

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 04.09.2023 15:19:24  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
16.01 2017 г.

**МЕТОДЫ И ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ**

**методические указания по выполнению заданий  
на практических занятиях и самостоятельной работы  
для студентов направления  
15.04.06 Мехатроника и робототехника**

УДК 681.323

Составитель: Лушников Б.В.

Рецензент:

Кандидат технических наук, доцент Юго-Западного государственного университета *Е.Н.Политов*

**Методы и теория оптимизации:** методические указания по выполнению заданий на практических занятиях и самостоятельной работы для студентов направления 15.04.06 Мехатроника и робототехника / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Б.В. Лушников. - Курск, 2017. 32 с.

Изложены теоретические предпосылки, задания и примеры выполнения заданий на практических занятиях и для самостоятельной работы по дисциплине «Методы и теория оптимизации».

Методические указания предназначены для студентов направления 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16.  
Усл.печ.л. Уч.-изд.л. Тираж 30 экз. Заказ. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

# 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

**Цель практического занятия:** ознакомление с методикой решения задач оптимизации при оптимальном планировании численного эксперимента.

**Аппаратные средства:** виртуальная лаборатория на ЭВМ IBM PC, программные пакеты «MathCAD», «MATLAB/Simulink».

## 1.1 ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математическое моделирование сложных динамических систем может быть успешно использовано при параметрической оптимизации различных технологических процессов, электронных систем управления, механических объектов. Эти задачи решаются методами оптимального планирования эксперимента.

**Планирование эксперимента** – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью.

Для решения технологических и конструкторских задач планирование эксперимента играет важную роль. Оно позволяет:

- минимизировать общее число опытов;
- одновременно варьировать всеми переменными, определяющими процесс;
- использовать математический аппарат, формализующий многие действия экспериментатора.

Процесс решения задач, при котором ищутся наилучшие условия реализации процесса, называется оптимизацией.

При решении задач оптимизации выбирается критерий оптимизации и его зависимость от ряда факторов. Такая зависимость называется математической моделью объекта исследования:

$$K = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $K$  – критерий оптимизации;

$x_i$  – варьируемые факторы;

$n$  – количество факторов.

**Фактором** называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определённое значение.

Каждый фактор имеет свою область определения. Требования, предъявляемые к факторам: управляемость, точность, однозначность.

Факторы разделяются на количественные и качественные. Качественные факторы – это разные вещества, разные технологические способы, аппараты, исполнители и т.д. Количественные факторы – это время реакции, температура,

концентрация, величина рН и т.д.

Фактор может принимать одно или несколько значений, которые называются **уровнями**.

Для проведения экспериментов задаются фиксированным числом уровней. При этом число различных состояний или число опытов определяется как  $p^n$ , где  $p$  – число уровней,  $n$  – число факторов.

**Интервалом** варьирования факторов называется некоторое число, прибавление которого к основному уровню даёт верхний, а вычитание – нижний уровень факторов. То есть интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным и верхним (или нижним) уровнями. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных масштабы по осям выбираются так, чтобы верхний уровень соответствовал +1, нижний -1, основной – нулю.

При планировании эксперимента важно определить параметр, который нужно оптимизировать. Параметр оптимизации должен быть количественным, то есть задаваться числом. Множество значений, которые может принимать параметр оптимизации, называется **областью его определения**.

Основные требования к параметру оптимизации: однозначность, универсальность, желательно, чтобы он имел физический смысл, был простым и легко вычисляемым.

После выбора параметра оптимизации и подбора факторов необходимо выбрать модель, то есть выбрать вид функции и записать её уравнение.

В основе решения задачи планирования лежит многомерное квадратичное планирование эксперимента с последующим решением задачи многомерной аппроксимации. Для этого используются стандартные планы второго порядка типа Бокса-Бенкена, Рехтшафнера и другие, а разработанные в МГУ им. Ломоносова для этих планов матрицы позволяют очень легко определять коэффициенты регрессионной модели. Получаемые аппроксимационные поверхности второго порядка являются выпуклыми и гладкими, что позволяет искать экстремум простыми градиентными методами. При этом используется дробный факторный эксперимент, при котором число опытов значительно меньше, чем при полном факторном эксперименте (где число опытов при двух уровнях  $N=2^n$ ,  $n$  – число факторов).

Для нахождения глобального экстремума первоначально проводится планируемый эксперимент с охватом всего пространства. Проанализировав результаты численного эксперимента, можно выбрать узкую область, находящуюся в непосредственной близости от искомого экстремума. Затем выбирается новая область экстремума, при этом, если установлено, что тот или иной фактор мало влияет на критерий оптимизации, его целесообразно зафиксировать, что уменьшает пространство варьируемых параметров и упрощает решение задачи. Таким образом, перемещаясь в пространстве, удаётся найти решение поставленной задачи.

Зависимость критерия оптимизации  $K$  от вектора варьируемых параметров

можно представить в виде линейной или нелинейной зависимости:

$$K = K_0 + K_1 \cdot \bar{q} + \bar{q} \cdot K_2 \cdot \bar{q}^T,$$

где  $K_0, K_1, K_2$  – коэффициенты регрессионной модели,

$\bar{q}^T$  - транспонированный вектор  $q$ .

Коэффициенты, вычисленные по результатам эксперимента, указывают на силу влияния фактора.

Нахождение экстремальных значений на этой поверхности осуществляется градиентным методом наискорейшего спуска, что позволит определить вектор  $\bar{q}_M$ , которому соответствует экстремум  $K_M$ .

Проведение эксперимента осуществляется в такой последовательности:

1. Описание изучаемого процесса.
2. Определение цели исследования.
3. Выбор параметров оптимизации.
4. Формулировка задачи оптимизации.
5. Определение факторов, влияющих на процесс (варьируемых факторов).
6. Выбор основного уровня и интервалов варьирования (табл.1.1).

Таблица 1.1 -Уровни факторов и интервалы варьирования

Факторы	Уровни			Интервал варьирования	Размерность
	-1	0	+1		

7. Составление матрицы планирования (для четырёхфакторного трёхуровневого эксперимента см. табл.1.2) и получения результатов эксперимента.

Таблица 1.2 - Рабочая матрица планирования

№ эксперимента	Варьируемые параметры				Функция аппроксимации
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	
1	-	-	-	-	$Y_1$
2	+	0	0	0	$Y_2$
3	0	+	0	0	$Y_3$
4	0	0	+	0	$Y_4$
5	0	0	0	+	$Y_5$
6	-	+	+	+	$Y_6$
7	+	-	+	+	$Y_7$
8	+	+	-	+	$Y_8$
9	+	+	+	-	$Y_9$
10	-	-	+	+	$Y_{10}$
11	-	+	-	+	$Y_{11}$
12	-	+	+	-	$Y_{12}$
13	+	+	-	-	$Y_{13}$
14	+	-	+	-	$Y_{14}$
15	+	-	-	+	$Y_{15}$

8. Обработка экспериментальных данных на ЦЭВМ, построение регрессионной модели, определение оптимальных параметров.

9. Выводы.

*Примечание.* Для решения задач оптимизации используется стандартный план Рехтшафнера, на основании которого была составлена программа расчёта в среде MathCAD.

## 1.2 ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПО ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ ПРИ ПРОЕЗДЕ ЕДИНИЧНОЙ НЕРОВНОСТИ

**Задание:** исследовать модель колебаний подвески автомобиля в продольной вертикальной плоскости; определить для данной модели оптимальные значения жёсткости упругих элементов и коэффициентов вязкого сопротивления передней подвески и её шин.

