

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 01.10.2023 23:02:17

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра биомедицинской инженерии

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« 28 » 09

2023 г.



МОДЕЛИРОВАНИЕ В МЕДИЦИНЕ И БИОЛОГИИ

Методические указания по выполнению практических занятий
для студентов специальности
30.05.03 «Медицинская кибернетика»

Курск 2023

УДК 004.93:61

Составители: О.В. Шаталова.

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.В. Киселев*

Моделирование в медицине и биологии: методические указания по выполнению практических занятий для студентов специальности 30.05.03 «Медицинская кибернетика» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В. Шаталова. - Курск, 2023. - 108 с.

Предназначено для студентов специальности 30.05.03 «Медицинская кибернетика» по дисциплине «Моделирование в медицине и биологии». Может быть использована аспирантами, обучающимися по направлению подготовки 1.5.8. Математическая биология, биоинформатика.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 6,28. Уч.-изд. л. 5,68. Тираж 100 экз. Заказ *983* . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическое занятие №1

Проверка адекватности моделей: интерполяция и аппроксимация

1.1 Краткие теоретические сведения

Наиболее удобной в обращении на практике функцией является алгебраический многочлен. Чтобы задать многочлен, нужно задать только конечное число его коэффициентов. Значения многочлена легко вычисляются, его легко продифференцировать, проинтегрировать и т.д. Поэтому алгебраические многочлены нашли широкое применение для приближения (аппроксимации) функций. Наряду с алгебраическими многочленами применяются также тригонометрические многочлены, которые являются более естественными для приближения периодических функций.

1.1.1 Интерполяция функций по формуле Лагранжа

Пусть известны значения некоторой функции f в $n+1$ различных точках x_0, x_1, \dots, x_n , которые обозначим следующим образом:

$$f_i = f(x_i), i = 0, 1, \dots, n.$$

Например, эти значения получены из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. Возникает задача приближенного восстановления функции f в произвольной точке x . Часто для решения этой задачи строится алгебраический многочлен $L_n(x)$ степени n , который в точках x_i принимает заданные значения, т.е.

$$L_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

и называется интерполяционным. Точки $x_i, i=0, 1, \dots, n$ называются узлами интерполяции.

Приближенное восстановление функции f по формуле

$$f(x) \approx L_n(x) \quad (1.2)$$

называется интерполяцией функции f с помощью алгебраического многочлена. Существует теорема, согласно которой имеется только один интерполяционный многочлен n -ой степени, удовлетворяющий условию (1.1).

Интерполяционный многочлен, представленный в виде

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n P_{ni}(x) f_i, \quad (1.3)$$

где

$$P_{ni}(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}, \quad (1.4)$$

называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции (1.4) – Лагранжевыми коэффициентами.

Погрешность интерполяции (экстраполяции) в текущей точке $x \in [a, b]$ оценивается по формуле

$$|f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_n(x)|, \quad (1.5)$$

где

$$M_{n+1} = \max_{[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|, \quad (1.6)$$

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad (1.7)$$

Максимальная погрешность интерполяции на всем отрезке $[a, b]$:

$$\max_{[a,b]} |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{[a,b]} |\omega_n(x)|. \quad (1.8)$$

1.1.2 Линейная интерполяция

Интерполяция по формуле (1.2) при $n=1$, т.е. с помощью линейной функции (1.3) называется линейной.

Если ввести обозначения $h = x_1 - x_0$, $q = (x - x_0)/h$, то формула линейной интерполяции может быть записана в следующем виде:

$$f(x) \approx L_1(x) = L_1(x_0 + qh) = (1 - q)f_0 + q_1f_1. \quad (1.9)$$

Величина q называется фазой интерполяции, которая изменяется в пределах от 0 до 1, когда x пробегает значение от x_0 до x_1 .

Геометрическая линейная интерполяция означает замену графика функции на отрезке $[x_0, x_1]$ хордой, соединяющей точки (x_0, f_0) , (x_1, f_1) , как показано на нижеприведенном рисунке 1.

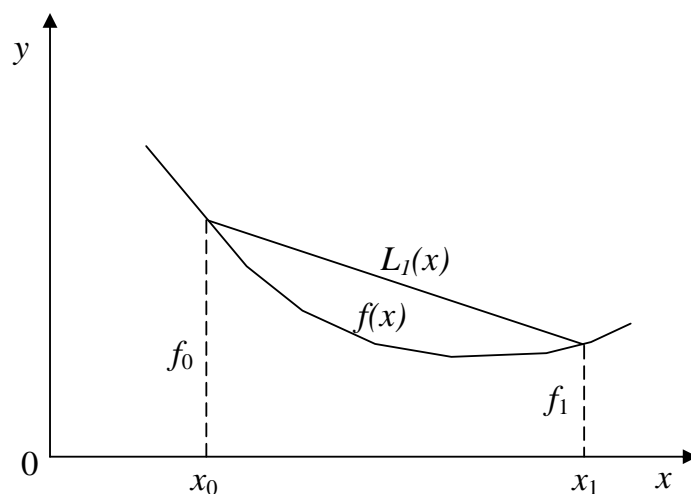


Рисунок 1 –Геометрическая линейная интерполяция

1.1.3 Сплайны

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на N равных частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, где $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, N - 1$; $x_N = b$, $h = (b - a)/N$.

Сплайном называется функция, которая вместе с несколькими производными непрерывна на всем заданном отрезке $[a, b]$, а на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ в отдельности является некоторым алгебраическим многочленом.

Максимальная по всем частичным отрезкам степень многочленов называется степенью сплайна, а разность между степенью сплайна и порядком наивысшей непрерывной на $[a, b]$ производной – дефектом сплайна.

На практике наиболее широкое распространение получили кубические сплайны – сплайны третьей степени, имеющие на $[a, b]$ непрерывную, по крайней мере, первую производную. Величина $m_i = S'_3(x)$ называется наклоном сплайна в точке (узле) x_i .

Нетрудно убедиться, что кубический сплайн $S_3(x)$, принимающий в узлах x_i, x_{i+1} , соответственно значения f_i, f_{i+1} , имеет на частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ вид

$$S_3(x) = \frac{(x_{i+1} - x)^2(2(x - x_i) + h)}{h^3} f_i + \frac{(x - x_i)^2(2(x_{i+1} - x) + h)}{h^3} \cdot f_{i+1} + \frac{(x_{i+1} - x)^2(x - x_i)m_i}{h^2} + \frac{(x - x_i)^2(x - x_{i+1})m_{i+1}}{h^2}. \quad (1.10)$$

Действительно, легко видеть, что $S_3(x) = f_i, S_3(x_{i+1}) = f_{i+1}$. Кроме того, простые вычисления показывают, что $S'_3(x_i) = m_i, S'_3(x_{i+1}) = m_{i+1}$. Можно доказать, что любой алгебраический многочлен третьей степени, принимающий в точках x_i, x_{i+1} значения, равные соответственно f_i, f_{i+1} и имеющий в этих точках производную, соответственно равную m_i, m_{i+1} , тождественно совпадает с многочленом (1.10).

Итак, чтобы задать кубический сплайн $S_3(x)$ на всем отрезке $[a, b]$, нужно задать в $N+1$ узлах x_i его значения f_i и наклоны или касательные $m_i, i=0, 1, \dots, N$.

Кубический сплайн, принимающий в узлах x_i те же значения, что и некоторая функция f называется интерполяционным. Он служит для аппроксимации функции f на отрезке $[a, b]$ вместе с несколькими производными.

Способы задания наклонов интерполяционного кубического сплайна.

1) Упрощенный способ

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} 2h, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ m_0 &= \frac{4f_1 - f_2 - 3f_0}{2h}, \quad m_n = \frac{3f_N + f_{N-2} - 4f_{N-1}}{2h} \end{aligned} \quad (1.11)$$

2) Если известны значения f'_i производной f' в узлах x_i , то полагаем $m_i = f'_i$, $i=0, 1, \dots, N$.

Способы 1 и 2 – локальные, так как с их помощью сплайн строится отдельно на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

3) Глобальный способ.

Обозначаем через $S_3''(x_i + 0)$ значение $S_3''(x)$ в узле x_i справа, найденное непосредственно из выражения (1.10), а через $S_3''(x_i - 0)$ значение $S_3''(x)$ в узле x_i слева, т.е. найденное из соответствующего выражения $S_3(x)$ на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, которое получается из (1.10) заменой i на $i-1$.

Имеем

$$\begin{aligned} S_3''(x_i + 0) &= \frac{4m_i}{h} - \frac{2m_{i+1}}{h} + 6 \frac{f_{i+1} - f_i}{h^2}, \\ S_3''(x_i - 0) &= \frac{2m_{i-1}}{h} + \frac{4m_i}{h} - 6 \frac{f_i - f_{i-1}}{h^2} \end{aligned}$$

Требуем непрерывности $S''(x)$ в узлах:

$$S_3''(x_i - 0) = S_3''(x_i + 0), \quad i=1, 2, \dots, N-1$$

и приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений относительно наклонов:

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = \frac{3(f_{i+1} - f_{i-1})}{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.12)$$

Поскольку неизвестных $N+1$, то необходимо задать еще два условия, которые называются краевыми (они обычно связаны с крайними значениями m_0 и m_N). Дадим три варианта краевых условий:

а) Если известны $f'_0 = f'(a)$, $f'_N = f'(b)$, то задать $m_0 = f'_0$, $m_N = f'_N$.

б) Производные f'_0 и f'_N аппроксимируем формулами численного дифференцирования третьего порядка точности:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{6h} (-11f_0 + 18f_1 - 9f_2 + 2f_3); \\ m_N &= \frac{1}{6h} (11f_N - 18f_{N-1} - 9f_{N-2} - 2f_{N-3}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

в) В некоторых случаях бывают известны значения f'' на концах отрезка $[a, b]$, т.е. величины $f''_0 = f''(a)$, $f''_N = f''(b)$. Тогда требование $S''_3(a) = f''_0$, $S''_3(b) = f''_N$ приводит к краевым условиям:

$$\begin{aligned} m_0 &= -\frac{m_1}{2} + \frac{3}{2} \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{h}{4} f''_0 \\ m_N &= -\frac{m_{N-1}}{2} + \frac{3}{2} \frac{f_N - f_{N-1}}{h} + \frac{h}{4} f''_N \end{aligned} \quad (1.14)$$

Система (1.12) при всех рассматриваемых краевых условиях имеет единственное решение. Решая систему (1.12) при выбранных краевых условиях, находим наклоны m_i , $i=0, 1, \dots, N$, во всех узлах. Затем по формуле (1.10) задаем сплайн на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i=0, 1, \dots, N-1$.

Построенный данным глобальным способом сплайн $S_3(x)$ имеет дефект не больше единицы, т.к. этот сплайн обладает на отрезке $[a, b]$ непрерывной второй производной.

Интерполяционный сплайн $S_3(x)$ с наклоном, заданным способом 2 или 3, удовлетворяет неравенству

$$\max_{[x_i, x_{i+1}]} |f^{(m)}(x) - S_3^{(m)}(x)| \leq ch^{k+1-m} \max_{[a, b]} |f^{(k+1)}(x)|, \quad (1.15)$$

где $i = 0, 1, \dots, N - 1$; $m = 0, 1, \dots, k$; $0 \leq k \leq 3$; c - независящая от h, i, f постоянная.

Точность аппроксимации функции f сплайном $S_3(x)$ управляется выбором N , т.е. шагом $h=(b-a)/N$.

1.1.4 Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов

Интерполяция на практике хороша лишь для таких функций, значения которых не искажены шумом. Случайные ошибки в значениях функции сильно искажают интерполяционное многочлены высоких степеней, а при интерполяции многочленами низких степеней теряется существенная информация. Поэтому, в этом случае, целесообразно применять «сглаживающую» аппроксимацию с минимизацией взвешенной средней квадратической ошибки аппроксимации. Это значит, что для данной функции $f(x)$ требуется построить функцию $F(x)$ вида

$$F(x) = a_0 \varphi_0(x) + a_1 \varphi_1(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) \quad (1.16)$$

так, чтобы минимизировать взвешенную среднюю квадратическую ошибку на интервале $[a, b]$:

$$\sigma^2 = \int_a^b \gamma(x) [F(x) - f(x)]^2 dx \quad (1.17)$$

где $\gamma(x)$ – заданная весовая неотрицательная функция.

Если функции $\varphi(x)$ действительны и попарно ортогональны с весом $\gamma(x)$ на интервале $[a, b]$, то есть если

$$\int_a^b \gamma(x) \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = 0; \quad \text{при } i \neq j, \quad (1.18)$$

то искомые коэффициенты определяются по формуле

$$a_i = \frac{\int_a^b \gamma(x) f(x) \varphi_i(x) dx}{\int_a^b \gamma(x) \varphi_i^2(x) dx} \quad (i = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.19)$$

Аппроксимация ортогональными функциями, например, ортогональными многочленами или тригонометрическими полиномами имеет то замечательное преимущество, что улучшение аппроксимации путем добавления нового члена $a_{n+1} \varphi_{n+1}(x)$ не меняет ранее вычисленные коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Таким образом, для аппроксимации функции $f(x)$ необходимо задать класс приближающих функций или n -мерное пространство, где n - число заданных значений функции $f(x)$, и норму в этом пространстве. При приближении функций многочленами на дискретном множестве точек норма имеет вид:

$$\sigma^2 = \sum_{k=0}^m \gamma_k [F(x_k) - f(x_k)]^2, \quad (1.20)$$

где γ_k заданные положительные веса, $m + 1$ - дискретное множество точек.

Согласно условию ортогональности (1.18):

$$\sum_{k=0}^m \gamma_k \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = 0 \quad (i \neq j) \quad (1.21)$$

и на основании (1.19) имеем:

$$a_i = \frac{\sum_{k=0}^m \gamma_k f(x_k) \varphi_i(x_k)}{\sum_{k=0}^m \gamma_k \varphi_i^2(x_k)} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad n \leq m) \quad (1.22)$$

Отметим, что можно использовать другую норму (1.20), тогда получим другое приближение, которое может значительно отличаться от предыдущего.

Приведем пример аппроксимации функций тригонометрическим многочленом:

$$F_m(x) = \alpha_0 + \sum_{p=1}^{m/2} (\alpha_p \cos px + \beta_p \sin px) \quad (1.23)$$

Коэффициенты этого многочлена при учете условия (1.20) находятся согласно формулам:

$$\alpha_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right), \quad \alpha_p = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right) \cos \frac{2\pi i}{n+1} p, \quad (1.24)$$

$$\beta_p = \frac{2}{n+1} \sum_{i=0}^n f\left(\frac{2\pi i}{n+1}\right) \sin p \frac{2\pi i}{n+1}, \quad p = 1, 2, \dots, m,$$

где $x_i = \frac{2\pi i}{n+1}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

1.2 Цель занятия

Получить практические навыки интерполяции и аппроксимации кривых аппроксимирующими многочленами и оценки точности полученных моделей.

1.3 Содержание занятия и порядок его выполнения

1. Согласно своему варианту из таблицы 1.1 в графе 2 выбрать вид исходной функции $f(x)$.

2. Определив из таблицы 1.1 графа 3 отрезок аппроксимации,

определить восемь значений функции $f(x)$ на этом отрезке. Шаг табулирования функции выбрать равномерным, т.е. $h=(b-a)/7$.

Таблица 1.1 – Исходная функция

№ п/п	Исходная функция	Отрезок аппроксимации	Метод интерполяции	Класс аппроксимирующих многочленов
1	2	3	4	5
1	e^x	$[-0,5; 0]$	Лагранжа	Чебышева
2	$\lg x - (x - 1)/x$	$[1; 10]$	Линейная	Эрмита
3	$\sqrt[3]{x}$	$[1; 1000]$	Лагранжа	Лагерра
4	$\arctg x$	$[0; 1]$	Локальный кубический сплайн	Чебышева
5	$\sin 3x$	$[0; \pi/6]$	Локальный кубический сплайн	Лежандра
6	$1/x$	$[1; 2]$	Линейная	Лагерра
7	$1/(x^2+1)$	$[0; 1]$	Лагранжа	Чебышева
8	$4x^3-3x$	$[-1;1]$	Локальный кубический сплайн	Лежандра
9	$ x $	$[-1; 1]$	Лагранжа	Лежандра
10	$ x $	$[-\pi; \pi]$	Локальный кубический сплайн	Гармоническ.
11	x	$[-\pi; \pi]$	Линейная	Гармоническ.
12	x^2	$[-\pi; \pi]$	Глобальный кубический сплайн	Гармоническ.
13	$x^2/(\pi-x)$	$[0; \pi]$	Лагранжа	Гармоническ.
14	e^x	$[0; \pi]$	Линейная	Гармоническ.
15	$1/(x^2-1)$	$[1; 2]$	Локальный кубический сплайн	Эрмита

3. Выбрать графы 4 таблицы 1.1 метод интерполяции, определить интерполяционный полином, проходящий через узлы интерполяции, найденный в п. 2.

4. Протабулировать исходную функцию и найденный интерполяционный полином с шагом $h/10$. Построить полученные графики. Оценить погрешность приближения.

5. Из таблицы 1.1 графа 5 определить класс аппроксимирующего многочлена.

Таблица 1.2 – Исходные данные

№ п/п	Ортогональные многочлены	Вес $\gamma(x)$	Интервал ортогонализации	Явное выражение $\varphi_n(x)$
1	Лежандра	1	$[-1; 1]$	$2^{-n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)! x^{n-2m}}{m!(n-m)!n-2m)!}$ $[n/2] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n - \text{четное} \\ \frac{n-1}{2}, & n - \text{нечетное} \end{cases}$
2	Чебышева	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[-1; 1]$	$\frac{n}{2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m+1)!(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}$
3	Лагерра	e^{-x}	$[0; \infty]$	$(n!) \sum_{m=0}^{[n]} (-1)^m \frac{x^m}{m!(n-m)!}$
4	Эрмита	$-e^{-x^2}$	$[-\infty; \infty]$	$n! \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}$
5	Гармонические	1	$[-\pi; \pi]$	$\{\cos nx, \sin nx\} \quad \begin{matrix} n \in \mathbb{N}, \text{ где} \\ \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \end{matrix}$

6. Используя выражение (1.22) и данные, приведенные в таблице 2, определить наилучшее приближение функции $f(x)$ на заданном отрезке по методу наименьших квадратов.

7. Протабулировать полученный в п. 6 многочлен с шагом $h/7$. Построить его график и сравнить с графиком, полученным в п. 4.

1.4 Пример выполнения практического занятия в среде MathCAD

-- - ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Задаем функцию, диапазон изменения аргумента и его шаг

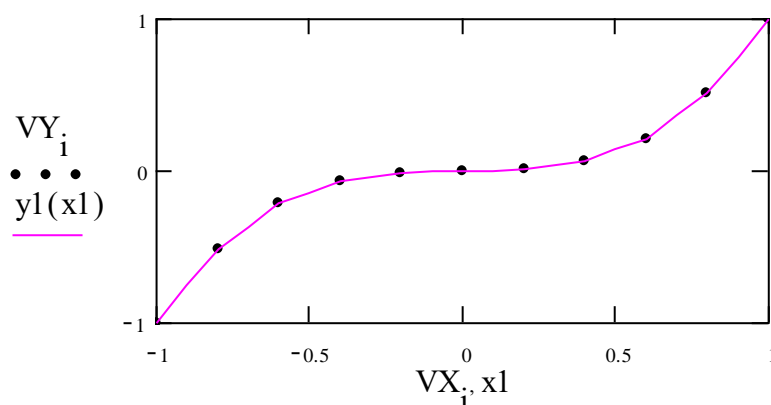
$$y(x) := x^3 \quad x := -1, -0.8.. 1 \quad x1 := -1, -0.9.. 1$$

Табулируем функцию и переносим данные в вектора VX и VY

=

x	$y(x)$	$i := 0.. 10$	
-1	-1	-1	-1
-0.8	-0.512	-0.8	-0.512
-0.6	-0.216	-0.6	-0.216
-0.4	-0.064	-0.4	-0.064
-0.2	$-8 \cdot 10^{-3}$	-0.2	$-8 \cdot 10^{-3}$
0	0	0	0
0.2	$8 \cdot 10^{-3}$	0.2	$8 \cdot 10^{-3}$
0.4	0.064	0.4	0.064
0.6	0.216	0.6	0.216
0.8	0.512	0.8	0.512
1	1	1	1

$$y1(x1) := \text{linterp}(VX, VY, x1)$$



При использовании векторов нижние индексы ставятся либо путем использования символа "[", либо кнопки "Xn" на панели "Калькулятор".

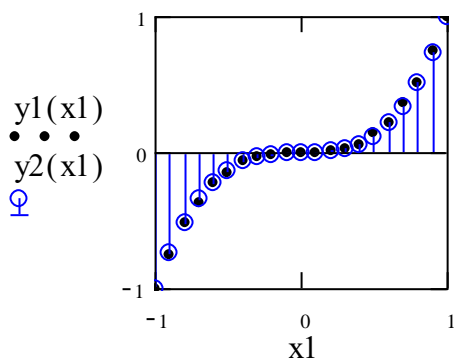
- - - СПЛАЙН ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Определяем вектор вторых производных VS :

VS :- cspline(VX, VY)

Определяем интерполирующий полином с помощью функции interp:

y2(x1) :- interp(VS, VX, VY, x1)



y1(x1)

-1
-0.756
-0.512
-0.364
-0.216
-0.14
-0.064
-0.036
$-8 \cdot 10^{-3}$
$-4 \cdot 10^{-3}$
0
$4 \cdot 10^{-3}$
$8 \cdot 10^{-3}$
0.036
0.064
0.14
0.216
0.364
0.512
0.756
1

y2(x1)

-1
-0.729
-0.512
-0.343
-0.216
-0.125
-0.064
-0.027
$-8 \cdot 10^{-3}$
$-1 \cdot 10^{-3}$
0
$1 \cdot 10^{-3}$
$8 \cdot 10^{-3}$
0.027
0.064
0.125
0.216
0.343
0.512
0.729
1

Сравниваем результаты, полученные при линейной и сплайн-интерполяции по графикам и таблицам.

