МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра технологии материалов и транспорта

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
___________ О.Г. Локтионова
«09» ____________ 2021 г.

ОРГАНИЗАЦИЯ И ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания к выполнению практических работ для студентов специальности 23.05. 01

Курск 2021

УДК 621.4

Составитель А.А. Толкушев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *В.И.Козликин*

ОРГАНИЗАЦИЯ И ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА:
Методические указания к выполнению практических работ для студентов специальности 23.05.01./ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: А.А. Толкушев. Курск, 2021. 38 с.: Библиогр.: с.38.

Содержат методические указания к практическим работам по дисциплине "Организация и планированиеэксперимента". Содержат необходимый статистический материал для обработки экспериментальных данных. Предназначены для студентов очной и заочной форм обучения 23.05.01 Наземные транспортно-технологические средства, специализация "Автомобильная техника в транспортных технологиях"

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл.печ.л . Уч.-изд.л. . Тираж экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Определение объема испытаний

При проведении эксперимента, или фиксировании наблюдений часто возникает вопрос: сколько наблюдений или опытов необходимо сделать в одной точке эксперимента, так чтобы точность среднего значения была удовлетворительной?

При увеличении объема испытаний увеличивается точность найденных параметров распределения. Необходимо определить минимальное количество испытаний, которое обеспечит заданную точность. При этом задаются показатели достоверности результатов (доверительная вероятность α*) и их точности (предельная величина ошибки ε).

Рассматривается случайная величина X имеющая нормальное распределение с неизвестными параметрами X и σ заданы величины α* и ε. Требуется определить объем выборки - n.

В этом случае имеет место уравнение

$$\varepsilon = \frac{t\alpha^* \ \sigma}{\sqrt{n}}$$

где $$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{x}i - \mathrm{x}_{\text{ср}}\right)^2}$$

В таблице приведены значения $\frac{t\alpha^*}{\sqrt{n}}$ для различных n и α.

Записываем уравнение

$$\Delta = \frac{\varepsilon}{X\text{ср}} = \frac{t\alpha^*}{\sqrt{n}} \ \frac{\sigma}{X\text{ср}}$$

где $\frac{\sigma}{X\text{ср}} = V$ - выборочный коэффициент вариации.

Если заданы δ, $\frac{\sigma}{X\text{ср}}$, и α* то по таблице находим n.

где $\frac{\sigma}{X\text{ср}} = V$ коэффициент вариации;

δ- доля предельной величины ошибки, (для вычислений в данной работе принять равной 0,20)

α* - доверительная вероятность;

Количество наблюдений или экспериментов в точке графика зависит от коэффициента вариации случайной величины, поэтому наблюдения или испытания следует проводить до тех пор, пока не достигнуто их необходимое количество.

Пример: дана выборка из следующих значений

15, 12, 19, 17, 8, 22, 10, 16, 16, 14

Объем выборки n=10,

Среднее значение X сред.=14,94

Среднее квадратическое отклонение σ=3,94;

Коэффициент вариации V=0,264 (26,4%)

При δ= 0,2 расчетное значение $\frac{t\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{0,2}{0,264} = 0,76$

Из таблицы 2 значений $\frac{t\alpha^*}{\sqrt{n}}$ при n=10, для α=0,95 значение $\frac{t\alpha^*}{\sqrt{n}}$ = 0,706

Сравнивая значение расчетное с табличным видим, что расчетное значение превышает табличное значит объем испытаний достаточный. Так же можно сделать вывод о том, что допустимый коэффициент вариации случайной величины равен $\frac{0,2}{0,706} = 0,283$ то есть 28,3% .

Для выборки случайной величины из таблицы 1 (вариант взять по последнему числу шифра в зачетной книжке или по списку группы) определить, достаточен ли объем выборки для достоверного (при α=0,95) определения среднего случайной величины, определить минимальное количество испытаний для достоверного определения среднего случайной величины, количество испытаний при доверительной вероятности α равной 0,8; 0,9; 0,95; 0,98; 0,99; 0,995; 0,998.

Таблица 1

Варианты заданий.

n число измерений	варианты заданий									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	16	65	39	423	507,6	52	83,2	338,4	50	420
2	13	58	27	77	92,4	49	78,4	61,6	47	70
3	19	57	25	403	483,6	12	19,2	322,4	11	396
4	18	51	36	347	416,4	11	17,6	277,6	9	340
5	9	38	29	300	360	11	17,6	240	10	288
6	23	53	36	350	420	13	20,8	280	10	340
7	11	48	33	604	724,8	8	12,8	483,2	5	588
8	17	62	23	350	420	9	14,4	280	8	320
9	17	39	38	157	188,4	15	24	125,6	12	150
10	15	38	42	117	140,4	36	57,6	93,6	32	116
11	10	55	25	442	530,4	32	51,2	353,6	28	440
12	9	52	28	358	429,6	34	54,4	286,4	33	350

13	17	49	35	750	900	19	30,4	600	18	720
14	20	53	29	650	780	54	86,4	520	52	640
15	19	60	21	600	720	48	76,8	480	45	580
16	18	48	27	417	500,4	33	52,8	333,6	30	400
17	10	52	23	700	840	16	25,6	560	15	600
18	13	53	38	400	480	15	24	320	14	385
19	15	58	31	423	507,6	13	20,8	338,4	10	415
20	16	57	24	418	501,6	30	48	334,4	28	410
21	11	46	28	206	247,2	23	36,8	164,8	20	195
22	22	49	25	536	643,2	24	38,4	428,8	22	520
23	14	51	30	250	300	19	30,4	200	18	243
24	13	55	31	250	300	11	17,6	200	9	239

Таблица 2 Значения $\frac{t\alpha^*}{\sqrt{n}}$

n	α						
	0,8	0,90	0,95	0,98	0,99	0,995	0,999
5	0,659	0,899	1,15	1,50	1,80	2,13	3,07
6	587	793	1,00	1,28	1,51	1,76	2,44
7	534	715	0,890	1,13	1,32	1,52	2,04
8	493	657	816	1,02	1,19	1,35	1,78
9	461	611	754	0,940	1,08	1,23	1,59
10	434	574	706	873	1,00	1,13	1,45
15	374	453	550	672	0,762	0,850	1,05
20	296	386	466	566	637	705	0,860
25	263	342	412	497	558	616	745
30	239	310	372	449	502	553	666
35	221	286	344	413	459	507	606
40	206	266	320	384	428	470	561
45	194	250	300	360	401	440	524
50	184	237	284	340	379	416	495
55	175	226	270	323	360	394	469
60	197	216	258	308	343	376	447
65	160	207	248	296	329	360	427
70	155	199	238	284	316	346	410
75	149	192	230	274	305	334	396
80	144	186	222	265	295	323	382
90	136	175	209	250	277	303	359
100	129	166	198	236	263	287	339
120	118	151	181	215	239	261	308
150	105	135	161	192	213	233	276
200	091	117	139	166	184	201	236
250	081	104	124	148	164	179	211
300	074	095	114	135	150	163	192

2.Анализ отклонений результатов эксперимента.

Часто на практике может возникнуть вопрос о том следует ли отвергать некоторые результаты эксперимента, которые, резко отличаются от остальных значений.

Ирвин предложил критерий при применении, которого расчеты X среднего и σ проводят по всем данным эксперимента, а затем определяется случайность выделяющегося значения. Критерий основан на разности X и X_{n+1} результатов измерений, где X_n и X_{n+1} два наибольших значения случайной величины.

$$\text{Функция} \quad \lambda = \frac{\text{Xn+1} - \text{Xn}}{\sigma}$$

Протабулирована Ирвином для уровней значимости 0,95 и 0,99.