1.2.1 Расчётная схема и исходные данные:

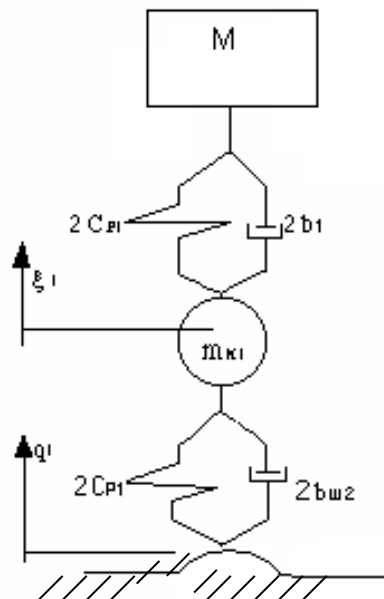


Рис.1.1 Расчётная схема колебаний передней подвески автомобиля

Исходные данные:

$M := 1268$ (кг) - масса подрессоренных частей автомобиля;

$m_{k1} := 130$  (кг) - масса неподрессоренных частей автомобиля, приходящаяся на переднюю ось;

$C_{p1} := 82000$ (Н/м) - жесткость упругих элементов передней подвески ;

$C_{ш1} := 200000$  (Н/м) - радиальная жесткость шин передних колёс;

$b_1 := 3000$  (Н\*м/с) - коэффициент вязкого сопротивления амортизаторов передней подвески;

$b_{ш1} := 1000$  (Н\*м/с) - коэффициент сопротивления в шинах передней подвески;

$A_0 := 0.015$  (м) - наибольшая высота неровности;

$v := 5$  (км/ч) - скорость движения автомобиля;

$S := 0.2$  (м) - длина неровности;

$\nu := 2 \cdot \frac{\pi}{3.6} \cdot \frac{v}{S}$ ;  $\nu = 43.633$  (с<sup>-1</sup>) - частота воздействия неровностей дороги;

$t := 0, 0.006.. 3.0$  (с) - интервал и шаг изменения времени;

$x_0 := 2$  (м) - координата появления единичной неровности;

$l := 0.2$  (м) - длина неровности;

$a := 0.1$  (м) - высота единичной неровности;

$x(t) := \frac{v}{3.6} \cdot t - x_0$  - путевая координата;

$ss(x, l) := \Phi(x) - \Phi(x - l)$  - функция "окна";

$n1(t) := \frac{a}{2} \cdot \left( 1 - \cos\left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{1.3.6} \cdot t \right) \right)$  - уравнение периодической неровности;

$dn1(t) := a \cdot \pi \cdot \frac{v}{3.6 \cdot l} \cdot \sin\left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{v}{3.6 \cdot l} \cdot t \right)$  - производная от  $n1(t)$ ;

$q_3(t) := ss(x(t), l) \cdot n1(t)$  - функция единичной неровности, действующей на передние колёса;

$dq_3(t) := ss(x(t), l) \cdot dn1(t)$  - производная функции  $q_3(t)$ ;

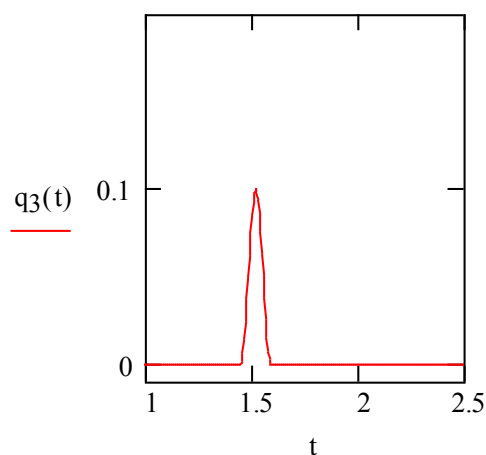


Рис. 1.2 Вид неровности дороги

## 1.2.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОДВЕСКИ АВТОМОБИЛЯ

Вектор-столбец начальных условий зададим в следующем виде:

$$y := \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{-начальное смещение центра масс кузова;} \\ \text{-начальная скорость центра масс кузова;} \\ \text{-начальное смещение передней оси;} \\ \text{-начальная скорость передней оси.} \end{array}$$

Составим вектор-функцию решения системы дифференциальных уравнений колебаний подвески автомобиля и построим график перемещения поддрессоренной части автомобиля:

$$D(t,y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -1 \cdot \frac{[2 \cdot C_{p1} \cdot (y_0 - y_2) + 2b_1 \cdot (y_1 - y_3)]}{M} \\ y_3 \\ -1 \cdot \frac{[2 \cdot C_{p1} \cdot (y_2 - y_0) + 2 \cdot C_{ш1} \cdot (y_2 - q_3(t)) + 2 \cdot b_1 \cdot (y_3 - y_2) + 2 \cdot b_{ш1} \cdot (y_3 - q_3(t))]}{m_{к1}} \end{bmatrix}$$

$Z := \text{rkfixed}(y, 0, 5, 2000, D)$  оператор интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом;

$i := 1 .. \text{last}(Z^{(0)})$  - счётчик количества точек;

$\Delta_i$  - время и перемещение кузова автомобиля.  $z1_i := (Z^{(1)})_i$



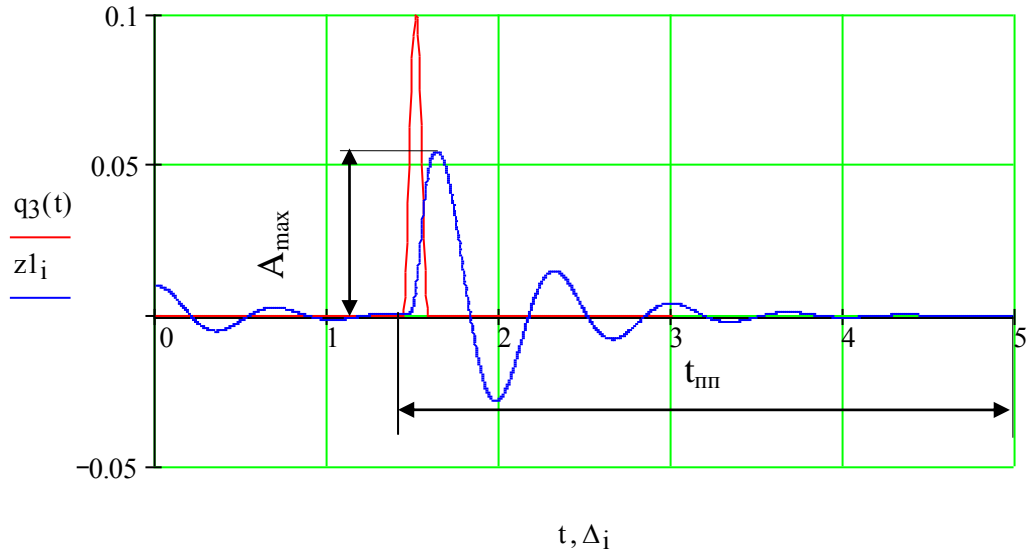


Рис.1.2.3 Перемещение поддресоренной части автомобиля

Оптимальное значение жёсткости и коэффициентов вязкости определим, используя четырёхфакторный трёхуровневый план Рехтшафнера.

Матрица планирования эксперимента по плану Рехтшафнера для четырёх факторов и трёх уровней содержит 15 испытаний:

$$M_{\text{plan}} =$$

	1	2	3	4
1	-1	-1	-1	-1
2	1	0	0	0
3	0	1	0	0
4	0	0	1	0
5	0	0	0	1
6	-1	1	1	1
7	1	-1	1	1
8	1	1	-1	1
9	1	1	1	-1
10	-1	-1	1	1
11	-1	1	-1	1
12	-1	1	1	-1
13	1	1	-1	-1
14	1	-1	1	-1
15	1	-1	-1	1

В качестве критерия оптимизации примем комплексный критерий, учитывающий время затухания свободных колебаний кузова при проезде единичной неровности  $t_{\text{пп}}$  и его максимальное отклонение  $A_{\text{max}}$  (рис. 1.2.3):

$$K = k_1 \cdot t_{\text{пп}} + k_2 \cdot A_{\text{max}} .$$

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  обеспечивают равный вклад параметров  $t_{\text{пп}}$  и  $A_{\text{max}}$  в значение комплексного критерия оптимизации  $K$ .

Целью оптимизации является минимизация критерия  $K$ , что позволит обеспечить как минимальное время переходного процесса, так и минимальное отклонение автомобиля при проезде единичной неровности.