– Интерполяция по формуле Лагранжа

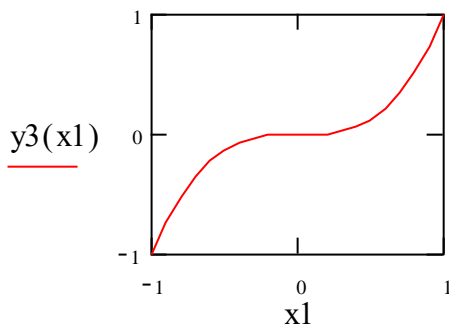
Определим длину вектора узлов интерполяции

$$n := \text{length}(VX) - 1 \quad i := 0..n \quad j := 0..n$$

Запишем интерполяционную формулу Лагранжа

$$y3(x1) := \sum_i VY_i \prod_j \left[\text{if } i=j, 1, \frac{(x1 - VX_j)}{(VX_i - VX_j)} \right]$$

Построим график



1.5 Содержание отчета

1. Графики исходной функции и аппроксимирующих многочленов.
2. Выводы по характеру полученных графиков.
3. Расчетные формулы аппроксимирующих полиномов.
4. Листинги рабочих программ.

1.6 Контрольные вопросы

1. Чем отличается аппроксимация от интерполяции?
2. Чем определяется степень интерполяционного многочлена?

3. Сколько уравнений определяют соотношения (1.10) и (1.12)? Являются ли эти уравнения системой линейных уравнений?

4. Каким образом норма влияет на вид аппроксимирующего многочлена?

5. Как следует поступить в том случае, если отрезок аппроксимации не совпадает с интервалом ортогонализации аппроксимирующих функций (базиса)?

1.7 Библиографический список

1. Волков, Е.А. Численные методы: уч. пособие для вузов / Е.А. Волков. - М.: Наука, 1987. - 284 с.

2. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т.Корн. - М., 1977. - 832 с.

Практическое занятие №2

Проверка адекватности моделей: Моделирование процессов конечными суммами

2.1 Краткие теоретические сведения

Основной объект математического анализа – функция, т. е. зависимость одной переменной от другой, или от других, когда независимых переменных несколько. В практической деятельности инженеру необходимо иметь сведения о значении функций в каждой точке с некоторой точностью, т.е. нет необходимости вычислить абсолютно точные значения функции. Точность, с которой нужно знать функцию в каждой точке, - это некоторое положительное число, значение которого зависит от условий задачи, наших возможностей или желаний.

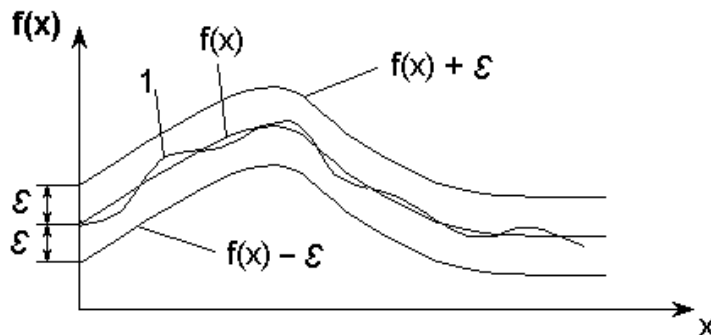


Рисунок 2.1 - Функция

На рисунке 1 вокруг графика $f(x)$ нарисована полоса, ширина которой 2ε . Любая кривая (на рисунке 2.1 кривая 1), целиком лежащая в этой полосе, неотличима с точностью до ε от исходной, т.е. от $f(x)$.

Если функцию не надо знать абсолютно точно, то сколь угодно сложную функцию можно заменить какой-либо близкой к ней, но более простой. В качестве таких простых функций могут быть выбраны степенные функции, либо тригонометрические функции.

Можно утверждать, что как бы точно ни была устроена непрерывная функция, и какое бы маленькое ε ни выбрали, найдется некоторая сумма степенных функций (многочлены) или некоторая сумма последовательности тригонометрических

функций, не отличимая с точностью до ε от этой конкретной непрерывной функции.

Каждое слагаемое такой суммы зависит от аргумента x и номера n , определяющего место этого слагаемого в последовательности. Корень общего члена последовательности принадлежит к одному из трех типов:

$$\text{а) } x^n / n!; (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}; x^{2n} / (2n)!;$$

$$\text{б) } \frac{\cos x}{n}; \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \frac{\cos 2nx}{4n-1};$$

$$\text{в) } \frac{x^{4n+1}}{4n+1}; (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}; \frac{n+1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

В случае а) для вычисления члена суммы целесообразно использовать рекуррентные соотношения, т.е. выразить последующий член суммы через предыдущий. Это позволит существенно сократить объем вычислительной работы. Кроме того, вычисление члена суммы по общей формуле невозможно (например, содержащего $n!$)

В случае б) каждый член суммы вычисляется по общей формуле. В случае в) член суммы целесообразно представить в виде двух сомножителей, один из которых вычисляется по рекуррентному соотношению, а другой – непосредственно.

Например, если общий член суммы $a_n = \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$, то полагаем $C_n = x^{4n+1}$ и вычисляем рекуррентно $C_n = C_{n-1} x^4$, а $1/(4n+1)$ – непосредственно.

Работа сводится к нахождению суммы некоторого количества слагаемых $S = \sum_n a_n(x)$ при различных значениях параметра суммирования x . Алгоритмы решения задач суммирования при значениях параметра суммирования, изменяющегося в некотором диапазоне с заданным шагом, сводятся к двум вложенным циклам. Внутренний цикл суммирует слагаемые при фиксированном

параметре x , а внешний организует изменение параметра x . Кроме того, необходимо вычислить (для сравнения) точное значение функции $y=f(x)$, которая представлена данным рядом. Диапазон изменения аргумента x задается в виде $a \leq x \leq b$. Вычисление суммы проводится для следующих значений аргумента: $x=a, a+h, \dots, a+9h$, где $h = \frac{b-a}{9}$.

В качестве примера составим программу для вычисления суммы $S = 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} + \dots + (-1)^{N-1} \frac{2N-1}{(2N)!} x^{2N}$, $N=10$ и функции $y = \cos x + x \sin x$ при $0 \leq x \leq 1$.

Вычислим $h = \frac{1-0}{9} = 0,11$.

Подставим сумму последовательности в виде

$$S = \sum_{n=0}^9 (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{(2n)!} x^{2n}.$$

Общий член суммы $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{(2n)!} x^{2n}$ относится к типу а).

Выразим $(n+1)$ -й член через n -й:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)(2n+1)x^{2(n+1)}(2n)!}{(2(n+1))!(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n}} = -\frac{x^2}{(2n-1)(2n+2)}.$$

Тогда $a_{n+1} = -a_n \frac{x^2}{(2n-1)(2n+2)}$ и вычисление суммы будем

осуществлять с помощью рекуррентной формулы: $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, $n=0, 1 \dots 9$; $S_0 = 1$.

Схема алгоритма решения этой задачи показана на рисунке 2.2. При составлении схемы алгоритма нет необходимости использовать переменные с индексами S_n и a_n , поскольку одновременно в вычислениях участвуют лишь по два значения S_n и

S_{n+1} , a_n и a_{n+1} . Поэтому вместо S_n , S_{n+1} и a_n , a_{n+1} можно использовать простые переменные S и a , значения которых будут изменяться каждый раз при прибавлении очередного члена суммы.

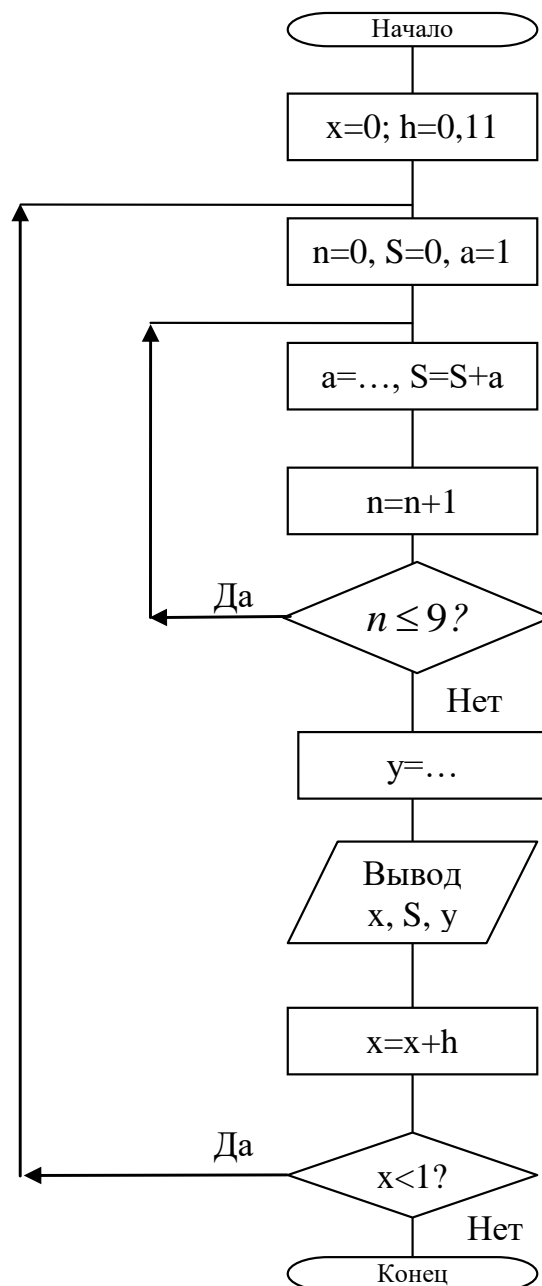


Рисунок 2.2 – Алгоритм решения задачи

Для проверки правильности работы программы рассмотрим механизм вычисления конечных сумм в среде инженерных математических расчетов MathCad. Основное преимущество этой среды – большая наглядность математических расчетов. Документ системы MathCad выглядит как лист бумаги, испещренный

«привычными» формулами, т.е. их вид несколько не отличается от того, как мы их пишем. Например, функция для вычисления нашей конечной суммы будет выглядеть следующим образом:

$$s(x) := \sum_{n=0}^9 (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

Все операторы (кроме знака суммы) набираются с помощью удобных наборных панелей путем простого нажатия мышкой на соответствующую иконку. Можно осуществлять ввод и только с клавиатуры. Например, для набора представленной выше функции в MathCad 7 Pro необходимо нажать следующую комбинацию клавиш:

S(X): Ctrl+shift+4 (- 1) ^ N - 1 Space Space *(2 * N - 1) / (2 * N) !
Space * X ^ 2 * N

где Space – клавиша “пробел”. Далее используя клавиши управления курсором необходимо заполнить пределы суммы ($n=0$ и 9). Для вывода значений функции на экран достаточно в скобках передать ей аргумент и нажать клавишу «=».

Например: $s(0.5) = 1.117$

Или если Вам нужен ряд значений функции, то необходимо создать массив входных аргументов. Например, если надо иметь 10 значений аргумента в пределах $0 < x < 1$, то вводим:

$x := 0, 0.11..1$ (набирается: $x : 0 , 0 . 11 ; 1$),

где 0 – первое значение аргумента;

0.11- второе значение аргумента;

1 – последнее значение.

Теперь чтобы получить десять значений нашей функции, набираем ‘ $s(x)=$ ‘, и на экране высветится десять искомым значений функции $s(x)$.

Ниже полностью приводится документ MathCad для нахождения значений заданной функции и значений эквивалентного степенного ряда.

$$s(x) := \sum_{n=0}^9 (-1)^{n-1} \cdot \frac{(2n-1)}{(2n)!} \cdot x^{2n}$$

$$s(0.5) = 1.117$$

$$y(x) := \cos(x) + x \cdot \sin(x)$$

$$x := 0, 0.11.. 1$$

x =	s(x) =	y(x) =
0	1	1
0.11	1.006	1.006
0.22	1.024	1.024
0.33	1.053	1.053
0.44	1.092	1.092
0.55	1.14	1.14
0.66	1.195	1.195
0.77	1.254	1.254
0.88	1.315	1.315
0.99	1.376	1.376

2.2 Цель занятия

Приобрести навыки составления и отладки программ для решения задач, сводящихся к нахождению суммы некоторого количества слагаемых, которые могут быть определены по общей формуле.

2.3 Содержание и порядок выполнения занятия

Из таблицы 1 взять необходимый вариант задания (номер варианта соответствует номеру студента в журнале преподавателя). Записать расчетные формулы для вычисления слагаемого и суммы. Составить схему алгоритма для вычисления заданной суммы в указанном диапазоне изменения аргумента x с заданным шагом. Для получения шага диапазон изменения x разделить на 10. Составить программу решения задачи на данном алгоритмическом языке. В программе предусмотреть вычисление точного значения функции y , представленной заданным функциональным рядом. Ввести программу в ЭВМ. Исправить синтаксические ошибки. Отладить программу. Записать результаты счета по программе.

Проверить результаты работы в системе MathCad. Сравнить результаты, полученные по точной формуле, с результатами, полученными при разложении функции в ряд.

2.4 Контрольные вопросы

1. Почему при вычислении члены суммы и самой суммы в программе не используются индексированные переменные?

2. Значения каких переменных необходимо "восстановить" (снова задать начальные значения) перед вычислением суммы при новом значении параметра суммирования x ?

3. Из каких соображений выбираются начальные значения слагаемого и суммы при входе в блок 3, реализующий вычисления по рекуррентным формулам (рисунок 2.2)?

4. Из каких соображений выбирается начальное значение n .

5. Как целесообразно вычислять $(-1)^n$ непосредственно или по рекуррентной формуле?

Таблица 2.1 – Исходные данные

№	Функция $y=f(x)$	Представление функции f в виде ряда $S(x,n)$	Диапазон изменения аргумента x	Число членов ряда
1	$y = 3^x$	$S = \sum_{n=0}^{19} \frac{\ln^n 3}{n!} x^n$	$0,1 \leq x \leq 1$	20
2	$y = -\ln \left 2 \sin \frac{x}{2} \right $	$S = \sum_{n=1}^{40} \frac{\cos(nx)}{n}$	$\pi/5 \leq x \leq \pi/5$	40
3	$y = \sin(x)$	$S = \sum_{n=0}^9 (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$0,1 \leq x \leq 1$	10
4	$y = \frac{x}{2}$	$S = \sum_{n=1}^{40} (-1)^{n+1} \frac{\sin(nx)}{n}$	$\pi/5 \leq x \leq 4\pi/5$	40
5	$y = e^x$	$S = \sum_{n=0}^{14} \frac{x^n}{n!}$	$1 \leq x \leq 2$	15

6	$y = \cos(x)$	$S = \sum_{n=0}^9 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$0,1 \leq x \leq 1$	10
7	$y = \frac{x \sin(\pi/4)}{1 - 2x \cos(\pi/4) + x^2}$	$S = \sum_{n=1}^{40} x^n \sin\left(n \frac{\pi}{4}\right)$	$0,1 \leq x \leq 0,8$	40
8	$y = e^{\cos x} \cdot \cos(\sin x)$	$S = \sum_0^{19} \frac{\cos(nx)}{n!}$	$0,1 \leq x \leq 1$	20
9	$y = (1 + 2x^2)e^{x^2}$	$S = \sum_{n=0}^9 \frac{2n+1}{n!} x^{2n}$	$0,1 \leq x \leq 1$	10
10	$y = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right)$	$S = \sum_{n=1}^{20} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}$	$\pi/5 \leq x \leq \pi$	20
11	$y = \frac{\pi}{4}$	$S = \sum_{n=1}^{40} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$	$\pi/10 \leq x \leq 9\pi/10$	40
12	$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sum_0^9 \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$0,1 \leq x \leq 1$	10
13	$y = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \sin x $	$S = \sum_{n=1}^{50} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$	$0,1 \leq x \leq 0,8$	50
14	$y = \operatorname{arctg} x$	$S = \sum_{n=1}^{40} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$0,1 \leq x \leq 0,5$	40
15	$y = \ln \frac{1}{2 + 2x + x^2}$	$S = \sum_{n=1}^{40} (-1)^n \frac{(1+x)^{2n}}{n}$	$-2 \leq x \leq -1$	40

Практическое занятие № 3

Анализ влияния отдельных факторов в моделях

3.1 Краткие теоретические сведения

На практике возможен случай, когда на автоматической линии несколько станков параллельно выполняют некоторую операцию. Для правильного планирования последующей обработки важно знать, насколько однотипны средние размеры деталей, получаемые на параллельно работающих станках. Здесь имеет место лишь один фактор, влияющий на размер деталей, – станки, на которых они изготавливаются. Исследователя интересует, насколько существенно влияние этого фактора на размеры деталей? Предположим, что совокупности размеров деталей, изготовленных на каждом станке, имеют нормальное распределение и равные дисперсии. Имеем m станков, следовательно, m совокупностей или уровней, на которых произведено n_1, n_2, \dots, n_m наблюдений. Для простоты рассуждений положим, что $n_1 = n_2 = \dots = n_m$.

Размеры деталей, составляющие n_i наблюдений на i -м уровне, обозначим $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$. Тогда все наблюдения можно представить в виде таблицы, которую назовем матрицей наблюдений (таблица 3.1).

Таблица 3.1 - Матрица наблюдений

Уровни	Наблюдения			
	1	2	j	n
1	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1n}
2	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2n}
...
i	x_{i1}	x_{i2}	x_{ij}	x_{in}
...
m	x_{m1}	x_{m2}	x_{mj}	x_{mn}

Будем полагать, что для i -го уровня n наблюдений имеют среднюю β_i , равную сумме общей средней μ , и вариации ее,

обусловленной i -м уровнем фактора, т.е. $\beta_i = \mu + \gamma_i$. Тогда одно наблюдение можно представить в следующем виде:

$$x_{ij} = \mu + \gamma_i + \xi_{ij} = \beta_i + \xi_{ij} \quad (3.1)$$

где (μ – общая средняя; γ – эффект, обусловленный i -м уровнем фактора; ξ_{ij} – вариация результатов внутри отдельного уровня. Член $+ \xi_{ij}$ характеризует влияние всех не учтенных моделью (3.1) факторов. Согласно общей задаче дисперсионного анализа, нужно оценить существенность влияния фактора γ на размеры деталей. Общую вариацию переменной x_{ij} можно разложить на части, одна из которых характеризует влияние фактора γ , другая – влияние неучтенных факторов. Для этого необходимо найти оценку общей средней μ и оценки средних по уровням β_i . Очевидно, что оценкой β является средняя арифметическая n наблюдений i -го уровня, т. е.

$$\bar{x}_{i*} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} .$$

Звездочка в индексе при \bar{x}_i означает, что наблюдения фиксированы на i -м уровне. Средняя арифметическая всей совокупности наблюдений является оценкой общей средней μ , т. е.

$$\bar{x} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad \text{или} \quad \bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{i*} .$$

Найдем сумму квадратов отклонений x_{ij} от \bar{x} , т.е.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 . \text{ Представим ее в виде:}$$

$$\begin{aligned}
Q &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*} + \bar{x}_{i*} - \bar{x})^2 = \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2 + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*})(\bar{x}_{i*} - \bar{x})
\end{aligned} \tag{3.2}$$

причем

$$S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*})(\bar{x}_{i*} - \bar{x}) = \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*}) \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i*} - \bar{x}).$$

Но $\sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*}) = 0$, так как это есть сумма отклонений переменных одной совокупности от средней арифметической этой же совокупности, т.е. $S=0$. Второй член суммы (3.2) запишем в виде:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2 = n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2.$$

Тогда основное тождество (3.2) можно представить следующим образом:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2}_Q = \underbrace{n \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2}_{Q_2}$$

или

$$Q = Q_1 + Q_2 \tag{3.3}$$

Слагаемое Q_i является суммой квадратов разностей между средними уровнями и средней всей совокупности наблюдений. Эта

сумма называется суммой квадратов отклонений между группами и характеризует расхождение между уровнями. Величину Q_1 называют также рассеиванием по факторам, т.е. рассеиванием за счет исследуемого фактора. Слагаемое Q_2 является суммой квадратов разностей между отдельными наблюдениями и средней i -го уровня. Эта сумма называется суммой квадратов отклонений внутри группы и характеризует расхождение между наблюдениями i -го уровня. Величину Q_2 называют также остаточным рассеиванием, т.е. рассеиванием за счет неучтенных факторов. Наконец, Q называется общей или полной суммой квадратов отклонений отдельных наблюдений от общей средней \bar{x} . Зная суммы квадратов Q , Q_1 и Q_2 , можно оценить соответствующие дисперсии: общую, межгрупповую и внутригрупповую. Оценим дисперсии s_1^2 , s_2^2 , s^2 :

$$s_1^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2 = \frac{Q_1 m - 1}{m-1},$$

$$s_2^2 = \frac{1}{m(n-1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2 = \frac{Q_2}{m(n-1)},$$

$$s^2 = \frac{1}{mn-1} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2.$$

Если влияние всех уровней фактора γ одинаково, то s_1^2 и s_2^2 – оценки общей дисперсии. Тогда для оценки существенности влияния фактора γ достаточно проверить гипотезу $H_0: s_1^2 = s_2^2$; для этого вычисляют статистику $F = s_1^2 / s_2^2$ с $k_1 = m-1$ и $k_2 = m(n-1)$ степенями свободы. Затем по таблицам для уровня значимости α находят критическое значение F_{α, k_1, k_2} . Если $F > F_{\alpha, k_1, k_2}$, то нулевая гипотеза отвергается и делается заключение о существенном влиянии фактора γ . При $F < F_{\alpha, k_1, k_2}$ нет оснований отвергать нулевую гипотезу и считают, что влияние фактора γ несущественно.

Сравнивая межгрупповую и остаточную дисперсии, по величине их отношения судят, насколько сильно проявляется влияние факторов.

Однофакторный дисперсионный анализ удобно представить в виде таблицы 3.2.

