

УДК 534.2

Составители: А.В. Кузько, В.П. Зыков

Рецензент

Директор РИЦ, д.ф.-м.н., профессор А.П. Кузьменко

Мультиферроики: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления подготовки 28.04.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Кузько А.В., В.П. Зыков. Курск, 2021. 55 с.: ил. 40. Библиогр.: с. 48.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических работ, в которых собраны задания по следующим темам: магнитные цепи; магнитный поток; закон полного тока; проектирование соленоида с заданными параметрами, электрический диполь и свойства диэлектриков; магнитные свойства вещества. Обучающиеся получают базовые знания и навыки работы в программной среде FEMM и освоят методики моделирования индуктивных элементов.

Методические указания соответствуют требованиям федерального государственного образовательного стандарта высшего образования и учебному плану направления подготовки 28.04.01 Нанотехнологии и микросистемная техника, степень (квалификация) – магистр.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.01.21 Формат 60 x 84 1/

Усл. печ. л. 3,8. Уч.-изд. л. 0,68. Тираж экз. Заказ 283. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.

ПОДБОР ЗАДАНИЙ, ИХ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ, ЧИСЛЕННОЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ МАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ И ИХ ПАРАМЕТРОВ

Основные формулы

- Циркуляция вектора магнитной индукции \mathbf{B} вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l},$$

где B_i — проекция вектора магнитной индукции на направление элементарного перемещения $d\mathbf{l}$ вдоль контура L . Циркуляция вектора напряженности \mathbf{H} вдоль замкнутого контура

$$\oint_L \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l},$$

- Закон полного тока (для магнитного поля в вакууме)

$$\oint_L \mathbf{B}_i \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

где μ_0 — магнитная постоянная; $\sum_{i=1}^n I_i$ — алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром; n — число токов.

Закон полного тока (для произвольной среды)

$$\oint_l \mathbf{H}_i \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_i,$$

- Магнитный поток Φ через плоский контур площадью S :

а) в случае однородного поля

$$\Phi = BS \cos \alpha; \text{ или } \Phi = B_n S,$$

где α — угол между вектором нормали \mathbf{n} к плоскости контура и вектором магнитной индукции \mathbf{B} ; B_n — проекция вектора \mathbf{B} на нормаль \mathbf{n} ($B_n = B \cos \alpha$);

б) в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S B_n \cdot dS,$$

где интегрирование ведется во всей поверхности S .

- Потокосцепление, т.е. полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида или тороида,

$$\Psi = N\Phi,$$

где Φ — магнитный поток через один виток; N — число витков соленоида или тороида.

- Магнитное поле тороида, сердечник которого составлен из двух частей, изготовлен-

ных из веществ с различными магнитными проницаемостями:

а) магнитная индукция на осевой линии тороида

$$B = \frac{IN}{l_1 / (\mu_1 \mu_0) + l_2 / (\mu_2 \mu_0)},$$

где I — сила тока в обмотке тороида; N — число ее витков; l_1 и l_2 — длины первой и второй частей сердечника тороида; μ_1 и μ_2 — магнитные проницаемости веществ первой и второй частей сердечника тороида; μ_0 — магнитная постоянная

б) напряженность магнитного поля на осевой линии тороида в первой и второй частях сердечника

$$H_1 = B / (\mu_1 \mu_0); H_2 = B / (\mu_2 \mu_0);$$

в) магнитный поток в сердечнике тороида

$$\Phi_m = \frac{IN}{l_1 / (\mu_1 \mu_0 s) + l_2 / (\mu_2 \mu_0 s)},$$

или по аналогии с законом Ома (формула Гопкинсона)

$$\Phi_m = F_m / R_m,$$

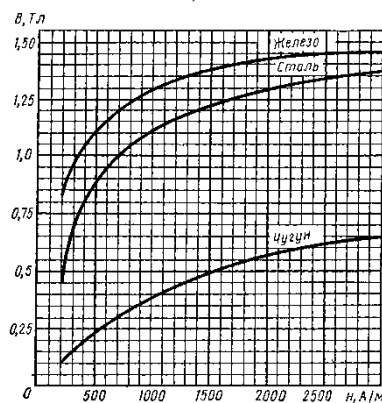


Рис. 24.1

где F_m — магнитодвижущая сила; R_m — полное магнитное сопротивление цепи;

г) магнитное сопротивление участка цепи

$$R_m = l / (\mu \mu_0 S).$$

• Магнитная проницаемость μ , ферромагнетика связана с магнитной индукцией B поля в нем и напряженностью H намагничивающего поля соотношением

$$\mu = B / (\mu_0 H).$$

• Связь между магнитной индукцией B поля в ферромагнетике и напряженностью H намагничивающего поля выражается графически (рис. 24.1).

Примеры решения задач

Пример 1. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I=50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной $l=65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине. Каков магнитный поток Φ , пронизывающий рамку?

Решение. 1 способ - аналитическое решение.

Магнитный поток Φ через поверхность площадью S определяется выражением

$$\Phi = \int_S B_n dS$$

В нашем случае вектор магнитной индукции B перпендикулярен плоскости рамки. Поэтому для всех точек рамки $B_n = B$. Магнитная индукция B , создаваемая бесконечно длинным прямым проводником с током, определяется формулой

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x},$$

где x — расстояние от провода до точки, в которой определяется B .

Для вычисления магнитного потока заметим, что так как B зависит от x и элементарный поток $d\Phi$ будет также зависеть от x , то

$$d\Phi = B(x) dS.$$

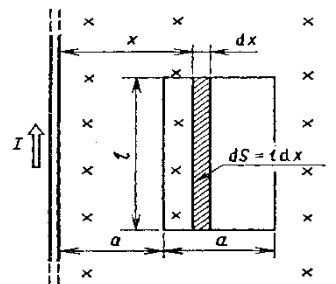


Рис. 24.2

Разобьем площадь рамки на узкие элементарные площадки длиной l , шириной dx и площадью $dS=ldx$ (рис. 24.2). В пределах этой площадки магнитную индукцию можно считать постоянной, так как все части площадки равноудалены (на расстояние x) от провода. С учетом сделанных замечаний элементарный магнитный поток можно записать в виде

$$d\Phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

Проинтегрировав полученное выражение в пределах от $x_1=a$ до $x_2=2a$, найдем

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln x \Big|_a^{2a}$$

Подставив пределы, получим

$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln 2.$$

Убедимся в том, что правая часть полученного равенства дает единицу магнитного потока (Вб): $[\mu_0] [I] [l] = \text{Гн/м} \cdot \text{А} \cdot \text{м} = 1 \text{ Вб}$. Произведя вычисления по формуле (1), найдем $\Phi = 4,5 \text{ мкВб}$.

Решение. 2 способ – численное решение на основе метода конечных элементов посредством программы FEMM.

Запустите FEMM, выбрав соответствующий пункт, размещенный в разделе меню «Пуск». После запуска программы выберите **File**, затем **New** в главном меню (рис.3). Появится диалоговое окно, позволяющее выбрать тип создаваемой проблемы. Выберите **Magnetics Problem** из выпадающего списка для текущего примера. Пустая проблема появится.

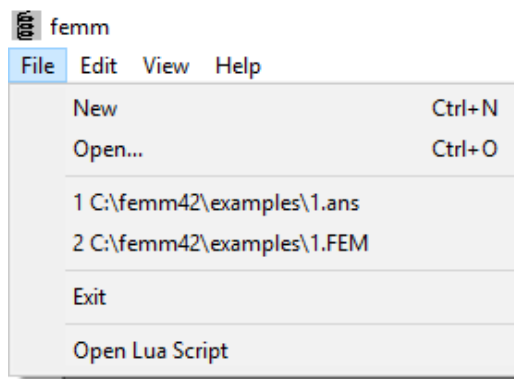


Рисунок 3 - Создание нового файла

Выберем тип задачи: расчёт магнитного поля (рис.4).

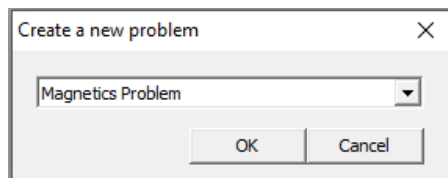


Рисунок 4 - Выбор типа задачи

Выбрав вкладку «проблема», зададим основные параметры исследуемой задачи, как показано на рисунке 5.

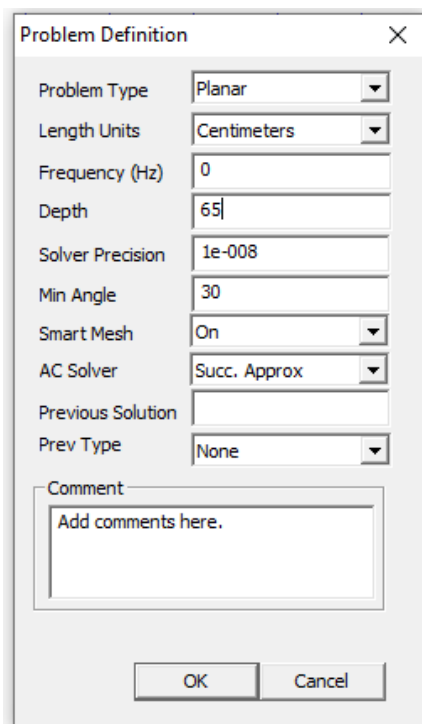



Рисунок 5 - Основные параметры задачи

Теперь создадим на рабочем поле проводник с током. Для этого поставим две точки, выбрав инструмент «точка» () и нажав «пробел» на рабочем поле., либо, нажав клавишу <ТАВ> и задав точки, как показано на рисунке 6

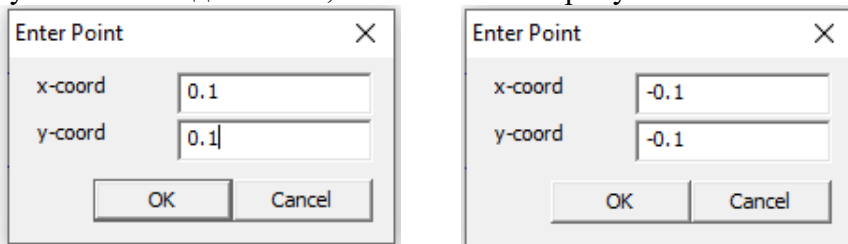



Рисунок 6 - Значения точек

Далее выберем инструмент «дуга» () и, выбрав обе точки, введём во всплывающем окне показанные на рисунке 7 ниже параметры.

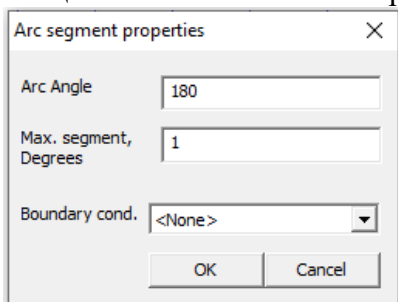


Рисунок 7 - Параметры для дуги

В результате получим срез проводника с током (рис.8).

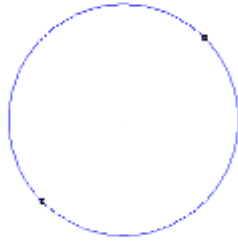


Рисунок 8 - Срез проводника с током

Далее откроем меню настройки электрических контуров, нажав **Properties**, а затем **Circuits**, как показано на рисунке 9.

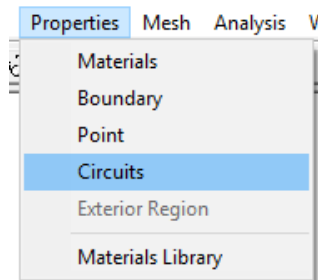


Рисунок 9 - Меню настройки электрических контуров

В открывшемся окне нажмём **Add Property**, как показано на рисунке 10.

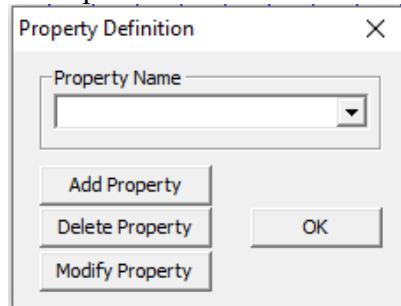


Рисунок 10 - Добавление электрического контура

Зададим силу тока 50 Ампер (рис.11).

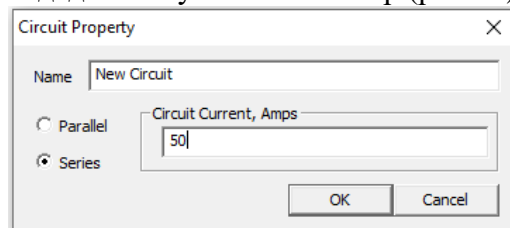


Рисунок 11 - Добавление контура с силой тока 50А

Далее откроем меню настройки материалов, нажав **Properties**, а затем **Materials Library**. Алгоритм показан ниже, на рисунке 12.

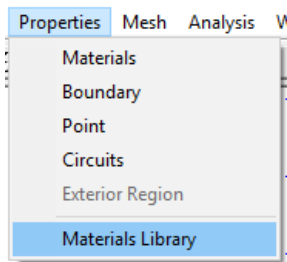




Рисунок 12 - Открытие библиотеки материалов

В открывшемся меню перенесём в правую часть материалы  Air и  12 AWG , как показано на рисунке 13.

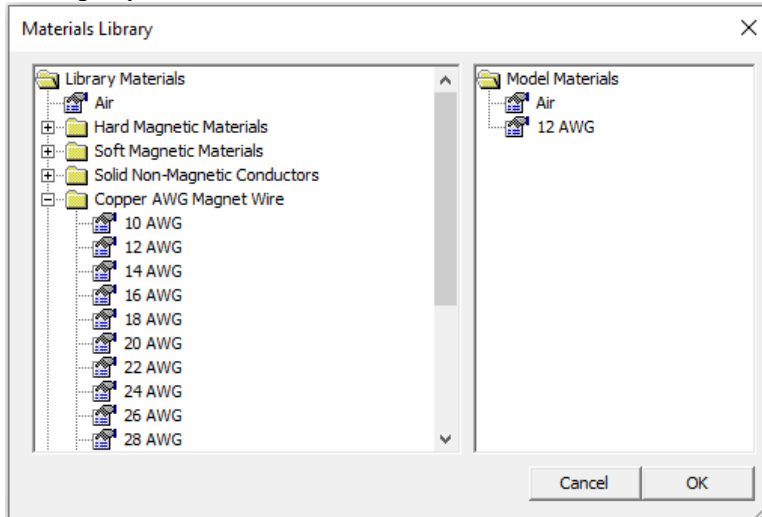


Рисунок 13 - Добавление материалов


Теперь используем инструмент создания материала (). Создадим с его помощью точку в круге, построенном ранее, а другую – за его пределами. Результат изображен на рисунке 14.



Рисунок 14 - Построение точек

Выбрав точку правой кнопкой мыши и нажав «пробел» зададим параметры. В **Block type** нужно выбрать **12 AWG** , поставить галочку в строчке **Let Triangle choose Mesh Size** . Для точки внутри круга (рис.15).

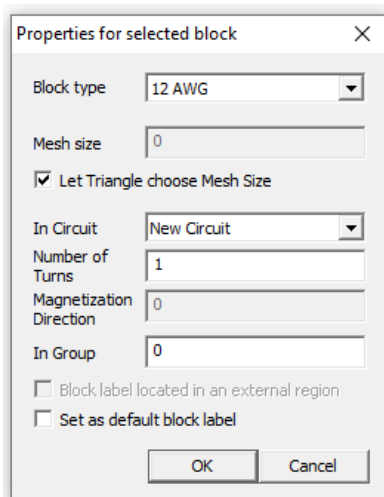


Рисунок 15 - Свойства для внутренней точки

Для точки снаружи контура выбрать в **Block type** пункт **Air** и поставить галочку в **Let Triangle choose Mesh Size**, как показано на рисунке

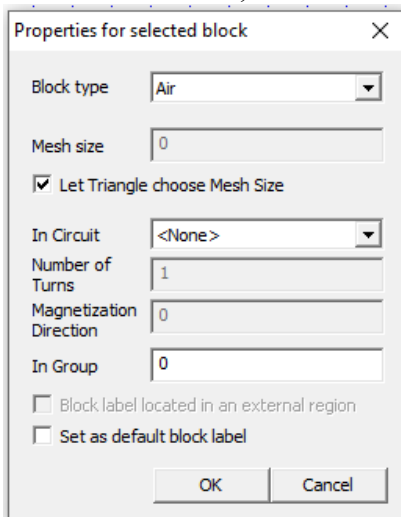



Рисунок 16- Свойства для наружной точки

Теперь модель готова к построению. Необходимо сохранить файл.

Используя  кнопку на панели инструментов, создадим границы рабочей области. Зададим параметры, как на рисунке 17.

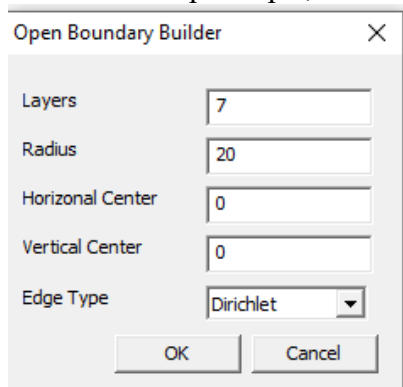


Рисунок 17 - Свойства границ

Подтвердив параметры, увидим, что рабочая область построена вокруг проводника (рис.18).