Критерий Ирвина		
N	$\lambda_{0,95}$	$\lambda_{0,99}$
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Если полученное значение λ больше значения соответствующего табличному при данном N с заданной вероятностью 0,95 или 0,99 то исследуемое наблюдение следует отбросить, если менее, то его следует оставить.

Порядок обработки данных

2. Расположить данные в порядке возрастания.
3. Определить среднее значение - X среднее ($\text{Xсред.} = \frac{\sum Xi}{n}$);
4. Определить среднеквадратическое отклонение случайной величины σ ($\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}} \sum_{i=1}^{n} \left(\text{x}i - \text{x}_{\text{ср}}\right)^2$);
5. Определить λ

6. По таблице критерия Ирвина найти для ближайшего N - $\lambda_{0,95}$ сравнить с λ расчетным.
7. Сделать вывод провести дальнейший перерасчет X среднего и σ.

В качестве данных для обработки взять данные эксперимента по магистерской диссертации или провести обработку данных по варианту задания, взятому из таблицы по последнему числу шифра в зачетной книжке или списка группы.

Варианты задания.

n число измерений	варианты задания									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	7	147	16,1	48	73,5	21	24,15	81,6	52,5	26,25
2	4	80	9,2	27,6	40	12	13,8	46,92	28,57	15
3	5	105	11,5	34,5	52,5	15	17,25	58,65	37,5	18,75
4	8	168	18,4	55,2	84	24	27,6	93,84	60	30
5	7	147	16,1	48,3	73,5	21	24,15	82,11	52,5	26,25
6	3	55	6,9	20,7	27,5	10	10,35	35,19	19,64	12,5
7	6	126	13,8	41,4	63	18	20,7	70,38	45	22,5
8	6	126	13,8	41,4	63	18	20,7	70,38	45	22,5
9	11	231	25,3	60	115,5	33	37,95	102	82,5	41,25
10	9	170	20	60	85	27	30	102	60,71	33,75
11	10	210	23	69	105	30	34,5	117,3	75	37,5
12	17	357	39,1	120	178,5	51	58,65	204	127,5	63,75
13			21,2	63,6			31,8	108,12		
14			11,3	33,9			16,95	57,63		
15			9,6	28,8			14,4	48,96		
16			10,2	30			15,3	51		
17			9,6	28,8			14,4	48,96		
18			9,2	27,6			13,8	46,92		
19			12,3	36,9			18,45	62,73		
20			9,6	28,8			14,4	48,96		

3.Сравнение средних.

Часто в процессе испытаний необходимо сравнить средние значения двух выборок и сделать вывод значимо ли эти средние отличаются друг от друга или они принадлежат одной генеральной совокупности. То есть например решить задачу «Измерение расхода горючего на трассе протяженностью в 100 км производимое через каждый километр пути показало, что автомобиль А потребляет в среднем 0,122 л/км., а автомобиль Б – 0,128 л/км. Имеется ли различие в расходе горючего между автомобилями А и Б». Имеется ли различие между сроком службы запасных частей для автомобилей различных производителей, можно ли использовать данные по измерениям сделанные в разные дни для уточнения среднего или нет, и т. д. Для решения этих задач используют t критерий Стьюдента.

Для решения задачи необходимо найти среднее значение каждой выборки $X_{1\ \text{сред.}}$ и $X_{\ 2\text{сред.}}$. Среднеквадратическое отклонение S сум. для обеих выборок, рассматриваемых совместно полученное по формуле

$$\text{S сум.} = \sqrt{\frac{\sum X1^2 + \sum X2^2}{n1 + n2 - 2}};$$

$$t_p. = \frac{|X1\text{сред.} - X2\ \text{сред.}|}{\text{S сум.}\sqrt{\frac{1}{n1} + \frac{1}{n2}}};$$

число степеней свободы $N = n_1 + n_2 - 2$

Зная число степеней свободы и t_p. с помощью таблицы распределения Стьюдента находим вероятность появления данного значения t_p, если оба эти средние значения относятся к одной и той же совокупности. Если $t_{\ p} > t$ то вероятность того, что эти выборки относятся к одной и той же генеральной совокупности ничтожно мала.

Вариант задания выбрать по последнему числу шифра в зачетной книжке студента, или по списку группы.

n	Варианты заданий																			
	1		2		3		4		5		6		7		8		9		10	
1	15	65	30	104	13	55	39	77	18	39	6	10	24	21	5	11	33	26	31	11
2	16	58	32	93	14	48	42	67	19	35	6,4	9,3	26	19	6	9,6	35	23	34	9,6
3	13	57	26	91	10	47	30	66	16	34	5,2	9,1	21	18	4	9,4	29	23	24	9,4
4	19	51	38	82	15	41	45	57	23	31	7,6	8,2	30	16	6	8,2	42	20	36	8,2
5	18	38	36	61	16	28	48	39	22	23	7,2	6,1	29	12	6	5,6	40	15	38	5,6
6	9	53	18	85	7	43	21	60	11	32	3,6	8,5	14	17	3	8,6	20	21	17	8,6
7	23	48	46	77	20	38	60	53	28	29	9,2	7,7	37	15	8	7,6	51	19	48	7,6
8	11	62	22	99	9	52	27	73	13	37	4,4	9,9	18	20	4	10,4	24	25	22	10
9	17	39	34	62	15	30	45	42	20	23	6,8	6,2	27	12	6	6	37	16	36	6
10	17	38	34	61	14	28	42	39	20	23	6,8	6,1	27	12	6	5,6	37	15	34	5,6
11	15	55	30	88	11	50	33	70	18	33	6	8,8	24	18	4	10	33	22	26	10
12	10	52	20	83	8	42	24	59	12	31	4	8,3	16	17	3	8,4	22	21	19	8,4
13	9	49	18	78	6	38	18	53	11	29	3,6	7,8	14	16	2	7,6	20	20	14	7,6
14	17	53	34	85	15	45	45	63	20	32	6,8	8,5	27	17	6	9	37	21	36	9
15	20	60	40	96	17	50	51	70	24	36	8	9,6	32	19	7	10	44	24	41	10
16	19	48	38	77	16	38	48	53	23	29	7,6	7,7	30	15	6	7,6	42	19	38	7,6
17	18	52	36	83	15	42	45	59	22	31	7,2	8,3	29	17	6	8,4	40	21	36	8,4
18	10	53	20	85	7	43	21	60	12	32	4	8,5	16	17	3	8,6	22	21	17	8,6
19	13	58	26	93	9	50	27	70	16	35	5,2	9,3	21	19	4	10	29	23	22	10
20	15		30		12	35	36	49	18		6		24		5	7	33		29	7
21	16		32			48		67	19		6,4		26			9,6	35			9,6
22	11		22						13		4,4		18				24			
23	22		44						26		8,8						48			
24	14		28						17		5,6						31			

Таблица

Значение t-критерия Стьюдента при уровне значимости
(0,01; 0,05; 0,1; 0,15; 0,20; 0,25; 0,30)