Таблица 3.2 – Однофакторный дисперсионный анализ

Компоненты дисперсии	Сумма квадратов	Число степеней свободы k	Средний квадрат	Оценка дисперсий
Межгрупповая	$\sum (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2$	m-1	$\frac{1}{m-1} \sum_{ij} (\bar{x}_{i*} - \bar{x})^2$	s_1^2
Внутригрупповая	$\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2$	m(n-1)	$\frac{1}{m(n-1)} \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x}_{i*})^2$	s_2^2
Полная (общая)	$\sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$	mn-1	$\frac{1}{mn-1} \sum_{ij} (x_{ij} - \bar{x})^2$	

3.2 Порядок выполнения занятия

1. Загрузите пакет MathCad

2.Используя генератор случайных чисел пакета MathCad создайте четыре нормально распределенных выборки по 28 элементов в каждой, предварительно задавшись средним арифметическим каждой выборки и средним квадратическим отклонением в ней.

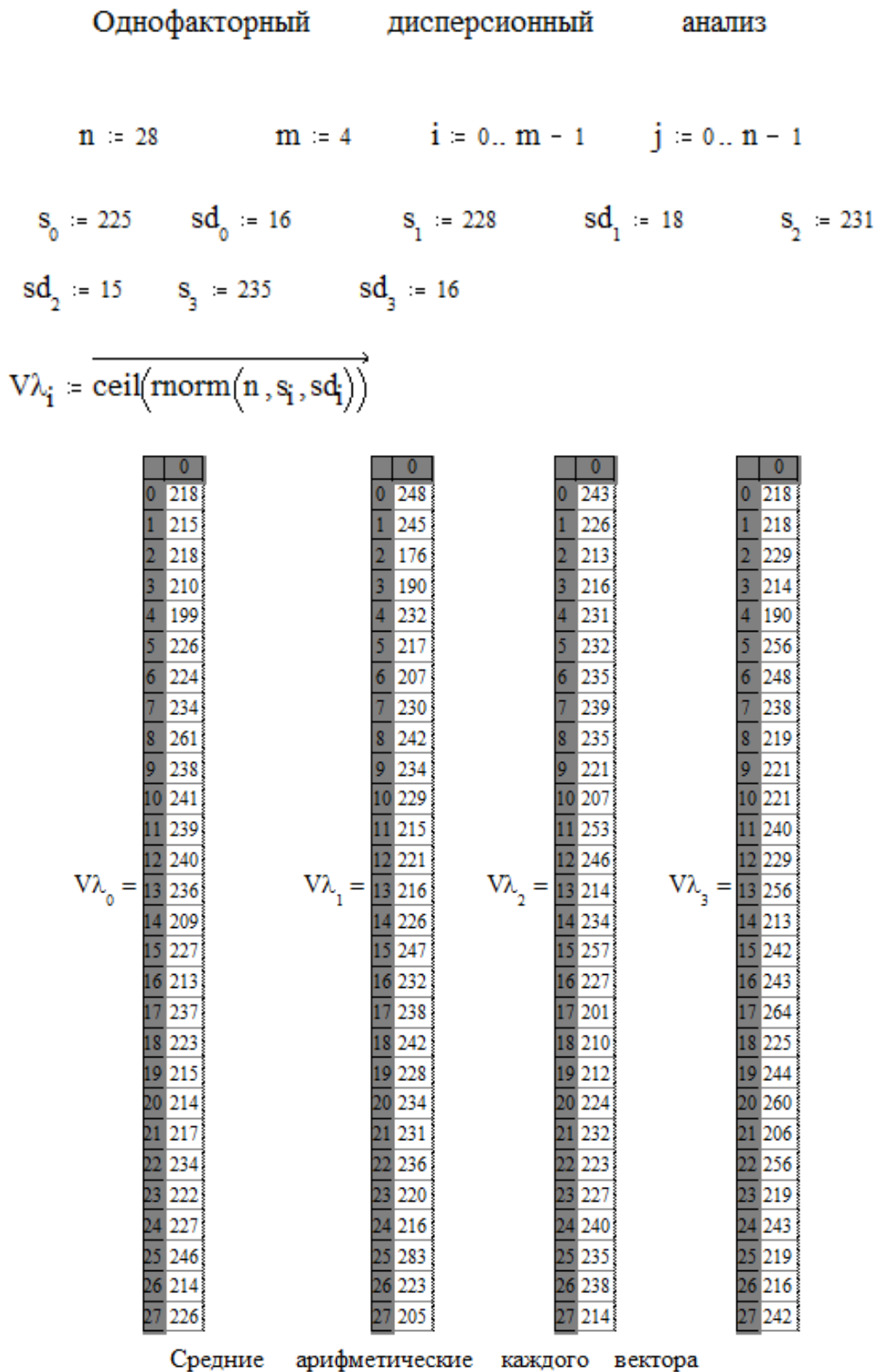
3. Определите среднее арифметическое каждой выборки.

4. Определите среднее арифметическое всей совокупности.

5. Определите сумму квадратов отклонений между группами и внутри группы, предварительно определив число степеней свободы k.

6. Вычислите статистику F при заданном числе степеней свободы k и сравните ее с табличным значением. Если эта величина больше расчетной, то это говорит в пользу нулевой гипотезы.

7. Примерный вид листа в пакете MathCad показан на рисунке 3.1 а, б, в, г.



а)

Рисунок 3.1 - Примерный вид листа в пакете MathCad

$$\lambda_{m_i} := \frac{\sum V\lambda_i}{n} \quad \lambda_m = \begin{bmatrix} 225.821 \\ 227.25 \\ 228.036 \\ 231.75 \end{bmatrix}$$

Средняя арифметическая всей совокупности

$$\lambda_s := \frac{\sum \lambda_m}{m} \quad \lambda_s = 228.214$$

Сумма квадратов отклонений между группами

с $k_1 := m - 1$ степеней свободы

$$Q_1 := n \cdot \sum_{i=0}^{m-1} (\lambda_{m_i} - \lambda_s)^2 \quad Q_1 = 537.286$$

Сумма квадратов отклонений внутри группы

с $k_2 := m \cdot n - m$ степенями свободы

$$Q_2 := \sum_i \sum_j \left[\left[(V\lambda_i)_j - \lambda_{m_i} \right]^2 \right] \quad Q_2 = 2.977 \cdot 10^4$$

Вычисляем статистику F при $k_1 = 3$

$$F := \frac{\left(\frac{Q_1}{k_1} \right)}{\left(\frac{Q_2}{k_2} \right)} \quad F = 0.65$$

б)

Рисунок 3.1 - Примерный вид листа в пакете MathCad

Непараметрический критерий проверки однородности

(критерий Джонкхиера)

$$U_{u,v} := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \text{if} \left[(V\lambda_u)_i < (V\lambda_v)_j, 1, \text{if} \left[(V\lambda_u)_i = (V\lambda_v)_j, \frac{1}{2}, 0 \right] \right]$$

Определяем статистику Джонкхиера J

$$J := \sum_{u=0}^{m-1} \sum_{v=0}^{m-1} \text{if} [u < v, U(u,v), 0] \quad J = 2.618 \cdot 10^3$$

Для нахождения минимального уровня значимости критерия воспользуемся нормальной аппроксимацией величины J .

Общее число наблюдений N

$$N := n \cdot m$$

$$MJ := \frac{1}{4} \cdot (N^2 - m \cdot n^2) \quad MJ = 2.352 \cdot 10^3$$

$$DJ := \frac{1}{72} (N^2 \cdot (2 \cdot N + 3) - m \cdot n^2 \cdot (2 \cdot n + 3))$$

$$DJ = 3.698 \cdot 10^4$$

$$J1 := \frac{(J - MJ)}{\sqrt{DJ}} \quad J1 = 1.383$$

По таблице нормального распределения уровень значимости $J1$

в)

Рисунок 3.1 - Примерный вид листа в пакете MathCad

3.3 Библиографический список

1. Тюрин, Ю.Н. Статистический анализ данных на компьютере/ Ю.Н. Тюрин, А.А. Макаров/ Под ред. В.Э. Фигурнова – М.: ИНФА – М, 1998. – 528 с.

Практическое занятие №4

Математическое моделирование элементов и систем в пакете MATLAB

Целью занятия является ознакомление с описанием, моделированием и исследованием динамических систем управления в пространстве состояний.

4.1 Постановка задачи

Даны математические модели трех систем и структурная схема, представляющая собой соединение этих систем. Необходимо:

- получить модель результирующей системы в пространстве состояний,
- исследовать наблюдаемость и управляемость трех подсистем в отдельности и их соединения в соответствии со схемой.

Многомерные системы, в отличие от одномерных имеют несколько входов и несколько выходов.

Для описания таких систем используются три набора параметров (три вектора), рисунок 4.1:

1. вектор входных воздействий (управлений);
2. вектор переменных состояний;
3. вектор выходных параметров
и двумя преобразованиями:
 1. преобразование “входы-состояния”;
 2. преобразование “состояния-выходы”.

Широкое распространение, обусловленное разработанным математическим аппаратом, получили линейные модели многомерных систем в пространстве состояний, которые имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t); \end{aligned} \tag{4.1}$$

первое соотношение называется уравнением состояния, второе – уравнением выхода. Здесь $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \cdot \hat{I} \cdot R^n$ – вектор переменных состояний; $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T \cdot \hat{I} \cdot R^n$ – вектор управлений; $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \cdot \hat{I} \cdot R^n$ – вектор измеряемых параметров; t – время; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – матрицы размерности $(n' \times n)$, $(n' \times r)$, $(m' \times n)$ соответственно. Предполагается, что известны начальные состояния $x(t_0) = x_0$, где t_0 – начальный момент времени.

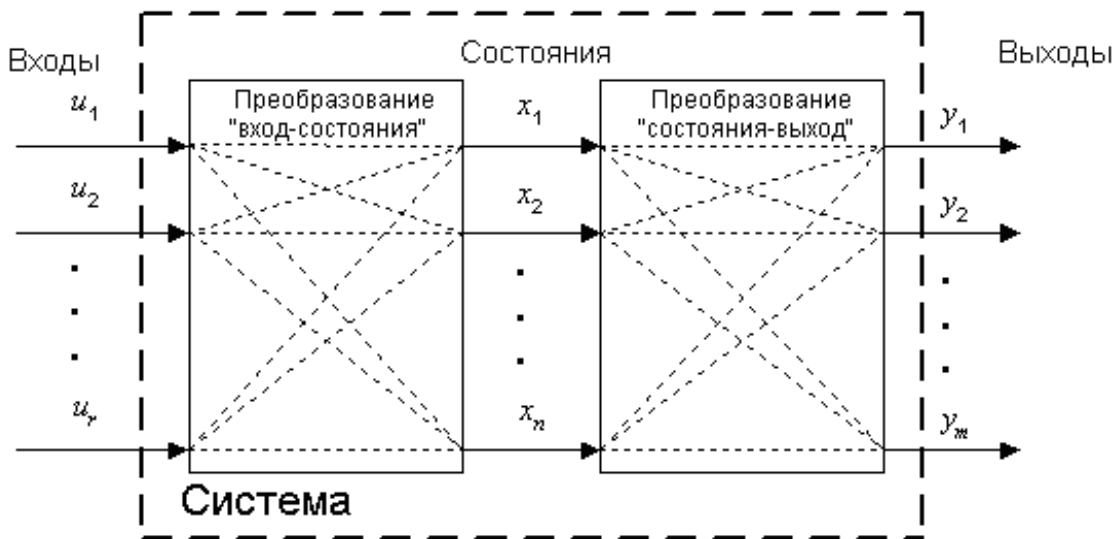


Рисунок 4.1 - Многомерные системы

Если матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ не зависят от времени t , то система называется стационарной. Далее предполагается, что системы стационарны.

Рассмотрим задачи соединения двух подсистем в систему. При соединении возможны три варианта (рисунок 4.2): параллельное (а), последовательное (б) и в обратной связи (в). Предполагается, что обе системы описываются в пространстве состояний соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u^1; y^1 = C \cdot x^1; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u^2; y^2 = C \cdot x^2; \end{aligned}$$

где x^1, u^1, y^1 – векторы состояний, управлений, выходов первой системы, x^2, u^2, y^2 – второй. Необходимо по известным матрицам $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ получить матрицы A, B, C (рисунок 4.2 г).

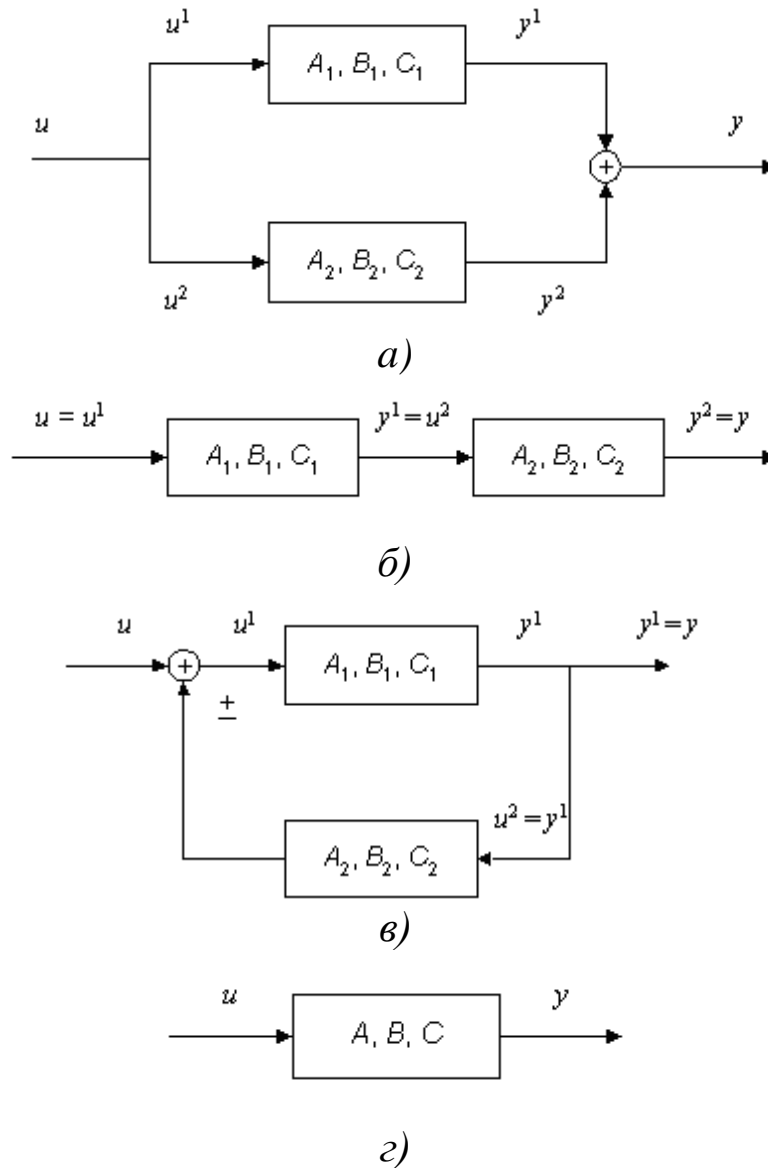


Рисунок 4.2 - Соединение двух систем

1. Параллельное соединение.

Запишем уравнения системы, с учетом особенностей соединения, указанных на рисунке 4.2 а.

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u; \\ y &= C_1 x^1 + C_2 x^2;\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u; \\ y &= (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Окончательно матрицы соединения имеют вид –

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}; \quad C = (C_1 \quad C_2).$$

2. Последовательное соединение –

$$\begin{aligned}\dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1; \\ y &= C_2 x^2;\end{aligned}$$

в матричном виде –

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u; \\ y &= (0 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Окончательно, имеем

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad C_2).$$

3. Обратная связь –

$$\dot{x}^1 = A_1 x^1 + B_1 u \pm B_1 C_2 x^2;$$

$$\dot{x}^2 = A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1;$$

$$y = C_2 x^2;$$

в матричном виде –

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u;$$

$$y = (C_1 \quad 0) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (C_1 \quad 0).$$

Для линейных систем легко показать справедливость следующего результата, называемого принципом суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме нескольких воздействий, равен сумме эффектов от нескольких воздействий в отдельности. Закон изменения вектора состояний линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного колебания

$$x(t) = x_c(t) + x_b(t).$$

Свободное движение $x_c(t)$ происходит при отсутствии внешнего воздействия в ненулевых начальных условиях. Оно

определяется решением однородной системы уравнений, соответствующей исходному уравнению состояний

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

с начальными условиями $x(t_0) = x_0$.

Вынужденное движение $x_B(t)$ – это реакция системы на внешнее воздействие $u(t)$ при нулевых начальных условиях. Оно определяется решением неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях.

Для многомерных нестационарных систем, описываемых соотношениями, поведение векторов состояния и выхода определяется по формулам

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (4.2)$$

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau, \quad (4.3)$$

где $\Phi(t, \tau)$ – переходная матрица, или матрица Коши, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau), \quad (4.4)$$

с начальным условием $\Phi(\tau, \tau) = E$.

Первые слагаемые в (4.2), (4.3) описывают свободное движение, а вторые - вынужденное.

Для многомерных стационарных систем, описываемых уравнениями (4.1), законы изменения вектора состояния и вектора выхода находятся по формулам

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t C\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

где $\Phi(t-\tau)$ – переходная матрица стационарной системы, зависящая от разности $t-\tau$. В данном случае решение уравнения (4.4) имеет вид

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau) = \exp[A(t - \tau)].$$

Одними из важнейших задач теории управления является исследование управляемости и наблюдаемости динамических систем. Приведем соответствующие определения и критерии для стационарных линейных систем, полученные Калманом.

Система называется вполне управляемой, если выбором управляющего воздействия $u(t)$ на интервале времени $[t_0, t_1]$ можно перевести систему из любого начального состояния $x(t_0)$ в произвольное заранее заданное конечное состояние $x(t_1)$.

Система называется вполне наблюдаемой, если по реакции $y(t_1)$ на выходе системы на интервале времени $[t_0, t_1]$ при заданном управляющем воздействии $u(t)$ можно определить начальное состояние $x(t_0)$.

Критерий управляемости линейных систем. Для того чтобы система была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости

$$M_U = (B | AB | A^2B | \dots | A^{n-1}B)$$

равнялся размерности вектора состояния: $\text{rank } M_U = n$

Критерий наблюдаемости линейных систем. Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости

$$M_Y = (C^T | A^T C^T | (A^T)^2 C | \dots | (A^T)^{n-1} C^T)$$

равнялся размерности вектора состояния: $\text{rank } M_Y = n$.

Знак $Z = (X | Y)$ означает присоединение матриц, т.е. для получения i -ой строки матрицы Z берется сначала i -ая строка матрицы X , затем следуют элементы i -ой строки матрицы Y . Предполагается, что количество строк у матриц одинаково.

Напомним, что под рангом матрицы подразумевается наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк.

4.2 Последовательность выполнения

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в пространстве состояний. Синтаксис команды, создающий непрерывную LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде ss-объекта с одним входом и одним выходом

`SS(A, B, C, D)`

В эту функцию в качестве параметров передаются матрицы уравнений состояний и выходов вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t);$$

в связи с тем, что рассматривается модель вида (4.1), то матрица динамики D будет нулевой.

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таблице 4.2.

Для получения результатов вычисления матриц, результирующей системы, по структурной схеме, воспользуемся последними двумя командами.

Функция `append` создает объект `sys`, представляющий собой объединение всех подсистем. При этом первый входной сигнал первой системы становится входом номер 1, второй входной сигнал

первой системы – номер 2, и т.д. далее идут входы второй системы, и т.д.; аналогично определяются и выходы.

Таблица 4.2 - Некоторые команды Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
ctrb(<LTI-объект>) ctrb(A, B)	Формирование матрицы управляемости
obsv(<LTI-объект>) obsv(A, C)	Формирование матрицы наблюдаемости
parallel(<LTI1>,<LTI2>)	Параллельное соединение
series(<LTI1>,<LTI2>)	Последовательное соединение
feedback(<LTI1>,<LTI2>)	Соединение обратной связью
append(<LTI1>, ..., <LTIN>)	Объединение систем
connect(<sys>,<Con>,<in>,<out>)	Установление связей в соединении

В функции connect – параметр <Con> определяет матрицу связей по структурной схеме. Матрица формируется по следующему правилу: каждая строка представляет собой один вход системы sys, первый элемент – номер входа (в соответствии с порядком в команде append), затем идут номера выходов, которые суммируются и подаются на рассматриваемый вход. Параметры <in>, <out> – строки из номеров входов и выходов соединения, являющиеся внешними.

Например, для последовательного соединения двух систем (рисунок 4.2 б):

```
sys1= ss(A1, B1, C1, D1)
sys2= ss(A2, B2, C2, D2)
sys=append (sys1, sys2)
sysc=connect(sys, [2 1], [1], [2])
```

В этом случае на вход второй системы (общий вход номер 2), поступает выход первой (общий выход номер 1); вход первой системы (номер один) и выход второй системы (номер два) являются внешними.

Последовательность выполнения лабораторной работы следующая:

1. Ознакомиться с основными элементами теории.
2. Привести все системы в варианте в форму (4.1).
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать три ss-объекта, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить управляемость и наблюдаемость каждой системы.
6. В соответствии со структурной схемой получить матрицы А, В, С соединения.
7. Определить управляемость и наблюдаемость соединения.
8. Оформить отчет.