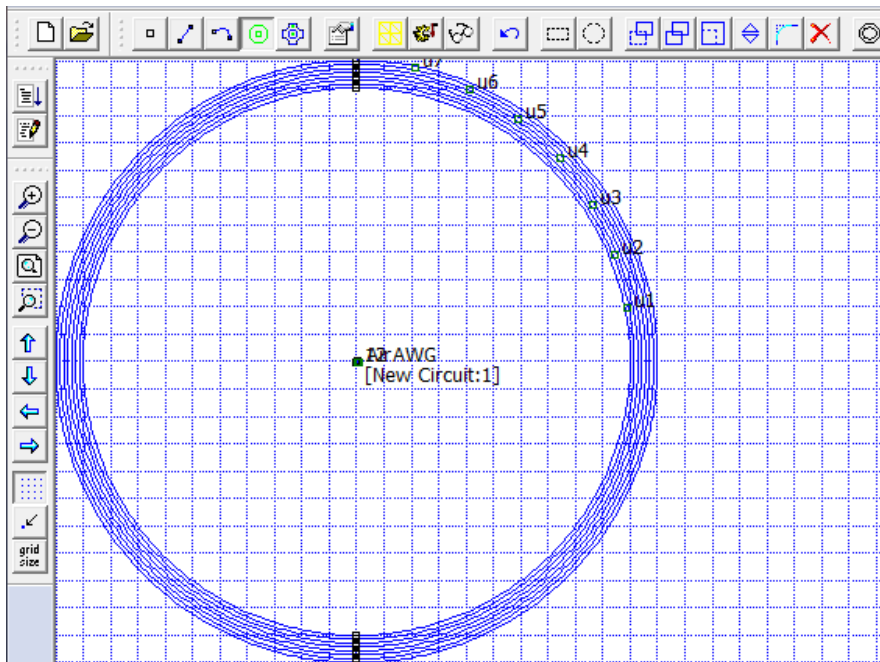


Рисунок 18 - Рабочая область вокруг проводника

Используя  кнопку, создадим модель, как показано на рисунке 19.

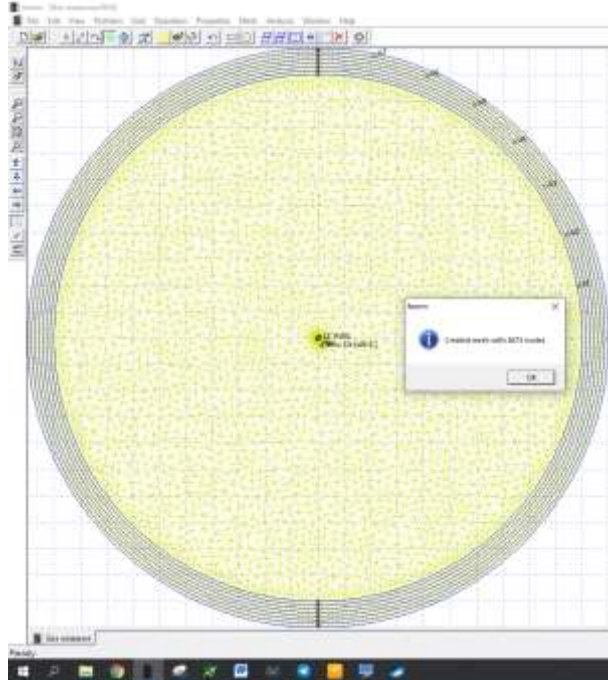




Рисунок 19 - Генерация сетки

С помощью  кнопки выполним расчёт модели. Нажав  кнопку, перейдём к просмотру результатов.

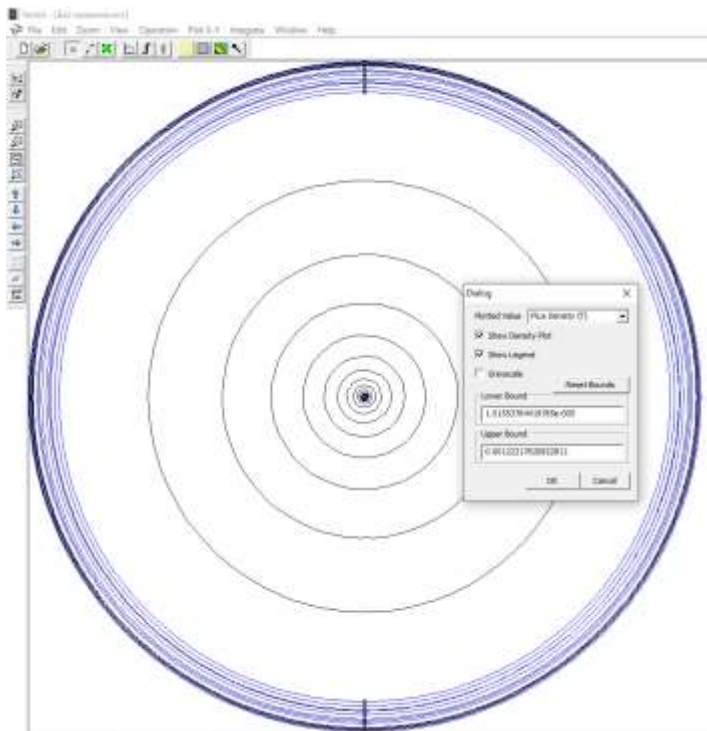



Рисунок 20 - Расчет модели

Нажав  кнопку, настроим вид. Указав параметры, приведённые на рисунке 34, получим рисунок 21.

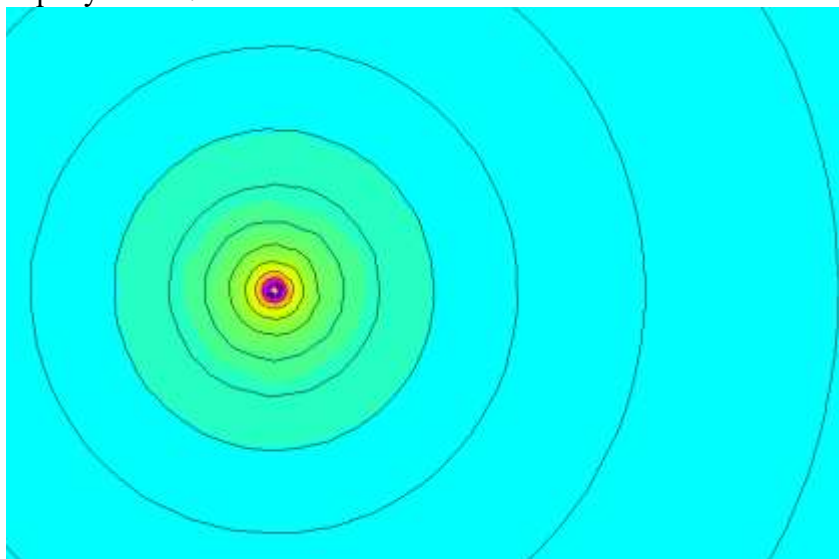



Рисунок 21 - Градиент результатов

Используя инструмент «линия» , с помощью кнопки «пробел» создадим точки с координатами, представленными на рисунке 22.

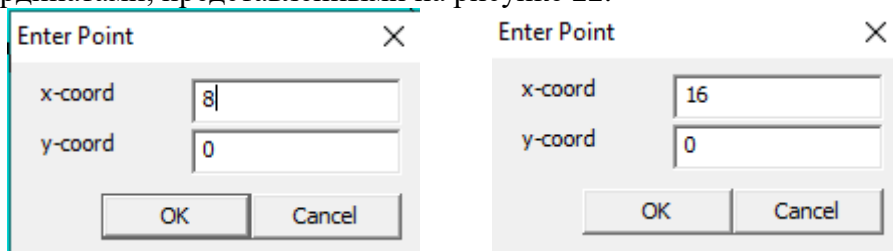


Рисунок 22 - Параметры новых точек

Таким образом, построили линию между точками с указанными координатами. Нужно щёлкнуть на значок интеграла \int . Выберем рассчитываемую величину, как на рисунке 23.

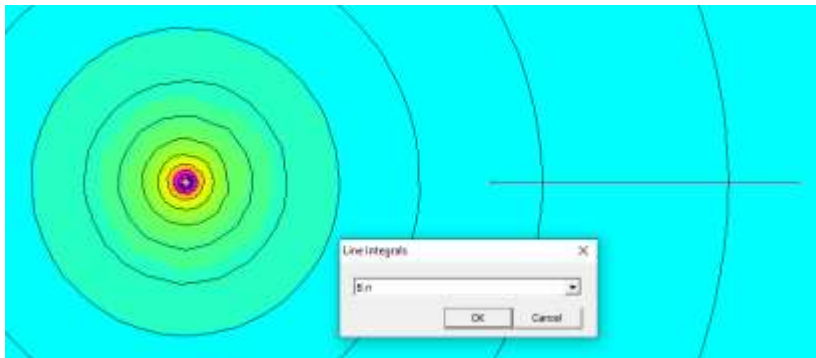


Рисунок 23 - Тип линий интеграла

Подтвердив выбор, получим результат вычисления, представленный на рисунке 24.

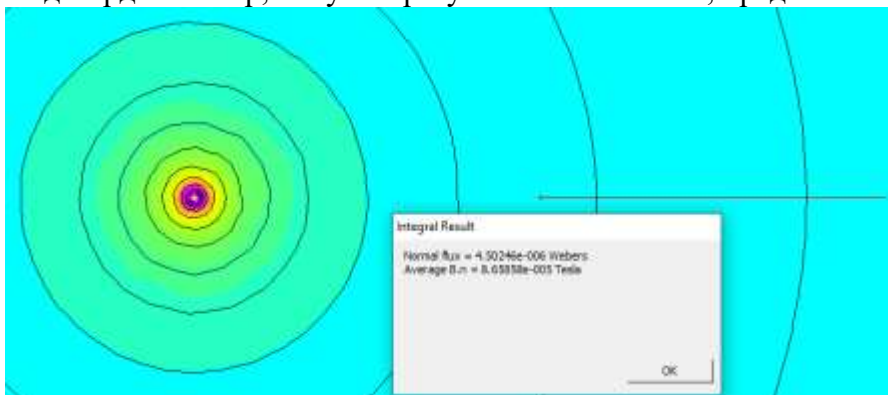


Рисунок 24 - Результат интегрирования

Как видим, программа так же показала магнитный поток, равный 4,5 мкВб.

Пример 2. Определить индукцию B и напряженность H магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей $N=200$ витков, идет ток $I=5$ А. Внешний диаметр d_1 тороида равен 30 см, внутренний $d_2=20$ см.

Решение. Для определения напряженности магнитного поля внутри тороида вычислим циркуляцию вектора \mathbf{H} вдоль линии магнитной индукции поля: $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l}$.

Из условия симметрии следует, что линии магнитной индукции тороида представляют собой окружности и что во всех точках этой линии напряженности одинаковы. Поэтому в выражении циркуляции напряженность H можно вынести за знак интеграла, а интегрирование проводить в пределах от нуля до 2π , где r — радиус окружности, совпадающей с линией индукции, вдоль которой вычисляется циркуляция, т. е.

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = H \int_0^{2\pi} dl = 2\pi r H. \quad (1)$$

С другой стороны, в соответствии с законом полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, охватываемых контуром, вдоль которого вычисляется циркуляция:

$$\oint_L \mathbf{H}_i d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$2\pi rH = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (2)$$

Линия, проходящая вдоль тороида, охватывает число токов, равное числу витков тороида. Сила тока во всех витках одинакова. Поэтому формула (3) примет вид $2\pi rH = NI$, откуда

$$H = \frac{NI}{2\pi r}. \quad (4)$$

Для средней линии тороида $r = 1/2(R_1 + R_2) = 1/4(d_1 + d_2)$. Подставив это выражение r в формулу (4), найдем

$$H = \frac{2NI}{\pi(d_1 + d_2)}. \quad (5)$$

Магнитная индукция B_0 в вакууме связана с напряженностью поля соотношением $B_0 = \mu_0 H$. Следовательно,

$$B_0 = \frac{2\mu_0 NI}{\pi(d_1 + d_2)}, \quad (6)$$

Подставив значения величин в выражения (5) и (6), получим:
 $H = 1,37$ кА/м, $B_0 = 1,6$ мТл.

Пример 3. Чугунное кольцо имеет воздушный зазор длиной $l_0 = 5$ мм. Длина l средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков N содержит обмотка на кольце, если при силе тока $I = 4$ А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл? Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре можно пренебречь. Явление гистерезиса не учитывать.

Решение. Пренебрегая рассеянием магнитного потока, мы можем принять, что индукция поля в воздушном зазоре равна индукции поля в чугуне. На основании закона полного тока запишем

$$IN = Hl + H_0 l_0.$$

По графику (см. рис. 24.1) находим, что при $B = 0,5$ Тл напряженность H магнитного поля в чугуне равна 1,2 кА/м. Так как для воздуха $\mu = 1$, то напряженность поля в воздушном зазоре

$$H_0 = B\mu_0 = 0,4 \text{ МА/м.}$$

Искомое число витков

$$N = (Hl + H_0 l_0) / I = 800.$$

Задание 1 Из приведенного ниже списка выберите три задачи (одну из каждого раздела) и решите их аналитически.

Задание 2 Одну из решенных вами задач решите численно, применяя свободное программное обеспечение на основе метода конечных элементов FEMM.

Задачи

Магнитный поток

1. Найти магнитный поток Φ , создаваемый соленоидом сечением $S = 10 \text{ см}^2$, если он имеет $n = 10$ витков на каждый сантиметр его длины при силе тока $I = 20$ А.

2. Плоский контур, площадь S которого равна 25 см^2 , находится в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,04$ Тл. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий контур, если плоскость его составляет угол $\beta = 30^\circ$ с линиями индукции.

3. При двукратном обводе магнитного полюса вокруг проводника с током $I = 100$ А была совершена работа $A = 1$ мДж. Найти магнитный поток Φ , создаваемый полюсом.

4. Соленоид длиной $l = 1$ м и сечением $S = 16 \text{ см}^2$ содержит $N = 2000$ витков. Вычислить потокосцепление Ψ при силе тока I в обмотке 10 А.

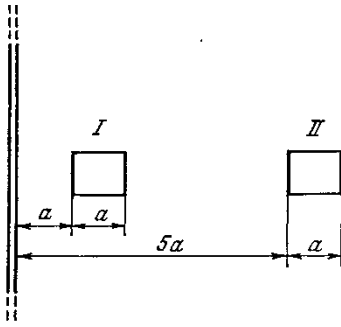


Рис. 24.5

5. Плоская квадратная рамка со стороной $a=20$ см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I=100$ А. Рамка расположена так, что ближайшая к проводу сторона параллельна ему и находится на расстоянии $l=10$ см от провода. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий рамку.

6. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие рамку при двух ее положениях относительно прямого проводника с током, представленных на рис. 24.5.

7. Квадратная рамка со стороной длиной $a=20$ см расположена в одной плоскости с прямым бесконечно длинным проводом с током. Расстояние l от провода до середины рамки равно 1 м. Вычислить относительную погрешность, которая будет допущена при расчете магнитного потока, пронизывающего рамку, если поле в пределах рамки считать однородным, а магнитную индукцию — равной значению ее в центре рамки.

8. Тороид квадратного сечения содержит $N=1000$ витков. Наружный диаметр D тороида равен 40 см, внутренний $d=20$ см. Найти магнитный поток Φ в тороиде, если сила тока I , протекающего по обмотке, равна 10 А.

Указание. Учесть, что магнитное поле тороида неоднородно.

Магнитная индукция в ферромагнетике

9. Железный сердечник находится в однородном магнитном поле напряженностью $H=1$ кА/м. Определить индукцию B магнитного поля в сердечнике и магнитную проницаемость μ железа*.

10. На железное кольцо намотано в один слой $N=500$ витков провода. Средний диаметр d кольца равен 25 см. Определить магнитную индукцию B в железе и магнитную проницаемость μ железа*, если сила тока I в обмотке: 1) 0,5 А; 2) 2,5 А.

11. Замкнутый соленоид (тороид) со стальным сердечником* имеет $n=10$ витков на каждый сантиметр длины. По соленоиду течет ток $I=2$ А. Вычислить магнитный поток Φ в сердечнике, если его сечение $S=4$ см².

12. Определить магнитодвижущую силу F_m необходимую для получения магнитного потока $\Phi=0,3$ мВб в железном* сердечнике замкнутого соленоида (тороида). Длина l средней линии сердечника равна 120 см, площадь сечения $S=2,5$ см².

13. Соленоид намотан на чугунное* кольцо сечением $S=5$ см². При силе тока $I=1$ А магнитный поток $\Phi=250$ мкВб. Определить число n витков соленоида, приходящихся на отрезок длиной 1 см средней линии кольца.

Магнитные цепи

14. Электромагнит изготовлен в виде тороида. Сердечник тороида со средним диаметром $d=51$ см имеет вакуумный зазор длиной $l_0=2$ мм. Обмотка тороида равномерно распределена по всей его длине. Во сколько раз уменьшится индукция магнитного поля в зазоре, если, не изменяя силы тока в обмотке, зазор увеличить в $n=3$ раза? Рассеянием магнитного поля вблизи зазора пренебречь. Магнитную проницаемость μ сердечника считать постоянной и принять равной 800.

