

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич  
Должность: ректор  
Дата подписания: 07.06.2023 12:03:24  
Уникальный программный ключ:  
9ba7d3e34c012eba4566ff42d064cf2781953be730df3774d16f7c0ce536f0fc6

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



### РАСЧЕТ БРУСА НА ИЗГИБ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР

Методические указания для практических и самостоятельных работ по разделам дисциплин "Механика", "Техническая механика", "Прикладная механика"

Курск 2015 г

УДК 539.3/6

Составитель: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Е.Н.Политов*

**Расчет на изгиб бруса и определение реакций опор:** методические указания для практических и самостоятельных работ по разделу дисциплин "Механика", "Техническая механика", "Прикладная механика"/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В.Емельянова, С.Ф.Яцун. Курск, 2015. 15 с., ил. 3, табл. 2., прил.1, Библиогр.:с. 13.

Содержат краткие теоретические положения о внутренних силовых факторах в поперечных сечениях стержня. Разобран пример расчета двухопорной балки и приведены задания для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов инженерно-технических специальностей всех форм обучения.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1\16  
Усл.печ.л. .Уч.изд.л. .Тираж 50 экз.Заказ. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## ВВЕДЕНИЕ

Основная цель данных методических указаний состоит в необходимости научить будущих специалистов правильно ориентироваться в выборе конструкционных материалов и конструктивных форм, обеспечивать высокие показатели надежности, долговечности и безопасности напряженных конструкций и узлов оборудования, владеть принципиальными основами подхода к прочностному расчету конструкций и самостоятельно отслеживать тенденции и перспективы развития науки о прочности конструкций.

Изучение теоретического материала и овладение навыками расчета консольной балки на плоский изгиб является одним из важнейших условий исследований в области прочности, которые должны обеспечить эффективный поиск рациональных технических решений.

Для освоения теоретического материала необходимо ознакомиться с краткими сведениями из теории рекомендуемой литературы. Ответы на вопросы помогут студентам закрепить теоретическую часть раздела.

Предлагаемая разработка предназначена для аудиторного контроля текущей успеваемости студентов, а также для обучения и самоконтроля во внеаудиторное время при подготовке к практическим занятиям и экзаменам.

## КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Под *изгибом* понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты. Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, а поперечные и нормальная силы отсутствуют, изгиб называется *чистым*. Большей частью, однако, в поперечных сечениях бруса наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. В этом случае изгиб называют *поперечным*. Классификация видов изгиба производится и по другим признакам, некоторые из которых будут рассмотрены в

дальнейшем. Брус, работающий в основном на изгиб, часто называют *балкой*.

Для того чтобы правильно ориентироваться в вопросах, связанных с расчетом бруса на изгиб, необходимо, прежде всего, научиться определять законы изменения внутренних силовых факторов, т.е. научиться строить эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Во всех случаях поперечная сила для прямого бруса равна сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения. Отсюда устанавливается *правило знаков для поперечной силы*. Если сумма внешних сил, лежащих по левую сторону от сечения, дает равнодействующую, направленную вверх, то поперечная сила в сечении считается *положительной* (рис. 1, а), вниз – *отрицательной* (рис.1, б). Справа вниз – знак "плюс", справа вверх – знак "минус".