Критерий оптимизации  $K$ , аппроксимированный поверхностью отклика в 5-мерном пространстве факторов  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , имеет вид:

$$y(x) := A_0 + B_1 \cdot x_1 + B_2 \cdot x_2 + B_3 \cdot x_3 + B_4 \cdot x_4 + C_{11} \cdot (x_1)^2 + C_{22} \cdot (x_2)^2 + C_{33} \cdot (x_3)^2 + C_{44} \cdot (x_4)^2 \dots \\ + C_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + C_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + C_{14} \cdot x_1 \cdot x_4 + C_{23} \cdot x_2 \cdot x_3 + C_{24} \cdot x_2 \cdot x_4 + C_{34} \cdot x_3 \cdot x_4$$

Функция поиска координат минимума критерия оптимизации  $K = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в 5-мерном пространстве методом половинного деления имеет вид:

```

min_opt(y, x, D) :=
  Ymin ← y(x)
  while D > TOL
    p ← 1
    while p
      p ← 0
      for i ∈ 1..length(x)
        for X ∈ -D, D
          break if |xi| > 1
          xi ← xi + X
          Y ← y(x)
          if Y < Ymin
            p ← X
            j ← i
            Ymin ← Y
          break if |xi| > 1
          xi ← xi - X
        break if |xj| > 1
      xj ← xj + p
    D ← D / 2
  x
  
```

### 1.2.3 АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результатом поиска параметров, обеспечивающих минимум функции аппроксимации, является вектор-столбец

$$X_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При переходе к размерным значениям, получим оптимальные параметры подвески автомобиля:

$$C_{p1} := 10000 \text{ (Н/м)};$$

$$C_{ш1} := 350000 \text{ (Н/м)};$$

$$b_1 := 1000 \text{ (Н*м/с)};$$

$$b_{ш1} := 1900 \text{ (Н*м/с)}.$$

График переходного процесса колебаний автомобиля при оптимальных значениях параметров подвески представлен на рис. 1.4.

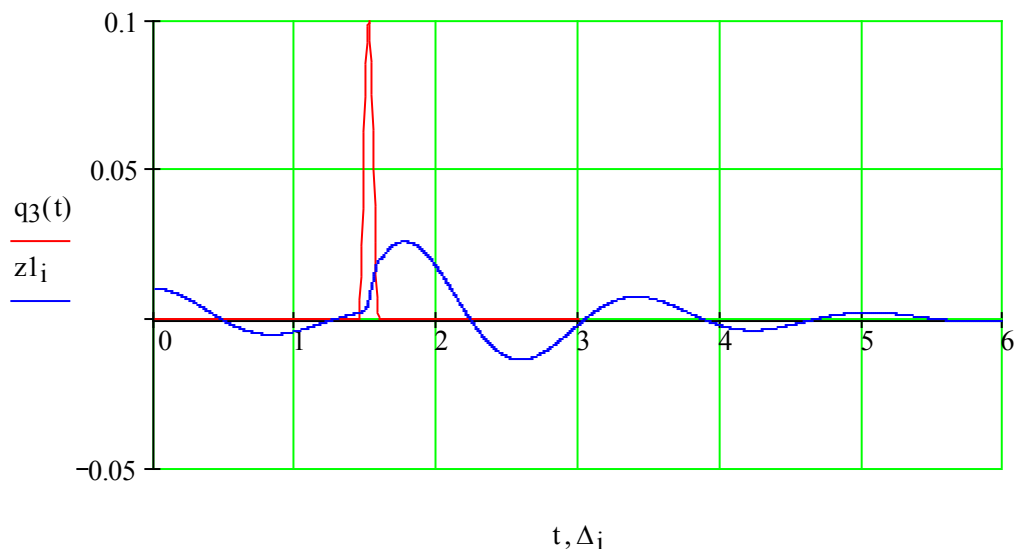


Рис.1.4 Перемещение подрессоренной части автомобиля при оптимальных параметрах передней подвески

### 1.3 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чём заключается планирование эксперимента?

2. Что является математической моделью объекта исследования?
3. Что называется фактором, какие виды факторов вы знаете?
4. Что такое оптимизация?
5. Как выбираются уровни факторов и интервалы варьирования?
6. Каким численным методом ведется поиск экстремума функции нескольких переменных в используемой программе.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: Наука, 1976. – 280 с.
2. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. Пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001. – 256 с.

## 2. ОДНОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ

В своей жизни человек часто сталкивается с ситуацией, когда ему из некоторой совокупности возможных вариантов своего поведения или принятия решения в какой-либо области деятельности необходимо выбрать один. Выбор осуществляется путем сравнения различных вариантов при помощи некоторой количественной их оценки. В этом случае говорят о необходимости решения задачи оптимизации. *Оптимизация* (от латинского слова «optimus» – наилучший) – поиск наилучшего варианта, при наличии множества альтернативных. По содержанию задачи оптимизации весьма разнообразны. Они могут быть связаны с проектированием технических устройств и технологических процессов, с распределением ограниченных ресурсов и планированием работы предприятий, наконец, с решением проблем, возникающих в повседневной жизни человека. Всевозможные устройства, процессы и ситуации, применительно к которым предстоит решать задачу оптимизации, называют *объектом оптимизации*.

### 2.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Имеется задача, для ее решения нужно формализовать объект и представить его в виде математической модели. *Математическая модель* – модель, которая определена с помощью математических формализмов. Математическая модель не является точной, а является идеализацией.

Для применения теории оптимизации к решению конкретных задачи нужно выполнить определённую последовательность действий, которая называется постановкой задачи оптимизации. Она включает этапы.

Этап I. Установление границ подлежащей оптимизации системы. *Система* – некая изолированная часть внешнего мира. Границы системы задают пределы, отделяющие её от внешнего мира. При этом предполагается, что взаимосвязи с внешним миром зафиксированы. Первоначальный выбор границ системы может оказаться слишком жёстким. Для получения адекватного решения нужно включить в систему дополнительные подсистемы, однако это ведёт к увеличению размерности задачи. Следует стремиться к представлению системы в виде изолированных подсистем, которые можно рассматривать независимо от других.

Этап II. Выбор количественного критерия, позволяющего выявить наилучший вариант, называемого характеристическим критерием. Критерии могут быть, в зависимости от конкретной задачи, экономического или технологического характера (минимальная стоимость, максимальный крутящий момент). Независимо от того, какой критерий принят в качестве характеристического, он должен принимать максимальное (или минимальное) значение для наилучшего варианта. Критериев может быть много, тогда задача

становится многокритериальной. Существуют методы решения многокритериальных задач, но можно привести многокритериальную задачу к однокритериальной. Для этого один из критериев выбирается в качестве первичного, а остальные становятся вторичными. Первичный критерий используется как характеристический, а вторичные формируют ограничения задачи.

Этап III: определение внутрисистемных переменных, через которые выражается характеристический критерий. Выбор переменных осуществляется с учётом следующих рекомендаций. Нужно разделить переменные, которые меняются в широком диапазоне и переменные, которые фиксированы или меняются слабо. Первые определяются, как независимые переменные, а вторые – как параметры задачи. Параметры задачи разделяют на фиксированные и те, которые испытывают флуктуации под воздействием внешней среды.

Нужно выбрать только те переменные, которые оказывают наибольшее влияние на характеристический критерий.

Этап IV. Построение модели, которая описывает взаимосвязь внутрисистемных переменных. Модель системы описывает взаимосвязь между переменными и отражает степень влияния этих переменных на характеристический критерий. Модель включает в себя основные уравнения материальных и энергетических балансов; уравнения, описывающие физические процессы в системе; неравенства, определяющие области допустимых значений переменных.

Таким образом, задача в виде, пригодном для решения методом оптимизации состоит в минимизации (максимизации) вещественнозначной функции  $f(x)$   $N$ -мерного аргумента  $x$ , компоненты которого удовлетворяют

системе ограничений в виде уравнений  $H_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$  или

неравенств  $g_j(x) \geq 0, j = m + 1, \dots, s$ . Такая задача называется *задачей условной оптимизации*. Если задача не содержит ограничения и рассматривается на всем пространстве, то это задача *безусловной оптимизации*.

Задачи оптимизации классифицируются в соответствии с видом функций  $f(x)$ ,  $H_k(x)$ ,  $g_j(x)$ , и размерностью вектора  $x$ .

Задачи без ограничений с  $N = 1$  называются задачами *одномерной оптимизации*, с  $N \geq 2$  – *многомерной оптимизации*.

Если в задаче функции  $H_k(x)$ ,  $g_j(x)$  линейны, то это задача с *линейными ограничениями*. При этом целевая функция  $f(x)$  может быть как линейной, так и нелинейной. Задача условной оптимизации, в которой все функции

линейны, называется *задачей линейного программирования*. Задачи с нелинейной целевой функцией называются задачами *нелинейного программирования*. При этом если  $f(x)$  квадратичная функция, то задачей квадратичного программирования. Если  $f(x)$  отношение линейных функций, то рассматривается задача дробно-линейного программирования.