15. Определить магнитодвижущую силу F_m необходимую для создания магнитного поля индукцией $B=1,4$ Тл в электромагните с железным* сердечником длиной $l=90$ см и воздушным промежутком длиной $l_0=5$ мм. Рассеянием магнитного потока в воздушном промежутке пренебречь.

В железном* сердечнике соленоида индукция $B=1,3$ Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной.

17. Стальной * сердечник тороида, длина l которого по средней линии равна 1 м, имеет вакуумный зазор длиной $l_0 = 4$ мм. Обмотка содержит $n = 8$ витков на 1 см. При какой силе тока I индукция B в зазоре будет равна 1 Тл?

18. Обмотка тороида, имеющего стальной * сердечник с узким вакуумным зазором, содержит $N = 1000$ витков. По обмотке течет ток $I = 1$ А. При какой длине l_0 вакуумного зазора индукция B магнитного поля в нем будет равна 0,5 Тл? Длина l тороида по средней линии равна 1 м.

19. Определить магнитодвижущую силу, при которой в узком вакуумном зазоре длиной $l_0 = 3,6$ мм тороида с железным * сердечником, магнитная индукция B равна 1,4 Тл. Длина l тороида по средней линии равна 0,8 м.

20. Длина l чугунного * тороида по средней линии равна 1,2 м, сечение $S = 20$ см². По обмотке тороида течет ток, создающий в узком вакуумном зазоре магнитный поток $\Phi = 0,5$ мВб. Длина l_0 зазора равна 8 мм. Какова должна быть длина зазора, чтобы магнитный поток в нем при той же силе тока увеличился в два раза?

(*Для определения магнитной проницаемости воспользоваться графиком (см. рис. 24.1). Явление гистерезиса не учитывать.)

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

Подбор заданий и проектирование соленоида, моделирование создаваемого им магнитного поля в программной среде FEMM

Цель работы: отработка навыков моделирования и расчёта физических параметров электромагнитных компонентов в программной среде FEMM, а также получение представлений о пространственном распределении магнитного поля высокочастотного соленоида.

Программное обеспечение: FEMM ([Finite Element Method Magnetics](#)).

Теоретическое введение

Программа Finite Element Method Magnetics (магнитные расчеты способом конечных элементов, сокращенно FEMM) позволяет проводить на персональных компьютерах расчет плоскомеридианных (осесимметричных) и плоскопараллельных стационарных/квазистационарных магнитных, а также стационарных электростатических полей. Пакет позволяет определять их цепные и полевые параметры и строить картины. Преимуществами рассматриваемого ПО также является лёгкость освоения. Автор программы – Дэвид Микер [1].

Основная часть программы состоит из трех модулей: графического препроцессора, решателя и графического постпроцессора. Работа с пакетом при разработке новой модели начинается с запуска препроцессора. Первый этап – геометрические построения исследуемых объектов в полярных или декартовых координатах. Геометрия объекта также может быть импортирована из сторонних графических пакетов, таких как CorelDraw или AutoCAD. Второй этап – задание для частей/блоков объекта свойств материалов (в том числе кривых намагничивания) и ввод граничных условий (Дирихле, Неймана, смешанных, для границ со скин-эффектом, периодичности и антипериодичности, специальных). После этого начинается автоматическая работа решателя, обчисляющего параметры модели и строящего сетку конечных элементов. После окончания расчетов запускается

постпроцессор, при этом создаются зонные картины полей: для стационарного магнитного поля – линий магнитного потока, для квазистационарного – линий действительного значения векторного магнитного потенциала. Параметры полей можно просмотреть в любой точке области, а в определенных зонах оценить ряд интегральных величин: магнитных потоков, индуктивностей, магнитных напряжений и т.д [2].

Использование программного пакета FEMM для расчёта параметров магнитного поля

В данном разделе будет подробно описан пошаговый алгоритм работы в программной среде FEMM на примере задачи моделирования магнитного поля соленоида и определения параметров производимого им магнитного поля.

1 Создание файла и задание начальных условий

1.1 Запускаем программу. Создаём новый файл:

File > new

1.2 Открывается окно выбора задачи. Выбираем «Magnetic problem» для исследования параметров магнитного поля.

1.3 Выберем тип задачи. Она может быть планарной или аксиальной. В первом случае все объекты располагаются в плоскости экрана и продолжают на некоторое расстояние перпендикулярно этой плоскости. Во втором – являются телами вращения относительно оси Y, проходящей через 0. В данном случае выбираем аксиальный тип задачи. Единица измерения – миллиметры. Частоту примем равной 100000 герц (100 кГц – стандартная частота работы большинства современных DC/DC преобразователей [3]).

*Problem > Problem Type > Axisymmetric
Length Units > Millimeters
Frequency (Hz) > 100000*

2 Построение геометрии модели

2.1 На панели инструментов выберем инструмент «точка». В левом нижнем углу экрана указаны координаты курсора. При нажатии левой кнопки мыши на рабочем пространстве будет поставлена точка. Правой кнопкой выбирается точка, находящаяся ближе других к курсору. Нажатием Esc выделение отменяется. При нажатии кнопки Tab открывается окно редактирования параметров выбранной точки, либо окно создания новой точки (если ни одна точка не выбрана). Нажатием Delete можно удалить выбранную точку. Стрелками можно передвигаться по рабочему полю.

2.2 Создадим границу сечения соленоида. Для создания точки нажмём кнопку «Tab». Откроется окно, в котором необходимо задать её положение. Изначально указаны координаты курсора в момент нажатия кнопки. Координата «Z» обозначает положение точки вдоль оси вращения. Координата «R» - расстояние между точкой и осью вращения. Создадим точки с координатами:


$$R = 5, Z = 15$$

$$R = 5, Z = 5$$

$$R = 7, Z = 15$$

$$R = 7, Z = 5$$

Для более удобного просмотра созданных точек рекомендуется сместить рабочую область, воспользовавшись кнопками масштабирования и перемещения на панели инструментов слева рабочего окна.

Выберем на верхней панели инструмент «линия» . Для соединения двух точек следует нажать левой кнопкой мыши на каждую из них. С помощью инструмента «линия» соединим четыре точки в прямоугольник.

Возможные проблемы [4]:

А) Поставленная точка не видна.

Причина: пользователь поставил точку за пределами рабочего поля.


Решение: стрелками переместить рабочую область к координатам точки. Выделив точку правой кнопкой мыши, можно переместить точку нажатием кнопки «Tab» или удалить её, нажав «Delete».

Б) При постановке новой точки удаляется одна из созданных ранее.

Причина: пользователь нажал «Tab», не сняв выделение с одной из точек. В таком случае программа не создаёт новую точку, а переносит выделенную по заданным координатам.

Решение: снять выделение со всех точек на рабочем поле. Это можно сделать повторным нажатием правой кнопки мыши, либо кнопкой «Esc».

2.3 Зададим границу рабочей области. Программа FEMM проводит расчёт по методу конечных элементов, поэтому для корректного функционирования необходимо создать границы рабочей области.

Для создания границы нажмём кнопку  на верхней панели инструментов. Откроется рабочее окно, в котором можно указать число слоёв (большее число слоёв соответствует большей точности расчёта магнитного поля), радиус рабочей области, а также координаты её центра и тип границы.

В открывшемся окне зададим параметры согласно рисунку 26.

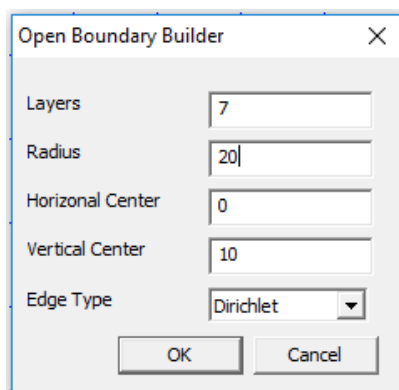


Рисунок 26 - Окно настройки рабочей области

2.4 Зададим параметры используемых электрических контуров. Для симуляции электромагнитных явлений создадим в программе электрический контур (в дальнейшем к нему можно будет отнести элементы, состоящие из проводящего материала). Программа будет считать, что по таким фрагментам идёт ток в

соответствии с указанными настройками и рассчитывать соответствующее магнитное поле. Для настройки электрических контуров вызовем соответствующее окно, выбрав в верхнем меню:

Properties > Circuits


Появится диалоговое окно «Property definition». Нажмём кнопку «Add property» (добавить свойство). В появившемся окне можно задать имя контура, а также протекающий по нему ток в амперах. Направление тока можно указать, меняя знак тока (положительный или отрицательный). При положительном токе его направление будет «от наблюдателя», а при отрицательном – «к наблюдателю». Зададим силу тока в 2 ампера.

Circuit Current, Amps > 2

2.5 Выберем используемые для моделирования материалы. При моделировании соленоида нам потребуется воздух и медный провод. Добавим используемые материалы из библиотеки. Перейдём в библиотеку материалов:

Properties > Materials Library

Откроется окно выбора материала. Переместим в правую часть материал «air» (воздух). Из папки Copper AWG Magnet Wire (медный провод, диаметр которого указан в американской системе) выберем AWG26, соответствующий диаметру 0,4 мм.

2.6 Присвоим используемые материалы соленоиду, а также пространству вокруг него. При помощи инструмента . Поставим точку внутри прямоугольника, а другую – за его пределами. Выбрав точку правой кнопкой мыши, нажмём «пробел» для перехода к редактированию свойств точки. После нажатия клавиши откроется диалоговое окно «Properties for selected block».

В графе «Block type» выберем используемый материал. Для точки вне прямоугольника это будет воздух («Air»). Таким образом, всё пространство кроме прямоугольной области имеет физические свойства воздуха.

Выбрав точку в прямоугольнике, выберем в графе «Block type» материал: 26AWG. Это означает, что прямоугольник станет телом вращения относительно оси Z (то есть тороидом), и будет состоять из медных проводников, диаметром 0,4 мм. В графе «In circuit» зададим принадлежность к созданному ранее контуру «New circuit», по которому протекает ток в 2 ампера.


Параметр «number of turns» обозначает число витков, образующих катушку. Зададим значение 100.


В результате этого шага получаем кольцо из медных проводников (электромагнитную катушку – соленоид), состоящую из 100 витков медного провода диаметром 0,4мм, по которой протекает ток в 2 ампера.

Сохраним полученный результат, выбрав в верхнем меню:


File > save as


3 Расчёт физической модели соленоида


Программа FEMM способна рассчитать плотность и направление магнитного поля [5]. Для этого необходимо составить физическую модель рабочей области нажатием кнопки  на верхней панели инструментов. После этого программа проведёт расчёт физики и сможет приступить к моделированию магнитных полей.

После готовности физической модели (рабочее поле покрывается жёлтыми многоугольниками) можно запустить анализ магнитных полей кнопкой  на верхней панели инструментов. Расчёт может занимать значительное время в зависимости от заданной точности и сложности расчёта.

4 Настройка параметров отображения скалярных величин

После завершения анализа можно перейти к просмотру результатов. Для этого на верхней панели инструментов выберем . Открывается раздел программы, предназначенный для просмотра результатов. Смоделированный соленоид изображён в виде прямоугольника с силовыми линиями, показывающими распределение магнитного поля.

В режиме просмотра верхняя панель одержит другой набор инструментов. Кнопки  открывают окна, отвечающие за режим просмотра. Первая из них позволяет настроить отображение силовых линий, вторая – распределения плотности магнитного поля, а третья – отображение параметров в векторной форме.

Для более наглядного представления магнитного поля можно перейти в настройки отображения, нажав кнопку . Откроется диалоговое окно, содержащее параметры отображения (рис. 27).

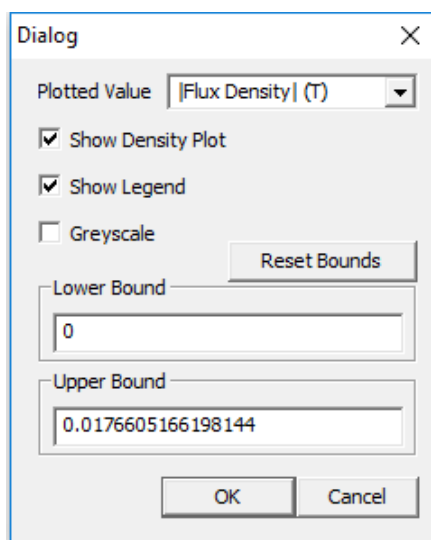


Рисунок 27 – окно настройки отображения модели

В графе «Plotted Value» выбирается физическая величина, распределение которой будет представлено графически. Это может быть:

I Flux Density I – Плотность магнитного поля (Тл);

I Re (Flux Density) I – Реальная составляющая плотности магнитного поля (Тл);

I Im (Flux Density) I – Мнимая составляющая плотности магнитного поля (Тл);

I Field Intensity I – Напряжённость магнитного поля (А/м);

I Re (Field Intensity) – Реальная составляющая напряжённости магнитного поля (А/м);

I Im (Field Intensity) – Мнимая составляющая напряжённости магнитного поля (А/м);

I Current Density I – Плотность тока (А/мм²);

I Re (Current Density) I – Реальная составляющая плотности тока (А/мм²);

I_{Im} (Current Density) I – Мнимая составляющая плотности тока (А/мм²).

Установив галочку напротив пункта «Show density plot», можно получить цветовую картину в гамме от голубого до пурпурного, а при выборе пункта «Greyscale» - от белого до чёрного. Параметры «Lower Bound» и «Upper bound» определяют соответствие размерности выбранной величины и цветового диапазона. На рисунке 28 представлено изображение магнитного поля соленоида после выполнения описанных операций.

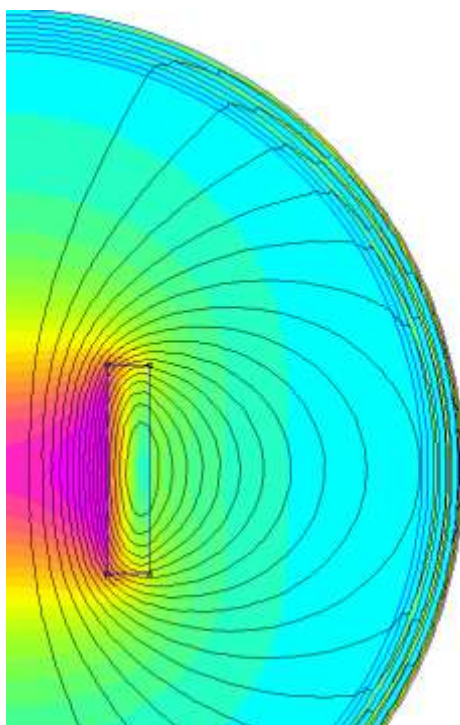





Рисунок 28 – Цветовая модель магнитного поля соленоида

При этом в правой части экрана показывается обозначение интервала плотности магнитного поля, в котором оно обозначается каждым конкретным цветом.

5 Настройка параметров отображения векторных величин

Для демонстрации возможностей отображения магнитного поля в векторном виде проведём настройку параметров.

Во всплывающем по нажатию кнопки  в окне «Contour plot options» отключим отображение силовых линий. Для этого снимем

галочку с пункта «real component of A». Нажав кнопку , отметим пункт «Greyscale». В меню  для отображения магнитного поля катушки в векторной форме и масштабирования вектора удобным образом выберем:

Vector Plot Type > *B_re*
Scaling_factor > 3

Отображение магнитного поля в окне программы после произведённых настроек представлено на рисунке 29.

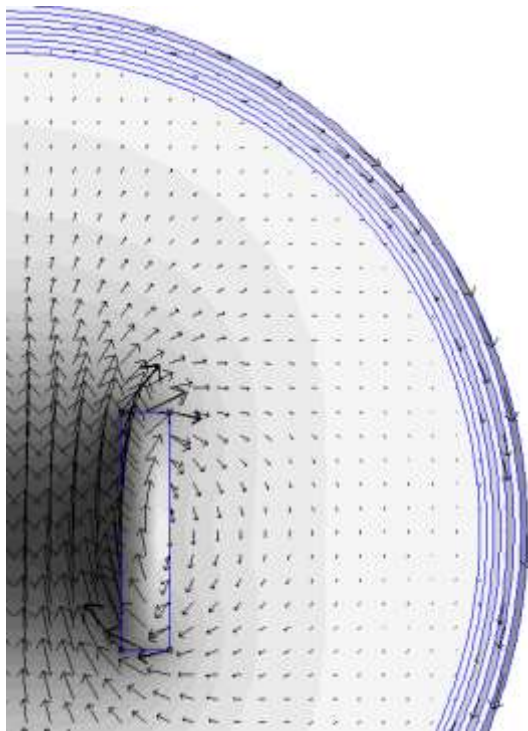


Рисунок 29 – отображение магнитного поля соленоида в векторной форме

Стрелками указано направление вектора магнитного поля, а цветом заливки и размерами стрелок – его интенсивность.

Подобным образом в векторной форме можно отобразить:

B_re – Реальную составляющую индукции (Тл);

B_im – Мнимую составляющую индукции (Тл);

H_re – Реальную составляющую напряжённости поля (А/м);

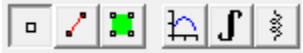
H_im – Мнимую составляющую напряжённости поля (А/м);

B_re & *B_im* – полную индукцию (Тл);


H_re & *H_im* – полную напряжённость поля (А/м).