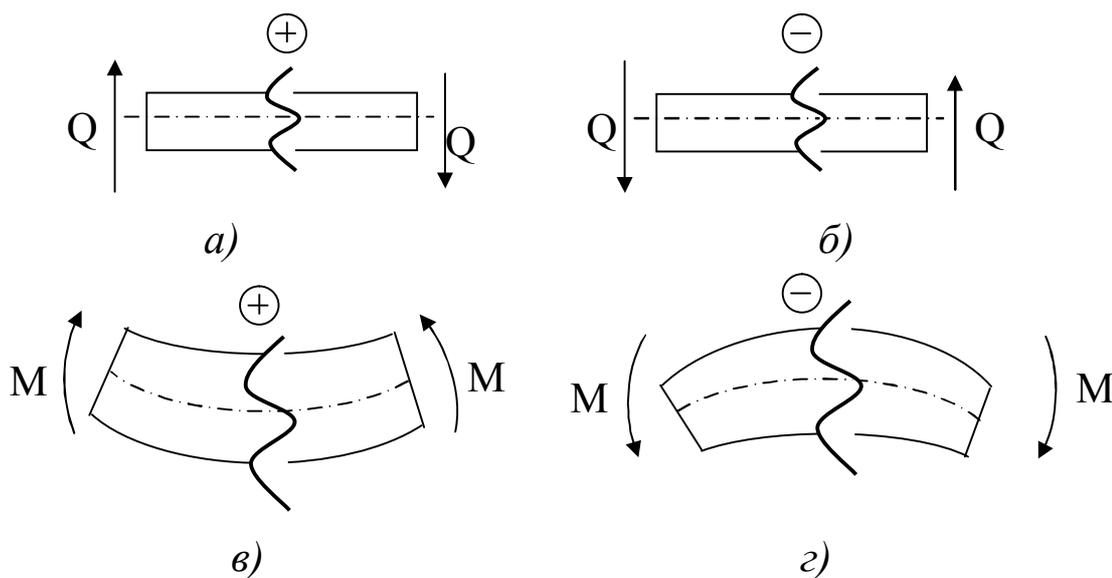


Рис.1. Правило знаков при изгибе

Изгибающий момент в сечении может рассматриваться как сумма моментов относительно поперечной оси сечения всех сил, расположенных по одну сторону от этого сечения. Эпюра моментов строится на оси бруса и ордината момента откладывается в сторону вогнутости упругой линии, т.е., как говорят, эпюра моментов строится на сжатом волокне.

Момент считается *положительным*, если изгибает стержень выпуклостью вниз (рис. 1, в), *отрицательным* – выпуклостью вверх (рис. 1, г).

Поперечная сила представляет собой *производную* от изгибающего момента по длине бруса. Производная же от поперечной силы дает интенсивность внешней распределенной нагрузки  $q$ .

$$\frac{dQ}{dz} = q; \quad \frac{dM}{dz} = Q.$$

С помощью данных дифференциальных зависимостей проверяют правильность построения эпюр.

Способы определения опорных реакций рассматриваются в теоретической механике. Однако нелишне ещё раз рассмотреть эти способы, применительно к задачам изгиба балок. Поскольку на плоскости можно написать только три уравнения равновесия

$$\sum \bar{F}_{ix} = 0; \quad \sum \bar{F}_{iy} = 0; \quad \sum M_o(\bar{F}_i) = 0,$$

то в *статически определимых* балках может быть именно три реактивных усилия. В данной работе ограничимся задачами, в которых горизонтальные внешние нагрузки отсутствуют. В этом случае горизонтальные реакции будут также отсутствовать, поэтому из трех уравнений останутся только два:

$$\sum \bar{F}_{iy} = 0; \quad \sum M_o(\bar{F}_i) = 0.$$

Заметим, то для определения реакций можно не обращать внимание на направление оси  $y$ , достаточно брать в уравнении нагрузки, направленные в противоположные стороны, с разными знаками. Точно также несущественно, в каком направлении в уравнении  $\sum M_o(\bar{F}_i) = 0$  принимать моменты со знаком плюс, а в каком – минус. Следует обратить внимание на то, что это правило *не связано* с правилом знаков для изгибающих моментов, являющихся внутренними усилиями.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие виды опор вы знаете? Чем они отличаются?
2. Что такое изгиб?
3. В чем сущность метода сечений?
4. Правила знаков для построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
5. Какой внутренний силовой фактор влияет на прочность при изгибе?
6. Условие прочности при изгибе.

## ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Проиллюстрируем методику решения задач на следующем примере

### Пример.

Для балки (рис.2) требуется написать выражения для  $Q$  и  $M$  на каждом участке в общем виде, построить эпюры  $Q$  и  $M$ , найти  $M_{max}$  и подобрать двутавровое сечение пролетов двухпролётной шарнирной балки.

Дано:  $a = 3\text{ м}$ ;  $b = 4,2\text{ м}$ ;  $c = 2,3\text{ м}$ ;  $l = 12,5\text{ м}$ ;  $M = 8\text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $P = 11\text{ кН}$ ;  $q = 13\text{ кН/м}$ ;  $[\sigma] = 160\text{ МПа}$

Решение.