В соответствии с классификацией задач оптимизации классифицируются и методы оптимизации

## 2.2 МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В некоторых случаях ограничения в задаче оптимизации позволяют через один из параметров выразить остальные и исключить их из целевой функции. В результате данных действий, задача будет сведена к поиску наибольшего или наименьшего значения скалярной действительной функции  $f(x)$ , выражающей критерий оптимальности. Выбирая тот или иной знак перед этой функцией, всегда можно ограничиться лишь поиском ее наименьшего значения в области определения  $D(f)$ , заданной с учетом ограничений на параметр оптимизации  $x$ . Для краткости будем говорить об одномерной минимизации, имея в виду нахождение наименьшего значения функции  $f(x)$  на множестве  $D(f)$  и точек, в которых это значение достигается. Изучение методов одномерной минимизации важно не только для решения задачи

$\min \{z = f(x)\}$ , имеющей самостоятельное значение. Эти методы являются

$x \in [a, b]$

также существенной составной частью методов многомерной минимизации, при помощи которых находят наименьшее значение действительных функций многих переменных, так как целый ряд методов нелинейного программирования включает в себя в качестве составной части решение задач одномерной оптимизации.

Методы одномерной оптимизации разделяются на подклассы по следующим принципам:

- использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции, так как в ряде задач целевая функция задана таким образом, что точных значений производных найти нельзя (только оценить).
- использование в процессе поиска экстремума информации о самой функции или ее производных.
- по виду целевой функции (методы решения одно- и многоэкстремальных задач).

Введем некоторые определения.

*Монотонность функции.* Функция  $f(x)$  является монотонной на интервале, если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из этого интервала, таких, что  $x_1 < x_2$  выполняется

неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ , если функция монотонно возрастающая или

$f(x_1) > f(x_2)$ , если функция монотонно убывающая.

*Унимодальность.* Функция  $f(x)$  является унимодальной на отрезке, если она



монотонна по обе стороны от единственной на отрезке точки  $x_0$ , то есть

функция  $f(x)$  в полуинтервале  $[a, x_0)$  убывает, а в полуинтервале  $(x_0, b]$

возрастает. Примеры графиков унимодальных функций приведены на рис. 2.1. Точка  $x_0$  может быть внутренней точкой отрезка  $[a, b]$  или совпадать с одним из его концов. Унимодальная функция не обязательно непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

*Определение глобального минимума* Функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $D$  достигает глобального минимума в точке  $x^* \in D$ , если  $f(x^*) < f(x)$  для всех  $x \in D$ .

*Определение локального минимума.* Функция  $f(x)$ , определённая на множестве  $D$  имеет локальный минимум в точке  $x^* \in D$ , если существует такая  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x^*$ , что для всех  $x$  из этой  $\varepsilon$ -окрестности  $f(x^*) < f(x)$ .

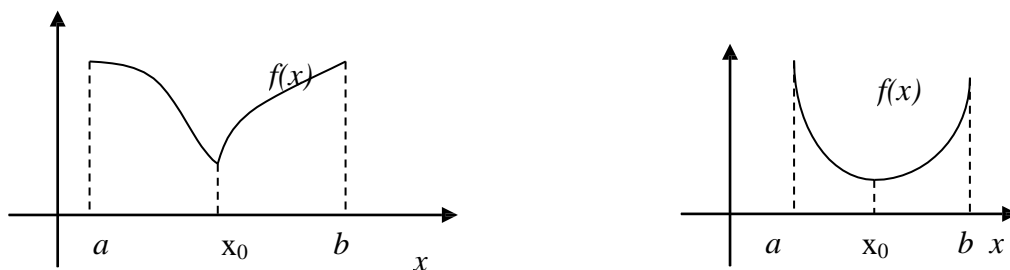


Рис. 2.1

Если функция  $f(x)$  не унимодальна, то наименьший из локальных минимумов будет глобальным минимумом (аналогично – наибольший из локальных максимумов будет глобальным максимумом). Для нахождения аналитического оптимума необходимо найти стационарные или критические точки функции, использовать какое-либо из достаточных условий экстремума (изменение знака первой производной или определенного знака четной производной) и сравнить значения функции в точках локальных экстремумов и граничных значениях.

Однако в прикладных задачах нередки ситуации, когда трудно вычислить производные функции (например, если функция не задана в аналитическом виде). Более того, не исключено, что значения функции известны или могут быть вычислены только в отдельных точках. В таких ситуациях использование необходимого и достаточного условий локального минимума невозможно и следует применять другие методы решения задачи

оптимизации. Методы минимизации функции одного переменного, в которых используют значения функции в точках рассматриваемого промежутка и не используют значения ее производных, называют *методами прямого поиска*. Можно выделить две группы методов прямого поиска, соответствующие двум принципиально различным ситуациям:

- 1) все  $N$  точек  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , в которых будут вычислены значения функции, выбирают заранее (до вычисления функции в этих точках);
- 2) точки  $x_k$  выбирают последовательно (для выбора последующей точки используют значения функции, вычисленные в предыдущих точках).

В первом случае поиск наименьшего значения называют *пассивным*, а во втором — *последовательным*.

Так как в прикладных задачах вычисление каждого значения функции может быть достаточно трудоемким, то целесообразно выбрать такую стратегию поиска, чтобы значение целевой функции  $f(x^*)$  заданной точностью было найдено наиболее экономным путем.

Будем считать, что стратегия поиска определена, если:

- - определен алгоритм выбора точек  $x_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ;
- - определено условие прекращения поиска, т.е. условие, при выполнении которого значение  $f(x^*)$  считают найденным с заданной точностью.

**Оптимальный пассивный поиск** состоит в выборе точек, равномерно расположенных на отрезке  $[a, b]$ , координаты которых

$$x_k = \frac{(b-a)k}{N+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

При этом длина интервала, содержащего минимум  $l_N = \frac{2(b-a)}{N+1}$  дает

оценку скорости сходимости пассивного поиска с ростом числа  $N$  точек, так как скорость сходимости любого метода прямого поиска можно характеризовать скоростью уменьшения интервала неопределенности с возрастанием  $N$ . Вычисляем значения целевой функции в каждой точке  $f_k = f(x_k)$ , найдем наименьшее значение  $f_j$  и, тогда точка оптимума

$x^* \in (x_{j-1}, x_{j+1})$  и можно считать, что  $x^* \cong x_j \pm \varepsilon$  с точностью  $\varepsilon$ .

## 2.3 МЕТОДЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПОИСКА (МЕТОДЫ ИНТЕРВАЛОВ)

Предположение об унимодальности функции позволяет разработать адаптивные (или последовательные) алгоритмы поиска оптимального значения). При этом используется понятие *интервала неопределенности*, как интервала содержащего точку минимума, хотя ее точное положение неизвестно. Важной характеристикой данных методов является количество вычислений значений оптимизируемой функции для получения конечной величины интервала неопределенности, не превышающей заданной величины. Методы ориентированы на нахождение точки оптимума внутри заданного интервала и основаны на свойстве унимодальности функции и не используют информацию о производной функции.

В алгоритмах этих методов вычисляются значения функции в промежуточных точках  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  ( $\lambda_k < \mu_k$ ) интервала неопределенности:

если  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ , то в качестве границ нового интервала рассматривается

интервал  $[\lambda_k, b_k]$  (рис. 2)

если  $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$  это будет интервал  $[a_k, \mu_k]$  (рис. 3) если  $f(\lambda_k) = f(\mu_k)$ ,

то оставим интервал  $[\lambda_k, \mu_k]$

Все алгоритмы различаются только способом определения промежуточных точек  $\lambda_k$  и  $\mu_k$ .

**2.3.1 Метод дихотомии.** Идея метода состоит в вычислении на каждой очередной итерации двух значений целевой функции в точках, отстоящих на величину  $\alpha$  в обе стороны от середины интервала неопределенности. Величина  $\alpha$  в этом методе называется *константой различимости*, такова, что, с одной стороны, величина  $2\alpha$  была близка к желаемому конечному значению интервала неопределенности, с другой, значения оптимизируемой функции на краях интервала  $2\alpha$  были различимы.

Введем обозначения:  $\varepsilon$  – конечная длина интервала,  $[a_1, b_1]$  – начальный интервал неопределенности,  $k$  – номер итерации.