Для отображения интересующего параметра следует выбрать его в окне «Vector Plot Options».

6 Определение параметров физических величин в заданной точке

Кнопки  используются для вывода информации о параметрах магнитного поля и материала. Первая из них – инструмент «точка». Выбрав его, можно измерить параметры магнитного поля в определённой точке. Для этого следует включить опцию:

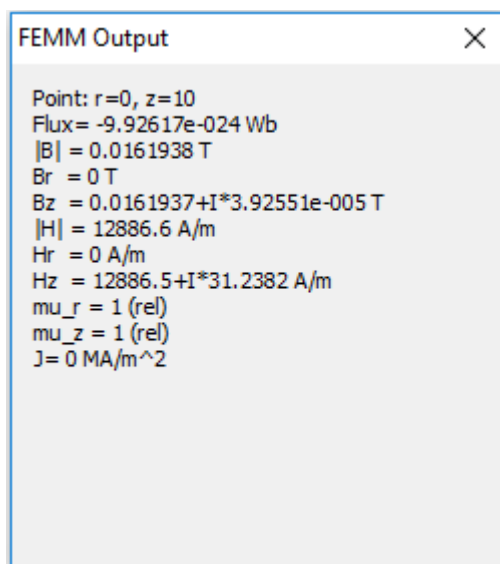
View > output window

После этого появится диалоговое окно, в котором отображаются параметры магнитного поля в заданной точке. Для выбора точки измерения следует воспользоваться инструментом «точка»  на верхней панели. После этого достаточно нажать левой кнопкой мыши на участке рабочей области или нажать клавишу «Tab» для точного выбора координат.

В качестве примера определим модуль индукции магнитного поля в центре полученной катушки. Для этого выберем инструмент «точка» и нажмём клавишу «Tab», затем введём координаты центра катушки:

$$r = 0;$$
$$z = 10.$$

После этого в окне FEMM Output будут выведены параметры, представленные на рисунке 30.



```
FEMM Output
Point: r=0, z=10
Flux= -9.92617e-024 Wb
|B| = 0.0161938 T
Br = 0 T
Bz = 0.0161937+I*3.92551e-005 T
|H| = 12886.6 A/m
Hr = 0 A/m
Hz = 12886.5+I*31.2382 A/m
mu_r = 1 (rel)
mu_z = 1 (rel)
J= 0 MA/m^2
```

Рисунок 30 – Значения физических величин в центре смоделированного соленоида

В данном окне отображаются:

Point – координаты точки измерения (измеряются в выбранных изначально единицах);

Flux – магнитный поток (Вб);

I B I – модуль магнитной индукции (Тл);

Br – радиальная составляющая индукции (перпендикулярно оси вращения) (Тл);

Bz – вертикальная составляющая индукции (параллельно оси вращения) (Тл);

I H I – модуль напряжённости магнитного поля (А/м);

Hr – радиальная составляющая напряжённости магнитного поля (А/м);

Hz – вертикальная составляющая напряжённости магнитного поля (А/м);

Mu_r – относительная магнитная проницаемость материала перпендикулярно оси вращения;




Mu_z – относительная магнитная проницаемость параллельно оси вращения;

J – плотность тока (А/мм²).

При измерении AWG проводника добавляется так же ещё один параметр:

Winding Fill – Процент заполнения пространства медью. Он обозначает, какая часть сечения приходится на металл, а какая – на свободное место между проводниками, которое неизбежно будет возникать из-за круглого сечения каждого отдельного провода.

7 Определение профиля распределения физических величин вдоль произвольно построенной линии

Следующий инструмент измерения – «линия» , используемый в паре с инструментами «график»  и «интеграл» . Первый из них позволяют оценить динамику изменения физической величины при изменении координаты. Для измерения сначала необходимо задать ломаную линию, которая станет осью «х» графика. Для её построения необходимо выбрать ряд точек. Есть три способа сделать это:

1. Нажатием левой кнопки мыши выбирается ближайшая к курсору геометрическая точка (например, контур обмотки созданного ранее соленоида);
2. Нажатием правой кнопки мыши точка ставится непосредственно под курсором;
3. Нажатием клавиши «Tab» можно задать точные координаты точки.

Для отмены созданной ранее точки следует нажать клавишу «Delete». Для отмены всей последовательности точек можно воспользоваться кнопкой «Esc».

После задания линии для построения профиля следует воспользоваться инструментом «график». Во всплывающем окне выбрать измеряемую величину из списка, а также количество точек в одном графике и стиль отображения. Возможно измерение следующих величин:

$Potential$ – Магнитный поток (Вб);

$I B I$ – Магнитная индукция (Тл);

B, n – Нормальная составляющая индукции (Тл);

B, t – Тангенциальная составляющая индукции (Тл);

$I H I$ – Напряжённость магнитного поля (А/м);

H, n – Нормальная составляющая напряжённости магнитного поля (А/м);

H, t – Тангенциальная составляющая напряжённости магнитного поля (А/м);

J_{eddy} – Плотность вихревых токов (токов Фуко) (А/мм²);

$J_s + J_{eddy}$ – Полная плотность тока, включающая в себя собственные токи контуров и вихревые токи в них (А/мм²).

В качестве примера изучим динамику изменения магнитной индукции от центра построенного соленоида к краю рабочей области. Для этого выберем инструмент «линия» и создадим две точки. Нажатием «Tab» зададим им координаты:

$$A (r = 0; z = 10);$$
$$B (r = 20; z = 10).$$

После этого рабочую область пересечёт красная линия, вдоль которой будет отображаться изменение выбранной физической величины. Нажав кнопку вывода графика, выберем во всплывающем меню *IBI (Magnitude of flux density)*. После подтверждения будет построен график, на котором по оси *x* указано расстояние вдоль линии от центра к краю соленоида, а по оси *y* – интенсивность магнитной индукции. На рисунке 31 представлен полученный график.

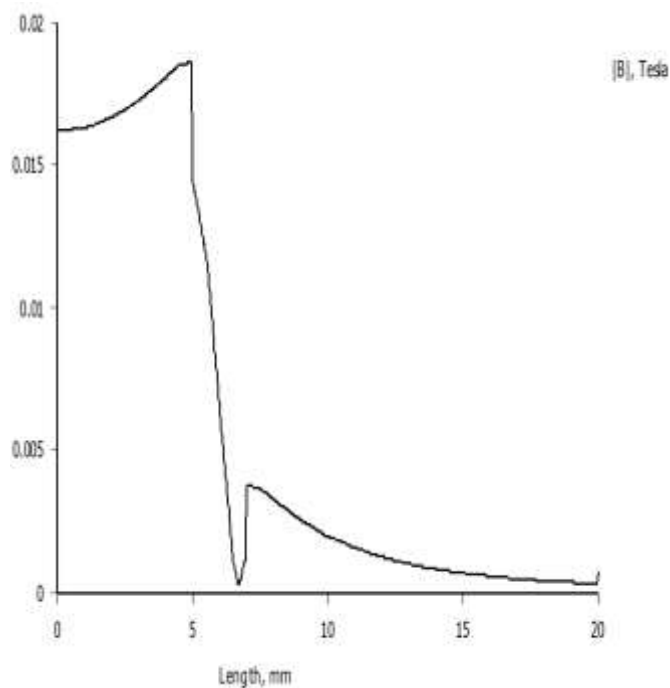




Рисунок 31 – Изменение интенсивности магнитного поля от центра соленоида к его краю

8 Нахождение интеграла физических величин по плоскости

После создания линии можно воспользоваться инструментом «интеграл». С помощью этого инструмента в сочетании с инструментом «линия» можно измерить следующие параметры:
V.n – Магнитный поток (Вб) и среднее значение индукции (Тл);
H.t – Магнитодвижущая сила (А*Виток) и среднее значение напряжённости магнитного поля (А/м);
Contour length – Длина линии (м) и площадь поверхности тела вращения этой линии (м²);
Force from Stress Tensor – Тензор напряжений (Н);
Torque from Stress Tensor – Момент вращения, вызванный тензором напряжений (Н*м²);
(*V.n*)² – Квадрат магнитного потока (Вб²) и среднего значения индукции (Тл²).

9 Нахождение интеграла физических величин по объёму

Следующая пара инструментов исследования – площадь  и интеграл . Для выбора площади следует выбрать левой кнопкой мыши ограниченный линиями контур. В данном случае таким контуром может быть сечение обмотки соленоида или воздух вокруг него. После выбора область окрасится зелёным. Для выбора всей рабочей области следует сделать двойной щелчок на любом объекте в её пределах. Для отмены выбора достаточно выбрать объект повторно или нажать «Esc».

После выбора площади можно выбрать инструмент «интеграл». В программе доступны следующие физические величины для измерения:

Magnetic field energy – Энергия магнитного поля (Дж);
Hysteresis, Laminated eddy, or Proximity effect – Потери на гистерезис, вихревые токи, эффект близости (Вт);
Resistive losses – Потери на сопротивление (Вт);
Block cross-section area – Площадь сечения (м²);
Total losses – Полные потери (Вт);
Total current – Суммарный ток (А);
Integral of B over block – Суммарная индукция (Тл*м);
Block volume – Объём тела вращения (м³);

Lorentz force ($J \times B$) – Сила Лоренца, Н;
Lorentz torque ($r \times J \times B$) – Момент вращения, вызванный силой Лоренца (только для планарного типа задач) (Н*м);
Magnetic field coenergy – Способность магнитного поля накапливать энергию (Дж);
Force via Weighted Stress Tensor – Сила тяжести, действующая на объект (Н);
Torque via Weighted Stress Tensor – Момент вращения, действующий на объект из-за силы тяжести (Н*м);
 R^2 (i.e. *Moment of Inertia / Density*) – Момент инерции/плотность (м⁵);
Total loss density – Плотность рассеяния энергии (Вт*м³).

В качестве примера проведем измерение суммарных потерь энергии в созданной обмотке, определим процентное соотношение между потерями на сопротивление и высокочастотными потерями (гистерезис, вихревые токи, эффект близости).


Проведя измерения, получаем следующие величины:

Потери на сопротивление: 0.92651 Ватт (17,6%)

Высокочастотные потери: 4.3455 Ватт (82,4%)

Как правило, на частотах выше 50 кГц доминирующую роль играют высокочастотные потери что подтверждается результатами моделирования.

10 Оценка параметров созданных электрических контуров

Для использования этой функции следует на верхней панели инструментов выбрать . В открывшемся меню будут доступны созданные ранее электрические контуры, а также следующие их параметры:

Total current – Ток в контуре (А);

Voltage Drop – Падение напряжения на контуре (В);

Flux Linkage – Магнитный поток через контур (Вб);

Flux/Current – Индуктивность (Тл);

Voltage/Current – Сопротивление (Ом);

Real Power – Активная мощность (Вт);

Reactive Power – Реактивная мощность (ВА);

Apparent Power – Полная мощность (ВА).

Задания для самостоятельной работы

Для усвоения и закрепления материала предлагается выполнить 9 задач, каждая из которых имеет 15 вариантов. При выполнении заданий следует использовать рисунок 7 и таблицу 1.

Задание 1. Выбрать аксиальный тип задачи, частота равна 100000 Гц, единица измерения – сантиметры. Радиус рабочей области 12, её центр расположен в точке с координатами $[0; 0]$.

Построить электромагнитную катушку согласно чертежу на рисунке 7. Исходные данные для построения выбрать из таблицы 1 согласно номеру варианта задания, учитывая, что r и z с индексами А, В, С и D – координаты соответствующих точек, I – сила тока в исследуемом контуре, N – число витков соленоида. В качестве материала обмотки использовать медный провод AWG26 (его диаметр равен 0,4 мм).

Задание 2. Определить модуль магнитной индукции в точке $[0,0]$.

Задание 3. Определить радиальную составляющую вектора индукции в точке $[4,4]$.

Задание 4. Определить магнитный поток, проходящий через окно катушки. Измерение проводить между точками $[0, 0]$ и $[r_A, 0]$.

Задание 5. Определить суммарную энергию генерируемого магнитного поля

Задание 6. Построить график изменения модуля индукции между точками $[0.1, -10]$ и $[0.1, 10]$.

Задание 7. Построить график изменения модуля индукции между точками $[0, 0]$ и $[12, 0]$.

Задание 8. Построить картину распределения напряжённости магнитного поля. Отображать в гамме от голубого до пурпурного, нижняя граница интервала 0, верхнюю границу определить автоматически. Отображение силовых линий оставить по умолчанию.

Задание 9. Определить падение напряжения на созданной катушке.

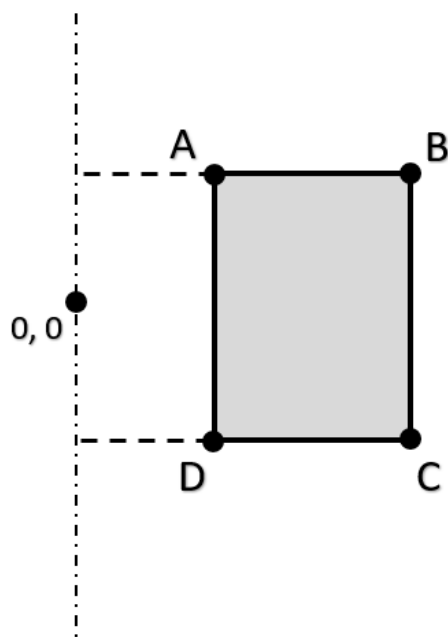


Рисунок 32 – Чертёж сечения обмотки соленоида с указанием точек для построения

Таблица 1 – Исходные данные для выполнения заданий

Номер варианта	A		B		C		D		I	N
	rA	zA	rB	zB	rC	zC	rD	zD		
1	2	2	4	2	4	-2	2	-2	2	200
2	1	3	2	3	2	-3	1	-3	2	200
3	4	1	6	1	6	-1	4	-1	2	200
4	2	2.5	2.5	2.5	2.5	-2.5	2	-2.5	2	200
5	1	0.5	5	0.5	5	-0.5	1	-0.5	2	200
6	2	2	4	2	4	-2	2	-2	4	150
7	1	3	2	3	2	-3	1	-3	4	150
8	4	1	6	1	6	-1	4	-1	4	150
9	2	2.5	2.5	2.5	2.5	-2.5	2	-2.5	4	150
10	1	0.5	5	0.5	5	-0.5	1	-0.5	4	150
11	2	2	4	2	4	-2	2	-2	5	100
12	1	3	2	3	2	-3	1	-3	5	100
13	4	1	6	1	6	-1	4	-1	5	100
14	2	2.5	2.5	2.5	2.5	-2.5	2	-2.5	5	100
15	1	0.5	5	0.5	5	-0.5	1	-0.5	5	100

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.

ПОДБОР ЗАДАНИЙ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СВОЙСТВ ДИЭЛЕКТРИКОВ И ИХ РЕШЕНИЕ

Основные формулы

• Диполь есть система двух точечных электрических зарядов равных по размеру и противоположных по знаку, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния r от центра диполя до точек наблюдения.

Вектор \mathbf{l} проведенный от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду, называется плечом диполя.

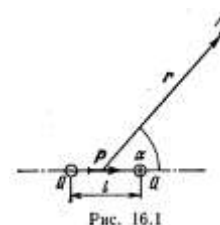
Произведение заряда $|Q|$ диполя на его плечо \mathbf{l} называется электрическим моментом диполя:

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l}.$$

- Напряженность поля диполя

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\alpha}$$

где p - электрический момент диполя; r - модуль радиуса-вектора, проведенного от центра диполя к точке, напряженность поля в которой нас интересует; α - угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и плечом \mathbf{l} диполя (рис. 1).



Напряженность поля диполя в точке, лежащей на оси диполя ($\alpha=0$), $E = \frac{P}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3}$

и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восставленном из его середины ($\alpha = \frac{\pi}{2}$),

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}.$$

- Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos\alpha..$$

Потенциал поля диполя в точке, лежащей на оси диполя ($\alpha=0$),

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восставленном из его середины ($\alpha = \pi/2$), $\varphi = 0$.

- Механический момент, действующий на диполь с электрическим моментом \mathbf{p} , помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью

- \mathbf{E} , $\mathbf{M} = [\mathbf{p}\mathbf{E}]$, или $M = pE \sin\alpha$,

где α - угол между направлениями векторов \mathbf{p} и \mathbf{E} .

В неоднородном электрическом поле кроме механического момента (пары сил) на диполь действует еще некоторая сила. В случае поля, обладающего симметрией относительно оси x , сила выражается соотношением

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos\alpha,$$

где $\frac{\partial E}{\partial x}$ - частная производная напряженности поля, характеризующая степень неоднородности поля в направлении оси x .

При $\alpha > \pi/2$ сила F_x положительна. Это значит, что под действием ее диполь вытягивается в область сильного поля.

- Поляризованность (при однородной поляризации)

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N p_i,$$

где p_i - электрический момент отдельной (i -й) молекулы (или атома); N - число молекул, содержащихся в объеме ΔV .

• Связь поляризованности с напряженностью E среднего макроскопического поля в диэлектрике

$$P = \alpha \varepsilon_0 E$$

где α - диэлектрическая восприимчивость; ε_0 - электрическая постоянная.

- Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью $\varepsilon = 1 + \alpha$
- Напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряженностью E_0 внешнего поля соотношениями $E = E_0/\varepsilon$ и $E = E_0 - P/\varepsilon_0$.
- Напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии выражается формулами

$$E_{\text{лок}} = E + \frac{1}{3} \frac{P}{\varepsilon_0} \text{ и } E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} E_0.$$

- Индуцированный электрический момент молекулы

$$p = \alpha \varepsilon_0 E_{\text{лок}},$$

где α - поляризуемость молекулы ($\alpha_e + \alpha_a$, где α_e - электронная поляризуемость; α_a - атомная поляризуемость).

- Связь диэлектрической восприимчивости с поляризуемостью молекулы $\alpha/(\alpha + 3) = \alpha n/3$

где n - концентрация молекул.

- Уравнение Клаузиуса - Мосотти

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n, \text{ или } \frac{M}{\rho} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha N_A,$$

где M - молярная масса вещества; ρ - плотность вещества.

- Формула Лоренц-Лорентца

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e n, \text{ или } \frac{M}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e N_A,$$

где n - показатель преломления диэлектрика; α_e - электронная поляризуемость атома или молекулы. Ориентационная поляризуемость молекулы

$$\alpha_{op} = p^2 / (3\varepsilon_0 \kappa T),$$

где p - электрический момент молекулы; κ - постоянная Больцмана; T - термодинамическая температура.

- Формула Дебая - Ланжевена

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 \kappa T} \right) n \text{ или } \frac{M}{\rho} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 \kappa T} \right) N_A.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Диполь с электрическим моментом $p=2$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=30$ кВ/м. Вектор \mathbf{p} составляет угол $\alpha=60^\circ$ с направлением силовых линий поля. Определить произведенную внешними силами работу A поворота диполя на угол $\beta=30^\circ$.

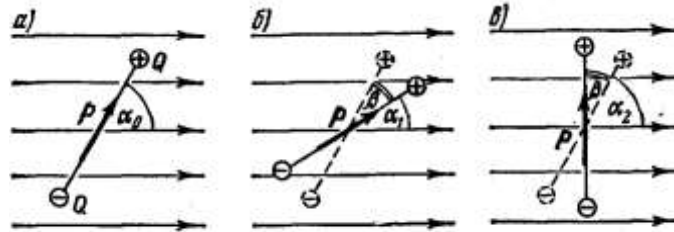


Рис. 16.2

Решение. Из исходного положения (рис. 2, а) диполь можно повернуть на угол $\beta=30^\circ=\pi/6$ двумя способами: или по часовой стрелке до угла $\alpha_1=\alpha_0-\beta=\pi/3-\pi/6=\pi/6$ (рис. 2, б), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2=\alpha_0+\beta=\pi/3+\pi/6=\pi/2$ (рис. 2, в).

В первом случае диполь будет повертываться под действием сил поля. Следовательно, работа внешних сил при этом отрицательна. Во втором случае поворот может быть произведен только под действием внешних сил, и, следовательно, работа внешних сил при этом положительна.

Работу, совершаемую при повороте диполя, можно вычислять двумя способами: 1) непосредственно интегрированием выражения элементарной работы; 2) с помощью соотношения между работой и изменением потенциальной энергии диполя в электрическом поле.

1-й способ. Элементарная работа при повороте диполя на угол α $dA=Md\alpha=pE \sin \alpha d\alpha$, а полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = pE \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим

$$A = -pE(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Работа внешних сил при повороте диполя по часовой стрелке

$$A_1 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) = -21.9 \text{ мкДж},$$

против часовой стрелки

$$A_2 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_2) = 30 \text{ мкДж}.$$

2-й способ. Работа A внешних сил связана с изменением потенциальной энергии $\Delta\Pi$ соотношением $A=\Delta\Pi=\Pi_2 - \Pi_1$, где Π_1 и Π_2 - потенциальные энергии системы соответственно в начальном и конечном состояниях. Так как потенциальная энергия диполя в электрическом поле выражается формулой $\Pi= -pE \cos \alpha$, то

$$A=pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha), \quad (2)$$

что совпадает с формулой (1), полученной первым способом.

Пример 2. Три точечных заряда Q_1 , Q_2 и Q_3 образуют электрически нейтральную систему, причем $Q_1=Q_2= 10$ нКл. Заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определить максимальные значения напряженности E_{\max} и потенциала ϕ_{\max} поля, создаваемого этой системой зарядов, на расстоянии $r= 1$ м от центра треугольника, длина a стороны которого равна 10 см.

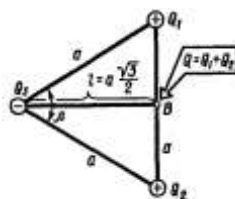


Рис. 16.3

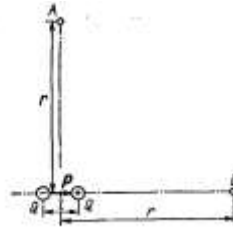


Рис. 16.4

Решение. Нейтральную систему, состоящую из трех точечных зарядов, можно представить в виде диполя. Действительно, "центр тяжести" зарядов Q_1 и Q_2 лежит на середине отрезка прямой: соединяющей эти заряды (рис. 3). В этой точке можно считать сосредоточенным заряд $Q=Q_1+Q_2=2Q_1$. А так как система зарядов нейтральная ($Q_1+Q_2+Q_3=0$), то $Q_3 = -(Q_1+Q_2) = -Q$.

Так как расстояние l между зарядами Q_3 и $-Q$, равными по значению, много меньше r ($l \ll r$) (рис. 4), то систему этих двух зарядов можно считать диполем с электрическим моментом

$$p = |Q|l,$$

где l - плечо диполя, равное по модулю $a\sqrt{3}/2$ (см. рис. 3). Так как $|Q|=2Q_1$, то электрический момент такого точечного диполя $p = Q_1 a \sqrt{3}$.

Тот же результат можно получить другим способом. Систему из трех зарядов представим как два диполя с электрическими моментами p_1 и p_2 (рис. 5), равными по модулю: $p_1 = |p_1| = Q_1 a$; $p_2 = |p_2| = Q_2 a$. Электрический момент p системы зарядов найдем как векторную сумму p_1 и p_2 , т.е. $p = p_1 + p_2$. Как это следует из рис. 5, имеем $p = 2p_1 \cos(\beta/2)$. Так как $p_1 = Q_1 a$ и $\beta = \pi/3$, то $p = 2Q_1 a \sqrt{3}/2 = Q_1 a \sqrt{3}$, что совпадает с найденным ранее значением.

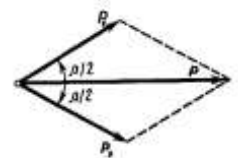


Рис. 16.5

Напряженность E и потенциал ϕ поля диполя выражаются формулами

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}; \quad \phi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha,$$

где α - угол между векторами p и r (см. рис. 1).

Напряженность и потенциал будут иметь максимальные значения при $\alpha=0$; следовательно,

$$E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \phi_{\max} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как $p = Q_1 a \sqrt{3}$, то

$$E_{\max} = \frac{2Q_1 a}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3}; \quad \phi_{\max} = \frac{Q_1 a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{3}.$$

Вычисления дают следующие значения:

$$E_{\max} = 3,12 \text{ В/м}; \quad \phi_{\max} = 1,56 \text{ В}.$$

Пример 3. В атоме йода, находящемся на расстоянии $r=1$ нм от альфа-частицы, индуцирован электрический момент $p = 1,5 \cdot 10^{-32}$ Кл·м. Определить поляризуемость α атома йода.

Решение. По определению поляризуемости, она может быть выражена по формуле $\alpha = p/\epsilon_0 E_{\text{лок}}$, где p - индуцированный электрический момент атома; $E_{\text{лок}}$ - напряженность локального поля, в котором этот атом находится.

В данном случае таким полем является поле, созданное α -частицей. Напряженность этого поля определяется выражением

$$E_{\text{лок}} = E = \frac{2|e|}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Подставив выражение $E_{\text{лок}}$ из равенства (2) в формулу (I), найдем

$$\alpha = 2\pi r^2 p / |e|.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим $\alpha = 5,9 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$.

Пример 4. Криптон находится под давлением $p=10$ МПа при температуре $T=200$ К, Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ϵ криптона; 2) его поляризованность P , если напряженность E_0 внешнего электрического поля равна 1 МВ/м. Поляризуемость α криптона равна $4,5 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$,

Решение. 1. Для определения диэлектрической проницаемости криптона воспользуемся уравнением Клаузиуса - Мосотти, записанным в виде

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n$$

где n - концентрация атомов криптона. Выразим из этой формулы диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon = \frac{1 + 2/3 \alpha n}{1 - 1/3 \alpha n}.$$

Так как концентрация молекул (атомов) связана с давлением и температурой соотношением $n = p / (\kappa T)$, то

$$\epsilon = \frac{1 + \frac{2}{3} \frac{\alpha p}{\kappa T}}{1 - \frac{1}{3} \frac{\alpha p}{\kappa T}}.$$

Выразив все величины, входящие в эту формулу, в единицах СИ ($\alpha = 4,5 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$, $p = 10 \text{ МПа} = 10^7 \text{ Па}$, $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, $T = 200 \text{ К}$) и произведя вычисления, получим $\epsilon = 1,17$

2. По определению, поляризованность

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i,$$

где \vec{p}_i - электрический дипольный момент, индуцированный в i -м атоме; N - число атомов в объеме ΔV . В однородном электрическом поле все \vec{p}_i совпадают по модулю и направлению, поэтому геометрическую сумму можно заменить на арифметическую. Обозначив $|\vec{p}_i| = p$, получим

$$P = \frac{Np}{\Delta V}$$

Отношение числа N атомов к объему ΔV есть концентрация n атомов. Тогда

$$P = np.$$

Так как электрический дипольный момент атома пропорционален напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля ($p = \alpha \epsilon_0 E_{\text{лок}}$), то поляризованность

$$P = \alpha \epsilon_0 n E_{\text{лок}}$$

Выразив $E_{\text{лок}}$ через напряженность E_0 внешнего поля ($E_{\text{лок}} = 3\epsilon E_0 / (\epsilon + 2)$) и n через давление p и температуру T ($n = p / \kappa T$), получим

$$P = \frac{3\alpha \epsilon_0 \epsilon p}{(\epsilon + 2)\kappa T} E_0.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления (при этом воспользуемся значением $\epsilon = 1,17$ найденным в п. 1 данного примера):

$$P = 1,60 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2 = 1,60 \text{ мкКл/м}^2.$$

Пример 5. Жидкий бензол имеет плотность $\rho=899$ кг/м³ и показатель преломления $n=1,50$. Определить: 1) электронную поляризуемость α_e молекул бензола; 2) диэлектрическую проницаемость ϵ паров бензола при нормальных условиях.

Решение. 1. Для определения электронной поляризуемости воспользуемся формулой Лоренц -Лорентца:

$$\frac{M}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e N_A,$$

откуда

$$\alpha_e = \frac{3M(n^2 - 1)}{\rho N_A (n^2 + 2)}. \quad (1)$$

В полученное выражение входит молярная масса M бензола. Найдем ее. Так как химическая формула бензола C_6H_6 , то относительная молекулярная масса $M_r=6 \cdot 12 + 6 \cdot 1 = 78$. Следовательно, молярная масса $M=78 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

Подставим в формулу (1) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$\alpha_e = \frac{3 \cdot 78 \cdot 10^{-3} [(1,50)^2 - 1]}{899 \cdot 6,02 \cdot 10^{23} [(1,50)^2 + 2]} \text{ м}^3 = 1,27 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3.$$

2. Диэлектрическую проницаемость паров бензола найдем, воспользовавшись уравнением Клаузиуса - Мосотти:

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n, \quad (2)$$

где n - концентрация молекул бензола.

Заметим, что молекулы бензола неполярны и поэтому обладают только двумя типами поляризации: электронной и атомной, причем атомная поляризация мала и ею можно пренебречь, считая $\alpha \approx \alpha_e$. Кроме того, при нормальных условиях ϵ мало отличается от единицы и приближенно можно считать $\epsilon + 2 \approx 3$. Учитывая эти соображения, формулу (2) можно упростить: $\epsilon - 1 \approx \alpha_e n$, откуда $\epsilon = 1 + \alpha_e n$.

При нормальных условиях концентрация n молекул известна и равна числу Лошмидта ($n_L = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Выразим концентрацию молекул бензола в СИ ($n = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$) и произведем вычисления:

$$\epsilon = 1 + 1,27 \cdot 10^{-28} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} = 1,00342.$$

Задание 1 Из приведенного ниже списка выберите семь задач (одну из каждого раздела) и решите их аналитически.

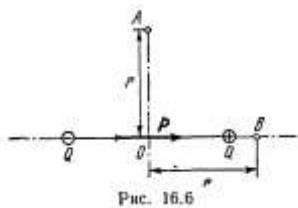
Задачи

Напряженность и потенциал поля диполя.

Электрический момент диполя

1. Вычислить электрический момент p диполя, если его заряд $Q=10$ нКл, плечо $l=0,5$ см.

2. Расстояние l между зарядами $Q=\pm 3,2$ нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал ϕ поля созданного диполем в точке, удаленной на $r=8$ см как от первого, так и от второго заряда.



3. Диполь с электрическим моментом $p=0,12$ нКл·м образован двумя точечными зарядами $Q=\pm 1$ нКл. Найти напряженность E и потенциал ϕ электрического поля в точках A и B (рис. 6), находящихся на расстоянии $r=8$ см от центра диполя.

4. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, созданного диполем в точках A и B (рис. 6). Его электрический момент $p=1$ пКл·м, а расстояние, от точек A и B до центра диполя равно 10 см.

5. Определить напряженность E и потенциал φ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p=4$ пКл·м на расстоянии $r=10$ см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha=60^\circ$ с вектором электрического момента.

6. Диполь с электрическим моментом $p=1$ пКл·м равномерно вращается с частотой $n=10^3$ с⁻¹ относительно оси, проходящей через центр диполя и перпендикулярной его плечу. Вывести закон изменения потенциала как функцию времени в некоторой точке, отстоящей от центра диполя на $r=1$ см и лежащей в плоскости вращения диполя. Принять, что в начальный момент времени потенциал φ_0 интересующей нас точки равен нулю. Построить график зависимости $\varphi(t)$.

7. Диполь с электрическим моментом $p=1$ пКл·м равномерно вращается с угловой скоростью $\omega=10^4$ рад/с относительно оси, перпендикулярной плечу диполя и проходящей через его центр. Определить среднюю потенциальную энергию $\langle\Pi\rangle$ заряда $Q=1$ нКл, находящегося на расстоянии $r=2$ см от центра диполя и лежащего в плоскости вращения, за время, равное: 1) полупериоду (от $t_1=0$ до $t_2=T/2$); 2) в течение времени $t \gg T$. В начальный момент считать $\Pi=0$.

8. Два диполя с электрическими моментами $p_1=1$ пКл·м и $p_2=4$ пКл·м находятся на расстоянии $r=2$ см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.

9. Два диполя с электрическими моментами $p_1=20$ пКл·м и $p_2=50$ пКл·м находятся на расстоянии $r=10$ см друг от друга, так что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.

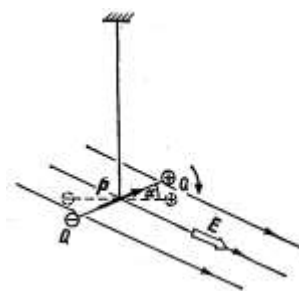


Рис. 16.7

Диполь в электрическом поле

10. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м прикреплен к упругой нити (рис. 7). Когда в пространстве, где находится диполь, было создано электрическое поле напряженностью $E=3$ кВ/м перпендикулярно плечу диполя и нити, диполь повернулся на угол $\alpha=30^\circ$. Определить постоянную кручения* C нити.

11. В условиях предыдущей задачи диполь под действием поля поворачивается на малый угол. Определить постоянную кручения C нити.

12. Диполь с электрическим моментом $p=20$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=50$ кВ/м. Вектор электрического момента составляет угол $\alpha=60^\circ$ с линиями поля. Какова потенциальная энергия Π диполя?

Указание. За нулевую потенциальную энергию принять энергию, соответствующую такому расположению диполя, когда вектор электрического момента диполя перпендикулярен линиям поля.

13. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E=150$ кВ/м. Вычислить работу A , необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha=180^\circ$.

14. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E=10$ кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ диполя при повороте его на угол $\alpha=60^\circ$.

15. Перпендикулярно плечу диполя с электрическим моментом $p=12$ пКл·м возбуждено однородное электрическое поле напряженностью $E=300$ кВ/м. Под действием сил поля диполь начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через его центр. Найти угловую скорость ω диполя в момент прохождения им положения равновесия. Момент инерции J диполя относительно оси, перпендикулярной плечу и проходящей через его центр, равен $2 \cdot 10^{-11}$ кг·м².

Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E=9$ МВ/м. Диполь повернули на малый угол и

* Постоянной кручения называют величину, равную моменту силы, который вызывает закручивание нити на 1 рад.

предоставили самому себе. Определить частоту ν собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции J диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен $4 \cdot 10^{-12}$ кг·м²

17. Диполь с электрическим моментом $p=200$ пКл·м находится в неоднородном электрическом поле. Степень неоднородности поля характеризуется величиной $\frac{dE}{dx}=1$ МВ/м², взятой в направлении оси диполя. Вычислить силу F , действующую на диполь в этом направлении.