N	P - 0,01	P - 0,05	P - 0,1	P - 0,15	P - 0,2	P - 0,25	P - 0,3
1	63,6567412	12,7062047	6,3137515	4,1652998	3,0776835	2,4142136	1,9626105
2	9,9248432	4,3026527	2,9199856	2,2819306	1,8856181	1,6035675	1,3862066
3	5,8409093	3,1824463	2,3533634	1,9243197	1,6377444	1,4226253	1,2497781
4	4,6040949	2,7764451	2,1318468	1,7781922	1,5332063	1,3443976	1,1895669
5	4,0321430	2,5705818	2,0150484	1,6993626	1,4758840	1,3009490	1,1557673
6	3,7074280	2,4469119	1,9431803	1,6501732	1,4397557	1,2733493	1,1341569
7	3,4994833	2,3646243	1,8945786	1,6165917	1,4149239	1,2542787	1,1191591
8	3,3553873	2,3060041	1,8595480	1,5922214	1,3968153	1,2403183	1,1081454
9	3,2498355	2,2621572	1,8331129	1,5737358	1,3830287	1,2296592	1,0997162
10	3,1692727	2,2281389	1,8124611	1,5592359	1,3721836	1,2212554	1,0930581
11	3,1058065	2,2009852	1,7958848	1,5475598	1,3634303	1,2144602	1,0876664

12	3,0545396	2,1788128	1,7822876	1,5379565	1,3562173	1,2088525	1,0832114
13	3,0122758	2,1603687	1,7709334	1,5299196	1,3501713	1,2041462	1,0794687
14	2,9768427	2,1447867	1,7613101	1,5230951	1,3450304	1,2001403	1,0762802
15	2,9467129	2,1314495	1,7530504	1,5172280	1,3406056	1,1966893	1,0735314
16	2,9207816	2,1199053	1,7458837	1,5121302	1,3367572	1,1936854	1,0711372
17	2,8982305	2,1098156	1,7396067	1,5076598	1,3333794	1,1910471	1,0690331
18	2,8784405	2,1009220	1,7340636	1,5037077	1,3303909	1,1887115	1,0671695
19	2,8609346	2,0930241	1,7291328	1,5001888	1,3277282	1,1866293	1,0655074
20	2,8453397	2,0859634	1,7247182	1,4970355	1,3253407	1,1847614	1,0640158
21	2,8313596	2,0796138	1,7207429	1,4941938	1,3231879	1,1830764	1,0626697
22	2,8187561	2,0738731	1,7171444	1,4916196	1,3212367	1,1815487	1,0614488
23	2,8073357	2,0686576	1,7138715	1,4892769	1,3194602	1,1801572	1,0603365
24	2,7969395	2,0638986	1,7108821	1,4871358	1,3178359	1,1788845	1,0593189
25	2,7874358	2,0595386	1,7081408	1,4851713	1,3163451	1,1777160	1,0583844
26	2,7787145	2,0555294	1,7056179	1,4833625	1,3149719	1,1766394	1,0575232
27	2,7706830	2,0518305	1,7032884	1,4816916	1,3137029	1,1756443	1,0567270
28	2,7632625	2,0484071	1,7011309	1,4801434	1,3125268	1,1747218	1,0559887
29	2,7563859	2,0452296	1,6991270	1,4787048	1,3114336	1,1738642	1,0553022
30	2,7499957	2,0422725	1,6972609	1,4773647	1,3104150	1,1730649	1,0546623
31	2,7440419	2,0395134	1,6955188	1,4761131	1,3094635	1,1723181	1,0540644
32	2,7384815	2,0369333	1,6938887	1,4749418	1,3085728	1,1716189	1,0535045
33	2,7332766	2,0345153	1,6923603	1,4738431	1,3077371	1,1709628	1,0529790
34	2,7283944	2,0322445	1,6909243	1,4728105	1,3069516	1,1703459	1,0524849
35	2,7238056	2,0301079	1,6895725	1,4718382	1,3062118	1,1697649	1,0520194
36	2,7194846	2,0280940	1,6882977	1,4709212	1,3055139	1,1692167	1,0515802
37	2,7154087	2,0261925	1,6870936	1,4700547	1,3048544	1,1686986	1,0511651
38	2,7115576	2,0243942	1,6859545	1,4692348	1,3042302	1,1682082	1,0507721
39	2,7079132	2,0226909	1,6848751	1,4684578	1,3036386	1,1677433	1,0503995
40	2,7044593	2,0210754	1,6838510	1,4677204	1,3030771	1,1673020	1,0500458
41	2,7011813	2,0195410	1,6828780	1,4670197	1,3025434	1,1668826	1,0497095
42	2,6980662	2,0180817	1,6819524	1,4663529	1,3020355	1,1664834	1,0493895
43	2,6951021	2,0166922	1,6810707	1,4657177	1,3015516	1,1661030	1,0490846
44	2,6922783	2,0153676	1,6802300	1,4651119	1,3010901	1,1657402	1,0487936
45	2,6895850	2,0141034	1,6794274	1,4645335	1,3006493	1,1653936	1,0485158
46	2,6870135	2,0128956	1,6786604	1,4639807	1,3002280	1,1650624	1,0482501
47	2,6845556	2,0117405	1,6779267	1,4634518	1,2998249	1,1647454	1,0479959
48	2,6822040	2,0106348	1,6772242	1,4629453	1,2994389	1,1644418	1,0477524
49	2,6799520	2,0095752	1,6765509	1,4624598	1,2990688	1,1641507	1,0475190
50	2,6777933	2,0085591	1,6759050	1,4619940	1,2987137	1,1638714	1,0472949

4. Дисперсионный анализ.

Критерий t позволяет сравнивать два средних значения генеральной совокупности. В некоторых случаях бывает более важным сравнить, так сказать изменчивость, или если более точно - дисперсии случайной величины. Например: дают одинаковую погрешность два разных прибора, одинакова ли точность двух станков обрабатывающих детали, значимо ли различие в дисперсиях показателей качества партий запасных частей автомобиля и т.д. Ответ на эти вопросы может дать применение так называемого критерия F (обозначенного так в честь английского математика Фишера). Критерий F – это отношение двух дисперсий выборок случайной величины в которой большая дисперсия в числителе а меньшая в знаменателе. При расчетах удобно пользоваться таблицей распределения. В том случае если расчетное значение не превышает табличное, говорят о несущественном расхождении между двумя дисперсиями, если наоборот, то расхождения не случайны и выборки не могут принадлежать одной генеральной совокупности.

Расчетный критерий Фишера определяется как:

$$F = S_1^2/S_2^2$$

где $S_1^2 = \frac{\sum(\text{X}i - \text{Xсред.})2}{n1 - 1}$ дисперсия первой выборки;

$S_2^2 = \frac{\sum(\text{X}i - \text{Xсред.})2}{n2 - 1}$ дисперсия второй выборки

n_1 - число наблюдений первой выборки;

n_2 – число наблюдений второй выборки

число степеней свободы определяется как:

$к_1 = n_1 – 1$; $к_2 = n_2 - 1$

По варианту лабораторной работы №3 рассчитать дисперсии, определить критерий Фишера, сравнить его с табличным сделать вывод о случайности расхождения дисперсий.