4.3 Методический пример

Даны три линейные стационарные системы:

$$\begin{aligned}
 1. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{array} \right. ; \\
 2. \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (4 \ 3) x^2 \end{array} \right. ; \\
 3. \left\{ \begin{array}{l} \ddot{x}^3 - 3\dot{x}^3 - 2x^3 = 4u \\ y^3 = x^3 \end{array} \right. ;
 \end{aligned}$$

и имеется структурная схема соединения систем:

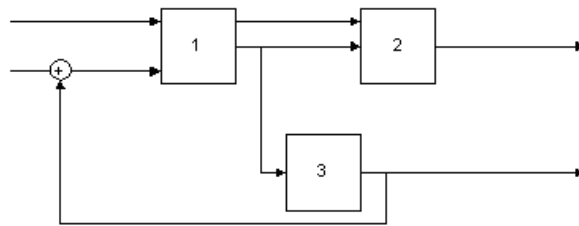


Рисунок 4.3 - Вариант задания

1. Приведем систему 3 к виду (4.1), для этого введем переменные

$$\begin{aligned}x_1^3 &= x^3 \\x_2^3 &= \dot{x}_1^3 = \dot{x}^3;\end{aligned}$$

и, подставляя их в исходные уравнения, получим –

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 - 3x_2^3 - 2x_1^3 = 4u^3; \\ y^3 = x_1^3 \end{cases}; \quad \begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 = 2x_2^3 + 3x_1^3 + 4u^3; \\ y^3 = x_1^3 \end{cases}; \quad \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u^3.$$

2. Создадим матрицы первой системы –

```
>> A1=[7 3;2 1]
```

```
A1 =
```

```
    7    3
    2    1
```

```
>> B1=[1 0; 0 2]
```

```
B1 =
```

```
    1    0
    0    2
```

```
>> C1=[3 -2; 2 1]
```

```
C1 =
```

```
    3   -2
    2    1
```

Создавая, аналогично, матрицы двух других систем создадим SS-объекты:

```
>> s1=ss(A1, B1, C1,0)
```

```
a =
      x1  x2
x1    7   3
x2    2   1
```

```
b =
      u1  u2
x1    1   0
x2    0   2
```

```
c =
      x1  x2
y1    3  -2
y2    2   1
```

```
d =
      u1  u2
y1    0   0
y2    0   0
```

Continuous-time model.

```
>> s2=ss(A2, B2, C2,0)
```

```
a =
      x1  x2
x1    1   2
x2    3   2
```

```
b =
      u1  u2
x1    1   5
x2    2   1
```

```
c =
      x1  x2
y1    4   3
```

```
d =
      u1  u2
y1    0   0
```

Continuous-time model.

```
>> s3=ss(A3, B3, C3,0)
```

```
a =
```

```
      x1  x2
x1    0   1
x2    2   3
```

```
b =
```

```
      ul
x1    0
x2    4
```

```
c =
```

```
      x1  x2
y1    1   0
```

```
d =
```

```
      ul
y1    0
```

Continuous-time model.

3. Исследуем наблюдаемость и управляемость каждой системы, для чего построим соответствующие матрицы и посчитаем их ранги –

```
>> rank(ctrb(A1,B1))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A1,C1))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(ctrb(A2,B2))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A2,C2))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(ctrb(A3,B3))

ans =

     2

>> rank(observ(A3,C3))

ans =

     2
```

Видно, что во всех случаях ранги матриц управляемости и наблюдаемости совпадают с размерностями пространства состояний.

4. Получим систему, определяемую соединением.

Для корректного использования функции connect введем дополнительную систему, передаточная функция которой равна 1 (рисунок 4.4).

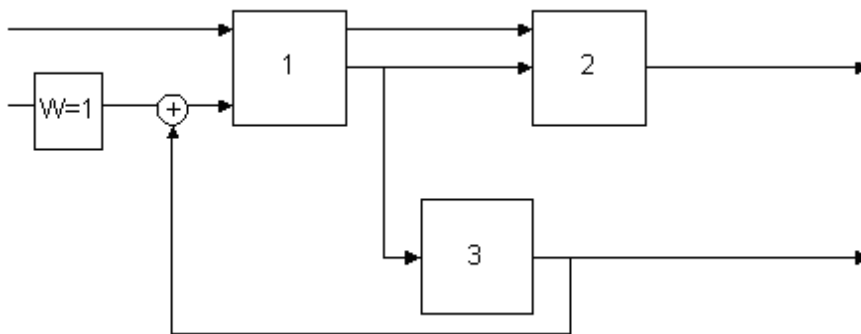


Рисунок 4.4 - Эквивалентная схема

```
>> s4 = tf(1)
Transfer function:
1
>> sys=append(s1,s2,s3,s4);
>> Q=[2 -4 5; 3 1 0; 4 2 0; 5 2 0];
>> in=[1 5];
>> out=[3 4];
>> s_com=connect(sys,Q, in,out);
```

Обращаясь к данным объекта, можно получить матрицы A, B, C:


```
>> A=s_com.A;
>> B=s_com.B;
>> C=s_com.C;
```

4. Вычислим ранги матриц наблюдаемости и управляемости итоговой системы:

```
>> rank(ctrb(A,B))
ans =
     6
>> rank(observ(A,C))
ans =
     6
```

Результаты показывают, что система управляема и наблюдаема.

4.4 Отчет о занятии

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению практических занятий в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Результаты выполнения работы.
4. Анализ результатов и выводы.

4.5 Контрольные вопросы

1. Дать определение и примеры состояний управляемой системы.
2. Показать на примере справедливость принципа суперпозиции.
3. Вывести уравнения в пространстве состояний для заданной схемы соединения трех систем.
4. Получить описание одномерной системы (4.1) в канонической форме Коши.
5. Провести анализ влияния размерности векторов управления и выходов на управляемость и наблюдаемость схемы.

Варианты заданий

№	Уравнения систем	Схем а
1	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	1
2	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	2
3	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$	3

	$2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (-4 \ 3) x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	
4	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (-1 \ 2) x^2 \end{cases}$	4
5	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (-20 \ 3) x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (-3 \ 2) x^2 \end{cases}$	2

6	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	3
7	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	1
8	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	2

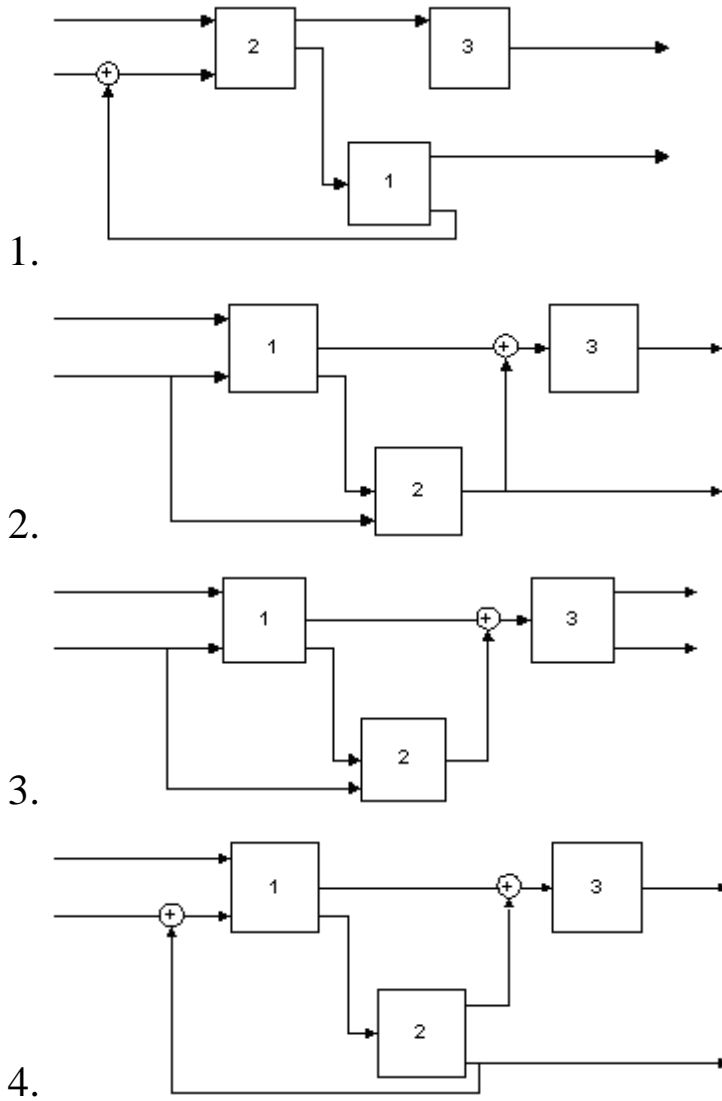
	3. $\begin{cases} \ddot{x}^3 = 3\dot{x}^3 - x^3 = 5u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$	
9	1. $\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -2\ddot{x}^2 + 3\dot{x}^2 - x^2 = 5u \\ y^2 = x^2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	5
10	1. $\begin{cases} \ddot{x}^1 + 3\dot{x}^1 - x^1 = -2u \\ y^1 = x^1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	6
11	1. $\begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} -\ddot{x}^3 + 3\dot{x}^3 - 2x^3 = 2u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$	5

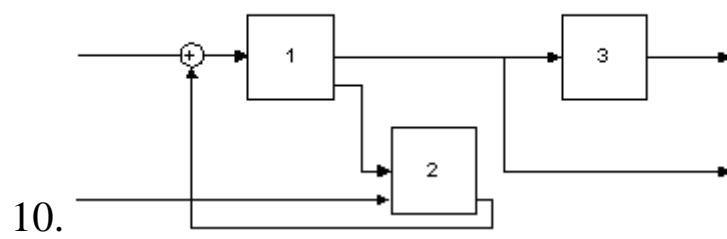
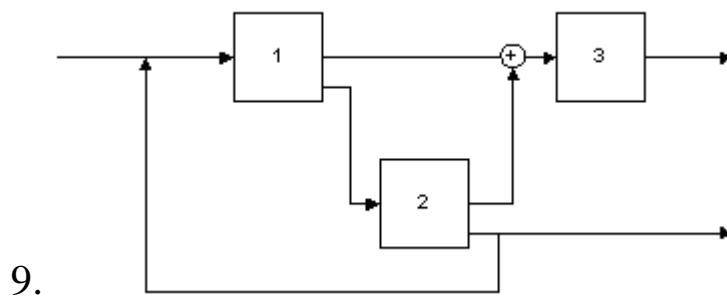
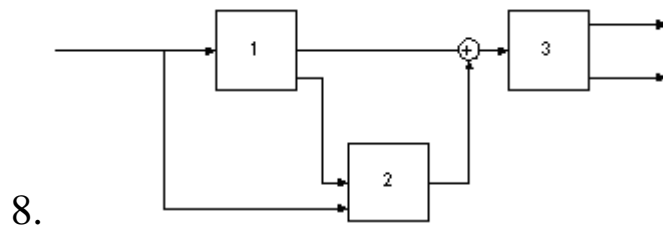
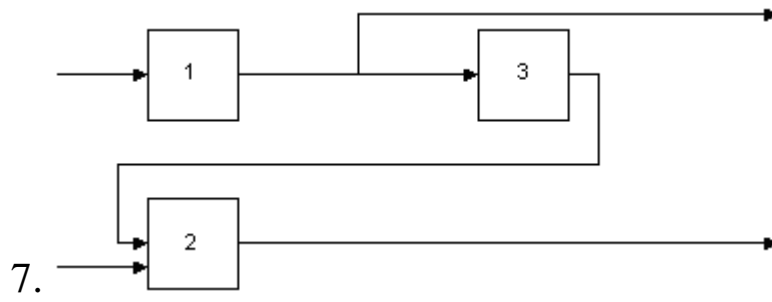
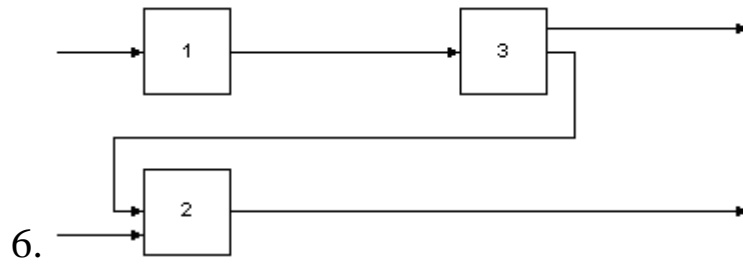
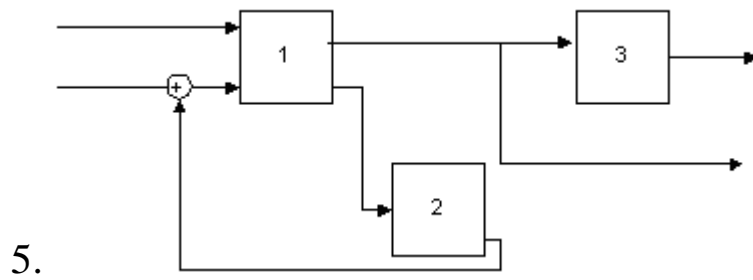
	$3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (-1 \ 2) x^2 \end{cases}$	
12	$1. \begin{cases} -\ddot{x}^3 + 2\dot{x}^3 - x^3 = 4u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (4 \ 3) x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (5 \ 2) x^2 \end{cases}$	7
13	$1. \begin{cases} \ddot{x}^3 + 2\dot{x}^3 - x^3 = -2u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (-2 \ 3) x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	6
14	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = 2x_2^1 + u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - u \end{cases} \begin{cases} y_1^1 = x_1^1 \\ y_2^1 = x_1^2 - 2x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (4 \ 3) x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	8

15	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = -2x_2^1 + 2u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - u \end{cases} \begin{cases} y_1^1 = -x_1^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - 2x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (-4 \quad 3)x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	8
16	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}_1^2 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3u \\ \dot{x}_2^2 = -x_1^2 + 3x_2^2 - u \end{cases} \begin{cases} y_1^1 = -x_1^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (-1 \quad 2)x^2 \end{cases}$	9
17	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_1^1 + 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 2u \end{cases} \begin{cases} y_1^1 = -x_1^1 + 2x_2^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = (4 \quad 3)x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (5 \quad 2)x^2 \end{cases}$	10
18	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_1^1 + 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 4u \end{cases} \begin{cases} y_1^1 = -x_1^1 + 5x_2^1 \\ y_1^2 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$	8

2.	$\dot{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2$ $y^2 = (-2 \ 3) x^2$	
3.	$\dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3$ $y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^3$	

Структурные схемы к вариантам





Практическое занятие №5

Модели процессов, содержащие обыкновенные дифференциальные уравнения

5.1 Краткие теоретические сведения

Дифференциальные уравнения позволяют выразить соотношение между изменением физических величин, и поэтому они имеют большое значение в инженерной практике.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется выражение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0, \quad (5.1)$$

где x – независимая переменная; y – искомая функция (от x), $y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ – производные порядка $1, 2, \dots, n-1, n$. Порядок старшей производной, входящей в уравнение (5.1), называется порядком дифференциального уравнения.

Функция $y = f(x)$ называется решением уравнения (5.1), если при подстановке ее в (5.1) последнее обращается в тождество. Каждое дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому для нахождения частного решения необходимо указать начальные условия, а именно задать значения $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ при $x = x_0$, то есть

$$y_0 = y(x_0); y_0' = y'(x_0); y_0'' = y''(x_0), \dots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0). \quad (5.2)$$

Уравнение (5.1) называется разрешенным относительно старшей производной, если оно имеет вид.

Задача отыскания решения уравнений вида (5.3) при начальных условиях (5.2) называется задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Уравнение (5.3) сводится к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка заменой y' на неизвестную функцию $P_1(x)$, y'' на $P_2(x), \dots, y^{(n)}$ на $P_{n-x}(x)$. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} y' = P_1 \\ P_1' = P_2 \\ P_2' = P_3 \\ \dots\dots\dots \\ P_{n-1}' = f(x, y, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}) \end{cases} \quad (5.4)$$

причем

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ P_1(x_0) = y_0' \\ P_2(x_0) = y_0'' \\ \dots\dots\dots \\ P_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (5.5)$$

Во многих случаях приходится иметь дело с уравнениями, общее решение которых не выражается в аналитическом виде. Поэтому возникает необходимость применять те или иные методы, дающие приближенное значение задачи. Рассмотрим некоторые из них.

Метод Эйлера. Сначала рассмотрим этот метод применительно к уравнению второго порядка.

Пусть дано уравнение второго порядка

$$y'' = f(x, y, y') \quad (5.6)$$

с начальными условиями $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$.

Это уравнение может быть сведено к системе

$$\begin{cases} y' = P \\ P' = f(x, y, P) \end{cases} \quad (5.7)$$

причем

$$y(x_0) = y_0,$$

$$P(x_0) = P_0 = y'_0.$$

При численном решении уравнения (5.6) задача ставится так: в точках x_0, x_1, \dots, x_m нужно найти приближения y_0, y_1, \dots, y_m для значений точного решения $y(x_i), i = 0, 1, \dots, m$. Разность $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ обозначим $h_i, i = 0, 1, \dots, m-1$.

Во многих случаях удобно принимать величину h_i постоянной, тогда $x_i = x_0 + ih, i = 0, 1, \dots, m$;

$$m = \frac{x_m - x_0}{h}.$$

По определению производной имеем

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h};$$

$$\frac{dP}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h};$$

или

$$y(x+h) = y(x) + y'h + O_1(h), \quad P(x+h) = P(x) + P'h + O_2(h), \quad (5.8)$$

где y' и P' берутся в точке x , и величины $O_1(h)$ и $O_2(h)$ стремятся к нулю при h , стремящейся к нулю.

Подставляя (5.8) вместо x значение $x_i, i = 0, 1, \dots, m-1$, вместо y' и P' их выражение из (5.7), получаем:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hP(x_i) + O_1(h);$$

$$P(x_{i+1}) = P(x_i) + hf(x_i, y(x_i), P(x_i)) + O_2(h)$$

Отсюда видно, что приближенные значения функций y и P в точке x_{i+1} целесообразно вычислять следующим образом:

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hP_i, \\ P_{i+1} = P_i + hf(x_i, y_i, P_i) \end{cases} \quad (5.9)$$

где

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y(x_{i+1}); & P_{i+1} &= P(x_{i+1}); \\ y_i &= y(x_i); & P_i &= P(x_i); \quad i = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned}$$

Чтобы обобщить полученный результат на систему уравнений любого порядка, (5.4) целесообразно записать в матричной форме:

$$\frac{dY}{dx} = F(x, Y^T) \quad (5.10)$$

где Y - матрица-столбец с компонентами $y, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$;

F - матрица-столбец с компонентами, представляющими собой правые части дифференциальных уравнений, записанных в форме Коши ($f_i(x, y, P_1, P_2, \dots, P_{n-1})$);

Y^T - матрица-строка с компонентами $y, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$.

Заменяя в (5.4) переменные P_i и y_{i+1} получим обобщенную рекуррентную форму для счета по методу Эйлера:

$$y_{j(i+1)} = y_{ji} + hf_i(x_i, Y_i^T) \quad (5.11)$$

где $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 0, 1, 2, \dots, m$, или в матричной форме

$$Y_{i+1} = Y_i + hF(x_i, Y_i^T) \quad (5.12)$$

Пример 5.1. Составить схему алгоритма и программу интегрирования дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y - 2x + 3 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(0) = 1; \quad y'(0) = 2, \text{ на отрезке } [0; 2]$$

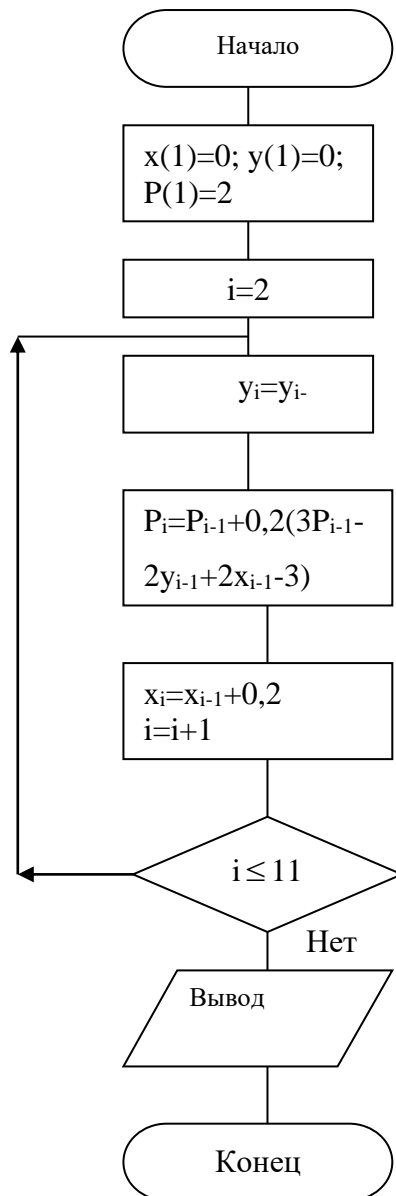


Рисунок 5.1 – Алгоритм интегрирования дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y - 2x + 3 = 0$

Представляя $y' = P$, находим

$$P' = 3P - 2y + 2x - 3.$$

Выбрав шаг интегрирования $h = 0,2$, получим согласно (5.9):

$$y_{i+1} = y_i + 0,2p_i$$

$$p_{i+1} = p_i + 0,2(3p_i - 2y_i + 2x_i - 3)$$

Схема алгоритма решения этого уравнения показана на рисунке 5.1.

Метод Рунге-Кутты. Достоинства метода по сравнению с предыдущим – высокая точность и меньшая склонность к возникновению неустойчивости решения. Будем рассматривать метод при $h = \text{const}$. Алгоритм реализации метода Рунге-Кутты заключается в циклических вычислениях $y_{j(i+1)}$ на каждом $i+1$ шаге по следующим формулам:

$$y_{j(i+1)} = y_{ji} + 1/6(k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}), \quad (5.13)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1j} &= hf_i(x_i, Y_i^T); & k_{2j} &= hf_i(x_i + h/2, Y_i^T + 1/2K_{1i}); \\ k_{3j} &= hf_i(x_i + h/2, Y_i^T + 1/2K_{2i}); & k_{4j} &= hf_i(x_i + h, Y_i^T + K_{3i}), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где $Y_i^T, K_{1i}, \dots, K_{4i}$ – матрицы-строки, содержащие до n элементов.

Если дифференциальное уравнение одно, то в (5.13) и в (5.14) индекс j можно опустить и $k_1 = K_{1i}, k_2 = K_{2i}, k_3 = K_{3i}$.