18. Диполь с электрическим моментом $p=5$ пКл·м свободно установился в поле точечного заряда $Q=100$ нКл на расстоянии $r=10$ см от него. Определить для этой точки величину $|dE/dr|$, характеризующую степень неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу F , действующую на диполь.

19. Диполь с электрическим моментом $p=4$ Км·м свободно установился в поле, созданном бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью $\tau=500$ нКл/м на расстоянии $r=10$ см от нее. Определить в этой точке величину $|dE/dr|$, характеризующую степень неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу F , действующую на диполь.

Поляризация диэлектриков

20. Указать, какими типами поляризации (электронной - e , атомной - a , ориентационной - o) обладают следующие атомы и молекулы: 1) Н; 2) Не; 3) О₂; 4) НСl; 5) Н₂О; 6) СО; 7) СО₂; 8) СН₃; 9) ССl₄.

21. Молекула HF обладает электрическим моментом $p=6,4 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Межъядерное расстояние $d=92$ пм. Найти заряд Q такого диполя и объяснить, почему найденное значение Q существенно отличается от значения элементарного заряда $|e|$.

22. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов $U=1,8$ кВ. Диэлектрик - стекло. Определить диэлектрическую восприимчивость χ стекла и поверхностную плотность σ' поляризационных (связанных) зарядов на поверхности стекла.

23. Металлический шар радиусом $R=5$ см окружен равномерно слоем фарфора толщиной $d=2$ см. Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд Q шара равен 10 нКл.

24. Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0=2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на гранях пластины.

Электрическое поле в диэлектрике

25. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, молекулы которого можно рассматривать как жесткие диполи с электрическим моментом $\mu_M=2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Концентрация n диполей равна 10^{26} м⁻³. Определить напряженность E среднего макроскопического поля в таком диэлектрике, если при отсутствии диэлектрика напряженность E_0 поля между пластинами конденсатора была равна 100 МВ/м. Дезориентирующим действием теплового движения молекул пренебречь.

26. В электрическое поле напряженностью $E_0=1$ МВ/м внесли пластину диэлектрика ($\epsilon=3$). Определить напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля, действующего на отдельную молекулу в диэлектрике, полагая, что внутреннее поле является полем Лоренца.

Во сколько раз напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля в кристалле кубической сингонии больше напряженности E среднего макроскопического поля? Диэлектрическая проницаемость ϵ кристалла равна 2,5.

28. При какой максимальной диэлектрической проницаемости ϵ погрешность при замене напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля напряженностью E_0 внешнего поля не превысит 1 %?
29. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если вместо напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля брать напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике. Расчеты выполнить для двух случаев: 1) $\epsilon = 1,003$; 2) $\epsilon = 2$.

Поляризованность диэлектрика

30. При какой поляризованности P диэлектрика ($\epsilon = 5$) напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля равна 10 МВ/м?
31. Определить, при какой напряженности E среднего макроскопического поля в диэлектрике ($\epsilon = 3$) поляризованность P достигнет значения, равного 200 мкКл/м².
32. Определить поляризованность p стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0 = 5$ МВ/м.
33. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью $E_0 = 20$ кВ/м. Чему равна поляризованность p диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?
34. Во внешнем электрическом поле напряженностью $E_0 = 40$ МВ/м поляризованность P жидкого азота оказалась равной 109 мкКл/м². Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого азота; 2) индуцированный электрический момент p одной молекулы. плотность ρ жидкого азота принять равной 804 кг/м³.

Электронная и атомная поляризации

35. Связь поляризуемости α с диэлектрической восприимчивостью χ для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии задается выражением $\chi/(\chi+3) = \alpha n/3$, где n - концентрация молекул. При каком наибольшем значении χ погрешность в вычислении α не будет превышать 1 %, если воспользоваться приближенной формулой $\chi \approx \alpha n$?
36. При каком наибольшем значении произведения αn формула Клаузиуса - Мосотти ($\epsilon - 1)/(\epsilon + 2) = \alpha n/3$ может быть заменена более простой $\epsilon = 1 + \alpha n$ при условии, что погрешность в вычислении ϵ не превысит 1% ?
37. Определить поляризуемость α молекул азота, если диэлектрическая проницаемость ϵ жидкого азота равна 1,445 и его плотность $\rho = 804$ кг/м³.
38. Поляризуемость α молекулы водорода можно принять равной $1,0 \cdot 10^{-29}$ м³. Определить диэлектрическую восприимчивость χ водорода для двух состояний: 1) газообразного при нормальных условиях; 2) жидкого, плотность ρ которого равна 70,8 кг/м³.
39. Диэлектрическая восприимчивость χ газообразного аргона при нормальных условиях равна $5,54 \cdot 10^{-4}$. Определить диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_2 жидкого ($\rho_1 = 1,40$ г/см³) и твердого ($\rho_2 = 1,65$ г/см³) аргона.
40. Система состоит из двух одинаковых по значению и противоположных по знаку зарядов $|Q| = 0,1$ нКл, связанных квазиупругими силами. Коэффициент k упругости системы зарядов равен 1 мН/м. Определить поляризуемость α системы.
41. Вычислить поляризуемость α атома водорода и диэлектрическую проницаемость ϵ атомарного водорода при нормальных условиях. Радиус r электронной орбиты принять равным 53 пм.
42. Атом водорода находится в однородном электрическом поле напряженностью $E = 100$ кВ/м. Определить электрический момент P и плечо l индуцированного диполя. Радиус r электронной орбиты равен 53 пм.
43. Диэлектрическая проницаемость ϵ аргона при нормальных условиях равна 1,00055. Определить поляризуемость α атома аргона.
44. Атом ксенона (поляризуемость $\alpha = 5,2 \cdot 10^{-29}$ м³) находится на расстоянии $r = 1$ нм от протона. Определить индуцированный в атоме ксенона электрический момент p .

45. Какой максимальный электрический момент P_{\max} будет, индуцирован у атома неона, находящегося на расстоянии $r=1$ нм от молекулы воды? Электрический момент p молекулы воды равен $6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, поляризуемость α атома неона равна $4,7 \cdot 10^{-30}$ м³.

46. Криптон при нормальных условиях находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=2$ МВ/м. Определить объемную плотность энергии ω поляризованного криптона, если поляризуемость α атома криптона равна $4,5 \cdot 10^{-29}$ м³.

47. Определить поляризуемость α атомов углерода в алмазе. Диэлектрическая проницаемость ϵ алмаза равна 5,6, плотность $\rho = 3,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

48. Показатель преломления n газообразного кислорода при нормальных условиях равен 1,000272. Определить электронную поляризуемость α_e молекулы кислорода.

49. Показатель преломления n газообразного хлора при нормальных условиях равен 1,000768. Определить диэлектрическую

проницаемость ϵ жидкого хлора, плотность ρ которого равна $1,56 \cdot 10^3$ кг/м³.

50. При нормальных условиях показатель преломления n углекислого газа CO₂ равен 1,000450. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого CO₂, если его плотность $\rho = 1,19 \cdot 10^3$ кг/м³.

51. Показатель преломления n жидкого сероуглерода CS₂ равен 1,62. Определить электронную поляризуемость α_e молекул сероуглерода, зная его плотность.

52. Поляризуемость α атома аргона равна $2,03 \cdot 10^{-29}$ м³. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ и показатель преломления n жидкого аргона, плотность ρ которого равна $1,44 \cdot 10^3$ кг/м³.

53. Определить показатель преломления n_1 жидкого кислорода, если показатель преломления n_2 газообразного кислорода при нормальных условиях равен 1,000272. Плотность ρ_1 жидкого кислорода равна $1,19 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ориентационная поляризация

54. Вычислить ориентационную поляризуемость $\alpha_{ор}$ молекул воды при температуре $t=27$ °С, если электрический момент p молекулы воды равен $6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

55. Зная, что показатель преломления n водяных паров при нормальных условиях равен 1,000252 и что молекула воды обладает электрическим моментом $p=6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, определить, какую долю от общей поляризуемости (электронной и ориентационной) составляет электронная поляризуемость молекулы.

56. Электрический момент p молекул диэлектрика равен $5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. диэлектрик ($\epsilon=2$) помещен в электрическое поле напряженностью $E_{\text{лок}}=100$ МВ/м. Определить температуру T , при которой среднее значение проекции $\langle p_E \rangle$ электрического момента на направление вектора $E_{\text{лок}}$ будет равно $p/2$.

57. Диэлектрик, молекулы которого обладают электрическим моментом $p=5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, находится при температуре $T=300$ К в электрическом поле напряженностью $E_{\text{лок}}=100$ МВ/м. Определить, во сколько раз число молекул, ориентированных «по полю» ($0 \leq \vartheta \leq 10^\circ$); больше числа молекул, ориентированных «против поля» ($179^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$). Угол ϑ образован векторами \mathbf{p} и $\mathbf{E}_{\text{лок}}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.

ПОДБОР ЗАДАНИЙ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВА И ИХ РЕШЕНИЕ

Основные формулы

• Намагниченность \mathbf{J} — величина, равная отношению магнитного момента малого объема ΔV вещества к этому объему:

$$I = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mu_{Mi},$$

где μ_{Mi} — магнитный момент отдельной (i -й) молекулы; N — число молекул в объеме ΔV .

• Намагниченность \mathbf{J} в изотропном магнетике пропорциональна напряженности магнитного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость (безразмерна).

• Удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением

$$\chi_{уд} = \chi / \rho,$$

где ρ — плотность вещества.

• Молярная магнитная восприимчивость χ_m связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением

$$\chi_m = \frac{\mu}{\rho} \chi.$$

• Магнетон Бора μ_B — элементарный магнитный момент — определяется формулой $\mu_B = e\hbar / (2m_e)$,

где e — элементарный заряд; m_e — масса электрона.

• Магнитная индукция \mathbf{B} , напряженность \mathbf{H} и намагниченность \mathbf{J} в изотропном магнетике связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}), \text{ где } \mu_0 \text{ — магнитная постоянная.}$$

• Намагниченность изотропного парамагнетика (по Ланжевону)

$$J = n\mu_M L(a),$$

где n — концентрация молекул; μ_M — магнитный момент отдельной молекулы; $L(a)$ — функция Ланжевона.

• Функция Ланжевона

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}, \text{ где } a = \mu_M B / (kT).$$

Приближенное значение функции Ланжевона можно представить в виде знакпеременного ряда

$$L(a) = \frac{1}{3}a - \frac{1}{45}a^3 + \frac{2}{945}a^5 - \dots$$

При $a \ll 1$ ($\mu_M B \ll kT$) $L(a) \approx \frac{1}{3}$ и намагниченность

$$J = \frac{n\mu_M}{3kT} B, \text{ или } J = \mu_0 \frac{n\mu_M^2}{3kT}.$$

- Магнитная восприимчивость парамагнитных веществ при $\mu_M B \ll kT$

$$\chi = \mu_0 \frac{n\mu_M^2}{3kT}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную восприимчивость χ_m висмута, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1,3 \cdot 10^{-9}$ м³/кг.

Решение. Магнитная восприимчивость χ определяется соотношением

$$\chi = J/H,$$

где J — намагниченность, H — напряженность магнитного поля. Намагниченность J , в свою очередь, определяется следующей формулой:

$$J = \mathbf{J} = \left| \sum \mu_{Mi} \right| / V$$

где $\sum \mu_{Mi}$ — суммарный магнитный момент всех молекул в объеме V (магнетик предполагается однородным).

Соответственно

$$\chi_m = J_m/H; J_m = \sum \mu_{Mi} / \nu,$$

где ν — количество вещества (число молей данного вещества), и

$$\chi_{уд} = J_{уд}/H; J_{уд} = \sum \mu_{Mi} / m,$$

где m — масса вещества.

1. Для определения удельной магнитной восприимчивости найдем отношение

$$\chi / \chi_{уд} = J / J_{уд} = m / V = \rho \quad \text{откуда}$$

$$\chi = \rho \chi_{уд},$$

где ρ — плотность.

Убедимся, в том, что правая часть равенства, так же как и χ , — величина безразмерная (неименованная):

$$[\rho][\chi_{уд}] = 1 \text{ кг/м}^3 * 1 \text{ м}^3/\text{кг} = 1.$$

Произведем вычисления, выписав из табл. 9 плотность висмута ($\rho = 9,8 \cdot 10^3$ кг/м³):

$$\chi = 9,8 \cdot 10^3 * (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -1,3 \cdot 10^{-5}.$$

2. Для определения молярной магнитной восприимчивости найдем отношение

$$\chi_m / \chi_{уд} = J_m / J_{уд} = m / V = M.$$

где M — молярная масса.

Тогда

$$\chi_m = M \chi_{уд}.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу молярной магнитной восприимчивости (м³/моль):

$$[M][\chi_{уд}] = 1 \text{ кг/моль} * 1 \text{ м}^3/\text{кг} = 1 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Найдем сначала относительную молекулярную массу висмута: $M_r = 209$. Так как относительная молекулярная масса численно равна молярной массе M , выраженной в г/моль, то $M = 209$ г/моль = 0,209 кг/моль, что соответствует выражению молярной массы в СИ.

Произведем вычисления:

$$\chi_m = 0,209 * (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Пример 2. Определим частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в однородном магнитном поле ($B = 1$ Тл).

$$n=N_A/V_m \text{ и } \rho=M/V_m$$

где N_A — постоянная Авогадро; M — молярная масса; V_m — молярный объем.

Тогда $n/p= N_A/M$ и

$$\chi_{уд} = \mu_0 \frac{N_A M_J^2}{3kTM}$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу удельной магнитной восприимчивости ($\text{м}^3/\text{кг}$):

$$\frac{[\mu_0][N_A][M_J^2]}{[k][T][M]} = \frac{1\text{Гн}/\text{м} \cdot 1\text{моль}^{-1} \cdot 1\text{А}^2 \cdot \text{м}^4}{1\text{Дж}/\text{К} \cdot 1\text{К} \cdot 1\text{кг}/\text{моль}} = \frac{1\text{Гн} \cdot 1\text{А}^2 \cdot \text{м}^3}{1\text{Дж} \cdot \text{кг}} = 1\text{м}^3/\text{кг}$$

Произведем вычисления (учтем, что $1 \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ и $M = 30 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$):

$$\chi_{уд} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot (1,8 \cdot 9,27 \cdot 10^{-24})^2 \cdot \text{м}^3}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \text{ кг}} = 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{кг}$$

Задание 1 Из приведенного ниже списка выберите три задачи (одну из каждого раздела) и решите их аналитически.

Задачи

Намагниченность. Магнитная восприимчивость

1. Определить намагниченность J тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора μ_B и концентрация атомов $6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

2. Магнитная восприимчивость χ марганца равна $1,21 \cdot 10^{-4}$. Вычислить намагниченность J , удельную намагниченность $J_{уд}$ и молярную намагниченность J_m марганца в магнитном поле напряженностью $H = 100 \text{ кА/м}$. Плотность марганца считать известной.

3. Найти магнитную восприимчивость χ AgBr , если его молярная магнитная восприимчивость $\chi_m = 7,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$.

4. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную магнитную восприимчивость χ_m платины, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = 1,30 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$.

5. Магнитная восприимчивость χ алюминия равна $2,1 \cdot 10^{-5}$. Определить его удельную магнитную $\chi_{уд}$ и молярную χ_m восприимчивости.

6. Висмутовый шарик радиусом $R = 1 \text{ см}$ помещен в однородное магнитное поле ($B_0 = 0,5 \text{ Тл}$). Определить магнитный момент p_m приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость χ висмута равна $-1,5 \cdot 10^{-4}$.

7. Напряженность H магнитного поля в меди равна 1 МА/м . Определить намагниченность J меди и магнитную индукцию B , если известно, что удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1,1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Диа- и парамагнетизм

8. Определить частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в магнитном поле Земли ($B = 50 \text{ мкТл}$).

9. Атом водорода находится в магнитном поле с индукцией $B = 1 \text{ Тл}$. Вычислить магнитный момент μ_M , обусловленный прецессией электронной орбиты. Принять, что среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона от ядра равно $2/3 r_1^2$ (r_1 — радиус первой борновской орбиты).

10. Молярная магнитная восприимчивость χ_m оксида хрома CrO_3 равна $5,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{моль}$. Определить магнитный момент μ_M молекулы Cl_2O_3 (в магнетонах Бора), если температура $T = 300 \text{ К}$.

11. Удельная парамагнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ трехоксида ванадия (V_2O_3) при $t = 17 \text{ }^\circ\text{C}$ равна $1,89 \cdot 10^{-1} \text{ м}^3/\text{кг}$. Определить магнитный момент μ_M (в магнетонах Бора),

приходящийся на молекулу V_2O_3 , если плотность ρ трехоксида ванадия равна $4,87 \cdot 10^3$ кг/м³.

12. Молекула кислорода имеет магнитный момент $\mu_M = 2,8$ μ_B (где μ_B — магнетон Бора). Определить намагниченность J газообразного кислорода при нормальных условиях в слабом магнитном поле ($B_0 = 10$ мТл) и в очень сильном поле.