Покажем и вычислим реакции опор:

$$\sum m_A = 0;$$

$$R_D(a + b + d) - Pa - qb\left(a + \frac{b}{2}\right) - M = 0;$$

$$R_D(3 + 4,2 + 3) - 11 \cdot 3 - 13 \cdot 4,2 \cdot 5,1 - 8 = 0;$$

$$R_D = 31,32\text{ кН.}$$

$$\sum m_D = 0;$$

$$R_A(a + b + d) - P(b + d) - qb \left( d + \frac{b}{2} \right) + M = 0;$$

$$R_A(3 + 4,2 + 3) - 11 \cdot (4,2 + 3) - 13 \cdot 4,2 \cdot 5,1 + 8 = 0;$$

$$R_A = 34,28 \text{ кН.}$$

Проверка определения реакций опор:

$$\sum y = 0;$$

$$R_A - P - qb + R_D = 0;$$

$$34,28 - 11 - 13 \cdot 4,2 + 31,32 = 65,6 - 65,6 = 0$$

Реакции опор найдены верно.

Вычисляем значения  $Q$  и  $M$  на участках.

Участок  $AB$ :  $x_1 \in [0; 3]$ ;

$$Q(x_1) = R_A;$$

$$Q(x_1) = 34,28 \text{ кН};$$

$$M(x_1) = R_A \cdot x_1;$$

$$M(x_1) = 34,28 x_1;$$

$$M(0)=0;$$

$$M(3)=102,84 \text{ кН}\cdot\text{м.}$$

Проверка:

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = R_A;$$

$$\frac{dM(x_1)}{dx_1} = Q(x_1);$$

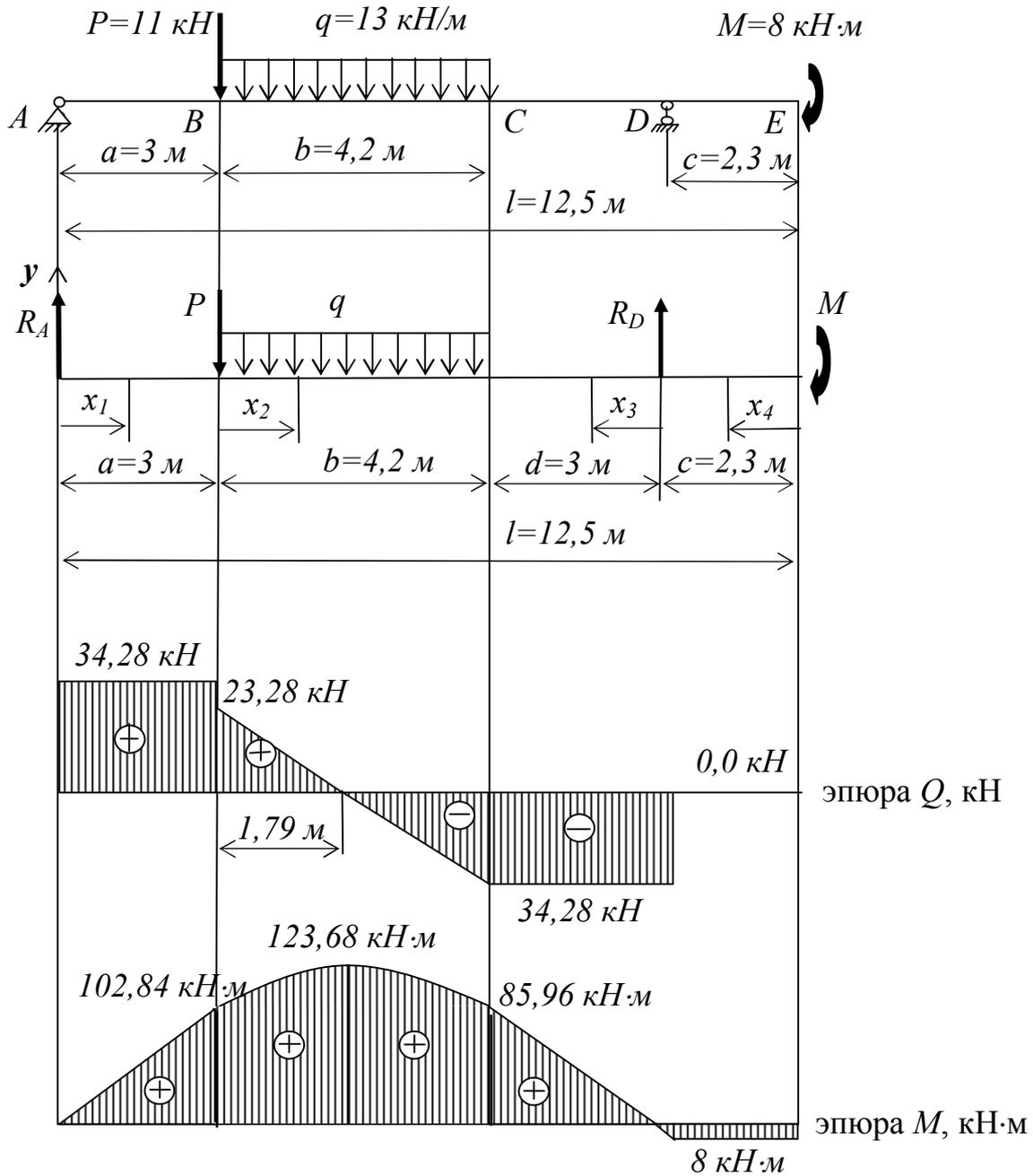


Рис.2. Расчётная схема и эпюры

Участок BC:  $x_2 \in [0; 4,2];$

$$Q(x_2) = R_A - P - qx_2;$$

$$Q(x_2) = 34,28 - 11 - 13x_2;$$

$$Q(0) = 23,28 \text{ кН};$$

$$Q(4,2) = -31,32 \text{ кН};$$

$$Q(x_2) = 0 \text{ при } x_2 = \frac{34,28 - 11}{13} = 1,79 \text{ м};$$

$$M(x_2) = R_A(a + x_2) - Px_2 - qx_2 \frac{x_2}{2};$$

$$M(x_2) = 34,28(3 + x_2) - 11x_2 - 13x_2 \frac{x_2}{2};$$

$$M(0) = 102,84 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(1,79) = 123,68 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(4,2) = 85,96 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Проверка:

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = R_A - P - qx_2;$$

$$\frac{dM(x_2)}{dx_2} = Q(x_2).$$

Участок  $CD$ :  $x_3 \in [0; 3]$ ;

$$Q(x_3) = -R_D;$$

$$Q(x_3) = -31,32 \text{ кН};$$

$$M(x_3) = R_D x_3 - M;$$

$$M(x_3) = 31,32 x_3 - 8;$$

$$M(3) = 85,95 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(0) = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

Проверка:

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} = R_D;$$

$$\frac{dM(x_3)}{dx_3} = -Q(x_3);$$

Участок  $DE$ :  $x_4 \in [0; 2,3];$

$$Q(x_4) = 0;$$

$$M(x_4) = -M;$$

$$M(x_4) = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По найденным значениям строим эпюры  $Q$  и  $M$ .

Подбор сечения. Для балки постоянного сечения опасным является сечение, в котором действует максимальный по абсолютному значению изгибающий момент. В нашем случае это место находится на расстоянии 4,79 м от левой опоры  $A$  и  $M_{max} = 123,68 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Из условия прочности определяем требуемый момент сопротивления и подбираем номер двутавра:

$$W_x = W_{max} / [\sigma] = 123,68 \cdot 1000 / 160 = 773 \text{ см}^3.$$

В соответствии с ГОСТ 8510-86 принимаем двутавр № 36,  $W_x = 743 \text{ см}^3$ . Перегрузка составляет 4 %, что меньше 5 %.

## ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для заданной схемы двухопорной балки требуется построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$  на каждом участке. По требуемому моменту сопротивления  $W_x$ , из условия прочности, подобрать номер двутавра, если допустимое напряжение  $[\sigma]=8$  МПа,  $a=1,5$  м (рис.3).

Таблица 1

№	Схема	$a_1$ , м	$a_2$ , м	$M$ , кН·м	$P$ , кН	$q$ , кН/м
1	I	1	9	10	10	10
2	II	2	8	20	20	20
3	III	3	7	3	3	3
4	IV	2	4	4	4	4
5	V	5	3	5	5	5
6	VI	6	2	6	6	6
7	VII	7	1	7	7	7
8	VIII	1	8	8	8	8
9	IX	2	6	9	9	9
0	X	3	5	10	10	10