Таблица 5.1 – Варианты заданий

№	Дифференциальное уравнение	Начал. услов.	Отрезок к интегр.	Шаг интег	Метод интегр.	Точное решение
1	2	3	4	5	6	7
1	$y'' + y = 1/\cos x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$	0; 0,5	0,1	Эйлера	$\cos x + x \sin x + (\cos x) \ln \cos x$
2	$(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	0; 0,5	0,05	Рунге-Кутта	$1 - x + 2\ln(1+x)$
3	$y'' + 2y' + 2y = 2e^{-x} \cos x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 0$	0; 0,5	0,05	Эйлера	$e^{-x}(\cos x + \sin x + x \sin x)$

4	$y''+4y = e^{3x} \cdot (13x - 7)$	$y(0) = 0$ $y'(0) = -4$	0; 0,2	0,02	Рунге-Кутта	$\cos 2x - \sin 2x + e^{3x}(x - 1)$
5	$y''+4y'+4y = 0$	$y(0) = 1$ $y'(0) = -1$	0; 1	0,1	Эйлера	$(1 + x)e^{-2x}$
6	$y''-y = \sin x + \cos 2x$	$y(0) = 1,8$ $y'(0) = -0,5$	0; 2	0,2	Рунге-Кутта	$e^x + e^{-x} - (\sin x) / 2 - (\cos 2x) / 5$
7	$y''-3y' = e^{5x}$	$y(0) = 2,2$ $y'(0) = 0,8$	0; 0,2	0,02	Эйлера	$2 + 0,1(e^{3x} + e^{5x})$
8	$y''+4y = \cos 3x$	$y(0) = 0,8$ $y'(0) = 2$	0; 1	0,1	Рунге-Кутта	$\cos 2x + \sin 2x - 0,2 \cos 3x$
9	$y''-y'-6y = 2e^{4x}$	$y(0) = 1,433$ $y'(0) = -0,37$	0; 1	0,1	Эйлера	$0,1e^{3x} + e^{-2x} + e^{4x} / 3$
10	$y''-2y'+y = 5xe^x$	$y(0) = 1$ $y'(0) = 2$	0; 1	0,1	Рунге-Кутта	$e^x + xe^x + 5e^x x^3 / 6$
11	$y''+y'-6y = 3x^2 - x$	$y(0) = -0,9$ $y'(0) = 3,2$	0; 1	0,1	Эйлера	$0,1e^{2x} - e^{-3x} - 0,5x^2$
12	$8y''+2y'-3y = x + 5$	$y(0) = 1/9$ $y'(0) = -7/12$	0; 1	0,1	Рунге-Кутта	$e^{x/2} + e^{-3x/4} - x/3 - 17/9$

13	$x^2 y'' - 2y = 0$	$y(1) = 5/6$ $y'(1) = 2/3$	1; 2	0,1	Эйлера	$x^2 / 2 + 1/(3x)$
14	$y'' - 4y' + 5y = 3x$	$y(0) = 1,48$ $y'(0) = 3,6$	0; 0,5	0,05	Рунге-Кутта	$e^{2x} (\cos x + \sin x) + 3x/5 + 12/25$
15	$y'' - 5y' + 6y = e^x$	$y(0) = 0$ $y'(0) = 0$	0; 0,2	0,02	Эйлера	$-e^{2x} + 0,5e^{3x} + 0,5e^x$
16	$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x$	$y(0) = 5,1$ $y'(0) = 4,2$	0; 1	0,1	Рунге-Кутта	$e^x + 0,1e^{2x} + \frac{x^2}{2} + 3x + 4$
17	$y'' + y = 1 + e^x$	$y(0) = 2,5$ $y'(0) = 1,5$	0; 1	0,1	Эйлера	$\cos x + \sin x + 1 + e^x / 2$
18	$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 8x$	$y(1) = 4$ $y'(1) = 4$	1; 1,5	0,05	Рунге-Кутта	$2x + 1/x + x^3$
19	$x^2 y'' + xy' = 0$	$y(1) = 5$ $y'(1) = -1$	1; 1,5	0,05	Рунге-Кутта	$5 - \ln x$

Пример 5.2. Проинтегрировать систему примера 5.1 методом Рунге-Кутта.

Как видно, вместо первой производной в методе Рунге-Кутта используется некоторое ее средневзвешенное значение

$$\tilde{f}_j = 1/6(K_{1j} + 2K_{2j} + 2K_{3j} + K_{4j}).$$

Поэтому, для отыскания очередной точки решения по методу Рунге-Кутты, необходимо вычислить четыре производные для каждого неизвестного, в точках, определенных формулами (5.14). Для хранения этих производных в программе объявлены четыре массива: K_1, K_2, K_3, K_4 . Так как неизвестных в данном примере две – то массивы двумерные. Переменные В, С и D хранят координаты точки, относительно которой вычисляется очередное приближение.

Метод аналитического решения через преобразование Лапласа.

Преимущества данного метода - абсолютная точность (решение находится в аналитическом виде), возможность трактовки математической формулировки ответа и т.д., недостаток - не всегда удается найти ответ.

Сущность метода – уравнение переводится в его лапласовский образ. В пространстве образов Лапласа решение дифференциальных уравнений сводится к решению простых алгебраических уравнений. Для получения “временной” зависимости осуществляют обратное преобразование Лапласа. Так как лапласовское преобразование - довольно трудоемкая операция, то этот процесс предлагается автоматизировать в математической системе MathCad 7 Pro. Порядок решения продемонстрируем на примере:


Пусть требуется найти решение уравнения из примера 5.1: $y'' - 3y' + 2y - 2x + 3 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $y(0) = 1; y'(0) = 2$, в аналитическом виде.

1. Приводим уравнение к виду $f(x)=0$ (у нас это условие выполняется).

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) - 3 \frac{d}{dx} y(x) + 2y(x) + 3 \text{laplace, } x$$

2. Записываем левую часть уравнения и переводим ее в лапласовский образ:

Замечания по данной формуле: производные высших порядков вводятся из наборной панели или путем нажатия клавиш

ctrl+shift+/, производная первого  порядка shift+/. Запись неизвестной функции следует производить обязательно с указанием аргумента в скобках. Оператор преобразования Лапласа вводится из наборной панели, которая открывается, если щелкнуть по кнопке с изображением «треуголки».

После ключевого слова laplace необходимо ввести имя переменной (в нашем случае x). Результат выводится в следующей форме:

$$\left| \begin{array}{l} (t2 \leftarrow 0) \\ (\text{laplace}(y(x), x, s) \cdot s - y(0)) \cdot s - \frac{d}{dt} y(t2) - 3 \cdot \text{laplace}(y(x), x, s) \cdot s + 3 \cdot y(0) + 2 \cdot \text{laplace}(y(x), x, s) - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} \end{array} \right|$$

Этот результат необходимо скопировать и провести вручную следующую работу:

- Заменить выражение $\text{laplace}(y(x), x, s)$ на какую-нибудь переменную (например, z). Если в вашем ответе встречаются другие выражения с функцией laplace (например, $\text{laplace}(1/\cos(x), x, s)$), то вам не повезло – системе не удастся найти образ вашего уравнения и на этом отыскание аналитического решения через преобразование Лапласа в таком случае заканчивается. Пример такого уравнения – задание №1.

- Заменяем константные выражения или другими переменными (например C_1 , C_2 и т.д.) или их значениями (по условию $y(0) = 1$; $\frac{dy(t2)}{dt2} = \frac{dy(0)}{dt2} = 2$).

В результате имеем алгебраическое уравнение, которое необходимо решить относительно нашей введенной переменной z :

$$(z \cdot s - 1) \cdot s - 2 - 3 \cdot z \cdot s + 3 \cdot 1 + 2 \cdot z - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s} \text{ solve, } z$$

Оператор решения алгебраических уравнений solve вводится из той же наборной панели, что и оператор laplace. Результат действия этого оператора – решение уравнения в символьном виде:

$$\frac{-\left(-s + 1 - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s}\right)}{(s^2 - 3 \cdot s + 2)}$$

3. Теперь необходимо над этим результатом произвести обратное преобразование Лапласа – и результат уже готов:

Результат представляется во «временной» зависимости, т.е. от переменной t . Более корректно переменную t вручную заменить на x .

$$\frac{-\left(-s + 1 - \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s}\right)}{(s^2 - 3 \cdot s + 2)} \text{ invlaplace, } s \rightarrow \exp(t) + t$$

5.2 Цель работы

Получить навыки решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

5.3 Содержание работы и порядок ее выполнения

В таблице 5.1 найдите свой вариант, соответствующий порядковому номеру в журнале преподавателя. Представьте заданное там уравнение (графа 2) в нормальной форме Коши. Составьте алгоритм его решения и программу согласно методу, указанному в графе 6 таблицы 5.1. Составить таблицу соответствия имен. В программе необходимо предусмотреть кроме вывода приближенных значений решения вывод точных значений, полученных путем табулирования функции, взятой из последней графы таблицы 4 (данная функция является точным решением дифференциального уравнения вашего варианта). Решите уравнение в аналитическом виде через преобразование Лапласа. Если решить уравнение через преобразование Лапласа не удастся, то решите его через процедуру `Rkadqpt(y, xi, X2, n, F)`, которая возвращает матрицу решений методом Рунге-Кутта с переменным шагом и начальными условиями в векторе y , правые части системы

записаны в символьном векторе F , на интервале от X_1 до X_2 ; n - число шагов. Например, решим уравнение $y'' - 5y' + y = e^x$ при начальных условиях $y(0) = 0, y'(0) = 0$ на отрезке $[0; 0,2]$ с числом шагов 10. Уравнение второго порядка эквивалентно системе уравнений 1 порядка $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = 5 \cdot y_2 - y_1 + e^x \end{cases}$. В системе Mathcad это выглядит следующим образом:

$$y := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad f(x, y) := \begin{bmatrix} y_1 \\ -5 \cdot y_1 + y_2 - e^x \end{bmatrix}$$

$$h := \text{Rkadapt}(y, 0, 0.2, 10, f)$$

	0	1	2
0	0	0	0
1	0.02	$-2.013 \cdot 10^{-4}$	-0.02
2	0.04	$-8.108 \cdot 10^{-4}$	-0.041
3	0.06	$-1.837 \cdot 10^{-3}$	-0.062
4	0.08	$-3.287 \cdot 10^{-3}$	-0.083
5	0.1	$-5.172 \cdot 10^{-3}$	-0.105
6	0.12	$-7.5 \cdot 10^{-3}$	-0.128
7	0.14	-0.01	-0.151
8	0.16	-0.014	-0.174
9	0.18	-0.017	-0.198
10	0.2	-0.021	-0.223

Сравните результат с видом функции из последней графы таблицы 5.1. Отладьте программу. Получите результат. Сравните точное и приближенное решение. Сделайте выводы.

5.4 Контрольные вопросы

1. Понятие дифференциального уравнения и его решение.
2. Как свести уравнения порядка n к системе n уравнений первого порядка?
3. Метод Эйлера.
4. Метод Рунге-Кутты.
5. Как выглядит математическое описание и какой физический смысл преобразования Лапласа?
6. Что изменится, если в схеме алгоритма рисунка 5.1 блока 3 и 4 поменять местами?

7. Каким образом в схеме алгоритма рисунка 5.1 было получено число, с которым сравнивается параметр цикла, чтобы осуществить выход из цикла?
8. Какой физический смысл имеют переменные $K_{1j} \dots K_{4j}$ в формуле (5.13)?
9. Из каких соображений в формуле (5.13) выбран коэффициент $1/6$?
10. Оформите программу, реализующую метод Эйлера, в виде подпрограммы.
11. Каковы требования к программе, вызывающей подпрограмму, реализующую метод Эйлера?
12. Как организовать решение дифференциального уравнения с заданной точностью?

Практическое занятие №6 Моделирование речевого сигнала

6.1 Краткие теоретические сведения

6.1.1 Основные механизмы звукообразования речи

Речевой сигнал является средством передачи разнообразной информации как вербальной (словесной), так и невербальной (эмоциональной). Для быстрой передачи информации в процессе эволюции был отобран особым образом закодированный и структурированный акустический сигнал. Для создания такого специализированного акустического сигнала используется "голосовой аппарат", совмещенный с физиологическим аппаратом, предназначенным для дыхания и жевания (поскольку речь возникла на поздних стадиях эволюции, то к речеобразованию пришлось приспособить уже имеющиеся органы).

Процесс образования и восприятия речевых сигналов, схематически показанный на рисунок 6.1, включает в себя следующие основные этапы: формулировка сообщения, кодирование в языковые элементы, нейромускульные действия, движения элементов голосового тракта, излучение акустического сигнала, спектральный анализ и выделение акустических признаков в периферической слуховой системе, передача выделенных признаков по нейронным сетям, распознавание языкового кода (лингвистический анализ), понимание смысла сообщения.



Рисунок 6.1 - Основные процессы образования и восприятия речи

Голосовой аппарат является, по существу, духовым музыкальным инструментом. Однако среди всех музыкальных инструментов он не имеет себе равных по своей многогранности, разносторонности, возможности передачи малейших оттенков и др. Все способы звукоизвлечения, которые используются в духовых инструментах, используются в процессе образования речи (в т.ч. вокальной речи), однако все они перестраиваемы (по приказам мозга), и имеют широчайшие возможности, недоступные ни одному инструменту.

Если рассматривать структуру голосообразующего аппарата как духового музыкального инструмента, он состоит из трех основных частей (рисунок 6.2):

- *генератора* – дыхательной системы, состоящей из воздушного резервуара (легких), где запасается энергия избыточного давления, мускульной системы и выводного канала (трахеи) со специальным аппаратом (гортанью), где воздушная струя прерывается и модулируется;

- *вибраторов* – голосовых связок, воздушных турбулентных струй (создающих краевые тоны), импульсных источников (взрывов);

- *резонаторов* – разветвленной и перестраиваемой системы резонансных полостей сложной геометрической формы (глотки, ротовой и носовой полости), называемой артикуляционной системой.

Генерация энергии воздушного столба происходит в легких, которые представляют собой своеобразные меха, создающие поток воздуха при вдохе и выдохе за счет разницы атмосферного и внутрилегочного давления. Процесс вдоха и выдоха происходит за счет сжатия и расширения грудной клетки, которые осуществляются обычно с помощью двух групп мышц: межреберных и диафрагмы, при глубоком усиленном дыхании (например, при пении) сокращаются также мышцы брюшного пресса, груди и шеи. При вдохе диафрагма уплощается и опускается вниз, сокращение наружных межреберных мышц поднимает ребра и отводит их в стороны, а грудину – вперед.

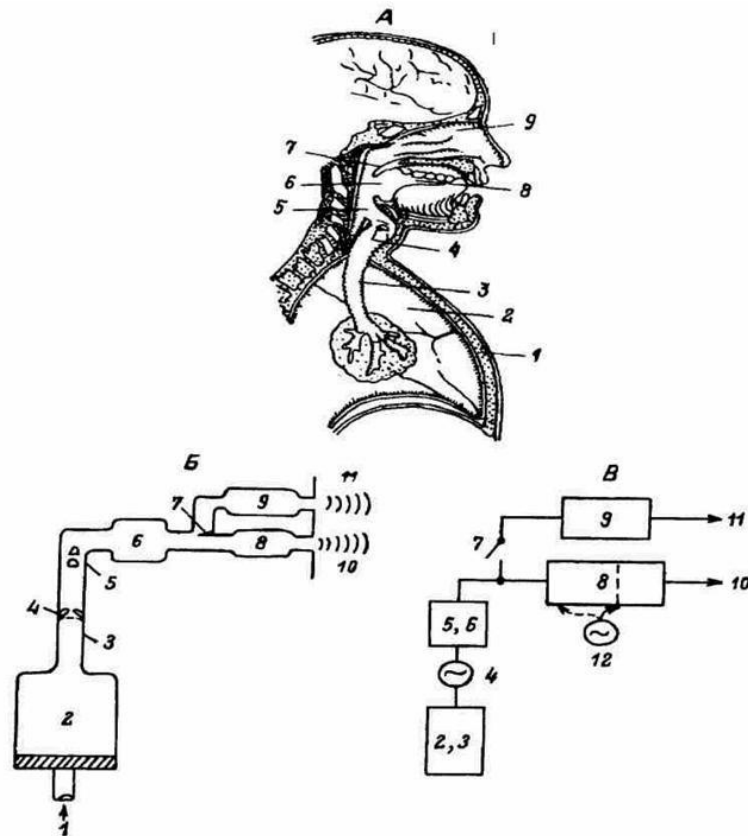


Рисунок 6.2 - Схема речеобразующего аппарата А - анатомическое изображение; Б - функциональные элементы; В - эквивалентная блок-схема. На А: 1 - грудная клетка, 2 - лёгкие, 3 - трахея, 4 - голосовые связки, 5 - гортанная трубка, 6 - полость глотки, 7 - нёбная занавеска, 8 - полость рта, 9 - полость носа. На Б: 1 - сила дыхательных мышц, 2 - объём легких, 3 - трахея, 4 - голосовые связки, 5 - гортанная трубка, 6 - полость глотки, 7 - нёбная занавеска, 8 - полость рта, 9 - полость носа, 10 - излучение из ротового отверстия, 11 - излучение из носовых отверстий. На В: 2, 3 - ёмкость легких и трахеи, 4 - голосовой источник колебаний, 5, 6 - ёмкость гортани и глотки, 7 - механизм нёбной занавески, 8 - ёмкость полости рта, 9 - ёмкость полостей носа, 10 - выходной сигнал ротового тракта, 11 - выходной сигнал носового тракта, 12 - шумовой источник

Увеличение грудной клетки растягивает легкие, что приводит к падению внутрилегочного давления по отношению к атмосферному, и в этот "вакуум" устремляется воздух. При выдохе мускулы расслабляются, грудная клетка за счет своей тяжести возвращается в исходное состояние, диафрагма поднимается, объем

легких уменьшается, внутрилегочное давление растет, воздух устремляется в обратном направлении. Таким образом, вдох – процесс активный, требующий затраты энергии, выдох – процесс пассивный. При обычном дыхании это процесс происходит примерно 17 раз в минуту, управление этим процессом как при обычном дыхании, так и при речи, происходит бессознательно, но при пении процесс постановки дыхания происходит сознательно и требует длительного обучения. Количество энергии, которое может быть израсходовано на создание речевых акустических сигналов, зависит от объема запасенного воздуха и соответственно от величины дополнительного давления в легких. Учитывая, что максимальный уровень звукового давления, который может развивать певец (имеется в виду оперный), составляет 100...112 дБ, то очевидно, что голосовой аппарат является не очень эффективным преобразователем акустической энергии, Его КПД составляет порядка 0,2%, как и у большинства духовых инструментов. Модуляция воздушного потока (за счет вибраций голосовых связок) и создание подглоточного избыточного давления происходит в гортани. Гортань (*larynx*) – это клапан, который находится на конце трахеи (узкой трубки, по которой воздух поднимается из легких). Этот клапан предназначен для предохранения трахеи от попадания посторонних предметов и для поддержания высокого давления при подъеме тяжестей. Именно этот аппарат и используется в качестве голосового источника при речи и пении. Гортань образована из набора хрящей и мышц. Спереди ее охватывает щитовидный хрящ (*thyroid*), сзади – перстневидный хрящ (*cricoid*), сзади также располагаются более мелкие парные хрящи: черпаловидные, рожковидные и клиновидные. Сверху гортани расположен еще один хрящ-надгортанник (*epiglottis*), также типа клапана, который опускается при глотании и закрывает гортань. Все эти хрящи соединены мышцами, от подвижности которых зависит скорость поворота хрящей. С возрастом подвижность мышц уменьшается, хрящи также становятся менее эластичными, поэтому возможности виртуозного владения голосом при пении также уменьшаются.

Наиболее сложно устроен средний отдел гортани, в котором расположены парная мышечная перегородка (эластичный конус) и

две пары складок. Верхние называются преддверными, или "ложными голосовыми", а нижние – голосовыми. В толще последних лежат голосовые связки, образованные эластическими волокнами, и мышцы. Промежуток между правой и левой голосовыми складками называется голосовой щелью. Голосовые связки натянуты между щитовидным и черпаловидным хрящами. Размеры голосовой щели в открытом состоянии 2 см в длину и 1 см в ширину. Именно *голосовые складки* и являются основным (но не единственным) источником голосообразования (вибратором). Преддверные голосовые складки выделяют специальную слизистую секрецию, которая помогает смазывать голосовые складки и предохраняет их от повреждения при трении во время звукообразования.

Между двумя парами складок находятся небольшие полости (желудочки гортани), которые позволяют беспрепятственно голосовым складкам и играют роль *акустических фильтров*, уменьшая уровень высоких гармоник (скрипучесть голоса), они же играют роль резонаторов для тихих тонов и при пении в фальцете. При движении черпаловидных хрящей голосовые складки могут сдвигаться и раздвигаться, открывая проход воздуха. При поворотах щитовидного и перстневидного хрящей они могут растягиваться и сжиматься, при активации вокальных мышц они могут расслабляться и напрягаться. Процесс образования звуков речи определяется движением (колебаниями) связок, что приводит к модуляции потока воздуха выдыхаемого из легких. Такой процесс называется *фонацией* (существуют и другие механизмы звукообразования, они будут рассмотрены дальше).

Начнем с рассмотрения *процесса фонации*: перед началом речи голосовые складки должны быть сведены черпаловидными хрящами, что приводит к запираению потока воздуха и возникновению избыточного подглоточного давления (происходит "предфонационная настройка"). Воздух, который выталкивается легкими из трахеи, накапливается в подскладочном пространстве, и начинает давить на них. Когда избыточное давление повышается до определенной величины, складки размыкаются и воздух устремляется в голосовую щель. В момент максимального открытия щели скорость потока воздуха становится максимальной,

давление внутри щели падает (по закону Бернулли), причем скорость протекания воздуха неодинакова – в самой узкой части голосовой щели она максимальна. Внутри голосовой щели образуется зона пониженного давления. Окружающее более высокое давление, а также собственная упругость связок заставляют складки сомкнуться. Этот процесс аналогичен возбуждению колебания тростей в деревянных духовых инструментах. Таким образом, чередование избыточного давления в подскладочном пространстве и отрицательного давления из-за эффекта Бернулли заставляет складки смыкаться-размыкаться, т.е. обеспечивает нормальный режим их колебаний (рисунок 6.3).