13. Определить, при каком наибольшем значении магнитной индукции B уже следует пользоваться не приближенным выражением функции Ланжевена $L(a) \approx a/3$, а точным, чтобы погрешность вычислений не превышала 1 %. Для расчетов принять магнитный момент молекул равным магнетону Бора. Температура $T = 300$ К.

14. Определить наибольшее значение величины a , при котором погрешность, вызванная заменой точного выражения функции Ланжевена приближенным $L(a) \approx a/3$, не превышает 1 %.

15. Определить температуру T , при которой вероятность того, что данная молекула имеет отрицательную проекцию магнитного момента на направление внешнего магнитного поля, будет равна 10^{-3} . Магнитный момент молекулы считать равным одному магнетону Бора, а магнитную индукцию B поля — равной 8 Тл.

Определить, во сколько раз число молекул, имеющих положительные проекции магнитного момента на направление вектора магнитной индукции внешнего поля ($B = 1$ Тл), больше числа молекул, имеющих отрицательную проекцию, в двух случаях: 1) $T_1 = 300$ К; 2) $T_2 = 1$ К. Магнитный момент молекулы принять равным магнетону Бора.

17. При температуре $T_1 = 300$ К и магнитной индукции $B_1 = 0,5$, Тл была достигнута определенная намагниченность J парамагнетика. Определить магнитную индукцию B_2 , при которой сохранится та же намагниченность, если температуру повысить до $T_2 = 450$ К.

Ферромагнетизм

18. Кусок стали внесли в магнитное поле напряженностью $H = 1600$ А/м. Определить намагниченность J стали.

Указание. Необходимо воспользоваться графиком на рис. 24.1 (с. 288).

19. Прямоугольный ферромагнитный брусок объемом $V = 10$ см³ приобрел в магнитном поле напряженностью $H = 800$ А/м магнитный момент $p_m = 0,8$ А*м². Определить магнитную проницаемость μ ферромагнетика.

20. Вычислить среднее число $\langle n \rangle$ магнетонов Бора, приходящихся на один атом железа, если при насыщении намагниченность железа равна 1,84 МА/м.

21. На один атом железа в незаполненной 3 d -оболочке приходится четыре неспаренных электрона. Определить теоретическое значение намагниченности $J_{нас}$ железа при насыщении.

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике [Электронный ресурс]: Учеб. пособие для вузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003. – 640 с.
2. Magnetics 2013 [Электронный ресурс]. URL: <https://www.arnoldmagnetics.com/wp-content/uploads/2017/10/Magnet-FAQs-Constantinides-Magnetics-2013-psn-hi-res.pdf> (дата обращения 18.03.20).
3. FEMM для всех [Электронный ресурс]. URL: <https://csem.net/software/finiteElementMethodMagnetics.php> (Дата обращения 18.03.20).
4. Расчет трансформатора для обратноходового импульсного источника питания (Flyback) [Электронный ресурс]. URL: <https://habr.com/ru/post/388313/> (дата обращения 19.03.20).
5. Magnetics simulation with FEMM [Электронный ресурс]. URL: <http://firsttimeprogrammer.blogspot.com/2017/09/magnetics-and-electrostatics.html> (дата обращения 19.03.20).
6. Simulation of the effect of a magnetically insulated anode on a low-power cylindrical Hall thruster [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.inframat.com/products/26R-0806UPA.htm> (дата обращения 03.20).

Приложение 1. Данные для самопроверки по практической работе 2.

Номер 2.

Вариант	Ответ	Вариант	Ответ	Вариант	Ответ
1	0.00706312	6	0.0105941	11	0.00882789
2	0.00758152	7	0.0113718	12	0.0094761
3	0.0049781	8	0.00746661	13	0.00622173
4	0.00748578	9	0.0112283	14	0.0093566
5	0.00963667	10	0.0144492	15	0.0120362

Номер 3.

Вариант	Ответ	Вариант	Ответ	Вариант	Ответ
1	0.000919578	6	0.00137961	11	0.00114987
2	0.000254437	7	0.000381882	12	0.000318421
3	0.00129564	8	0.00194348	13	0.00161958
4	0.000572044	9	0.000858423	14	0.000715641
5	0.000758739	10	0.00144153	15	0.000948924

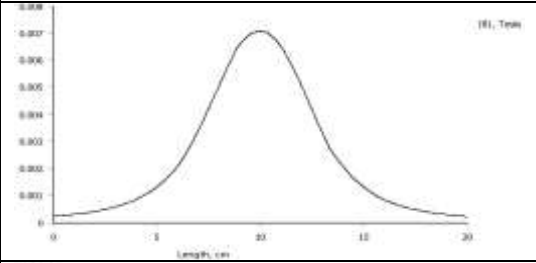
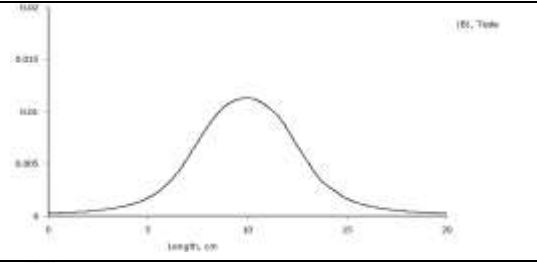
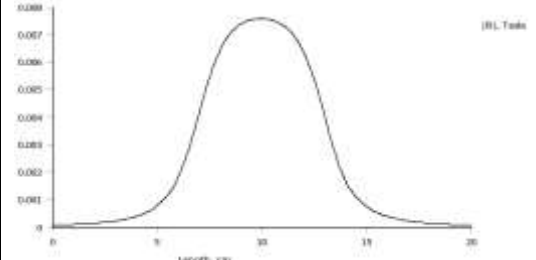
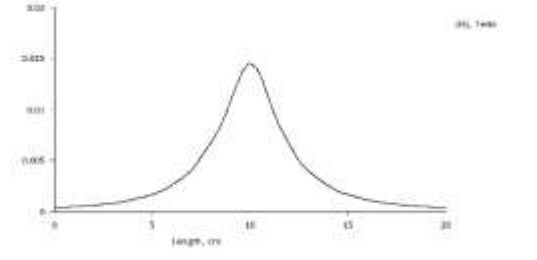
Номер 4.

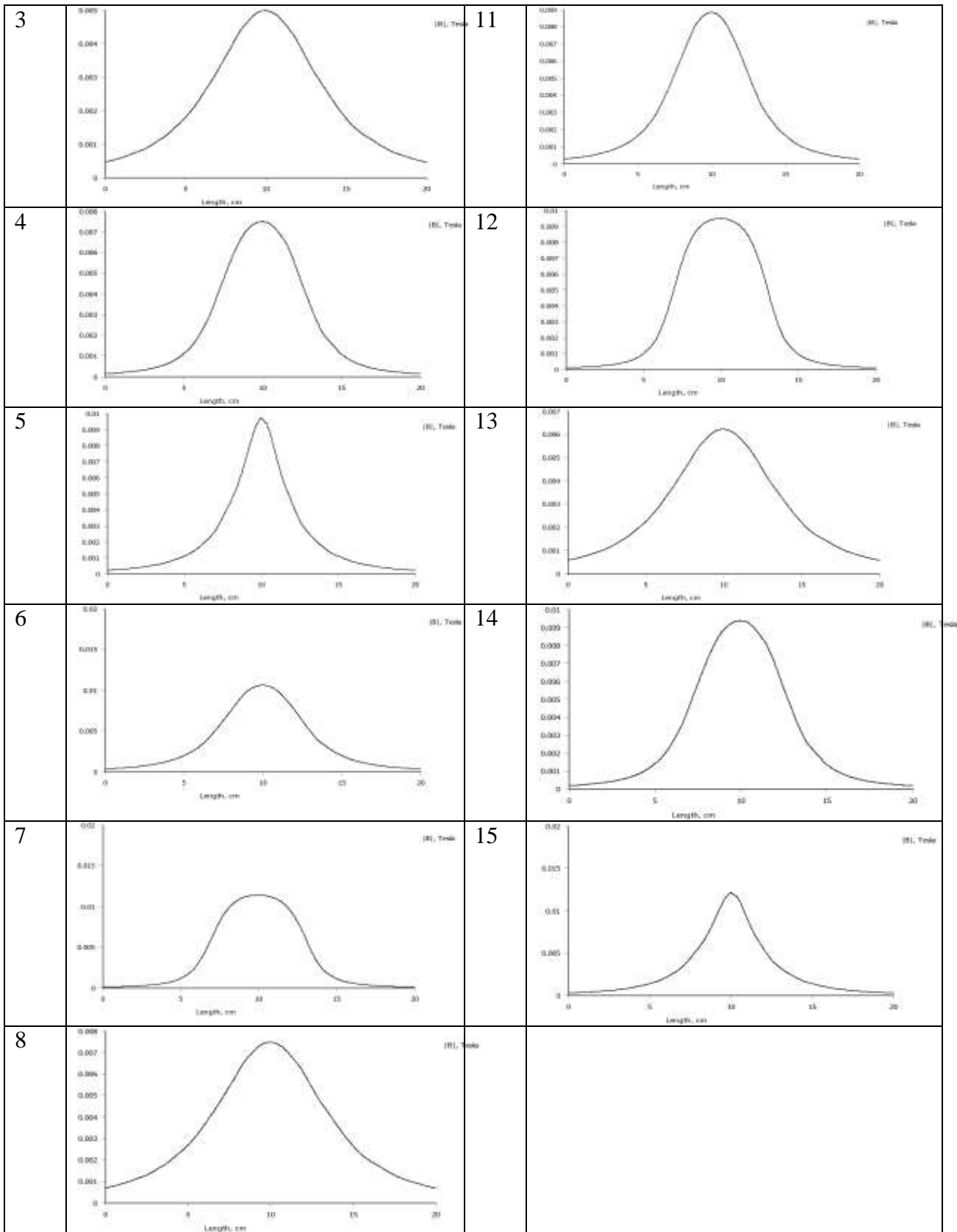
Вариант	Ответ	Вариант	Ответ	Вариант	Ответ
1	9.66072e-006	6	1.44905e-005	11	1.20749e-005
2	2.39701e-006	7	3.59536e-006	12	2.99601e-006
3	3.46944e-005	8	5.20372e-005	13	4.33607e-005
4	9.92329e-006	9	1.48845e-005	14	1.24034e-005
5	3.38526e-006	10	5.07527e-006	15	4.2272e-006

Номер 5.

Вариант	Ответ	Вариант	Ответ	Вариант	Ответ
1	0.00105531	6	0.00237475	11	0.00164934
2	0.000238028	7	0.000535639	12	0.000372025
3	0.00375334	8	0.00844578	13	0.00586566
4	0.000897737	9	0.00202013	14	0.00140302
5	0.00137805	10	0.00310199	15	0.00215512

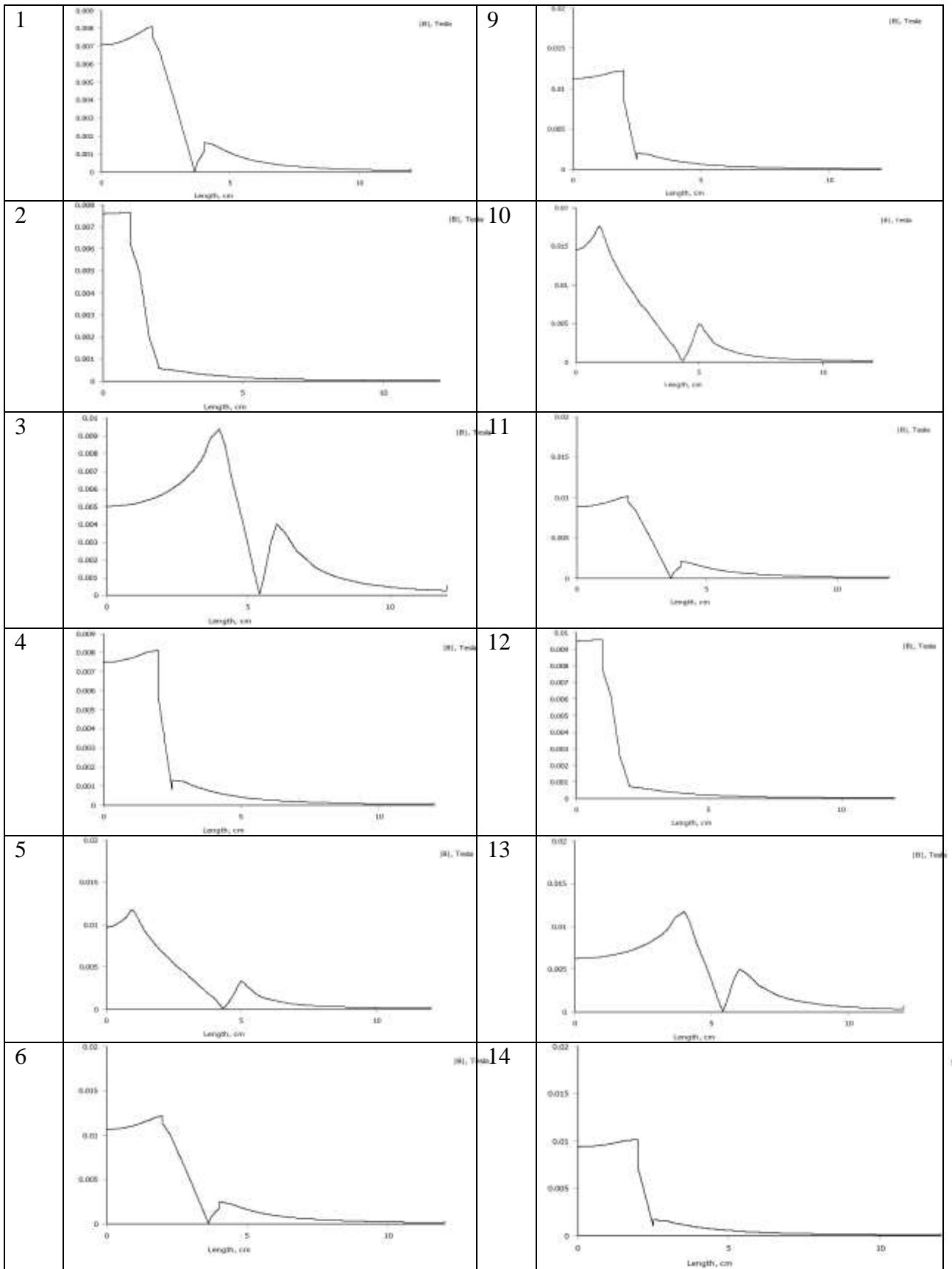
Номер 6.