Таблица

Значение критерия Фишера при уровне значимости Р=0,05 для числа степеней свободы $к_1$ и $к_2$

	$к_1$											
$к_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	>50
1	161,40	199,50	215,70	224,60	230,20	234,00	238,90	243,90	246,50	249,00	251,80	254,30
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,43	19,45	19,47	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,69	8,64	8,58	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,91	5,84	5,77	5,70	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,60	4,53	4,44	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,92	3,84	3,75	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,57	3,49	3,41	3,32	3,23
8	5,32	4,48	4,07	3.84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,20	3 12	3,02	2 93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,07	2,98	2,90	2,80	2.71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,82	2,74	2,64	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,79	2,70	2,61	2,50	2,40
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,60	2,50	2,40	2,30
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,77	2,60	2,51	2,42	2,32	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,53	2,44	2,35	2,24	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,39	2,29	2,18	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,42	2,33	2,24	2,13	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,29	2,19	2,08	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,34	2,25	2,15	2,04	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,31	2,21	2,11	2,00	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	3,71	2,60	2,45	2,28	2,18	2,08	1,96	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,42	2,25	2,15	2,05	1,93	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,23	2,13	2,03	1,91	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,38	2,20	2,11	2,00	1,88	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,18	2,09	1,98	1,86	1,73
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	2,07	1,96	1,84	1,71
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,15	2,05	1,95	1,82	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,30	2,13	2,03	1,93	1,80	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,29	2,12	2,02	1,91	1,78	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,28	2,10	2,00	1,90	1,77	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,99	1,89	1,76	1,62
35	4,12	3,26	2,87	2,64	2,48	2,37	2,22	2,04	1,94	1,83	1,70	1,57
40	4,08	5,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,00	1,90	1,79	1,66	1,51
45	4,06	3,21	2,81	2,58	2,42	2,31	2,15	1,97	1,87	1,76	1,63	1,48
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	1,95	1,85	1,74	1,60	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,81	1,70	1,56	1,39
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,07	1,89	1,79	1,67	1,53	1,35
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,88	1,77	1,65	1,,51	1,32
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,04	1,86	1,76	1,64	1,49	1,30
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,03	1,85	1,75	1,63	1,48	1,28
125	3,92	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,01	1,83	1,72	1,60	1,45	1,25
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,00	1,82	1,71	1,59	1,44	1,22

200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	1,98	1,80	1,69	1,57	1,42	1,19
300	3,87	3,03	2,64	2,41	2,25	2,13	1,97	1,79	1,68	1,55	1,39	1,15
400	3,86	3,02	2,63	2,40	2,24	2,12	1,96	1,78	1,67	1,54	1,38	1,13
500	3,86	3,01	2,62	2,39	2,23	2,11	1,96	1,77	1,66	1,54	1,38	1,11
1000	3,85	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	1,95	1,76	1,65	1,53	1,36	1,08
>1000	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,94	1,75	1,64	1,52	1,35	1,00

Значение критерия Фишера при уровне значимости P=0,01 для числа степеней свободы $к_1$ и $к_2$

	$к_1$											
$к_2$	1	2	3	4	5	6	8	12	16	24	50	>50
1	1 4052	4999	5403	5625	5764	5859	5981	6106	6169	6234	6302	6366
2	98,49	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,44	99,46	99,48	99,50
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,83	26,60	26,35	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,37	14,15	13,93	13,69	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,89	9,68	9,47	9,24	9,02
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,52	7,31	7,09	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,47	6,27	6,07	5,85	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,48	5,28	5,06	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,11	4,92	4,73	4,51	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,52	4,33	4,12	3,91
11	9,65	7,20	9,22	5,67	5,32	5,07	4,74	4,40	4,21	4,02	3,80	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,98	3,78	3,56	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,30	3,96	3,78	3,59	3,37	3,16
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,14	3,80	3,62	3,43	3,21	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,48	3,29	3,07	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	3,89	3,55	3,37	3,18	2,96	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,27	3,08	2,86	2,65
18	8,28	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,71	3,37	3,20	3,00	2,79	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,63	3,30	3,12	2,92	2,70	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	3,05	2,86	2,63	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,51	3,17	2,99	2,80	2,58	2,36
22	7,94	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,45	3,12	2,94	2,75	2,53	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,41	3,07	2,89	2,70	2,48	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,36	3,03	2,85	2,66	2,44	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,09	2,81	2,62	2,40	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,29	2,96	2,78	2,58	2,36	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,26	2,93	2,74	2,55	2,33	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,23	2,90	2,71	2,52	2,30	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,20	2,87	2,68	2,49	2,27	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,66	2,47	2,24	2,01
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,07	2,74	2,56	2,37	2,13	1,90
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,48	2,29	2,05	1,80
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	2,94	2,61	2,43	2,23	1,99	1,75
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	2,89	2,56	2,38	2,18	1,94	1,68
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,32	2,12	1,87	1,60
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,78	2,45	2,28	2,07	1,82	1,53

80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,74	2,42	2,24	2,03	1,78	1,49
90	6,92	4,85	4,01	3,53	3,23	3,01	2,72	2,39	2,21	2,00	1,75	1,45
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,69	2,37	2,19	1,98	1,73	1,43
125	6,84	4,78	3,94	3,47	3,17	2,95	2,66	2,33	2,15	1,94	1,69	1,37
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,63	2,31	2,13	1,92	1,66	1,33
200	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,60	2,28	2,09	1,88	1,62	1,28
300	6,72	4,68	3,85	3,38	3,08	2,86	2,57	2,24	2,06	1,85	1,59	1,22
400	6,70	4,66	3,83	3,37	3,06	2,85	2,56	2,23	2,04	1,84	1,57	1,15
500	6,69	4,65	3,82	3,36	3,05	2,84	2,55	2,22	2,03	1,83	1,56	1,16
1000	6,66	4,63	3,80	3,34	3,04	2,82	2,53	2,20	2,01	1,81	1,54	1,11
>1000	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,51	2,18	1,99	1,79	1,52	1,00

5. Построение уравнения регрессии и нахождение коэффициента корреляции.

К парным зависимостям типа $Y = f(X)$ относится подавляющее большинство формул используемых в технических дисциплинах. По результатам экспериментов такие формулы строят применяя метод наименьших квадратов сущность которого состоит в том что, сумма квадратов отклонений вдоль оси OY должна быть минимальной. Полученные зависимости между X и Y носят стохастический характер, а теснотой связи между переменными является коэффициент корреляции (r).

Часто на практике, с достаточной точностью, можно описать стохастическую зависимость простым уравнением типа

$$Y = bo + b_1x$$

где b_0 и b_1 - постоянные числа.

Построенная таким образом линия регрессии позволяет с некоторой вероятностью предсказывать в исследуемом интервале любые значения функции Y при отсутствующих значениях фактора X.

Опуская вывод формул, для нахождения коэффициентов уравнения регрессии, приводим сразу окончательные формулы, которые используются исследователями для нахождения коэффициентов регрессии:

$$bo = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum xy \sum x}{n \sum x^2 - (\sum x)^2};$$

$$b_1 = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

Статистические расчеты для определения коэффициентов уравнения регрессии удобно проводить в табличной форме

№ п./п	X	Y	X^2	Y^2	XY	X+Y	$(X+Y)^2$
1							
2							
.							
n							
$\sum$							

После заполнения таблицы для проверки правильности вычислений используют выражение

$$\sum(x_i + y_i)^2 = \sum x_i^2 + 2\sum x_i y_i + \sum y_i^2$$

Для определения коэффициента корреляции можно использовать следующую формулу:

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{[n\sum x^2 - (\sum x)^2][n\sum y^2 - (\sum y)^2]}};$$

можно также использовать формулу для вычислении коэффициента корреляции с использованием средних:

$$r = \frac{\sum(x - x\text{ср.})\,(y - y\text{ср.})}{\sqrt{\sum(x - x\text{ср.})^2 \sum(y - y\text{ср.})^2}}$$

коэффициент корреляции изменяется, в абсолютном значении, в зависимости от тесноты связи между переменными от нуля (нет связи) до единицы (функциональная связь).

Для проверки адекватности уравнения регрессии в целом используют F – критерий Фишера. Общую дисперсию S_y^2 сравнивают с остаточной дисперсией $S_{y\,\text{ост.}}^2$ которую вычисляют в табличной форме.