Рисунок 6.3 - Процесс колебаний голосовых складок

При этом происходит модуляция потока воздуха, который порциями (как в духовых инструментах) вталкивается в резонансные полости. Последовательность воздушных толчков, возникающих в результате колебаний голосовых связок, называется

глоттальной волной, обычно она представляется в виде зависимости объемной скорости воздуха от времени. Как видно из графиков, такой сигнал представляет собой последовательность импульсов, форма которых зависит от соотношения времени открытия складок (скорость потока постепенно нарастает) и времени их закрытия (скорость быстро уменьшается). Период такой волны определяется длительностью общего цикла колебаний связок, т.е. основной частотой колебания. Амплитуда определяется максимальной скоростью потока воздуха, которая, в свою очередь, зависит от величины подскладочного избыточного давления.

Акустический речевой сигнал возникает в результате сложных координированных движений, происходящих в ряде органов, вся совокупность которых и называется речевым аппаратом (рисунок 6.2, А).

Легкие со всей дыхательной мускулатурой обеспечивают развитие давлений и возникновение воздушных потоков в речевом тракте. Последний (рисунок 6.2, Б, В) представляется гортанью и рядом воздушных полостей, конфигурация которых существенно изменяется в процессе речеобразования. Ведущую роль играют движения небной занавески, языка, губ и нижней челюсти.

Механизмы возбуждения акустических колебаний связаны либо с работой гортани, либо с возникновением шумных или импульсных звуков при прохождении воздушного потока через сужения, образующиеся в определенных местах речевого тракта.

Возбужденные акустические колебания подвергаются частотной фильтрации в воздушных полостях речевого тракта, действующих как акустические частотные фильтры. Конфигурация и объемы этих полостей в процессе речеобразования определенным образом изменяются. Соответственно этому изменяется и спектр исходных звуковых колебаний, создаваемых акустическими источниками.

Образование воздушных потоков, работа механизма гортани, все движения органов, образующих речевой тракт («артикуляторов»), происходят закономерно и координировано. Благодаря этой динамически слаженной деятельности и возникают сигналы связной речи.

При акустическом моделировании каждый участок РА (полость, сужение) представляется в виде секции, параметры в которой можно считать распределенными равномерно.

Акустические параметры полостей РА неравномерно распределены вдоль его оси. Общая длина речевого тракта у взрослого человека (от голосовых складок до губ) около 17 см, длина носовой полости (от нёбной занавески до ноздрей) 12,5 см, площадь переменного сечения тракта в среднем составляет примерно $5...6 \text{ см}^2$.

Простейшей моделью вокального тракта можно считать цилиндрическую трубу длиной 17 см, закрытую на одном конце (аналогично трубе кларнета). Собственные моды (формы) колебаний такой трубы показаны на рисунке 6.4, частоты определяются из соотношений: $L = \lambda/4$; $L = 3\lambda/4$; $L = 5\lambda/4$ и т.д., таким образом частоты равны $f_n = (2n-1)c/4L$, где n -целое число; L -длина трубы; c -скорость звука.

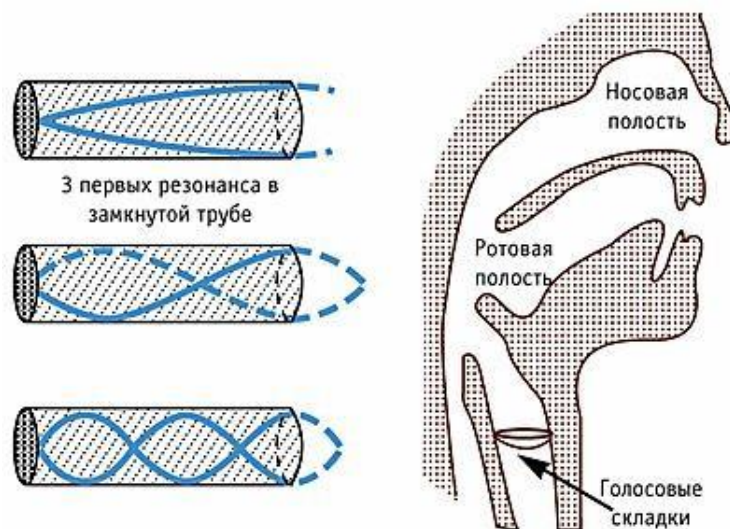


Рисунок 6.4 - Формы колебаний для цилиндрической трубы и голосового тракта

В спектре такой трубы присутствуют только нечетные гармоники 1:3:5... Для длины $L=17$ см, собственные частоты оказываются равными 500, 1500, 2500 Гц. Если у трубы менять в разных точках площадь поперечного сечения, то положение ее собственных частот будет смещаться. Совершенно аналогичные процессы происходят в вокальном тракте: в нем также имеется свой

набор собственных частот с соответствующими модами колебаний, т.е. определенным распределением узлов и пучностей вдоль его длины. Меняя площадь поперечного сечения в вокальном тракте, можно также все время менять положение собственных частот.

Если на вход такой трубы (системы труб) подать сигнал, сформированный при колебаниях голосовых связок (рисунок 6.4), то на выходе можно записать сигнал, спектр которого будет иметь форму, показанную на рисунке 6.5, т.е. гармоники, совпадающие с собственными частотами тракта, будут усилены за счет резонансов.

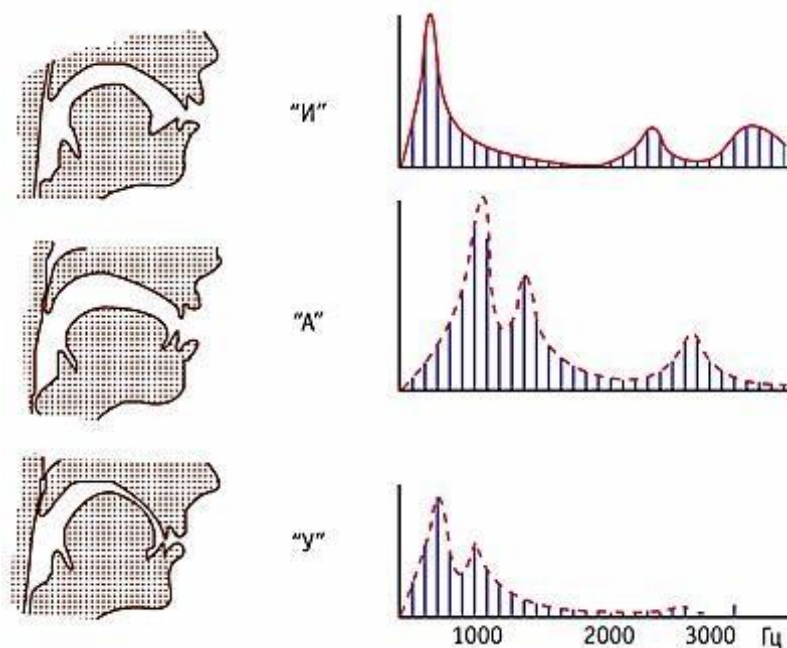


Рисунок 6.5 - Положение тракта для разных звуков речи и вид звукового сигнала с формантами

Области спектральных максимумов, соответствующие резонансным частотам вокального тракта, называются *формантами* (иногда их просто называют резонансами вокального тракта). Каждому звуку речи (простейший звук речи называется фонемой) соответствует своя форма вокального тракта, которая варьируется за счет изменения положения языка, губ, зубов и т.д., и свое положение формант (F-картина). Примеры показаны на рисунок 6.5.

Г. Фант рассматривал голову как отражающую доску, имеющую радиус 9 см, в центре которой действует поршневая диафрагма. Действие отражающей доски учитывается

коэффициентом $K_s(\omega)$ входящим в формулу для сопротивления излучения. На низких частотах $K_s(\omega)=1$, на частотах около 2 кГц $K_s(\omega)=1.7$, а на более высоких частотах коэффициент $K_s(\omega)$ опять уменьшается. В формулах выше коэффициент $K_s(\omega)=2$, что соответствует отражению от бесконечно большой доски.

На рисунке 6.6 изображён схематический разрез речевого аппарата (РА) при произнесении диктором гласных (и, о, у). Хотя конфигурация полостей РА отличается сложной формой, в РА можно выделить ротовую, глоточную и носовую полости. При образовании русских гласных проход из полости глотки в носовую полость закрыт нёбной занавеской. Полости рта и глотки разделены сужением, образуемым спинкой языка и нёбом. Второе сужение образуется с участием губ и двух рядов зубов.

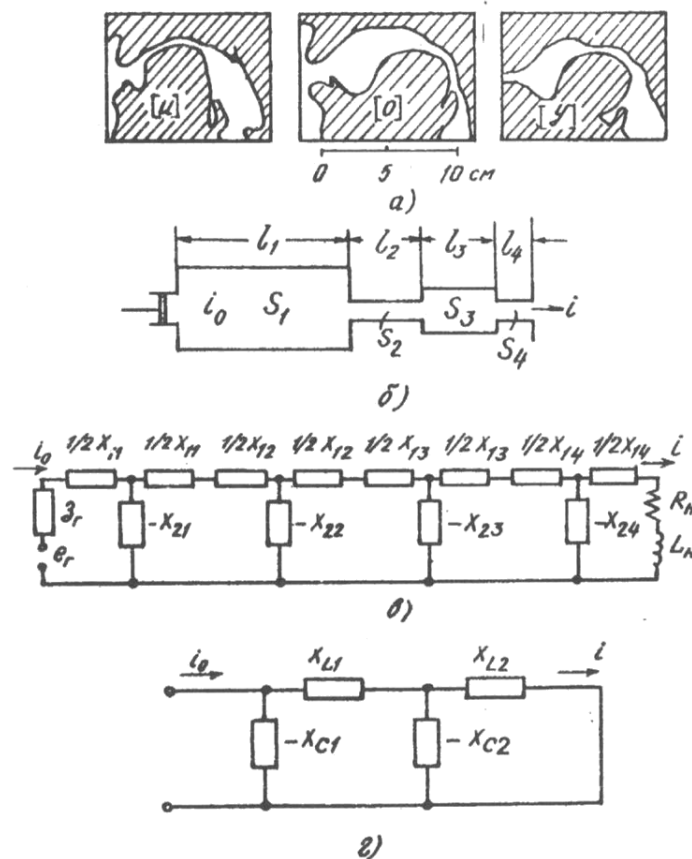


Рисунок 6.6 - Акустическая модель речевого аппарата а) - продольное сечение ГА; б) - акустическая модель; в) - эквивалентная электрическая схема; г) - упрощённая эквивалентная схема

Введем ряд упрощений, которые, с некоторым приближением позволят получить достаточно наглядное описание процессов происходящих в РА. По измерениям, проведённым академиком В.Н. Сорокиным, площадь голосовой щели во время фонации не превышает 0,2-0,4 ; площадь же поперечного сечения глотки имеет величину в 10-20 раз большую. Поэтому голосовую щель можно рассматривать как источник с большим внутренним сопротивлением, т.е. как источник объемной скорости.

Точно так же можно пренебречь упругостью стенок полостей. В результате получим акустическую модель РА, изображенную на рисунке 6.6,б. Голосовые связки изображены в виде поршня.

Секция S_1 представляет собой полость гортани, секция S_2 - область сжатия, образуемую спинкой языка, секция S_3 - ротовую полость и секция S_4 - область сжатия, образуемую ротовым отверстием. Звуковая энергия, излучаемая из ротового отверстия, отражается от лица говорящего, т.е. лицо как бы является отражательной доской. Речевой аппарат имеет следующие среднестатистические размеры: длина вдоль его оси от голосовой щели до ротового отверстия равна 17,5 см, площадь поперечного сечения полостей - не более 5... 15 см². При таких размерах распространение звуковых волн вдоль оси РА не зависит от изгибов формы. Для сигнала с частотой ниже некоторой граничной f_0 в РА выполняется условие распространения плоских волн. Для полого цилиндра диаметром $2R$

$$f_0 = 1.17 \cdot \frac{c}{R}, \quad (6.1)$$

где $c=3.53 \cdot 10^2$ м/с - скорость распространения звука при $t=37^\circ$ С. При $f_0 = 6$ кГц, $2 \cdot R = 2 \cdot 1.17 \cdot 3.53 \cdot 10^2 \cdot 10^2 / (6 \cdot 10^3) = 6.8 \cdot \text{см}$, т.е. больше поперечного размера РА в любой его точке.

При длине волны $\lambda = c/f_0$, значительно превышающей длину РА ($f \approx 1000$ Гц), допустима замена распределенных параметров на сосредоточенные.

Составим электрический аналог акустической модели. Путем замены каждой полости Т-образной эквивалентной схемой получим

схему, изображенную на рисунке 6.5,в. Генератор e_r является аналогом голосовой щели и представляет собой источник тока i_0 с внутренним сопротивлением z_r . Ток i , проходящий через активное R_H и индуктивное L_H сопротивления, представляют собой аналог объемной скорости в ротовом отверстии. Величины R_H и L_H - представляют собой сопротивление излучения и массу воздуха в ротовом отверстии.

Последние определяются по формулам:

$$\begin{aligned} R_H &= \frac{\rho \cdot \omega^2}{2 \cdot \pi \cdot c}, \\ L_H &= \frac{8 \cdot \rho}{3 \cdot \pi^2 \cdot r}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $\rho = 1.14 \text{ кг/м}^3$ - плотность воздуха; r - радиус кругового отверстия, равного площади ротового отверстия.

Введем в схему рисунке 6.5,в следующие упрощения: пусть x_{11} соединен последовательно с большим внутренним сопротивлением генератора z_r и им можно пренебречь. Сопротивления упругости x_{22} и x_{24} представляют соответственно небольшие области сжатия в ротовой полости между спинкой языка и нёбом и в ротовом отверстии. Их величина велика и поэтому ими также можно пренебречь. Итак, с принятыми упрощениями схема, приобретает вид, изображенный на рисунке 6.5,г.

С учетом формулы (6.2)

$$\begin{aligned} x_{c1} = x_{21} &= \frac{\rho \cdot c}{S_1 \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot l_1}{c}\right)}; \\ x_{c2} = x_{23} &= \frac{\rho \cdot c}{S_3 \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot l_3}{c}\right)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{L1} &= \frac{1}{2} \cdot x_{11} + x_{12} + \frac{1}{2} \cdot x_{13} = \frac{\rho \cdot c}{S_1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot l_1}{2 \cdot c}\right) + \frac{2 \cdot \rho \cdot c}{S_2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot l_2}{2 \cdot c}\right) + \\
&\quad + \frac{\rho \cdot c}{S_3} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot l_3}{2 \cdot c}\right); \\
x_{L2} &= \frac{1}{2} \cdot x_{13} + x_{14} + x_H = \frac{\rho \cdot c}{S_3} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot l_3}{2 \cdot c}\right) + \frac{2 \cdot \rho \cdot c}{S_4} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot l_4}{2 \cdot c}\right) + \\
&\quad + \frac{8 \cdot \rho \cdot c}{3 \cdot \pi^2 \cdot r}. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Соотношение объемных скоростей на выходе РА:

$$\frac{i}{i_0} = \frac{x_{c1} / x_{c2}}{(x_{L1} - x_{c1}) \cdot \left(\frac{1}{x_{c2}} - \frac{1}{x_{L2}} \right) - 1}. \tag{6.4}$$

Поскольку потери R и G в формантной модели не учитываются, то на резонансных частотах $i/i_0 \rightarrow \infty$ при условии, что $x_{L2} \neq 0$.

Таким образом, для нахождения резонансных частот в модели необходимо решить уравнение

$$(x_{L1} - x_{c1}) \cdot \left(\frac{1}{x_{c2}} - \frac{1}{x_{L2}} \right) - 1 = 0, \tag{6.5}$$

6.2 Задание

6.2.1 Расчетная часть (расчеты выполняются в программе Matcad)

1. Получить вариант для разработки модели звука.
2. Составить формулу для расчета частотного отклика (зависимость полного сопротивления схемы от частоты) речевого

тракта с использованием рис. 2, г для упрощенной электрической эквивалентной схемы.

3. Подставить значения сопротивлений (1.3) в формулу и рассчитать полное сопротивление схемы в частотном диапазоне речевого сигнала 70-7000 Гц.

4. Сохранить массив в виде текстового файла (функция `writerprn`).

5. Результаты расчета представить в виде графика.

6. Рассчитать резонансные частоты для модели соответствующего звука, используя уравнение (1.5).

7. Сравнить результаты, полученные в п.3 и п.5.

6.2.2 Экспериментальная часть

1. Используя микрофон и программу «Звукозапись» из «Стандартных» программ Windows, записать соответствующий звук или слово, содержащее рассматриваемый звук в качестве ударного, например, «ухо» - для звука «у», «сила» - для звука «и», «море» - для звука – «о».

2. Используя программу SpWin 7 (или подобную), вырезать из звукового файла участок, соответствующий рассматриваемому звуку, и сохранить его в файл звукового формата (например, wav). Сделать скриншот.

3. Представить его в виде спектра. Сделать скриншот.

4. Сохранить файл звука как ASCII код (в формате текстового файла, txt).

5. Полученный массив данных представить в виде графика, используя программу Matcad. Рассчитать его спектр. Построить график.

6. Сравнить полученный спектр и расчетный частотный отклик (п.5 расчетной части). Сделать выводы.

6.3 Варианты

Общие исходные данные:

$\rho = 1,165 \text{ кг/м}^3$ – плотность воздуха при $T = 30^\circ \text{ C}$ на уровне моря;

$c=3,53 \cdot 10^2$ м/с – скорость распространения звука при $T=37^\circ$ С;

$r= 0,0056$ м – радиус кругового отверстия, равного площади ротового отверстия.

6.3.1 Разработка модели звука «И»

$S_1 = 3,14 \cdot 10^{-4}$ м² – полость гортани;

$l_1 = 0,115$ м – длина полости гортани;

$S_2 = 0,196 \cdot 10^{-4}$ м² – область сжатия, образуемая спинкой языка;

$l_2 = 0,04$ м – длина области сжатия;

$S_3 = 4,9 \cdot 10^{-4}$ м² – ротовая полость; $l_3 = 0,015$ м – длина ротовой полости;

$S_4 = 0,785 \cdot 10^{-4}$ м² – область сжатия, образуемая ротовым отверстием $l_4 = 0,005$ м – длина области сжатия;

6.3.2 Разработка модели звука «О»

$S_1 = 4,9 \cdot 10^{-4}$ м² – полость гортани; $l_1 = 0,095$ м – длина полости гортани;

$S_2 = 0,785 \cdot 10^{-4}$ м² – область сжатия, образуемая спинкой языка;

$l_2 = 0,025$ м – длина области сжатия;

$S_3 = 15,9 \cdot 10^{-4}$ м² – ротовая полость; $l_3 = 0,03$ м – длина ротовой полости;

$S_4 = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – область сжатия, образуемая ротовым отверстием $l_4 = 0,0015 \text{ м}$ – длина области сжатия;

6.3.3 Разработка модели звука «У»

$S_1 = 7,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – полость гортани; $l_1 = 0,114 \text{ м}$ – длина полости гортани;

$S_2 = 0,441 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – область сжатия, образуемая спинкой языка; $l_2 = 0,03 \text{ м}$ – длина области сжатия;

$S_3 = 12,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – ротовая полость; $l_3 = 0,02 \text{ м}$ – длина ротовой полости;

$S_4 = 0,196 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ – область сжатия, образуемая ротовым отверстием $l_4 = 0,01 \text{ м}$ – длина области сжатия;

6.4 Содержание отчета

1. Формула для расчета частотного отклика (зависимость полного сопротивления схемы от частоты) речевого тракта.
2. График зависимости полного сопротивления схемы от частоты (частотного отклика), рассчитанный в Matcad с отмеченными значениями резонансных частот (функция Trace).
3. Результаты расчета уравнения (1.5) в виде графика с отмеченными значениями резонансных частот.
4. Выводы по п. 7 расчетной части.
5. Скриншоты звукового файла и его спектра (из программы Cool Edit).
6. График экспериментального массива данных и его спектра с отмеченными значениями резонансных частот.
7. Выводы по п. 6 экспериментальной части.

Практическое занятие №7

Основные свойства слуха

7.1 Краткие теоретические сведения

Орган слуха человека является своеобразным приемником звука, резко отличающимся от приемников звука, создаваемых человеком.

Ухо человека обладает свойствами частотного анализатора, дискретным восприятием по частотному и динамическому диапазонам (аналоговый звуковой сигнал превращается в последовательность электрических импульсов двоичного типа). Все эти операции осуществляются во внутреннем ухе, в так называемой улитке. В улитке находится основная (базилярная) мембрана, состоящая из большого числа волокон, слабо связанных между собой. Вдоль основной мембраны расположены нервные окончания, каждое из которых (а их свыше 20 000) возбуждается от прикосновения к ним волокон основной мембраны, посылая в слуховой центр мозга электрические импульсы. Там эти импульсы подвергаются сложному анализу, в результате которого человек определяет передаваемое сообщение.

7.1.1 Строение слухового аппарата

Слуховая система является своеобразным приемником информации и состоит из периферической части и высших отделов слуховой системы. Наиболее изучены процессы преобразования звуковых сигналов в периферической части слухового аппарата.

Периферическая часть состоит следующих частей:

- - Ушная раковина - это акустическая рупорная антенна, принимающая, локализирующая, фокусирующая и усиливающая звуковой сигнал;
- - Среднее ухо - микрофон;
- - Внутреннее ухо - частотный и временной анализатор;
- - Высшие отделы головного мозга - аналога- цифровой преобразователь, преобразующий аналоговый сигнал в двоичные нервные импульсы- электрические разряды.

Общий вид периферической слуховой системы показан на рисунке 7.1.