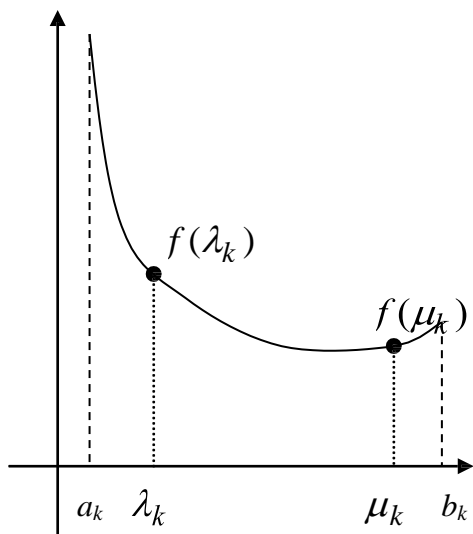


Рис. 2.2

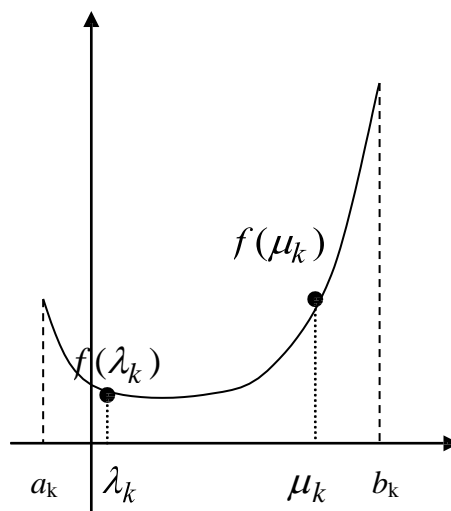


Рис. 2.3

АЛГОРИТМ (рис. 2.4)

Шаг 0. Задать  $\alpha > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ ,  $[a_1, b_1]$ ,  $k=1$

Шаг 1. Если  $b_k - a_k \leq \varepsilon$ , то  $x^* \in [a_k, b_k]$  и  $x^* = \frac{a + b}{2}$  конец.

$$\text{Иначе } \lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \alpha, \quad \mu_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2} + \alpha$$

Шаг 2 Вычислить  $f(\lambda_k)$ ,  $f(\mu_k)$  если  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ ,

то  $a_{k+1} = \lambda_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ , иначе  $a_{k+1} = a_k$  и  $b_{k+1} = \mu_k$ .

Шаг 3  $k := k + 1$  переходим на шаг 1.

Длина интервала неопределенности после  $k$ -ой итерации

$$|b_{k+1} - a_{k+1}| = \frac{1}{2^k} (b - a) + 2\alpha \left( 1 - \frac{1}{2^k} \right)$$

Отсюда можно вычислить число итераций для достижения необходимой точности  $\varepsilon$ , потребуется  $n \geq \frac{\ln((b_0 - a_0)/\varepsilon)}{\ln 2}$  итераций. На каждой итерации минимизируемая функция вычисляется дважды.

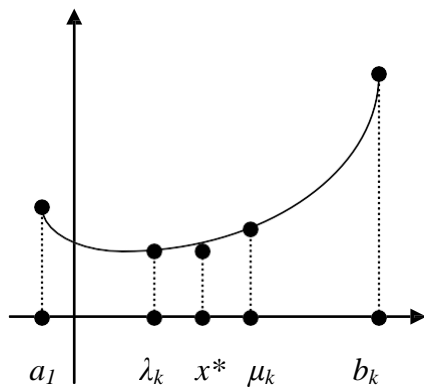


Рис. 2.4

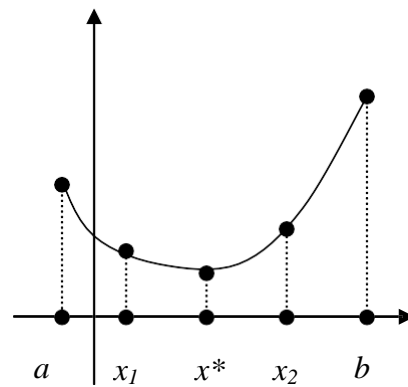


Рис. 2.5

**2.3.2 Метод деления пополам.** На каждой итерации исключается половина интервала.

АЛГОРИТМ (рис. 2.5)

Шаг 0. Зададим точность  $\varepsilon > 0$

Шаг 1. Найти  $x^* = \frac{a+b}{2}$  и  $l = b - a$ . Вычислить  $f(x^*)$ .

Шаг 2. Найти  $x_1 = a + l/4$  и  $x_2 = b - l/4$ . Вычислить  $f(x_1)$ ,  $f(x_2)$

Шаг 3. Если  $f(x_1) < f(x^*)$ , то исключается интервал  $(x^*, b)$ , при этом



$b = x^*$ ,  $x^* = x_1$ ; перейти к п. 5, иначе перейти к п. 4.

Шаг 4. Если  $f(x_2) < f(x^*)$ , то исключается интервал  $(a, x^*)$ , при этом

$a = x^*$ ,  $x^* = x_2$ ; перейти к п. 5. Иначе исключить интервалы

$(a, x_1)$ ,  $(x_2, b)$ , то есть  $a = x_1$ ,  $b = x_2$ ; перейти к п. 4.

Шаг 5. Вычислить  $l = b - a$ . Если  $l \leq \varepsilon$ , то закончить поиск. Иначе перейти к п. 2.

Средняя точка последовательности получаемых интервалов всегда совпадает с одной из пробных точек  $x_1, x_2$ , или  $x^*$ , найденных на предыдущих итерациях. На каждой итерации требуется не более 2-х вычислений значений функции. После  $N$  вычислений длина интервала равна  $l = (1/2)^{1/N}$  длины исходного интервала

### 2.3.3 Метод золотого сечения. Идея метода состоит в использовании на

каждой итерации для сокращения интервала неопределенности одной из внутренних точек предыдущей итерации. Должны быть выполнены условия:

- Пробные точки на каждой итерации находятся на одинаковых расстояниях от концов интервала неопределенности  $\lambda_k - a_k = b_k - \mu_k$
- Для новой итерации точки  $\lambda_{k+1}$ ,  $\mu_{k+1}$  выбираются так, чтобы  $\lambda_{k+1}$  совпало с  $\mu_k$  либо  $\mu_{k+1}$  совпало с  $\lambda_k$ .
- Сжатие интервала неопределенности осуществляется на каждой итерации с одним и тем же коэффициентом сжатия  $\tau$ , удовлетворяющее уравнению  $\tau^2 + \tau - 1 = 0$ . Золотое сечение можно вычислить как  $\tau = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,61803\dots$
- При выполнении этих условий  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  вычисляются по формулам

$$\lambda_k = a_k + (1 - \tau)(b_k - a_k), \quad (2.1)$$

$$\mu_k = a_k + \tau(b_k - a_k),$$

здесь  $\tau = \frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{b_k - a_k}$ , определяется из условий выше.

$$b_k - a_k$$

#### АЛГОРИТМ

Шаг 0. Задать  $\varepsilon > 0$ ,  $[a_1, b_1]$ ,  $k=1$ . Вычислить  $\lambda_1, \mu_1$  по формулам (2.1),

$$f(\lambda_1), f(\mu_1),$$

$$a + b$$

Шаг 1. если  $b_k - a_k \leq \varepsilon$ , то  $x^* \in [a_k, b_k]$  и  $x^* = \frac{a + b}{2}$  конец.

Иначе: если  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ , то перейти на шаг 2, если  $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ ,

то перейти на шаг 3.

Шаг 2. Положить  $a_{k+1} = \lambda_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \mu_k$ ,

$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \tau(b_{k+1} - a_{k+1})$ , вычислить  $f(\mu_{k+1})$ , перейти на шаг 4.

Шаг 3 Положить  $a_{k+1} = a_k$ ,  $b_{k+1} = \mu_k$ ,  $\mu_{k+1} = \lambda_k$ ,

$\lambda_{k+1} = a_{k+1} - (1 - \tau)(b_{k+1} - a_{k+1})$ , вычислить  $f(\mu_{k+1})$ , перейти на шаг 4.

Шаг 4.  $k := k + 1$  переходим на шаг 1.