№п\п	Y	Yi-Yсред.	Значения $Y' = bo + b_1 x$	Y'i – Yiсред.
1				
2				
…				
n				
$\sum$				

$S_y{}^2{}_{ост.}$ представляет собой показатель ошибки предсказания уравнением результатов опытов. Качество предсказания определяют, сравнивая $S_y{}^2{}_{ост.}$ с $S_y{}^2$, другими словами F –критерий Фишера показывает, во сколько раз уравнение регрессии предсказывает результаты опытов лучше, чем среднее Y:

$$Y\text{сред} = \frac{\sum Yi}{n}; \qquad Y'\text{сред} = \frac{\sum Y'i}{n}$$

$$S_y{}^2 = \frac{\sum(Yi - Y\text{сред.})2}{n-1};$$

$$S_y{}^2{}_{ост.} = \frac{\sum(Y'i - Y'\text{сред.})2}{n-1};$$

$$F = \frac{\text{Sy}2}{\text{Sy}2\text{ост.}} < F_{\text{табл.}}$$

Для того чтобы уравнение регрессии адекватно описывало результаты экспериментов необходимо чтобы при 5% уровне значимости фактическое значение F , было меньше табличного.

Исследование зависимости между показателями качества ремонта и качеством эксплуатации.*

Задача заключается в построении уравнения регрессии связывающее производственное качество отремонтированных изделий с показателями эксплуатации и оценки тесноты связи с помощью коэффициента корреляции.

Данные для обработки даны в таблице 1. После вычисления коэффициентов проверить значимость уравнения регрессии.

Вариант задания выбрать по последнему числу шифра в зачетной книжке студента, или по списку группы.

Условные обозначения.

X_1 – радиальное биение шеек под коренные подшипники коленчатого вала, мм;

X_2 - действительное отклонение размеров гнезд под вкладыши коренных подшипников от номинального размера в блоке цилиндров, мм;

X_3 – отклонение от сносности относительно общей оси осей гнезд под вкладыши коренных подшипников, мм;

Y_1, Y_2, Y_3 - наработка между отказами сопряжений коленчатый вал – коренные подшипники тыс. км.;

X_4 – зазор в сопряжении стержень выпускного клапана – направляющая втулка клапана, мм;
Y_4 – наработка между отказами сопряжения выпускной клапан – направляющая втулка клапана, тыс.км.;
X_5 – зазор в сопряжении стержень впускного клапана – направляющая втулка, тыс.км.;
Y_5 – наработка между отказами сопряжения впускной клапан – втулка направляющая, тыс. км.;
X_6 – зазор в сопряжении цилиндр – поршень двигателя, мм.;
Y_6 - наработка между отказами цилиндропоршневой группы, тыс. км.;
X_7 – отклонение от сносности оси первичного вала коробки передач относительно оси коленчатого вала, угл./мин.;
Y_7 – наработка между отказами сцепления, тыс. км. ;
X_8 – производительность масляного насоса, л./мин.;
Y_8 – наработка двигателя между отказами системы смазки, тыс. км.;
X_9 – величина окружного зазора вторичного вала коробки передач при фиксированном положении первичного вала, угл./мин.;
Y_9 – наработка между отказами коробки передач, тыс. км.

По экспериментальным данным найти коэффициенты уравнения регрессии, коэффициент корреляции, сделать вывод о тесноте связи исследуемых параметров, в координатах XOY нанести экспериментальные точки и построить график найденного уравнения регрессии, провести проверку значимости уравнения регрессии. После нахождения вышеуказанных данных произвести проверку расчетов и построение уравнения регрессии в программе Exel.

Таблица

Исходные данные о показателях производственного и эксплуатационного качества для построения уравнения регрессии.

n	X_1	Y_1	X_2	Y_2	X_3	Y_3	X_4	Y_4
1	0,10	100	0,02	117	0,02	112	0,17	90,6
2	0,06	107	0,04	118	0,05	103	0,13	70,3
3	0,08	112	0,03	114	0,03	109	0,18	80,0
4	0,14	95	0,01	123	0,01	122	0,14	95,9
5	0,05	124	0,02	118	0,04	107	0,26	35,0
6	0,06	119	0,04	114	0,03	117	0,21	73,4
7	0,07	117	0,03	120	0,05	108	0,16	63,2
8	0,13	108	0,06	113	0,04	114	0,28	40,8

9	0,09	104	0,03	119	0,02	120	0,17	70,7
10	0,05	112	0,05	117	0,06	104	0,12	85,4
11	0,02	124	0,02	121	0,03	110	0,22	51,3
12	0,11	110	0,04	117	0,00	120	0,10	110,1
13	0,018	96	0,00	121	0,03	108	0,20	60,7
14	0,03	111	0,05	112	0,02	119	0,14	92,3
15	0,09	109	0,01	121	0,02	116	0,18	72,2
16	0,04	116	0,04	117	0,05	106	0,12	93,7
17	0,13	103	0,03	118	0,01	120	0,23	55,5
18	0,07	111	0,06	113	0,03	112	0,16	78,0

n	X_5	Y_5	X_6	Y_6	X_7	Y_7	X_8	Y_8	X_9	Y_9
1	0,21	75,5	0,03	185	3	45,5	10,5	170	290	39,9
2	0,16	81,1	0,04	187	6	41,9	9,0	188	420	39,0
3	0,28	57,0	0,06	182	4	45,8	10,0	152	330	40,8
4	0,13	88,8	0,03	189	8	35,3	11,0	147	200	44,4
5	0,17	80,5	0,08	177	5	38,1	8,0	195	400	36,8
6	0,18	93,8	0,05	185	1	52,2	13,0	104	320	40,7
7	0,20	68,3	0,02	189	7	31,5	10,0	161	280	41,7
8	0,17	72,6	0,04	183	10	29,8	11,5	125	370	40,6
9	0,15	103,9	0,07	174	2	50,0	11,0	133	510	35,1
10	0,17	90,2	0,03	187	5	42,2	8,5	180	300	39,3
11	0,24	55,4	0,05	181	5	44,3	9,5	180	250	40,5
12	0,16	97,5	0,02	192	9	32,2	10,5	154	310	41,2
13	0,10	100,1	0,03	188	6	38,5	12,0	130	450	30,7
14	0,15	75,0	0,04	186	4	43,6	9,5	161	350	39,2
15	0,18	80,2	0,03	187	6	38,0	10,0	165	330	39,7
16	0,13	98,7	0,02	190	2	48,5	8,5	192	290	40,5
17	0,22	69,1	0,05	183	8	32,3	11,0	141	380	38,2
18	0,16	87,3	0,03	188	5	41,7	9,5	170	230	42,6

*- для задания использовались данные ученых Харьковского автодорожного института.

6. Нелинейная парная регрессия.

Если гипотеза линейности взывает сомнение и может быть отброшена, а нелинейность точек эксперимента явно просматривается, есть смысл построить нелинейную (квадратичную) формулу парной зависимости (речь идет о зависимости нелинейной по фактору X по параметру Y зависимость остается линейной). То есть аппроксимировать данные зависимостью

$$y = a + bx + cx^2$$

коэффициенты a, b и c находятся решением системы трех нормальных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{gathered} an + b\sum x + c\sum x^2 = \sum y \\ a\sum x + b\sum x^2 + c\sum x^3 = \sum xy \\ a\sum x^2 + b\sum x^3 + c\sum x^4 = \sum x^2 y \end{gathered}$$

Для вычисления коэффициентов регрессии необходимо составить таблицу и вычислить необходимые суммы.

N п\п	X	Y	XY	X^2	X^2Y	X^3	X^4
1							
2							
3							
4							
5							
$\sum$							

По экспериментальным данным найти коэффициенты уравнения регрессии исследуемых параметров, в координатах X0Y нанести экспериментальные точки и построить график найденного уравнения регрессии.