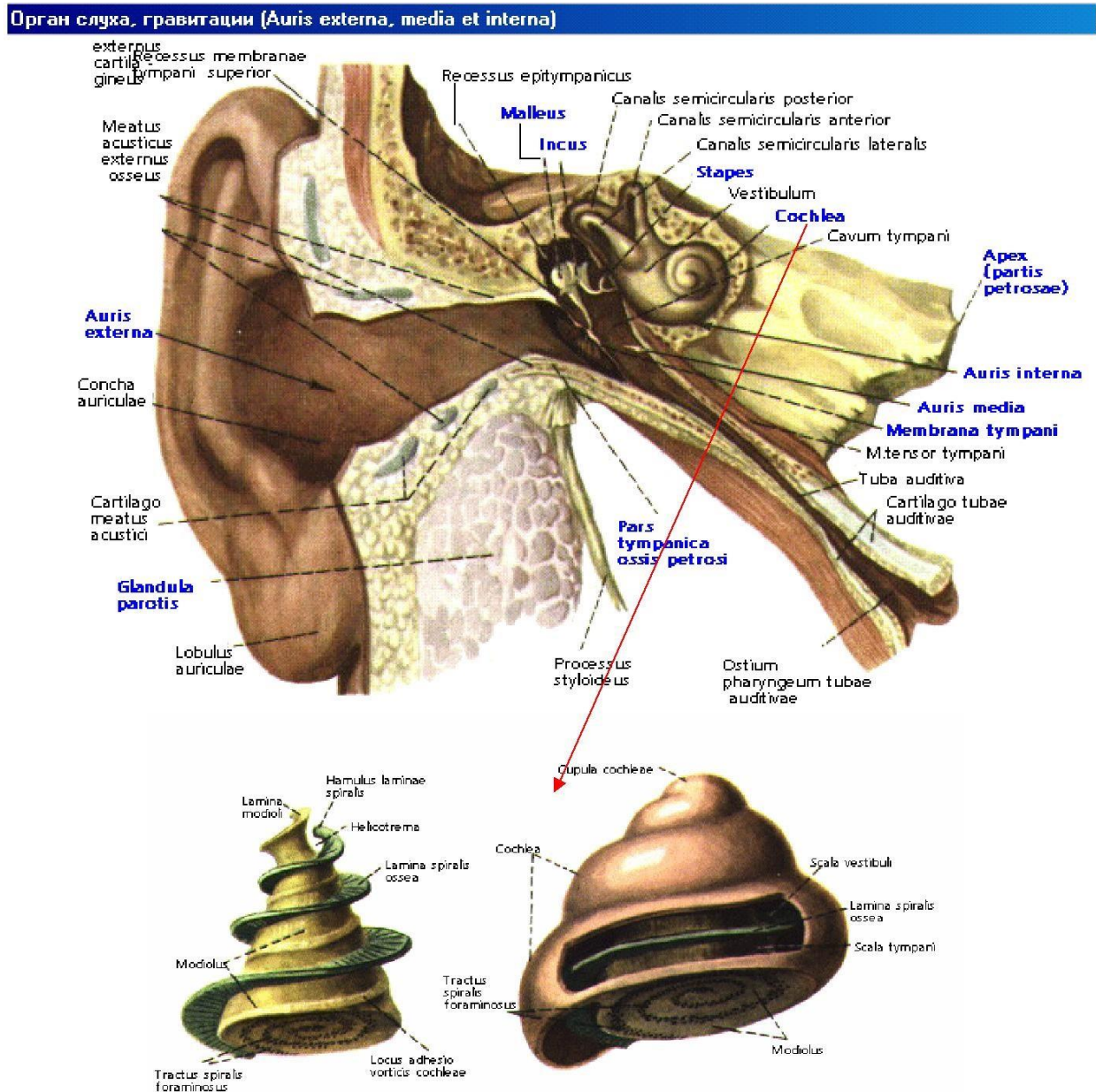


Рисунок 7.1 - Общий вид периферической слуховой системы

Обычно периферическую слуховую систему делят на три части: внешнее, среднее, внутреннее ухо.

Внешнее ухо состоит из ушной раковины и слухового канала, заканчивающегося тонкой мембраной, называемой барабанной перепонкой.

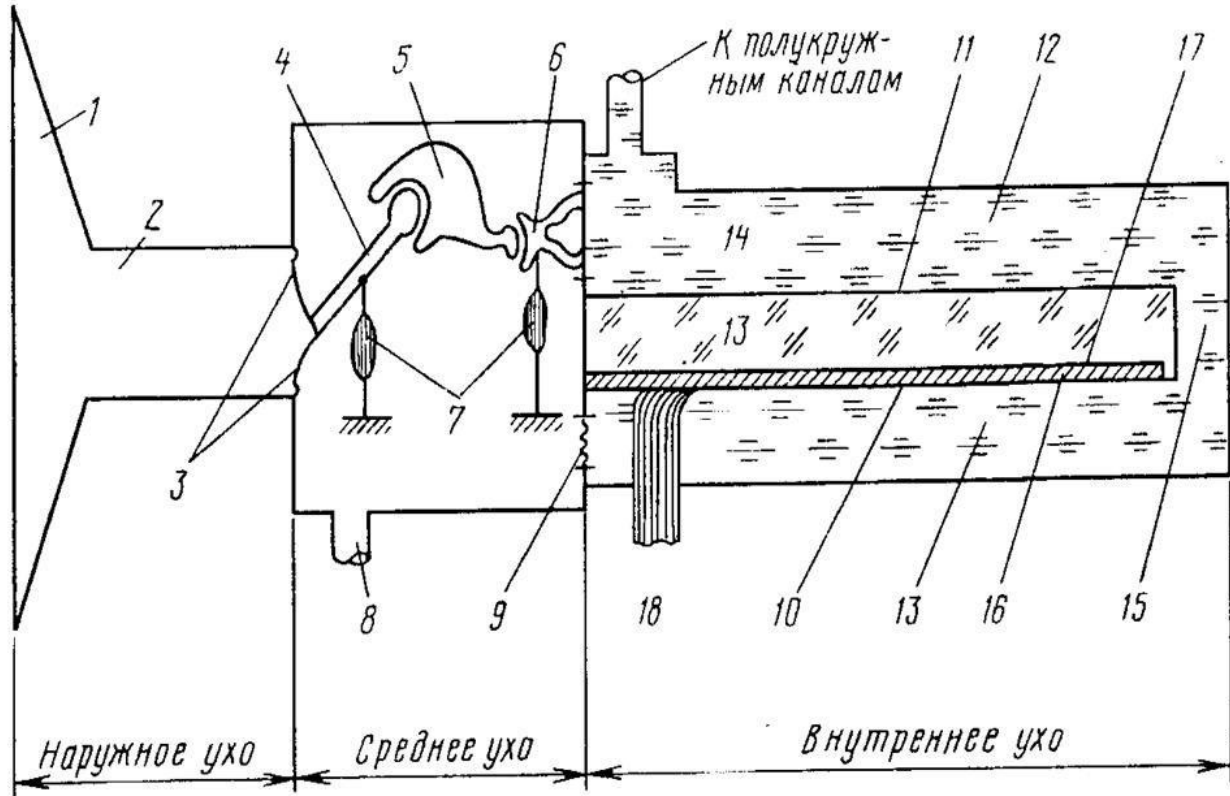
Внешние уши и голова это компоненты внешней акустической антенны, которая соединяет (согласовывает) барабанную перепонку с внешним звуковым полем. Основные функции внешних ушей - бинауральное (пространственное) восприятие, локализация звукового источника и усиление звуковой энергии, особенно в области средних и высоких частот. Слуховой канал представляет собой изогнутую цилиндрическую трубку длиной 22,5 мм, которая имеет первую резонансную частоту порядка 2,6 кГц, поэтому в этой области частот он существенно усиливает звуковой сигнал, и именно здесь находится область максимальной чувствительности слуха. Барабанная перепонка - тонкая плёнка толщиной 74 мкм, имеет вид конуса, обращённого острием в сторону среднего уха. На низких частотах она движется как поршень, на более высоких - на ней образуется сложная система узловых линий, что также имеет значение для усиления звука.

Среднее ухо - заполненная воздухом полость, соединённая с носоглоткой евстахиевой трубой для выравнивания атмосферного давления. При изменении атмосферного давления воздух может входить или выходить из среднего уха, поэтому барабанная перепонка не реагирует на медленные изменения статического давления - спуск-подъём и т.п. В среднем ухе находятся три маленькие слуховые косточки: молоточек, наковальня и стремечко. Молоточек прикреплен к барабанной перепонке одним концом, вторым он соприкасается с наковальней, которая при помощи маленькой связки соединена со стремечком. Основание стремечка соединено с овальным окном во внутреннее ухо.

Среднее ухо выполняет следующие функции: согласование импеданса воздушной средой улитки внутреннего уха; защита от громких звуков (акустический рефлекс); усиление (рычаговый механизм), за счёт которого звуковое давление, передаваемое во внутреннее ухо, усиливается почти на 38 дБ по сравнению с тем, которое попадает на барабанную перепонку. Внутреннее ухо находится в лабиринте каналов в височной кости, и включает в себя орган равновесия (вестибулярный аппарат) и улитку.

Улитка играет основную роль в слуховом восприятии. Она представляет собой трубку переменного сечения, свёрнутую три раза подобно хвосту змеи. В развёрнутом состоянии она имеет

длину 3,5 см. Внутри улитка имеет чрезвычайно сложную структуру. По всей длине она разделена двумя мембранами на три полости: лестница преддверия, срединная полость и барабанная лестница (рисунок 7.2)



1-ушная раковина; 2- слуховой проход; 3- барабанная перепонка; 4- молоточек; 5-наковальня; 6 - стремя; 7- мышцы; 8- евстахиева труба; 9- круглое окно; 10- основная мембрана; 11- мембрана Рейснера; 12- лестница преддверия; 13- эндолимфа; 14-перилимфа; 15- геликотрема; 16- кортиев орган; 17- покровная мембрана

Рисунок 7.2 – Устройство органа слуха

Сверху срединная полость закрыта мембраной Рейснера, снизу - базилярной мембраной. Все полости заполнены жидкостью. Верхняя и нижняя полости соединены через отверстие у вершины улитки (геликотрему). В верхней полости находится овальное окно, через которое стремечко передает колебания во внутреннее ухо, в нижней полости находится круглое окно, выходящее обратно в среднее ухо. Базилярная мембрана состоит из нескольких тысяч поперечных волокон: длина 32 мм, ширина у стремечка - 0,05 мм (этот конец узкий, легкий и жесткий), у геликотремы - ширина 0,5

мм (этот конец толще и мягче). На внутренней стороне базилярной мембраны находится орган Корти, а в нем - специализированные слуховые рецепторы - волосковые клетки. В поперечном направлении орган Корти состоит из одного ряда внутренних волосковых клеток и трех рядов наружных волосковых клеток. Между ними образуется тоннель. Волокна слухового нерва пересекают тоннель и контактируют с волосковыми клетками.

Слуховой нерв представляет собой перекрученный ствол, сердцевина которого состоит из волокон, отходящих от верхушки улитки, а наружные слои - от нижних ее участков. Войдя в ствол мозга, нейроны взаимодействуют с клетками различных уровней, поднимаясь к коре и перекрещиваясь по пути так, что слуховая информация от левого уха поступает в основном в правое полушарие, где происходит главным образом обработка эмоциональной информации, а от правого уха в левое полушарие, где в основном обрабатывается смысловая информация. В коре основные зоны слуха находятся в височной области, между обоими полушариями имеется постоянное взаимодействие.

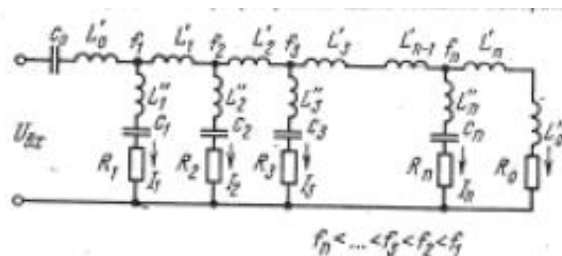
Общий механизм передачи звука упрощенно может быть представлен следующим образом: звуковые волны проходят звуковой канал и возбуждают колебания барабанной перепонки. Эти колебания через систему косточек среднего уха передаются овальному окну, которое толкает жидкость в верхнем отделе улитки (лестнице преддверия), в ней возникает импульс давления, который заставляет жидкость переливаться из верхней половины в нижнюю через барабанную лестницу и геликотрему и оказывает давление на перепонку круглого окна, вызывая при этом его смещение в сторону, противоположную движению стремечка. Движение жидкости вызывает колебания базилярной мембраны (бегущую волну). Преобразование механических колебаний мембраны в дискретные электрические импульсы нервных волокон происходят в органе Корти. Когда базилярная мембрана вибрирует, реснички на волосковых клетках изгибаются, и это генерирует электрический потенциал, что вызывает поток нервных электрических импульсов, несущих всю необходимую информацию о поступившем звуковом сигнале в мозг для дальнейшей переработки и реагирования.

7.1.2 Восприятие по частоте

Каждое из волокон основной мембраны резонирует на вполне определенной для него частоте. Сложный звук, состоящий из ряда частотных составляющих, вызывает колебания ряда волокон соответственно частотам составляющих. На рисунке 2.3 приведен схематический разрез улитки основной мембраны, по оси абсцисс дано расстояние (в миллиметрах) от начала улитки до волокон основной мембраны, там же указаны частоты, на которые отзываются эти волокна. Частоты ниже 60 Гц воспринимаются по субъективным гармоникам. На рисунке 2.4 приведена эквивалентная электрическая модель слухового анализатора. В ней 140 параллельных звеньев — резонаторов, соответствующих волокнам мембраны; последовательные индуктивности L'_k соответствуют соколеблющейся массе лимфы. Ток в параллельных звеньях соответствует скорости колебаний волокон. На рисунке 7.3 приведены числовые значения элементов модели. Модель показала хорошее соответствие реальной слуховой улитке.



Рисунок 7.3 – Продольный разрез улитки вдоль основной мембраны



Рисунке 7.4 – Эквивалентная электрическая схема улитки

В таблице 7.1 приведены величины средних значений звукового давления, создаваемого музыкальными инструментами для отрывков исполнения длительностью 15 с.

Таблица 7.1 - Величины средних значений звукового давления

№	Инструмент	Расстояние, м	Среднее звуковое давление, Па	Пик-фактор, дБ	Пиковое значение мощности излучения, Вт	Область наивысших пиковых значений, Гц	Пиковое значение в пределах полосы наибольшей
1	Большой барабан 90×38 см						
	Проба А	0,9	9,9	10	24,6	250-500	9,8
						20-62,5	0,24
	Проба Б	0,9	2,78	7,7	1,2	250-500	0,19
2	Большой барабан						
	75×30 см	0,9	3,5	16	13,4	125-250	1,7
	85×48 см	0,9	6,6	5,8	4,9	20-62,5	1,2
3	Барабан военный	1,2	1,46	20,5	11,9	250-500	3,7
4	Цимбалы 37 см	0,9	1,8	-	9,5	8000- 11300	0,95
5	Треугольник	0,9	0,23	-	0,05	5600-8000	0,017
						62,5-125	0,078
6	Контрабас	1,5	0,42	10,8	0,156	125-250	0,078
7	Бас-саксафон	1,05	0,41	16,6	0,288	250-500	0,228
8	Бас-труба	1,5	0,54	9,7	0,206	250-500	0,082
9	Тромбон	0,9	0,65	17,5	6,4	600-700	0,064
						2000-2800	0,051
10	Труба	0,9	0,86	12	0,314	250-500	0,047
						500-700	0,047
11	Английский рожок	0,9	0,38	11,2	0,053	250-500	0,053
12	Кларнет	0,9	0,35	11,5	0,05	250-500	0,0053
13	Флейта	1,05	0,16	-	0,0555	700-1000	0,0045
						1400-2000	0,0045
14	Пикколо	1,05	0,22	-	0,084	2000-2800	0,021

15	Рояль	3,0	0,26	9,8	0,267	250-500	0,267
					0,248	250-500	0,248
16	Орган	3,6	0,21	13,2	0,35	250-500	0,11
17	Орган фортиссимо	3,6	2,0	8,7	12,6	20-62,5	2,5
18	Оркестр из 15 инструментов	4,0 ¹	0,79	14,3	9,0	250-500	0,45
						2000-2800	0,32
19	Оркестр из 18 инструментов	4,0	0,66	10,3	2,5	250-500	0,8
						2000-2800	-
20	Оркестр из 75 инструментов						
	Проба А	4,5 ²	0,51	17,7	8,2	125-250	0,82
						250-500	1,03
						2000-2800	1,03
	Проба В	4,5	0,46	27,8	66,5	250-500	6,7
						8000- 12000	5,3
	Проба С	4,5	0,47	21,2	13,9	250-500	1,4
						2000-2800	1,4
	Проба D	4,5	0,66	24,1	13,8	125-250	1,7
						250-500	1,7
						2000-2800	1,7

7.2 Задание

Смоделировать частотный отклик улитки с использованием пакета MicroCap. Для чего выполнить следующее:

1. Выбрать из таблицы 2.1 инструмент, для которого будет рассчитываться отклик.

2. В соответствии с частотным диапазоном наивысших значений звукового давления и используя рисунок 2.2 определить расстояние (в миллиметрах) от начала улитки до волокон основной мембраны, соответствующее данному диапазону.

¹ Пульт дирижера

² Пульт дирижера

3. Считая, что 30 мм улитки (вся длина) моделируется 140 звеньями в частотном диапазоне 60-16000 Гц, определить номера (k) и количество звеньев, соответствующих заданному частотному диапазону.

4. Составить эквивалентную схему участка улитки, используя рисунок 2.2. Рассчитать в MathCAD параметры эквивалентной схемы, где k – номер звена.

$$L'_k = 24,02 \cdot 10^{-3} \cdot e^{0,0029k} \text{ Гн}; \quad L''_k = 75,12 \cdot 10^{-3} \cdot e^{0,0029k} \text{ Гн};$$

$$C_k = 553 \cdot 10^{12} \cdot e^{0,05k} \text{ Ф}; \quad R_k = 5,825 \cdot 10^3 \cdot e^{-0,013k} \text{ Ом};$$

$$L''_0 = 0,067 \text{ Гн}; \quad R_0 = 70,957 \text{ Ом}$$

5. Составить полученную схему в программе Microcap и смоделировать частотный и временной отклик. Использовать в качестве источника звука генератор шумового сигнала.

7.3 Содержание отчета

1. Расчет количества звеньев и их номеров.
2. Расчет параметров звеньев в программе MathCAD.
3. Электрическая эквивалентная схема улитки, выполненная в программе Microcap.
4. Графики частотной характеристики схемы и временного отклика.

Практическое занятие №8 Моделирование электрического генератора сердца

8.1 Краткие теоретические сведения

8.1.1 Расчет параметров электрокардиограммы желудочкового комплекса

Рассмотрим работу дипольного эквивалентного электрического генератора сердца (ДЭЭГС) в процессе электрической систолы. Будем считать, что сердце обладает активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C . Рассмотрим в качестве модели три взаимно перпендикулярных колебательных контура, расположенных во фронтальной, горизонтальной и саггитальной плоскостях, рисунок 8.1. ЭДС E во всех контурах одинаковы. Для желудочков непосредственным водителем ритма является атриовентрикулярный узел. Так как в процессе кардиоцикла происходит изменение емкости C , связанной с циклической частотой, то электрические колебания в ДЭЭГС носят параметрический характер.

Рассмотрим работу сердца как электрического генератора в процессе электрической систолы.

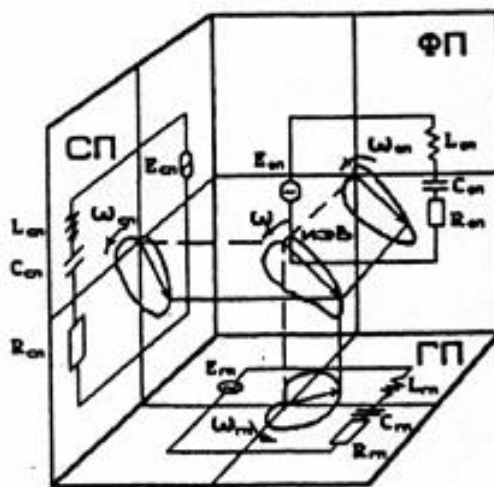


Рисунок 8.1 - Электрическая схема дипольного эквивалентного электрического генератора сердца

В любой плоскости зависимость дипольного момента D ИЭВ от угла поворота φ определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2D}{d\theta^2} + D = C_1, \quad (8.1)$$

где C_1 – постоянная величина.

Решением этого уравнения является зависимость вектора дипольного момента от угла поворота и времени, которое удобно записать в виде:

$$D = A \sin^2(\theta + \varphi)/2 + B \cos^2(\theta + \varphi)/2. \quad (8.2)$$

В формуле (8.2) A и B – постоянные интегрирования, так что $C_1 = (A + B)/2$. Угол φ – это угол наклона электрической оси сердца (ЭО) или оси петель вектор электрокардиограммы. На рисунке 8.2 показана вектор-электрокардиограмма петель QRS и T, построенная по формуле (8.2). Угол φ принят равным 2,3 рад, что примерно соответствует норме. На рисунке 8.2 также показаны начала отсчетов углов φ и θ . Положительным считается направление против часовой стрелки. Значения постоянных A и B будут определены в дальнейшем.

Существует также метод регистрации проекций пространственной кривой на выделенной плоскости – вектор-электрокардиография (ВЭКГ).

Рассмотрим работу ДЭЭГС. Будем считать, что сердце обладает активным сопротивлением R , индуктивностью L и емкостью C . Схему ДЭЭГС представим в виде контура с последовательно включенными R , L , C и источником тока с ЭДС E , закон изменения которого отражает работу водителя ритма, рисунок 8.2. Для желудочков непосредственным водителем ритма является атриовентрикулярный узел.