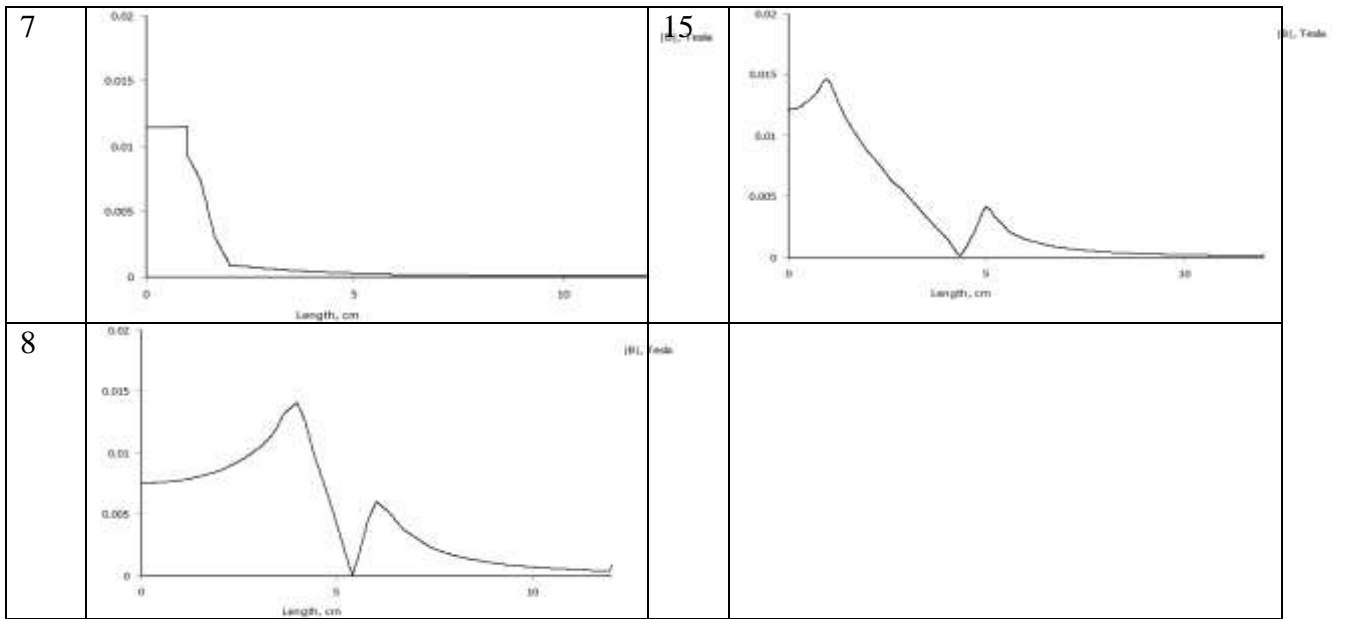
Вар	Результат	Вар	Результат
1		9	
2		10	



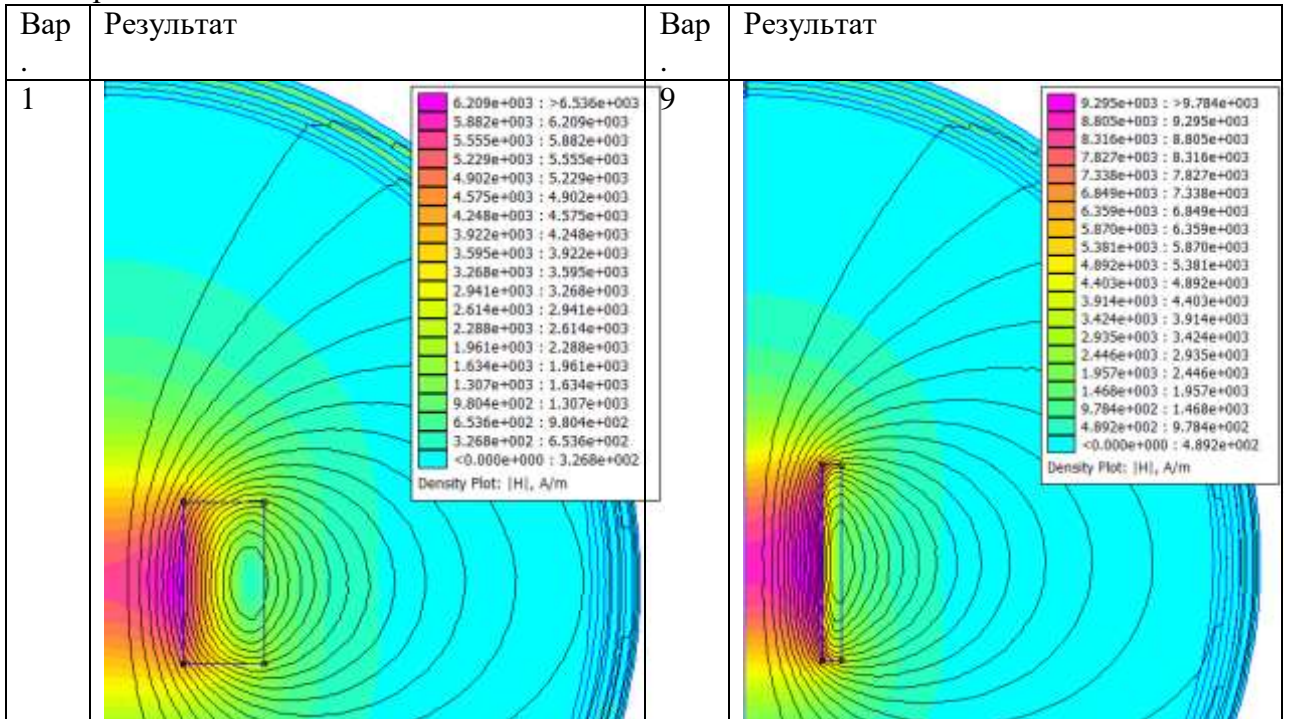
Номер 7.

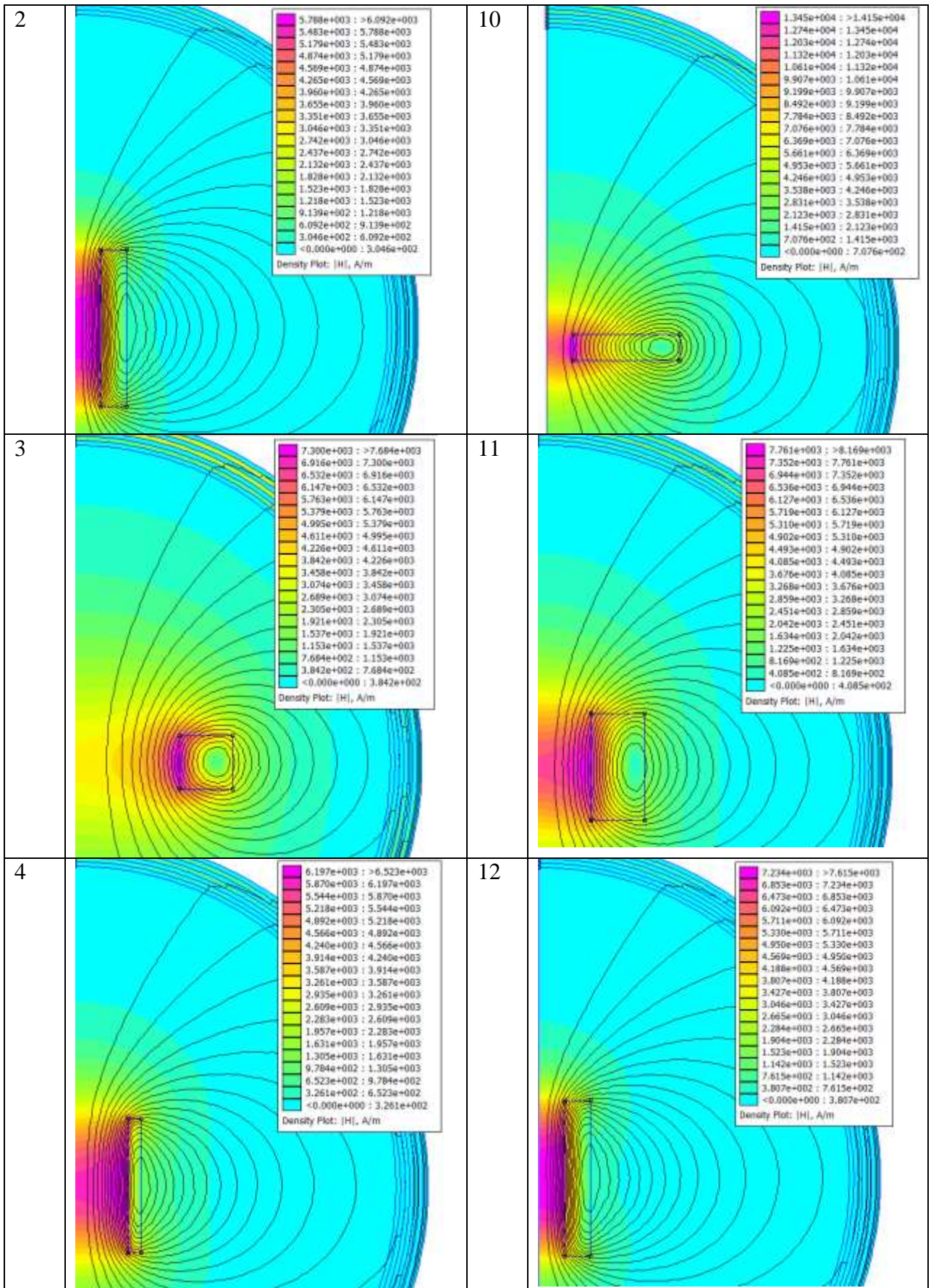
Вар	Результат	Вар	Результат
.		.	

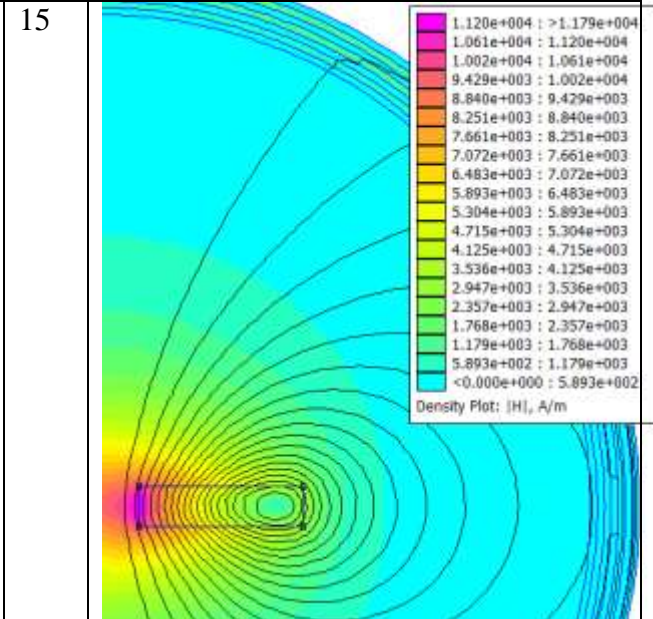
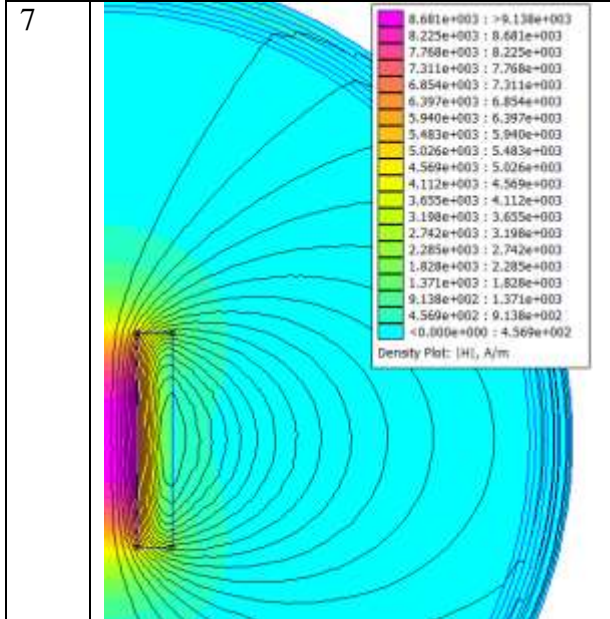
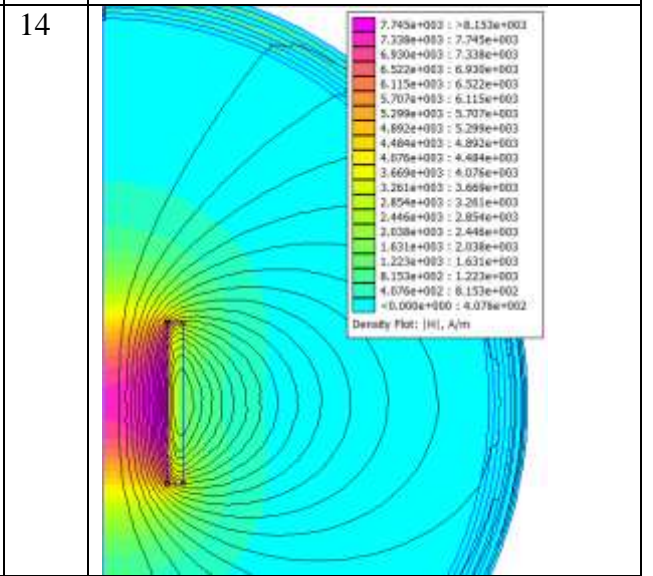
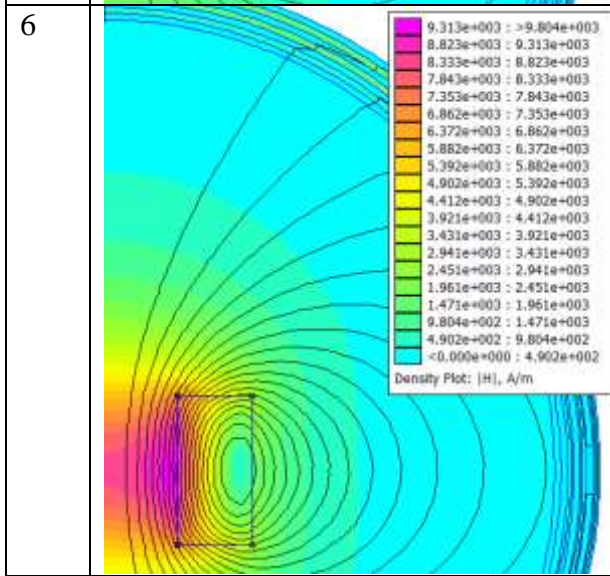
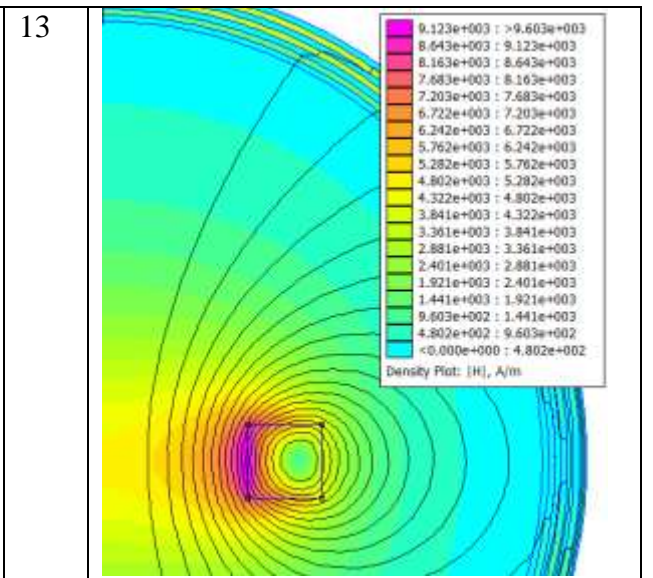
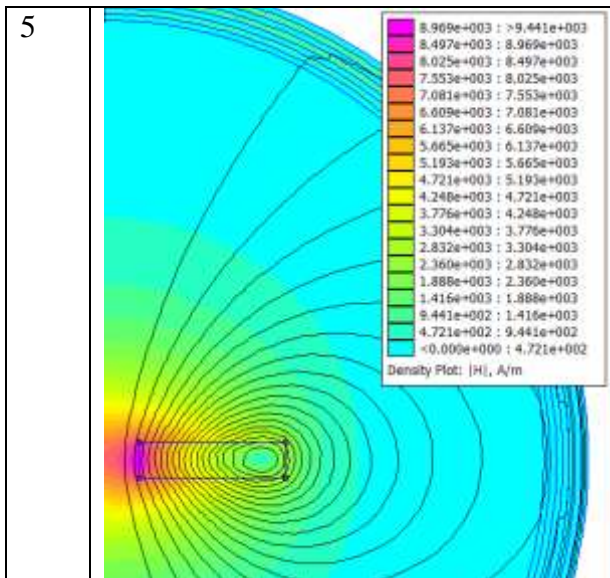


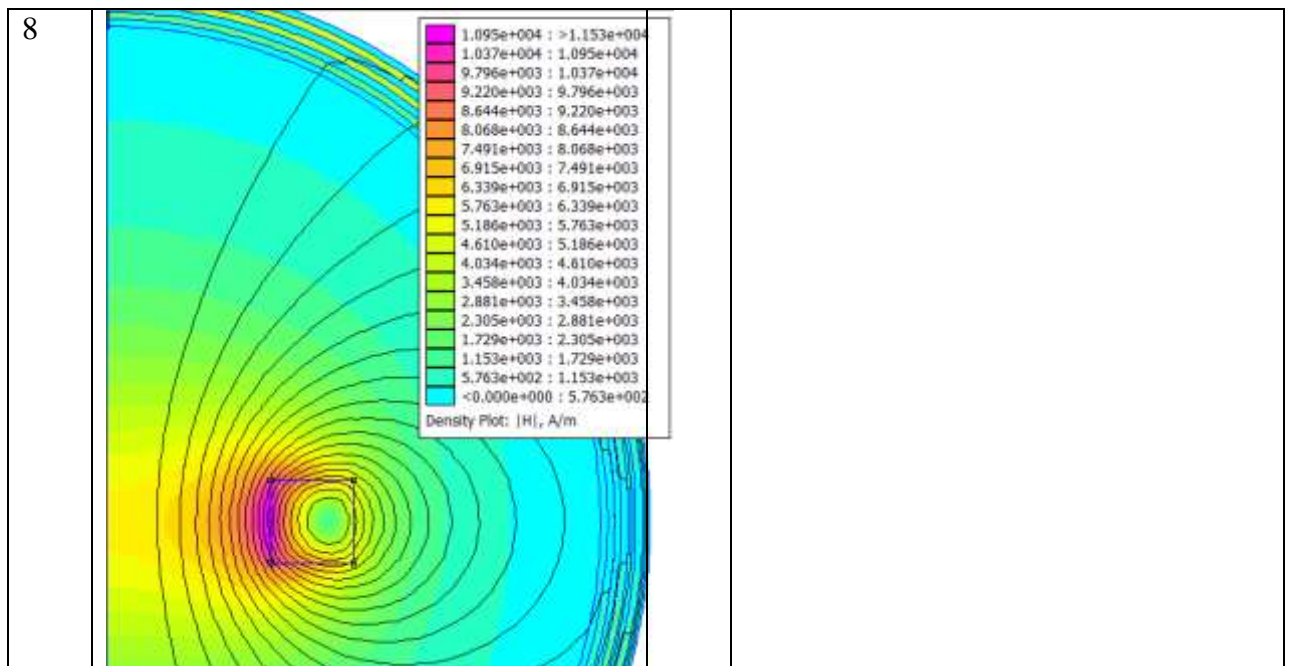


Номер 8.









Номер 9.

Вариант	Ответ	Вариант	Ответ	Вариант	Ответ
1	18.172	6	22.0433	11	15.267
2	8.24399	7	10.309	12	7.36769
3	41.7807	8	46.4377	13	29.0268
4	13.9252	9	766	14	11.5202
5	22.812	10	25.9415	15	6982