Найти остаточную дисперсию, по критерию Фишера сравнить полученные дисперсии, сделать вывод об адекватности модели.

Процедуру вычисление остаточной дисперсии удобно вести с помощью таблицы

№	Y	$Y_{расч.}$	$Y - Y_{расч.}$	$(Y - Y_{расч.})^2$	$Y - Y_{ср.}$	$(Y - Y_{ср.})^2$
1						
2						
3						
4						
5						
$\sum$						

Вариант задания выбрать по последнему числу шифра в зачетной книжке студента, или по списку группы.

Таблица

Варианты задания.

n	вариант 1		вариант 2		вариант 3		вариант 4	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	1,7	25	1,6	26	3,57	57,5	1,1	22
2	3,4	34	3,1	30	7,14	78,2	3	31
3	4	57	3,9	59	8,4	131,1	3,8	55
4	4,1	82	4,2	88	8,61	188,6	4,3	84
5	5,3	98	5,8	102	11,13	225,4	5,5	103

n	вариант 5		вариант 6		вариант 7		Вариант 8	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	2,5	37	1,5	24	2,8	55	0,9	19
2	5,1	50	3,0	32	7,0	70,2	2,8	30
3	6	84	4,0	62	8,2	128	4	56
4	6,2	125	4,4	95	8,9	192	4,6	88
5	7,9	148	6,0	108	10	224	5	99

n	вариант 9		вариант 10	
	X	Y	X	Y
1	1,88	26	1,0	22
2	3,52	36	3,4	38
3	4,1	55	4,0	59
4	4,5	88	4,6	93
5	5,4	102	5,9	112

7. Планирование многофакторного эксперимента.

Существует два вида эксперимента – пассивный и активный.

Пассивный эксперимент – это эксперимент, при котором уровни факторов в каждом опыте регистрируются исследователем, но не задаются им.

Активный эксперимент – это эксперимент, в котором факторы изменяются в каждом опыте по воле исследователя.

Фактор (X) – это переменная величина, которая по предположению влияет на результат эксперимента.

Уровень фактора – фиксированное значение фактора относительно начала отсчета.

Откликом (y) называется наблюдаемая случайная переменная, которая, по предположению, зависит от факторов.

Зависимость отклика от факторов может быть найдена методами регрессионного, дисперсионного и ковариационного анализа. В регрессионном анализе зависимость называется регрессионной зависимостью или уравнением регрессии.

Регрессионный анализ это статистический метод анализа и обработки экспериментальных данных при воздействии на отклик количественных факторов, основанный на сочетании аппарата наименьших квадратов и статистической проверки гипотез. Метод наименьших квадратов в регрессионном анализе используется для нахождения коэффициентов уравнения регрессии.

Адекватностью математической модели называется соответствие модели (полученного уравнения) экспериментальным данным по выбранному критерию.

Неадекватность представления результатов эксперимента может быть из-за несоответствия между видом уравнения, которое описывает поверхность отклика и действующим характером этой поверхности. Обычно в качестве зависимостей для описания характера связи используют полиномы. В этом случае говорят о неадекватности представления результатов эксперимента полиномом данной степени.

Корреляционный анализ это совокупность основанных на математической теории корреляции методов обнаружения корреляционной связи между случайными величинами. Эти методы включают в себя проверку статистических гипотез о значимости связи между факторами и откликом.

Корреляция - это вероятностная (статистическая) зависимость между величинами, не имеющими строго функционального характера. В отличие от функциональной корреляционная зависимость возникает тогда, когда одна из величин зависит не только отданной второй величины, но и от ряда случайных факторов.

Исследователя всегда практически всегда интересует зависимость исследуемой величины (у) от многих факторов X_1, $X_2,\ldots.X_N$ то есть задача отыскания модели

$$y= f\,(X_1,X_2,\ldots.X_N)$$

Классический подход в определении зависимости заключался в проведении однофакторных экспериментов по определению сначала частных зависимостей $y_1 = f_1(x_1)$; $y_2 = f_2(x_2)$;…… $y_n = f_n(x_n)$; когда меняется поочередно один фактор, а остальные фиксируются, а затем уже происходит обобщение полученных результатов.

Однако с ростом числа факторов и уровней их варьирования значительно вырастает число опытов, которые необходимо провести. Полное количество опытов, которое необходимо провести определяется по формуле:

$$n = q^k$$

где q – число уровней варьирования каждого фактора;
k – количество факторов;

например, при q = 5 и k = 2 количество опытов n = 25, а при k = 6 n = 15625 опытов. Кроме того необходимо в каждой точке зависимости проводить дублирование опытов для оценки точности полученных результатов.

После проведения всех опытов при значительном количестве факторов получают много отдельных зависимостей, анализ которых является сложной задачей. К тому же остается неразрешенным вопрос о совместном взаимном влиянии факторов на искомую величину.

Выход из этого положения нашел Рональд Фишер, английский статистик в 1925 – 1929 году. Он предложил одновременно варьировать все факторы, влияющие на параметр исследуемой величины. С начала 60х годов прошлого столетия аппарат математического планирования эксперимента начал применяться весьма широко и теория планирования эксперимент продолжает быстро развиваться. Также оказалось, что во многих случаях, при решении технических проблем, вполне адекватно исследуемую зависимость (при правильном уровне варьирования факторов) можно описать линейной моделью.

Самый простой случай, когда в задаче варьируется только два фактора X_1 и X_2 , каждый из которых варьируется на двух уровнях +1 и – 1. Значения фактора выбираются исходя из данных классического эксперимента или анализа априорной информации. Как правило, необходимо выбрать основной уровень каждого фактора (центр плана), определить интервал варьирования каждого фактора основного уровня. Тогда верхний уровень фактора будет получаться сложением интервала варьирования со значением основного уровня, а нижний вычитанием из основного. Все возможные комбинации факторов в четырех опытах указаны в матрице планирования эксперимента.

Матрица планирования полного факторного эксперимента 2^2

Номер опыта	X_1	X_2	y
1	+1	+1	y_1
2	-1	+1	y_2
3	+1	-1	y_3
4	-1	-1	y_4

В первом опыте оба фактора находятся на верхнем уровне, во втором X_1 на нижнем, а фактор X_2 на верхнем и так далее.

Если число уровней факторов равно двум и число опытов полного факторного эксперимента N составляет

$$N= 2^k$$

где k – число факторов, 2 – число уровней.

Один из наиболее простых и распространенный способов построения матриц полного факторного эксперимента в следующем: при любом k необходимо повторить дважды матрицу планирования для случая k-1 сначала при значении k –того фактора на верхнем уровне а затем на нижнем (для простоты записи единицы пропущены).

Матрицы полного факторного эксперимента 2^2 и 2^3

<table>
<tr><td colspan="2">план</td><td>№ опыта</td><td>X_1</td><td>X_2</td><td>X_3</td></tr>
<tr><td rowspan="4"></td><td rowspan="4">2^2</td><td>1</td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>2</td><td>-</td><td>+</td><td>+</td></tr>
<tr><td>3</td><td>+</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td>4</td><td>-</td><td>-</td><td>+</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">2^3</td><td>5</td><td>+</td><td>+</td><td>-</td></tr>
<tr><td>6</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr>
<tr><td>7</td><td>+</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>8</td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr>
</table>

Задание: используя закономерность, изложенную выше самостоятельно достроить матрицу планирования полного факторного эксперимента для четырех и пяти факторов.