Если исходный интервал имеет единичную длину, длина интервала после  $N$  вычислений равна  $\tau^{N-1}$ , иначе  $\tau^{n-1} \leq \frac{\varepsilon}{b_1 - a_1}$ . Для достижения точности  $\varepsilon$

потребуется  $n \geq \frac{\ln \frac{b_1 - a_1}{\varepsilon}}{\ln \frac{5-1}{2}}$  итераций.

**2.3.4 Метод Фибоначчи.** Метод аналогичен методу золотого сечения. Отличие состоит в том, что коэффициент сжатия интервала неопределенности меняется от итерации к итерации согласно последовательности Фибоначчи. Последовательность чисел определяется следующим образом:

$$F_0 = F_1 = 1, \quad F_{k+1} = F_k + F_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Пробные точки  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_k &= a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k), \\ \mu_k &= a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k). \end{aligned} \tag{2}$$

При этом число итераций выбирается до начала вычислений и обусловлено требуемой точностью  $\varepsilon = \frac{b_1 - a_1}{F_n}$ .

**АЛГОРИТМ**

Шаг 0. Задать  $\varepsilon$ ,  $\alpha > 0$ ,  $[a_1, b_1]$ ,  $k=1$ . Вычислить  $\lambda_1, \mu_1$  по формулам (2),

$f(\lambda_1), f(\mu_1)$ .

Шаг 1. Если  $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ , то перейти на шаг 2, если  $f(\lambda_k) \leq f(\mu_k)$ ,

то перейти на шаг 3.

Шаг 2. Положить  $a_{k+1} = \lambda_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ ,  $\lambda_{k+1} = \mu_k$ ,

$$\mu_{k+1} = a_{k+1} + \frac{n-k-1}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}).$$

Если  $k = n - 2$ , то перейти на шаг 5, иначе вычислить  $f(\mu_{k+1})$ ,

перейти на шаг 4.

Шаг 3. Положить  $a_{k+1} = a_k$ ,  $b_{k+1} = \mu_k$ ,  $\mu_{k+1} = \lambda_k$ ,

$$\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \frac{n-k-2}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}),$$

если  $k = n - 2$ , то перейти на шаг 5, иначе вычислить  $f(\lambda_{k+1})$ ,

перейти на шаг 4.

Шаг 4.  $k = k + 1$  перейти на шаг 1.

Шаг 5. Положить  $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ ,  $\mu_n = \lambda_n + \alpha$ , вычислить  $f(\lambda_n)$  и  $f(\mu_n)$ .

Если  $f(\lambda_n) > f(\mu_n)$ , то  $a_n = \lambda_n$ ,  $b_n = b_{n-1}$ , иначе  $a_n = a_{n-1}$ ,  $b_n = \lambda_n$ .

Оптимальное решение  $x^* \in [a_n, b_n]$  и  $x^* = \frac{a + b}{2}$ .

## 2.4 МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ. МЕТОД ПАУЭЛЛА

В методах прямого поиска мы не имели никакой информации о минимизируемой функции за исключением ее значений в выбранных нами точках и предположения, что она непрерывна и является унимодальной функцией на рассматриваемом отрезке. Если функцию в некоторой окрестности точки ее минимума можно достаточно точно заменить (аппроксимировать) многочленом, то для ее минимизации целесообразно использовать так называемые *методы полиномиальной аппроксимации*. Их общая особенность состоит в вычислении коэффициентов многочлена по известным значениям функции в отдельных точках и последующем нахождении минимума этого многочлена с использованием необходимых и достаточных условий экстремума. Основная идея метода: возможность аппроксимации гладкой функции полиномом достаточно высокого порядка и использование этого полинома для оценивания точки оптимума.

Качество этой оценки может быть повышено двумя способами:

- увеличением степени полинома;
- уменьшением интервала аппроксимации.

Второй способ предпочтительнее, так как построение полинома порядка более 3 – достаточно сложная задача, а сужение интервала для унимодальной функции – достаточно простая.

*Использование квадратичной аппроксимации* для нахождения оптимума.

Чтобы функция имела минимум внутри отрезка она должна быть, по крайней

мере квадратичной. Для построения квадратичной функции достаточно трех точек:  $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3), \dots$ . Можно задать аппроксимацию

функции полиномом вида:  $P_2(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2)$  и

И выбрать  $a_0, a_1$  и  $a_2$  так, чтобы  $P_2(x_1) = y_1, P_2(x_2) = y_2, P_2(x_3) = y_3$ .

Отсюда следует, что

$$a_0 = y_1, \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \cdot \frac{(y_3 - y_1)(x_2 - x_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)} \quad (3)$$

Найдём стационарную точку  $x^*$  полинома  $P_2(x)$ :

$$x^* = \frac{x_2 - x_1}{2} - \frac{a_1}{2a_2} \quad (4)$$

Так как функция унимодальна на рассматриваемом интервале и полином  $P_2(x)$  тоже унимодальная функция, то  $x^*$  является приемлемой оценкой

истинного оптимума. *Метод Пауэлла* основан на последовательном применении процедуры оценивания с использованием квадратичной аппроксимации.

#### АЛГОРИТМ

Шаг 1. Задать  $x_1$  и шаг  $h > 0$ , точность  $\varepsilon > 0$ .

Шаг 2. Найти  $x_2 = x_1 + h$ , вычислить  $f(x_1)$  и  $f(x_2)$

Шаг 3 Если  $f(x_1) > f(x_2)$ , то  $x_3 = x_1 + 2h$ , иначе  $x_3 = x_1 - h$ .

Шаг 4. Вычислить  $f(x_3)$ ; определить  $F_{\min} = \min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$ ,

определить соответствующее  $x_{\min}$ .

Шаг 5. Найти  $x^*$  по формулам (3), (4).

Шаг 6 Если  $|x^* - x_{\min}| < \varepsilon$ , то поиск окончен  $x^*$  является оценкой оптимума,

иначе перейти к шагу 7.

Шаг 7. Вычислить  $f(x^*)$ , если  $f(x^*) < F_{\min}$ , то  $x_1 = x^*$ , иначе  $x_1 = x_{\min}$ .

Перейти к п. 2.

Метод квадратичной аппроксимации удобно применять после локализации точки минимума методом золотого сечения или методом

Фибоначчи. Это объясняется тем, что для дважды дифференцируемой функции многочлен второго порядка достаточно хорошо аппроксимирует функцию в окрестности точки минимума.

## 2.5 МЕТОДЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНФОРМАЦИИ О ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

В методах прямого поиска при вычислении значений минимизируемой функции  $f(x)$  неизбежно возникают погрешности, к которым чувствительны алгоритмы прямого поиска, основанные на сравнении значений функции в отдельных точках. Если унимодальная функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема на отрезке минимизации, то точку  $x^*$  наименьшего



значения функции можно вычислять как корень уравнения  $f'(x) = 0$  с помощью тех или иных методов численного решения нелинейных уравнений. В этом случае на точность решения задачи решающее влияние оказывает погрешность вычисления производной функции. Рассмотрим некоторые методы одномерной минимизации, основанные на использовании производной минимизируемой функции.

**2.5.1 Метод средней точки.** Будем искать минимум функции  $f(x)$  непрерывно дифференцируемой и строго унимодальной на отрезке  $[a, b]$ . В этом случае единственной точкой  $x^* \in [a, b]$  минимума будет стационарная точка, в которой  $f'(x^*) = 0$ . Отметим, что непрерывно дифференцируемая унимодальная на отрезке функция может иметь на нем более одной стационарной точки. На отрезке определяются две точки  $a_k, b_k$ , в которых производные имеют разные знаки,  $f'(a_k)f'(b_k) < 0$ . Искомый оптимум

находится между ними. Делим интервал пополам:  $x_k = \frac{a + b}{2}$ , если

$f'(x_k) > 0$  ( $< 0$ ), то из двух интервалов оставляем тот, на концах которого производная имеет разные знаки.

### АЛГОРИТМ

Шаг 1. Определим точность  $\varepsilon > 0$ ,  $a_1 = a$ ,  $b_1 = b$ , вычисляем

$$f'(a_1) < 0, f'(b_1) > 0$$

$$\text{Вычисляем } x_1 = \frac{a + b}{2}, k=1.$$

Шаг 2 Вычисляем  $f'(x_k)$ , если  $f'(x_k) = 0$ , или  $f'(x_k) < \varepsilon$ ,

$$\text{то } x_k = \frac{a + b}{2} \text{ оптимум, конец.}$$

Шаг 3 если  $f'(x_k) < 0$ , то  $a_{k+1} = x_k$ ,  $b_{k+1} = b_k$ , иначе  $a_{k+1} = a_k$ ,  $b_{k+1} = x_k$

Шаг 3  $x_k = \frac{a + b}{2}$ , переход на 2.