## Расчетные схемы к заданию

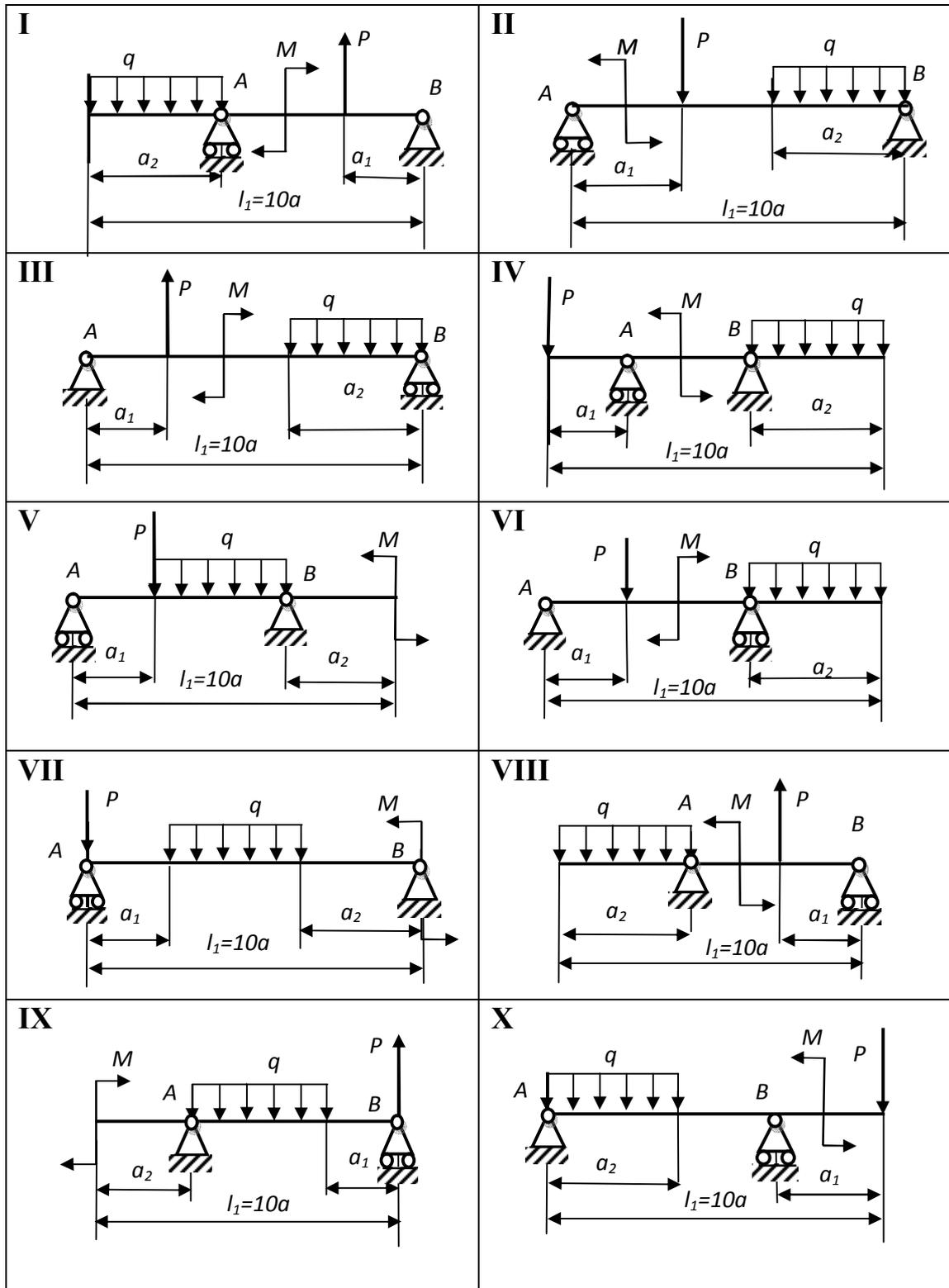


Рис.3. Расчетные схемы к заданию

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Яцун, С.Ф. Механика [Текст]: учебное пособие для студентов вузов: в 2ч./ Ч.1/ С.Ф.Яцун, В.Я. Мищенко. –Курск: КГТУ, 2004.-208с.
2. Яцун, С.Ф. Механика [Текст]: учебное пособие для студентов вузов: в 2 ч./ Ч.2 / С.Ф.Яцун, В.Я. Мищенко. – Курск: КГТУ, 2004.-140с.
3. Александров А. В. Сопротивление материалов [Текст] : учебник для студ. вуз. / В. Д. Потапов, Б. П. Державин. - М. : Высшая школа, 2003. - 560 с. : ил.
4. Едунов В.В., Едунов А.В. Механика: учебное пособие для студентов вузов. Академия, 2010.-352с.
5. Андреев В.И., Паушкин А.Г., Леонтьев А.Н. Техническая механика: учебник.– М., Издательство АСВ, 2012.-251 с.