В целом матрица полного факторного эксперимента и для расчета коэффициентов линейной модели выглядит следующим образом:

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_1X_2	y
1	+	+	+	+	y_1
2	+	-	+	-	y_2
3	+	+	-	-	y_3
4	+	-	-	+	y_4

`Столбец X_0 и X_1X_2 (который получается перемножением столбцов X_1 и X_2) необходимы для вычисления постоянной b_0 и коэффициента b_{12} который показывает эффект взаимодействия двух факторов или как говорят эффект парного взаимодействия. Он показывает силу влияния одного из факторов в зависимости от уровня, на котором находится другой фактор.

С помощью данной матрицы можно построить модель вида:

$$y = b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_1b_2X_1X_2$$

Коэффициенты модели находятся как:

$b_0 = \frac{y1+y2+y3+y4}{4}$; $b_1 = \frac{y1-y2+y3-y4}{4}$; $b_2 = \frac{y1+y2-y3-y4}{4}$;
$b_{12} = \frac{y1-y2-y3+y4}{4}$

Аналогично строится матрица планирования эксперимента, модель и вычисляются коэффициенты модели, коэффициенты парных тройных, четверных и более взаимодействий.

Задание: построить матрицу планирования экспериментов 2^3 и 2^4 для вычисления коэффициентов линейной модели, записать вид математической модели с соответствующими коэффициентами взаимодействия факторов.

По заданию преподавателя для плана 2^3 имея значения факторов и результаты опытов рассчитать коэффициенты модели, проверить однородность дисперсий значений опытов, проверить гипотезу статистической значимости факторов, исключить статистически незначимые факторы и проверить адекватность модели.

Полученные коэффициенты необходимо проверить на значимость. Это можно сделать с помощью критерия Стьюдента: если $/b/>t_{кр}*S_{\text{коэфф.}}$ то b значим; если $/b/<t_{кр}*S_{\text{коэфф.}}$ то b незначим и его полагают равным нулю и в уравнении регрессии не учитывают.

Критическую точку *tкр.* находят из таблиц распределения Стьюдента (таблицы из работы 3, «Сравнение средних»)по числу степеней свободы $n(m - 1)$ и с заданным уровнем значимости α.

Среднее квадратическое отклонение коэффициентов $S_{коэфф.}$ зависит от дисперсии воспроизводимости результатов по всем проведенным опытам и вычисляется по формуле: $S^2_у$

$$S\ коэф. \sqrt{\frac{S2y}{n*m}}$$

Вариант 1

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	-	-	-	0,45	0,46	0,45
2	+	-	-	0,41	0,41	0,41
3	-	+	-	0,44	0,44	0,44
4	+	+	-	0,42	0,43	0,44
5	-	-	+	0,44	0,45	0,44
6	+	-	+	0,378	0,374	0,376
7	-	+	+	0,38	0,385	0,384
8	+	+	+	0,33	0,33	0,33

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	7	9	10
Нижний уровень -1	4	7	7

Вариант 2

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	-	-	-	0,27	0,26	0,25
2	+	-	-	0,25	0,24	0,23
3	-	+	-	0,26	0,26	0,26
4	+	+	-	0,172	0,176	0,18
5	-	-	+	0,27	0,28	0,26
6	+	-	+	0,262	0,265	0,263
7	-	+	+	0,236	0,235	0,239
8	+	+	+	0,17	0,17	0,17

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	7	9	10
Нижний уровень -1	4	7	7

Вариант 3

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	-	-	-	1,23	1,24	1,25
2	+	-	-	0,803	0,802	0,805
3	-	+	-	0,98	0,99	0,97
4	+	+	-	0,474	0,476	0,475
5	-	-	+	0,27	0,28	0,26
6	+	-	+	0,926	0,926	0,918
7	-	+	+	0,49	0,49	0,49
8	+	+	+	0,694	0,692	0,696

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	6	4	7
Нижний уровень -1	3	2	5

Вариант 4

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	+	+	+	1,2	1,15	1,25
2	+	+	-	1,25	1,3	1,35
3	+	-	+	1,15	1,05	1,1
4	+	-	-	1,18	1,2	1,22
5	-	+	+	0,87	0,93	0,9
6	-	+	-	1,4	1,35	1,45
7	-	-	+	0,9	0,95	0,85
8	-	-	-	1,3	1,28	1,32

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	20	$5*10^4$	160
Нижний уровень -1	12	$3*10^4$	140

Вариант 5

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	+	+	+	4	3,9	4,1
2	+	+	-	4,6	4,4	4,5
3	+	-	+	3,5	3,6	3,4
4	+	-	-	3,3	3,7	3,5
5	-	+	+	3,1	3	2,9
6	-	+	-	4,7	4,5	4,3
7	-	-	+	3,2	3	2,8
8	-	-	-	3,8	4,2	4

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	20	$5*10^4$	160

Нижний уровень -1	12	$3*10^4$	140

Вариант 6

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	+	+	+	20	20,4	20,6
2	+	+	-	23,9	23,4	23,5
3	+	-	+	24	24,2	24,6
4	+	-	-	25,2	24,1	24,8
5	-	+	+	28,2	29,3	29,5
6	-	+	-	30,1	31,4	30,3
7	-	-	+	30,2	29,1	30,4
8	-	-	-	31	30,5	30

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	13	150	12
Нижний уровень -1	7	120	6

Вариант 7

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	-	+	+	93	94	95
2	-	+	-	95,7	95,9	95,9
3	-	-	+	78,5	79,3	79,5
4	-	-	-	88	88,1	88,3
5	+	+	+	95,4	95,6	95,5
6	+	+	-	84	85,4	85,3
7	+	-	+	97	97	97
8	+	-	-	90	90,7	91,1

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	91,3	98	90
Нижний уровень -1	1,3	0	30

Вариант 8

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	-	+	+	73	74	75
2	-	+	-	77	77,6	78,5
3	-	-	+	83,5	83,8	82
4	-	-	-	88	87,6	87,5
5	+	+	+	65,5	66	66,5
6	+	+	-	85,2	84,2	84
7	+	-	+	80	80,2	81,2
8	+	-	-	90,3	89,3	89,2

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	91,3	98	90
Нижний уровень -1	1,3	0	30

Вариант 9

№ эксперимента	факторы			Результаты опытов		
	X_1	X_2	X_3	$У_1$	$У_2$	$У_3$
1	+	+	+	7,4	8,4	6,4
2	-	+	+	8,6	7	7,8
3	+	-	+	12,3	9	9,3
4	-	-	+	5,8	5,8	5,7
5	+	+	-	18,8	17	15,2
6	-	+	-	8,4	8,4	6
7	+	-	-	11,8	7	9,4
8	-	-	-	10,5	7,8	8,1

факторы	X_1	X_2	X_3
Верхний уровень +1	0,06	300	8
Нижний уровень -1	0,02	60	2

8.Дробный факторный эксперимент

Объем необходимого количества экспериментов растет с увеличением числа факторов так для трех факторов он составляет 2^3 - 8 опытов при пяти фактора уже 2^5 - 32 опыта, а при восьми уже 2^8 - 256 опытов.

При планировании эксперимента с увеличением числа факторов можно снизить количество опытов в том случае если взаимное влияние факторов статистически незначимо и незначительно влияет на функцию отклика.

Модель 2^2 выглядит как $\mathbf{У = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_{12}X_1X_2}$
При планировании эксперимента столбец вычисления двойного взаимодействия факторов произведения X_1 X_2 заменяется третьим фактором с соответствующим порядком проведения опытов варьируя фактор X_3

План 2^{3-1}

Номер опыта	Хо	X_1	X_2	$X_3= X_1 X_2$	У
1	+	+	+	+	$У_1$
2	+	-	+	-	$У_2$
3	+	+	-	-	$У_3$
4	+	-	-	+	$У_4$

Дробные реплики задаются с помощью так называемых **определяющих контрастов** так для 2^{3-1} построена после приравнивания

X_3 к X_1 X_2 то есть $X_3= X_1 X_2$

Это выражение называют генерирующим контрастом. Оно в общем случае показывает с каким из эффектов смешан данный эффект (эффект X_3 смешан с эффектом X_1 X_2).