Метод средней точки напоминает метод дихотомии, но сходится к искомому

значению  $x^*$  быстрее. Поскольку для метода средней точки после вычисления  $n$  значений производной минимизируемой на отрезке  $[0, 1]$  функции  $f(x)$  для длины интервала неопределенности получаем  $l_n = \frac{1}{2^n}$ .

Таким образом, для одинакового уменьшения значения  $l_n$  в методе средней точки нужно вычислить вдвое меньше значений производной функции по сравнению с числом значений самой функции в методе дихотомии.

**2.5.2 Метод Ньютона (метод касательной).** Если строго унимодальная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируема на этом отрезке, то точку  $x^* \in [a, b]$  минимума этой функции можно найти путем решения уравнения  $f'(x) = 0$  методом Ньютона, иногда называемым методом касательных. Выбираем  $x_0$  - начальное приближение, называемое обычно начальной точкой. Линеаризуем функцию  $f'(x)$  в окрестности начальной точки, приближенно заменив дугу графика этой функции касательной в точке  $(x_0, f'(x_0))$ .

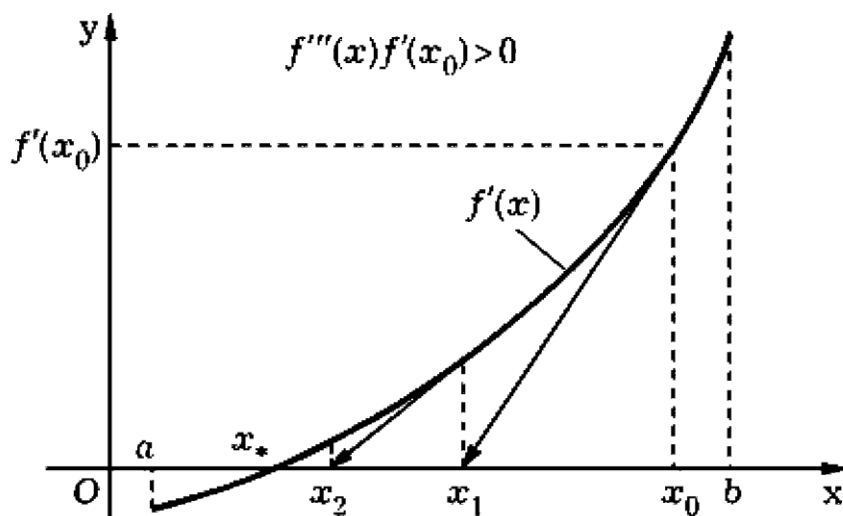


Рис. 6

Уравнение касательной имеет вид  $f'(x) \approx f'(x_0) + f''(x_0) \cdot (x - x_0)$ . Выберем в качестве следующего приближения к  $x^*$  точку  $x_1$  пересечения касательной с осью абсцисс (рис. 6). Получаем первый элемент  $x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$  итерационной последовательности  $\{x_k\}$ . На  $(k+1)$ -м шаге по найденной на предыдущем шаге точке  $x_k$  можно найти точку

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} \quad (2.5)$$

В общем случае сходимость метода Ньютона существенно зависит от выбора начальной точки  $x_0$ . Для надежной работы этого метода необходимо, чтобы вторая производная  $f''(x)$  в некоторой окрестности искомой точки  $x^*$

сохраняла знак, а начальная точка  $x_0$  выбиралась из такой окрестности. В противном случае второе слагаемое в правой части (2.5) может стать неограниченным. Поскольку для дважды непрерывно дифференцируемой функции в точке минимума  $f''(x^*) > 0$ , то должно быть и  $f''(x_0) > 0$ .

Поэтому говорят, что метод Ньютона обладает *локальной сходимостью* в том смысле, что надо выбрать хорошее начальное приближение, попадающее в такую окрестность точки  $x^*$ , где  $f''(x) > 0$ . Однако проверка выполнения этого условия не всегда возможна. Достаточным условием монотонной сходимости метода Ньютона будут постоянство в интервале между точками  $x_0$  и  $x^*$  знака производной  $f''(x)$  и совпадение его со знаком  $f'(x)$ . Оказывается, что в этом случае метод Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости в некоторой окрестности точки  $x^*$ , причем

$$|x^* - x_k| \leq \frac{|x^* - x_{k-1}|^2}{C}.$$

**2.5.3 Метод секущих** похож на метод Ньютона, но строится не касательная к графику производной, а секущая. Геометрическая интерпретация этого метода (рис. 7) состоит в том, что в качестве очередного приближения  $x_{k+1}$  выбирают точку пересечения с осью абсцисс секущей к графику функции  $f'(x)$ , то есть

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f'(x_k) - f'(x_{k-1})} \quad (6)$$

Выбор начальной точки  $x_0$  проводят следующим образом. Если на отрезке

$[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет знакопостоянную третью производную  $f'''(x)$ , то в качестве  $x_0$  выбирают тот конец отрезка  $[a, b]$ , на котором совпадают знаки

$f(x)$  и  $f'''(x)$ , тогда  $x = \frac{af'(b) - bf'(a)}{f'(b) - f'(a)}$ . Точка  $x$  — точка пересечения с осью

$$\frac{af'(b) - bf'(a)}{f'(b) - f'(a)}$$

абсцисс хорды, стягивающей дугу графика функции  $f'(x)$  на отрезке  $[a, b]$

(рис 7). Таким образом, первый шаг метода секущих выполняют согласно *методу хорд*, а последующие шаги — в соответствии (6).

Этот метод имеет *сверхлинейную скорость* сходимости, причем

$|x^* - x_k| \leq C |x^* - x_{k-1}|^\tau$ , где  $C = \text{const}$ , а  $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\dots$  — отношение

золотого сечения.

Модификации метода Ньютона обладают только локальной сходимостью, т.е. сходятся, если начальная точка выбрана в некоторой окрестности точки минимума функции. Если же начальная точка расположена слишком далеко от точки минимума, то подобный метод может расходиться или «зацикливаться». В отличие от метода средней точки метод секущих использует информацию не только о знаке производной, но и о значениях в пробных точках.

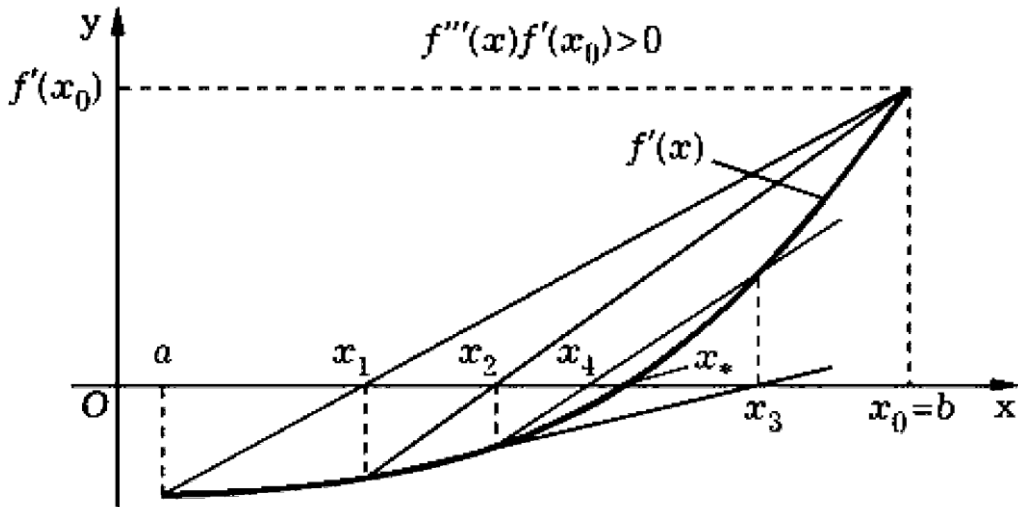


Рис. 7

**2.5.4 Метод кубической аппроксимации.** В методах полиномиальной аппроксимации при построении многочлена, аппроксимирующего минимизируемую функцию в окрестности искомой точки  $x^*$  минимума, помимо значений функции в отдельных точках могут быть использованы и значения ее производных.