## СОРТАМЕНТ МАТЕРИАЛОВ

Настоящий стандарт устанавливает сортамент горячекатаных стальных двутавров с уклоном внутренних граней полки.

1. Поперечное сечение двутавров (по ГОСТ 8239-89) должно соответствовать указанному на рис.4

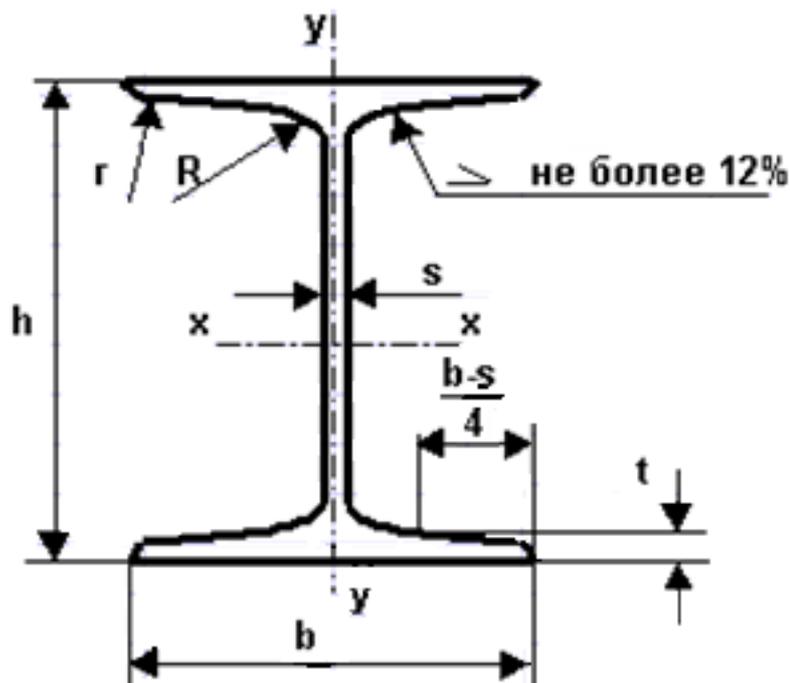


Рис. 4. Поперечное сечение двутавра:  $h$  — высота двутавра;  $b$  — ширина полки;  $s$  — толщина стенки;  $t$  — средняя толщина полки;  $R$  — радиус внутреннего закругления;  $r$  — радиус закругления полки

2. Номинальные размеры двутавров, площадь поперечного сечения, масса и справочные значения для осей должны соответствовать приведенным в табл. 1.

Таблица 2

Номер двутавра	Размеры						Площадь поперечного сечения,	Масса 1 м, кг	Справочные значения для осей						
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>	<i>R</i>	<i>r</i>			X – X			Y – Y			
					не более			<i>I<sub>x</sub></i> ,	<i>W<sub>x</sub></i> ,	<i>i<sub>x</sub></i> ,	<i>S<sub>x</sub></i> ,	<i>I<sub>y</sub></i> ,	<i>W<sub>y</sub></i> ,	<i>i<sub>y</sub></i> ,	
	мм						см <sup>2</sup>		см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см	см <sup>3</sup>	см <sup>4</sup>	см <sup>3</sup>	см
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

## Примечания:

1. Площадь поперечного сечения и масса 1 м двутавра вычислены по номинальным размерам; плотность стали принята равной 7,85 г/см<sup>3</sup>.

2. Величины радиусов закругления, уклона внутренних граней полок, толщины полок, указанные на рис.4 и в табл. 2, приведены для построения калибров и на готовом прокате не контролируется.

3. В таблицах используют обозначения:

*I* — момент инерции; *W* — момент сопротивления; *S* — статический момент полусечения; *i* — радиус инерции.

4. Двутавры от № 24 до № 60 не рекомендуется применять в новых разработках.