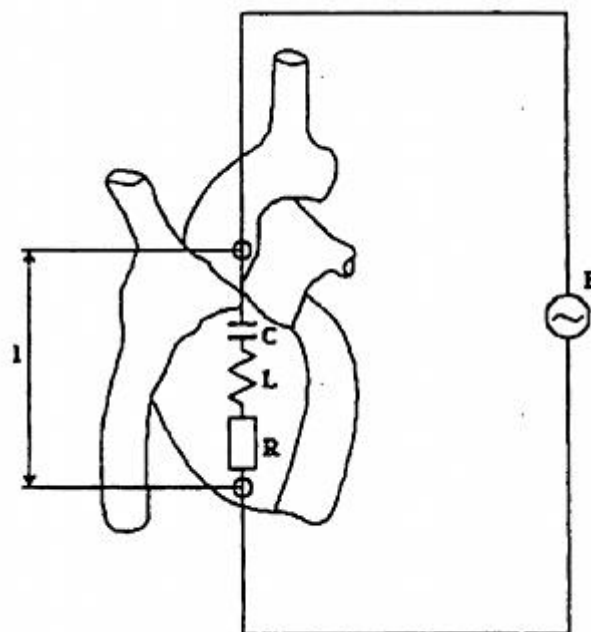


Рисунок 8.2 - Электрическая схема дипольного эквивалентного электрического генератора сердца

Уравнение Кирхгофа для мгновенных значений напряжений в контуре имеет вид:

$$U_r + U_i + U_c = E, \quad (8.3)$$

где в левой части сумма напряжений на соответствующих сопротивлениях. Используя известные выражения, связывающие эти напряжения и ток i , получим:

$$iR + \frac{d(Li)}{dt} + \int \frac{idt}{C} = E. \quad (8.4)$$

Активное сопротивление миокарда определяется прежде всего сопротивлением цитоплазмы и межклеточной жидкости, поэтому его можно считать постоянным в течение кардиоцикла. Индуктивность возбудимой мембраны существует только во время возбуждения и связана со спиральным движением ионов в ионных каналах. Поэтому сложно предположить, что эволюционно мог сформироваться механизм активной регуляции индуктивности.

Будем считать индуктивность сердца величиной постоянной. Продифференцируем (8.4) по времени t :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}. \quad (8.5)$$

Поделив уравнение (8.5) на L , и обозначив $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ собственную частоту колебаний тока в ДЭЭГС, найдем:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt}. \quad (8.6)$$

Уравнение (8.6) описывает вынужденные колебания нелинейного осциллятора, так как собственная частота колебаний сердца может изменяться за счет изменения емкости C .

Будем искать решение этого уравнения путем умножения его на произвольную функцию $f(t)$:

$$f(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + f(t) \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 f(t) i = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} f(t). \quad (8.7)$$

Подчиним функцию $f(t)$ условию:

$$f(t) \frac{d^2 i}{dt^2} + f(t) \frac{R}{L} \frac{di}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dE}{dt} \left(f(t) \frac{di}{dt} \right).$$

Из которого следует:

$$f(x) = \exp \left(\int \frac{R}{L} dt \right). \quad (8.8)$$

Уравнение (8.7) после умножения на $f(t)$ принимает вид:

$$f(t) \frac{d}{dt} + \left(f(t) \frac{di}{dt} \right) + (wf(t))^2 i \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dE}{dt} f(t)^2. \quad (8.9)$$

Введём новую переменную по формуле:

$$d\theta = \frac{dt}{f(t)}. \quad (8.10)$$

Исходя из уравнения (8.9), функция $f(t)$ имеет размерность, обратную циклической частоте. Поэтому обозначим эту функцию $f(t) = 1/w\theta$.

Умножим уравнение (8.9) на расстояние между истоком и стоком ДЭЭГС и перепишем его в новых обозначениях:

$$\frac{1}{w_\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{w_\theta} \frac{dD}{dt} \right) + \left(\frac{w_0}{w_\theta} \right)^2 D = \frac{1}{w_\theta^2 L} \frac{dE}{dt}, \quad (8.11)$$

где $D=il$, а функция q в соответствии с (8.10) представляет собой угол поворота вектора ДЭЭГС, который вращается с циклической частотой $w\theta$.

В соответствии с (8.8) временная зависимость $w\theta$, учитывая, что R и L – постоянные величины, имеет вид

$$w\theta = w t_0 \cdot \exp[-R(t - t_0)/L], \quad (8.12)$$

где $w t_0$ – циклическая частота вращения вектора ДЭЭГС в момент времени t_0 .

Падение потенциала водителя ритма, состоящего из атипичных миокардиальных волокон, а следовательно, и dE/dt в интервале Q-T происходит по экспоненциальному закону. Поэтому можно предположить, что в правой части уравнения (8.11) стоит величина, близкая к постоянной. Обозначая эту величину $C1$, а также учитывая, что $dq = w_\theta dt$, из (8.11) получаем уравнение:

$$\frac{d^2D}{d\theta^2} + \left(\frac{w_0}{w_\partial}\right)^2 D = C_1. \quad (8.13)$$

Кроме того, естественно предположить, что в процессе эволюции электрические параметры миокарда сформировались таким образом, что собственная частота w_0 сравнялась с частотой w_∂ вращения вектора D дипольного момента ДЭЭГС. Тогда уравнение (8.13) принимает вид:

$$\frac{d^2D}{d\theta^2} + D = C_1. \quad (8.14)$$

Решением этого уравнения является зависимость вектора дипольного момента от угла поворота и времени:

$$D = C_1 + C_2 \cos(\theta + \varphi) = C_1 + C_2 \cos\left(\int_0^t w_\partial dt + \varphi\right), \quad (8.15)$$

где φ – начало отсчета угла поворота вектора D .

Подставляя в (8.15) формулу (8.12), получаем зависимость величины вектора D от времени:

$$D = C_1 + C_2 \cos\{(w_{t_0}L/R)[1 - \exp(-R(t - t_0)/L)] + \varphi\}. \quad (8.16)$$

На рисунке 8.3 показана зависимость вектора D от угла поворота, построенная по формуле (8.15). Значение C_1 принято равным $1 \cdot 10^{-5}$ Ам, величина $C_2 = 1.7 \cdot 10^{-5}$ Ам, угол $\varphi = 2,3$ рад. Из рисунка видно, что вектор ДЭЭГС описывает две петли. Сначала петлю QRS, отражающую деполяризацию желудочков, затем петлю Т, описывающую их реполяризацию. Для предсердий нужно решать отдельную электродинамическую задачу по аналогии с представленной в данной работе задаче для желудочков.

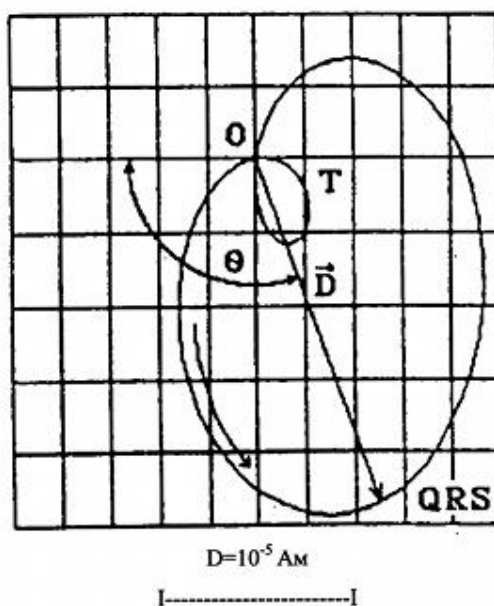


Рисунок 8.3 - Вектор-электрокардиограмма комплекса QRST, построенная в полярных координатах $D(q)$

Зависимость вектора D от времени, построенная по формуле (8.16), показана на рисунке 8.4. Принято, что в момент времени $t_0=64$ мс циклическая частота вращения вектора ДЭЭГС $\omega t_0=29$ рад/с. Отношение R/L принято равным 6 с $^{-1}$. В этих условиях цикл QRST составляет 360 мс. Из рисунка 8.4 видно, что вектор D сначала растет, а затем падает до нуля, что отражает деполяризацию желудочков. После этого он меняет свой знак, и последующее его изменение отражает реполяризацию желудочков сердца.

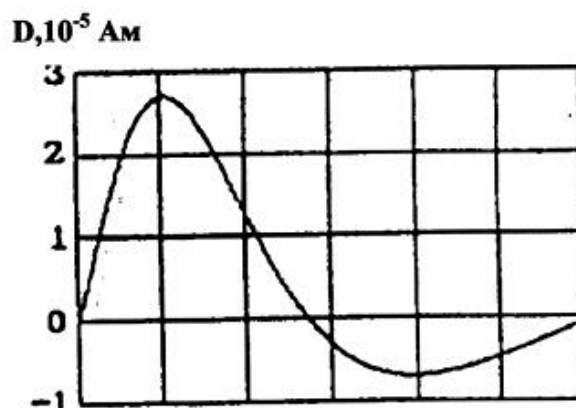


Рисунок 8.4 - Расчет зависимости дипольного момента интегрального электрического вектора сердца от времени

На рисунке 8.5 показана модельная линейная ЭКГ, построенная по формуле:

$$U(t) = U_0 D(t) \cos q, \quad (8.17)$$

где принято $U_0 = 0,5$ В/Ам. Угол φ , определяющий поворот ВЭКГ на рисунке 8.2, для данного графика принят равным $3,1$ рад для более яркого проявления всех зубцов ЭКГ в интервале QRST.

Изменение емкости, индуктивности и активного сопротивления как всего миокарда, так и отдельных его частей, которое наблюдается при патологии, приводит к изменению формы и размеров петель ВЭКГ. Поэтому замер таких параметров ДЭЭГС, как R, L, C может иметь диагностическое значение.

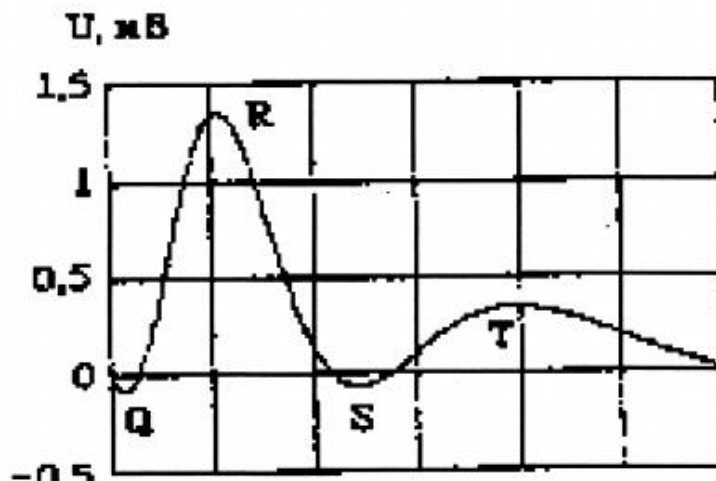
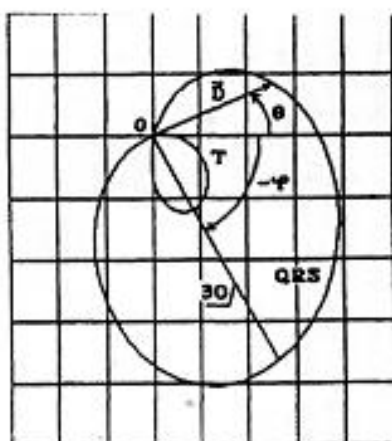


Рисунок 8.5 - Модельная электрокардиограмма для электрической систолы

В заключение можно отметить, что сердце работает на основе баланса между формой потенциала водителя ритма dE/dt и изменением емкости миокарда в процессе возбуждения. Циклические изменения емкости, а следовательно, и собственная частота колебаний ДЭЭГС $\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$ должны соответствовать работе водителя ритма. В противном случае происходит развитие патологических процессов в сердце, которые находят свое отражение на электрокардиограмме.



$$D=10^{-5} \text{ Am}$$

Рисунок 8.6 - Вектор-электрокардиограмма комплекса QRST, построенная в полярных координатах $D(q)$

Проектируя на линию отведения петли рисунке 8.6 (в данном случае выбрано горизонтальное направление отведения), можно построить линейную электрокардиограмму (ЭКГ) по формуле:

$$U = kD \cos \theta = \left(R \frac{\cos^2(\theta + \varphi)/2}{\cos \varphi} - T \frac{\sin^2(\theta + \varphi)/2}{\cos \varphi} \right) \cos \theta. \quad (8.18)$$

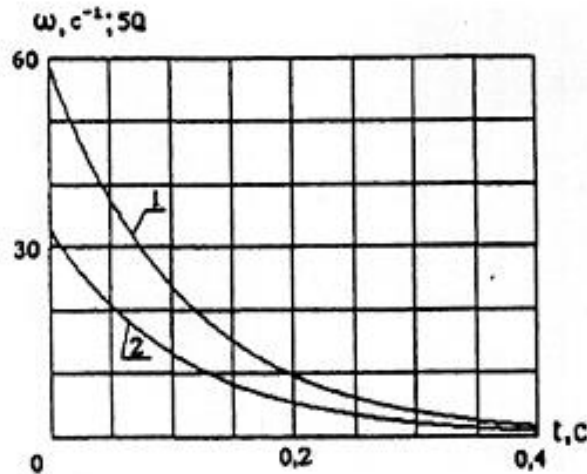
На рисунке 8.6 видна связь проекций длин главных осей петель QRS и T равных соответственно B и A на линию отведения с амплитудами зубцов линейной ЭКГ R и T. Рисунок 8.6 построен для длин главных осей петель $B = 2.0 \cdot 10^{-5} \text{ Ам}$, $A = B/(R/T) = 0.67 \cdot 10^{-5} \text{ Ам}$. Амплитуды зубцов ЭКГ приняты: $R=1,5 \text{ мВ}$, $T=0,5 \text{ мВ}$.

Циклическая частота вращения ИЭВ зависит от времени по закону:

$$w = wt_0 \cdot \exp[-R(t - t_0)/L], \quad (8.19)$$

где wt_0 – циклическая частота вращения вектора ДЭЭГС в момент времени t_0 . То, что данное изменение угловой скорости (рисунок 8.7) отражает экспериментальный факт можно косвенно судить по

известному отношению времен реполяризации и деполяризации желудочков. Отношение этих времен, т.е. длительностей зубца Г и комплекса QRS, лежит в диапазоне 1,3-2,7. Это указывает на снижение угловой скорости вращения вектора ДЭЭС.



1 -циклическая частота вращения w , 2 - добротность «электрического сердца» Q

Рисунок 8.7 - Зависимость циклической частоты вращения вектора D и добротности Q от времени в процессе электрической систолы

Так как $w=dq/dt$, то зависимость угла поворота вектора от времени можно найти по формуле:

$$q = Q_0[1 - \exp(-R(t - t_0)/L)] - \varphi, \quad (8.20)$$

где $Q_0 = wt_0L/R$ – добротность эквивалентного контура в момент времени t_0 , φ – угол, под которым направлена главная ось петли QRS(электрическая ось сердца ЭО) (рисунок 8.6). Добротность, естественно, не является постоянной величиной в процессе кардиоцикла. Учитывая (8.19), можно видеть, что в процессе электрической систолы она падает по закону:

$$Q = wL/R = Q_0 \cdot \exp[-R(t - t_0)/L]. \quad (8.21)$$

К сожалению, традиционно зубец Q, и величина добротности обозначаются одной буквой. Это же относится к зубцу R и величине сопротивления. Предполагается, что это не вызовет затруднений. На рисунке 8.7 показаны графики изменений циклической частоты ω_0 и добротности Q в зависимости от времени. Графики построены для $R/L=9 \text{ с}^{-1}$ и $Q_0=4,4(\omega t_0 = Q_0 R/L = 40 \text{ рад/с})$.

На рисунке 8.8 показаны зависимости дипольного момента D, $\cos\theta$ и линейной ЭКГ U от времени, построенные по формулам (8.2), (8.18) и (8.19) для вышеуказанных значений величин R, T, Q_0 , R/L при $\varphi=0$ (т.е. электрическая ось сердца совпадает с линией отведения, что наиболее характерно для нормы второго стандартного отведения). Из графиков видно, что положительные значения зубцов R и T определяются одинаковыми знаками величин D и $\cos\theta$ в то время как отрицательные значения зубцов Q и S – разными знаками. Параметры подбирались таким образом, чтобы ЭКГ соответствовала норме. Так как при $t=t_0$ в соответствии с (8.20) $q=\varphi$, то из (8.18) получаем $U=R$, следовательно, t_0 – это время достижения максимума зубца R.

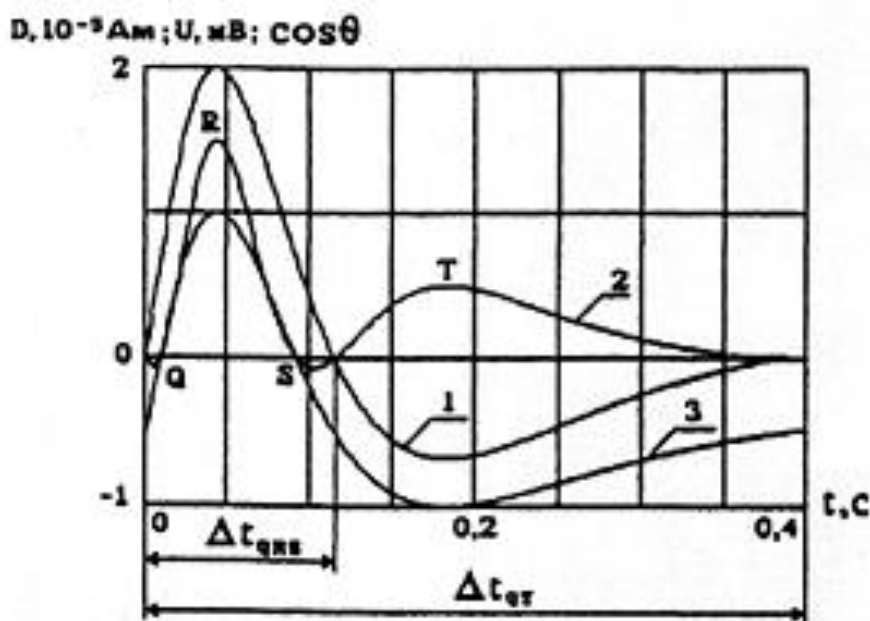


Рисунок 8.8 - Анализ формирования комплекса QRST электрокардиограммы

8.2 Задание

Используя исходные данные из таблицы рассчитать, используя программу Mathcad, электрический генератор сердца.

1. Построить график $D(Q)$ – в полярных координатах по двум формулам (8.2) и (8.15). Сравнить.

2. Построить график $D(t)$ – в прямоугольных координатах по формуле (8.16).

3. Построить график $U(t)$ – в прямоугольных координатах по формулам (8.17) и (8.18). Сравнить.

4. Построить графики $Q(t)$, $Q(t)$ – в прямоугольных координатах по формулам (8.20) и (8.21). Сравнить.

5. Построить график $w(t)$ – в прямоугольных координатах по формуле (8.12).

6. Построить на одном графике $D(t)$, $\cos Q(t)$ и $U(t)$ при $j=0$. Из графиков определить времена $D(t)_{QRS}$, $D(t)_{QT}$, $D(t)_{RT}$, $D(t)_R$.

Номер строки – номер варианта.

Таблица 8.1 – Исходные значения к расчету

	C_1 , Ам, 10^{-5}	C_2 , Ам, 10^{-5}	φ , рад	t_0 , мс	w_0 , рад/с	R/L с $^{-1}$	$k = U_0$, В/А	A , Ам, 10^{-5}	B , Ам, 10^{-5}	R , мВ	T , мВ
1	1,00	-1,70	2,30	64,00	29,00	6,00	0,50	0,67	2,00	1,50	0,50
2	1,10	-1,80	2,40	65,00	30,00	7,00	0,54	0,70	2,20	1,80	0,80
3	0,90	-1,90	2,50	66,00	31,00	8,00	0,37	0,80	2,10	1,90	0,90
4	1,05	-1,60	2,70	67,00	30,50	9,00	0,46	0,90	2,40	1,60	0,60
5	1,20	-1,10	3,14	69,00	29,50	6,50	0,67	0,65	2,90	1,10	0,10
6	0,98	-1,50	1,50	45,00	31,50	7,50	0,29	0,75	2,50	1,50	0,50
7	0,75	-1,40	2,60	43,00	28,00	8,50	0,75	0,85	2,60	1,40	0,40
8	0,95	-1,30	2,90	47,00	28,50	9,50	0,87	0,95	2,70	1,30	0,30
9	1,03	-1,20	2,15	49,00	27,00	6,10	0,57	0,61	2,80	1,20	0,20
10	1,04	-2,00	3,10	51,00	27,00	6,20	0,32	0,62	2,00	2,00	1,00
11	1,20	-1,25	3,05	50,00	26,00	6,80	0,52	0,68	2,75	1,25	0,25
12	1,14	-1,56	1,57	52,00	25,00	7,30	0,47	0,73	2,44	1,56	0,56
13	0,84	-1,72	1,60	56,00	24,00	7,50	0,84	0,75	2,28	1,72	0,72
14	0,73	-2,04	1,80	59,00	35,00	7,90	0,73	0,79	1,96	2,04	1,04
15	1,11	-2,36	1,95	39,00	36,00	8,20	0,41	0,82	1,64	2,36	1,36
16	1,17	-2,07	2,10	32,00	32,40	8,40	0,86	0,84	1,93	2,07	1,07
17	1,08	-2,09	2,05	35,00	35,80	8,80	0,71	0,88	1,91	2,09	1,09
18	1,30	-1,74	2,85	37,00	28,20	9,20	0,80	0,92	2,26	1,74	0,74
19	1,06	-1,83	2,64	38,00	29,70	9,30	0,40	0,93	2,17	1,83	0,83
20	1,13	-1,94	2,43	87,00	30,10	6,45	0,21	0,65	2,06	1,94	0,94
21	1,05	-1,82	2,74	89,00	31,70	7,92	0,63	0,79	2,18	1,82	0,82
22	1,07	-2,06	2,83	81,00	32,80	8,12	0,69	0,81	1,94	2,06	1,06
23	0,94	-2,50	2,47	82,00	33,50	9,05	0,77	0,91	1,50	2,50	1,50
24	0,97	-1,47	2,53	93,00	29,40	7,53	0,51	0,73	2,53	1,47	0,47
25	0,89	-1,78		95,00	28,10	10,00	0,60	1,00	2,22	1,78	0,78