Пусть для непрерывно дифференцируемой функции  $f(x)$ , строго выпуклой на отрезке  $[x_1, x_2]$  известны значения  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$  функции и значения ее производной  $y_{11} = f'(x_1), y_{12} = f'(x_2)$ . Если

$y_{11} \cdot y_{12} < 0$ , то рассматриваемая функция строго унимодальна на этом отрезке.

Рассмотрим метод поиска точки  $x^*$  при условии  $y_{11} \cdot y_{12} < 0$ ,

называемый методом кубической аппроксимации, поскольку в этом случае на отрезке  $[x_1, x_2]$  можно построить единственный многочлен третьей степени, располагая значениями функции и производных на концах этого отрезка. Этот многочлен, называемый *кубическим интерполяционным многочленом Эрмита*,

можно преобразовать к виду

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + a_3(x - x_1)^2(x - x_2), \quad (2.7)$$

$$a_0 = y_1, \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad a_2 = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{y_{11}}{x_2 - x_1}, \quad (2.8)$$

$$a_3 = \frac{y_{12} - y_{11}}{(x_2 - x_1)^2} - \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^3} \quad (2.9)$$

Из необходимого условия  $P_3(x) = 0$  экстремума этого многочлена с учетом коэффициентов (8), (9) получаем квадратное уравнение

$$3a_3(x - x_1)^2 - 2 \frac{y_{11} + y_{12} - 3a_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_{11} = 0,$$

решение которого представим в виде

$$x_0 = x_1 + \mu(x_2 - x_1), \quad (2.10)$$

где  $\mu = \frac{\omega + z - y_{11}}{2\omega - y_{11} + y_{12}}, \quad z = y_{11} + y_{12} - 3 \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \omega = \sqrt{z^2 - y_{11} \cdot y_{12}}.$

Легко показать, что  $\mu \in (0, 1)$  и  $x_0 \in (x_1, x_2)$ .

Если  $f'(x_0) = 0$ , то  $x_0 = x^*$  — искомая точка минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[x_1, x_2]$ . Если же  $f'(x_0) \neq 0$  то оставляем меньший отрезок  $[x_0, x_2]$  или  $[x_1, x_0]$ , такой чтобы  $f'(x_0)y_{1j} < 0, j = 1, 2$  и продолжать описанным выше

способом поиск точки минимума на новом отрезке. После каждого приближения правильность вычислений подтверждается уменьшением минимального значения многочлена по сравнению с его минимальным значением на предыдущем шаге. Вычисления можно прекратить, когда длина интервала неопределенности, в котором гарантированно находится искомая точка  $x^*$ , станет меньше заданной наибольшей допустимой величины  $\varepsilon$ .

### Алгоритм

Шаг 0. Задать  $\varepsilon > 0$ , найти точки  $x_1, x_2$  так чтобы  $f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$ .

Шаг 1. Вычислить  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$  и  $y_{11} = f'(x_1), y_{12} = f'(x_2)$ .

Определить коэффициенты многочлена  $P_3(x)$  по формулам (8), (9).

Шаг 2. Найти  $x_0$  по формулам (10). Вычислить  $f'(x_0)$ , если  $|f'(x_0)| < \varepsilon$ ,

то  $x_0 = x^*$  — искомая точка минимума, конец, иначе шаг 3.



Шаг 3. Если  $f'(x_0) < 0$ , то  $x_1 = x_0$ , если  $f'(x_0) > 0$ , то  $x_2 = x_0$ . Переход на шаг 1

## 2.6 СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

Для быстрого получения предварительных результатов (начальной точки для применения других методов), а также, если требуется надёжная работа алгоритма при неизвестной заранее целевой функции, лучше использовать методы исключения интервалов.

Если требуется точное решение, необходимо воспользоваться градиентными методами (особенно кубической аппроксимацией).

С другой стороны, если требуется высокая точность, но функция не задана аналитически, лучше пользоваться методами точечного оценивания, так как при использовании градиентных методов накапливается погрешность при конечно-разностной аппроксимации производных.

Если сравнить методы с точки зрения поставленной задачи и вида функции, то при минимуме информации о функции следует использовать метод исключения интервалов.

Если функция квадратичная или близка к таковой, то следует использовать метод Пауэлла.

Если функция дважды дифференцируемая, непрерывная и задана аналитически, то следует использовать градиентные методы.

Методы точечного оценивания при прочих равных условиях (интервалы, гладкая функция) быстрее методов исключения интервалов

## 2.7 ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

### **Самостоятельная работа № 2 Методы одномерного поиска**

**Цель работы:** ознакомиться с методами одномерного поиска. Сравнить различные алгоритмы по эффективности на тестовых примерах.

#### ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Найти аналитическое решение задачи  $\min_{x \in [a,b]} f(x)$ .

2. Реализовать методы с различной точностью.  
*Варианты 1-4* методы пассивного поиска, золотого сечения, метод Ньютона.  
*Варианты 5-8* методы дихотомии, Фибоначчи, секущих.  
*Варианты 9-12* методы деления пополам, Пауэлла, Ньютона.  
*Варианты 13-15* методы золотого сечения, Пауэлла, использование кубической аппроксимации.
3. Исследовать их сходимость и провести сравнение по числу вычислений функции для достижения заданной точности.

#### Варианты тестовых заданий

1. $f(x) = \sin(x), x \in [-\pi, \pi/2]$	2. $f(x) = \cos(x), x \in [0, \pi]$ .
3. $f(x) = (x-2)^2, x \in [0, 3]$	4. $f(x) = (x-15)^2 + 5, x \in [12, 20]$
5. $f(x) = (x+5)^4, x \in [-6, 2]$	6. $f(x) = xe^x, x \in [-2, 0]$ ,
7. $f(x) = x^2 + 2x - 4, x \in [-2, 1]$	8. $f(x) = x^3 - x, x \in [0, 1]$
9. $f(x) = x^5 - x^2, x \in [0, 1]$	10. $f(x) = -x / e^x, x \in [0, 3]$
11. $f(x) = x^4 - x, x \in [0, 1]$	12. $f(x) = x^4 / \ln x, x \in [1.1, 1.5]$
13. $f(x) = xe^{-x}, x \in [-2, 6]$	14. $f(x) = xe^{-2x}, x \in [-2, 6]$

#### Содержание отчета

- титульный лист;
- цель работы; задание;
- таблицы с результатами исследований по каждому методу, где должны быть отражены границы и длины интервалов на каждой итерации,
- соотношение длины интервала на  $k-1$  итерации к длине интервала на  $k$  итерации;
- график зависимости количества вычислений целевой функции от логарифма задаваемой точности  $\varepsilon$ ;
- выводы по всем пунктам задания.

#### Контрольные вопросы

1. Какие задачи оптимизации называются условными и безусловными?
2. Какие задачи оптимизации называются задачами линейного программирования?
3. Какие численные методы одномерной оптимизации Вы знаете?

4. В чем сущность метода золотого сечения?
5. В чем сущность метода дихлотомии?
6. В чем сущность метода золотого сечения?
7. В чем сущность метода Фибоначчи?
8. Сравните известные Вам методы одномерной оптимизации по точности, производительности, скорости сходимости, простоте реализации.

### **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ**

1. *Аттетков А.В.* Методы оптимизации: учеб. для вузов / *А.В. Аттетков., СВ. Галкин, В.С. Зарубин* ; под ред. *В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.* - 2-е изд., стереотип. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. -440 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIV).
2. *Алексеев В.М.* Сборник задач по оптимизации. / *В.М. Алексеев., Э.М. Галлеев, В.М. Тихомиров.* – М. : Наука, 1984. 287 с.
3. *Ашманов С.А.,* Теория оптимизации в задачах и упражнениях. / *С.А. Ашманов, А.В. Тимохов.* – М. : Наука, 1991. 448 с.
4. *Лесин В.В.,* Основы методов оптимизации: учебник / *Лесин В.В., Лисовец Ю.П.* М.: Изд-во МАИ, 1995. 341 с.
5. *Глебов Н. И.* Методы оптимизации: учебное пособие / *Глебов Н. И., Кочетов Ю. А, Плясунов А. В.* Из-во Новосибирского ун-та, Новосибирск, 2000. 105 с.

