha y$. Из них условиям (к) удовлетворяет только одна комбинация:

$$\psi(y) = \frac{1}{2\alpha^2}\left(y \cdot ch(\alpha y) - \frac{1}{\alpha} \cdot sh(\alpha y) \right). \qquad (л)$$

Заменив в функциях (л) и (д) аргументы и подставив эти функции в формулу (и), получим искомое частное решение уравнения (е):

$$Y_m^{част}(y) = \frac{1}{\alpha^2 Da}\int_0^y \left\{ \left[(y-t)ch\alpha(y-t) - \frac{1}{\alpha} sh\alpha(y-t) \right] \times \int_0^a q(x,t)\sin\alpha x dx \right\} dt \,. \quad \text{(м)}$$

Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (е) имеет вид:

$$Y(y) = A_m \cdot ch\alpha y + B_m \cdot y \cdot ch\alpha y + C_m \cdot sh\alpha y + D_m \cdot y \cdot sh\alpha y + Y_m^{част}(y). \quad \text{(н)}$$

Для определения произвольных постоянных используем граничные условия на краях пластинки в направлении оси y.

Рассмотрим случай, когда края $0A$ и BC жестко защемлены. Тогда имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } y = 0 \text{ и } y = b \quad \rightarrow \quad w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,.$$

Подставив в них функцию прогиба (б), получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} Y(0)\sin\alpha x = 0\,; \qquad \sum_{m=1}^{\infty} Y^I(0)\sin\alpha x = 0\,; \qquad \sum_{m=1}^{\infty} Y(b)\sin\alpha x = 0\,; \qquad \sum_{m=1}^{\infty} Y^I(b)\sin\alpha x = 0\,.$$

Так как эти условия должны выполняться при любых значениях аргумента x, то

$$Y(0) = 0, \qquad Y^I(0) = 0;$$

$$Y(b) = 0, \qquad Y^I(b) = 0.$$

Имеем четыре уравнения для определения четырех констант. Подставим в эти уравнения функцию (н), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} A_m = 0; \\ B_m + C_m \alpha = 0; \\ A_m \cdot ch\alpha b + B_m \cdot b \cdot ch\alpha b + C_m \cdot sh\alpha b + D_m \cdot b \cdot sh\alpha b + Y_m^{част}(b) = 0; \\ A_m \cdot \alpha \cdot sh\alpha b + B_m (ch\alpha b + \alpha \cdot b \cdot sh\alpha b) + C_m \alpha \cdot ch\alpha b + D_m (sh\alpha b + \alpha \cdot bch\alpha b) + (Y_m^{част}(b))^I = 0. \end{cases}$$

Решая систему, находим значения констант:

$$A_m = 0;$$

$$B_m = \frac{\alpha(sh\alpha b + \alpha \cdot b \cdot ch\alpha b) Y_m^{част}(b) - \alpha \cdot b \cdot sh\alpha b \cdot (Y_m^{част}(b))^I}{sh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2};$$

$$C_m = \frac{-(sh\alpha b + \alpha \cdot b \cdot ch\alpha b) Y_m^{част}(b) + b \cdot sh\alpha b \cdot (Y_m^{част}(b))^I}{sh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2};$$

$$D_m = \frac{-\alpha^2 \cdot b \cdot sh\alpha b \cdot Y_m^{част}(b) - (sh\alpha b - \alpha \cdot b \cdot ch\alpha b) \cdot (Y_m^{част}(b))^I}{sh^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}.$$

При других закреплениях краев 0А и ВС получаются другие значения постоянных. Ряды в функции прогиба и ее производные сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Навье, поэтому решение М. Леви более удобно в практических расчетах даже для прямоугольной пластинки, шарнирно опертой по всему контуру.

Литература

1. Кожаринова, Л.В. Основы теории упругости и пластичности: учебное пособие для студентов строительных специальностей / Л.В Кожаринова. - Орел: ОрелГТУ, 2009. - 85 с.

2. Лебедев А.В. Численные методы расчета строительных конструкций [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Лебедев. – Электрон. Текстовые данные. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2012. – 55 с. // Режим доступа: http:www.iprbookshop.ru/19055.html. – ЭБС «IPRbooks»
3. Ханефт, А.В. Основы теории упругости. Теория упругости [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.В. Ханефт. - Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2009. - 100 с. // Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232319
4. Коробко, Виктор Иванович. Строительная механика пластинок: техническая теория [Текст] : [учебное пособие для вузов] / под ред. В. И. Коробко. - М. : Спектр, 2010. - 409 с. - Библиогр.: с. 73. - ISBN 978-5-904270-19-3