Умножив обе части генерирующего соотношения на X_3 получим

$X_3^2 = X_1 X_2X_3$

Столбец $X_1 X_2X_3$ как и X_3^2 состоит из одних +1 поэтому можно записать

$1= X_1 X_2X_3$

Символическое обозначение произведения столбцов равное +1 или -1
Называется **определяющим контрастом.**

С помощью контраста можно определить систему смешивания эффектов. Чтобы определить какой эффект смешан с данным нужно умножить обе части определяющего контраста на столбец соответствующий данному.

Так если $1= X_1 X_2X_3$ то для X_1 имеем $X_1^2 = X_1^2 X_2X_3 = X_2 X_3$ так как $X_1^2=1$

находим для $X_2^2= X_1 X_2^2X_3= X_1 X_3$ для X_3 $X_3= X_1 X_2X_3^2 = X_1 X_2$

это значит, что коэффициенты линейного уравнения будут оценками
$b_1 \rightarrow \beta_1+\beta_{23}$, $b_2\rightarrow \beta_2+\beta_{13}$, $b_3\rightarrow \beta_3+\beta_{12}$.

То есть говорят, линейные эффекты связаны с эффектами парных взаимодействий.

Для полуреплики 2^{3-1} модель будет выглядеть

$\mathbf{У = b_0 +b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3}$

Эксперимент 2^4

Полуреплика 2^{4-1} для определяющего контраста $1= X_1 X_2 X_3 X_4$

Номер опыта	Хо	X_1	X_2	X_3	$X_4= X_1 X_2 X_3$
1	+	+	+	+	+
2	+	-	+	+	-
3	+	+	-	+	-
4	+	-	-	+	+
5	+	+	+	-	-
6	+	-	+	-	+
7	+	+	-	-	+
8	+	-	-	-	-

Генерирующее соотношение $X_4= X_1 X_2 X_3$ определяющий контраст $1= X_1 X_2 X_3 X_4$

Эффекты смешиваются следующим образом

$b_1 \rightarrow \beta_1+\beta_{234}$

$b_2 \rightarrow \beta_2+\beta_{134}$

$b_3 \rightarrow \beta_3+\beta_{124}$

$b_4 \rightarrow \beta_4+\beta_{123}$

$b_{12} \rightarrow \beta_{12}+\beta_{34}$

$b_{13} \rightarrow \beta_{13}+\beta_{24}$

$b_{14} \rightarrow \beta_{14}+\beta_{23}$

Модель выглядит как $У = b_0 +b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3 + b_4X_4$

Самостоятельно составить:

Для полуреплики $2^{4\text{-}1}$ составить план эксперимента с генерирующим соотношением $X_4 = X_1\ X_2$ определить эффекты смешивания для коэффициентов.

Для полуреплики $2^{4\text{-}1}$ составить план эксперимента с генерирующим соотношением $X_4 = X_2\ X_3$ определить эффекты смешивания для коэффициентов.

9.Использование латинских квадратов для планирования экспериментов

Название «латинский» связано с тем, что выдающийся математик Леонард Эйлер (1707 – 1783) при изучении этих квадратов использовал в качестве их элементов буквы латинского алфавита.

Латинский квадрат – это квадратная таблица с n^2 – клетками составленная из n различных элементов, ни один из которых не появляется дважды ни в какой строке, ни в каком столбце. Число n называют порядком латинского квадрата.

Латинский квадрат A порядка n образованный элементами множеств Q кратко обозначается A=[aij] где i,j=1,2,3……n, а элемент множества Q – aij который находится на пересечении i – й строки и j – го столбца.

Примеры латинских квадратов прядка 2, 3, 4,5

ав	231	abcd	abcde
ва	312	dcab	bcdea
	123	cdba	cdeab
		badc	deabc
			eabcd

Обычно в качестве элементов латинского квадрата порядка n берутся элементы 1,2,3….n. Составляется таблица по следующему правилу в первую строку поместить элементы 1,2,….n, а каждую следующую получать из предыдущей строки сдвигом влево на один разряд перемещая ее первый элемент в конце строки.

Квадрат 5 го прядка:

12345
23451
34512
45123
51234

Суть применения латинских квадратов при планировании экспериментов в следующем: пусть исследуется объект который зависит от 3х факторов ABC а каждый фактор изменяется на 3х уровнях (имеет 3 значения). Будем считать что строки латинского квадрата соответствуют 3 разным уровням a_1, a_2, a_3 фактора А, столбцы 3 уровням фактора В – $в_1, в_2, в_3$, а внутренняя часть соответствует фактору С.

A	B		
	$в_1$	$в_2$	$в_3$
a_1	C_1	C_2	C_3
a_2	C_2	C_3	C_1
a_3	C_3	C_1	C_2

При этом имеется 3^3 всех возможных комбинаций значений факторов А, В и С. латинский квадрат реализует только 3^2 то есть $\frac{1}{3}$ часть из них. Но при этом комбинация расположены так, что каждое значение одного из указанных факторов (например А) встречается с каждым из значений 2 х остальных факторов В и С точно по одному разу. Важным является и то, что можно использовать факторы, изменяющиеся дискретно или с неравными интервалами варьирования. Записав в каждую ячейку латинского квадрата сочетание факторов и результат опыта можно наглядно увидеть оптимальный вариант сочетания факторов эксперимента и если необходимо построить экспериментальную модель.

Основные типы задач планирования по латинским квадратам:

- **исключение влияния неоднородности**, когда факторы зависят от систематических и случайных ошибок которые могут влиять на результат, например работники предприятия, дни недели, автомобили одинаковой марки, но разной степени изношенности и т.д.
- **построение ряда предпочтительности**, когда анализ всех комбинаций латинского квадрата показывает степень влияния факторов на результат;
- **отсеивающие эксперименты**, когда необходимо после анализа результатов выделить неприемлемые комбинации и определить самые перспективные комбинации для построения дальнейших экспериментов;
- **оптимальные эксперименты,** когда необходимо найти оптимум при неполном переборе факторов.

Задание: научиться составлять латинский квадрат, научиться рандомизировать латинский квадрат, составить план с использованием латинского квадрата для определения минимального и максимального мгновенного расхода топлива легкового автомобиля в зависимости от 3х факторов, обороты по тахометру, передачи КПП автомобиля, давления в шинах. Описать условия реализации эксперимента, факторы неоднородности и как их исключить.

Библиографический список.

1. Болдин А.П. основы научных исследований: учебник для студ. Учреждений высшего проф. образования / А.П.Болдин, В.А. Максимов. – М.: Издательский центр «Академия», 2012. – 336 с.
2. Адлер Ю.П., Маркова Е.В., Грановский Ю.В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. 2-е изд. – М.: Наука, 1976.
3. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб пособие для втузов. – 2-е изд. прераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1988.- 239 с.: ил.
4. Маркова Е.В. Руководство по применению латинских квадратов при планировании эксперимента с качественными факторами. – Челябинск: Изд-во УралНИИстройпроекта, 1971 г.
5. Налимов В.В., Голикова Т.И. Логические основания планирования эксперимента. – М.: Металлургия, 1976 г.
6. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. – М.: Мир, 1972 г.