

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна  
Должность: проректор по учебной работе  
Дата подписания: 19.01.2022 18:25:44  
Уникальный программный ключ:  
0b817ca911e6668abb13a5d426d59e51c11eabb175e943d14246511a56d089

## МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники



### **ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ РОБОТОВ**

Методические указания к выполнению практической и  
самостоятельной работы  
по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных  
систем и роботов» для студентов направления  
15.04.06

Курск 2017

УДК 621

Составитель: С.И. Савин

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Е.Н. Политов*

**Использование программных пакетов для моделирования управляемого движения роботов:** методические указания к выполнению практической и самостоятельной работ по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. С.И. Савин. Курск, 2017. 23 с.: ил. 12, табл. 1. Библиогр.: с.21-23.

Методические указания содержат сведения о методах моделирования работы пропорционально-дифференциального регулятора средствами математического пакета Mathcad.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утверждённой учебно-методическим объединением (УМО).

Предназначены для студентов направления 15.04.06 – Мехатроника и робототехника всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60x84 1/16  
Усл.печ.л. 1,3. Уч.-изд.л. 1,2 Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ ПАКЕТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ РОБОТОВ

**Цель работы:** изучить методику моделирования работы системы автоматического управления робототехнического устройства с пропорционально-дифференциальным регулятором, средствами математического пакета Mathcad.

**Аппаратные средства:** математический пакет Mathcad.

**Формируемые компетенции:**

**ОК-4** - готовность использовать на практике приобретённые умения и навыки в организации исследовательских и проектных работ, выполняемых малыми группами исполнителей,

**ПК-1** - способность составлять математические модели мехатронных и робототехнических систем, их подсистем, включая исполнительные, информационно-сенсорные и управляющие модули, с применением методов формальной логики, методов конечных автоматов, сетей Петри, методов искусственного интеллекта, нечёткой логики, генетических алгоритмов, искусственных нейронных и нейро-нечётких сетей,

**ПК-2** - способность использовать имеющиеся программные пакеты и, при необходимости, разрабатывать новое программное обеспечение, необходимое для обработки информации и управления в мехатронных и робототехнических системах, а также для их проектирования

### 1. Краткие теоретические сведения

Рассмотрим управляемую механическую систему, имеющую  $n$  степеней свободы, положение которой описывается обобщенными координатами  $q_i$ . Введем вектор обобщенных координат  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T. \quad (1)$$

Обозначим желаемое значение обобщенных координат  $q_i^*$ , и вектор желаемых значений обобщенных координат - как  $\mathbf{q}^*$ .

Желаемые значения обобщенных координат будут использоваться, как задающие воздействия многоканальной системы автоматического управления (САУ). Ошибка управления в рассматриваемой САУ имеет вид:

$$\mathbf{e} = \mathbf{q}^* - \mathbf{q} = [e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n]^T. \quad (2)$$

Пропорционально-дифференциальный регулятор это элемент системы автоматического управления с обратной связью, генерирующий управляющее воздействие, пропорциональное значению ошибки управления и её первой производной. Рассмотрим случай, когда выходом регулятора является вектор  $\boldsymbol{\tau}$ , компонентами которого являются моменты электроприводов, установленных в шарнирах системы.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_d \dot{\mathbf{e}}, \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \dots \quad \tau_k]^T, \quad (4)$$

где  $k$  - число электроприводов механизма,  $\mathbf{K}_p$  и  $\mathbf{K}_d$  - матрицы коэффициентов регулятора, размерностью  $n \times k$ . В случае, когда число приводов равно числу обобщенных координат матрицы  $\mathbf{K}_p$  и  $\mathbf{K}_d$  квадратные.

## 2. Методика выполнения лабораторной работы

Рассмотрим двухзвенный механизм, образованный звеньями, соединёнными последовательно, через шарниры, первое звено соединено вращательной кинематической парой пятого класса с неподвижным основанием (см. рисунок 1).

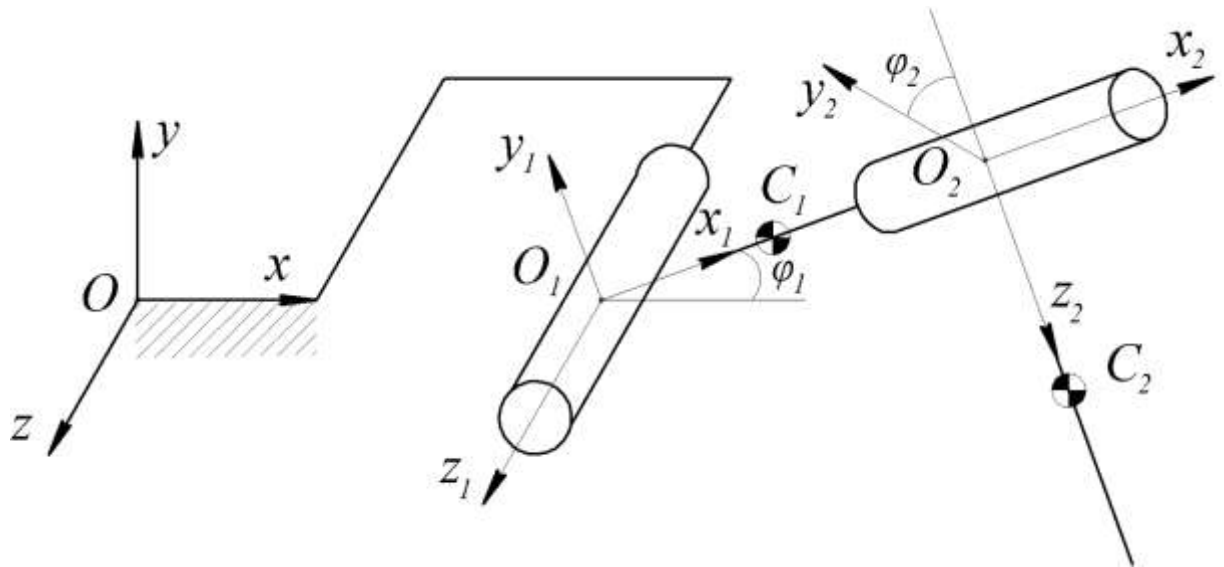


Рисунок 1 Структурная схема плоского трехзвенного механизма, 1-3 – первое-третье звенья механизма

Введем неподвижную систему координат  $Oxyz$  (далее – система (0)), а также подвижные системы координат  $O_1x_1y_1z_1$  и  $O_2x_2y_2z_2$ . Полагаем, что массы звеньев распределены равномерно по их длине. Центры масс звеньев обозначены точками  $C_1, C_2$ ,  $i$ -е звено имеет длину  $l_{i-1}$ , и массу  $m_{i-1}$ .

Матрица перехода между системами (0) и (1) имеет вид:

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_1) & -\sin(\varphi_1) & 0 \\ \sin(\varphi_1) & \cos(\varphi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

$$\mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_2) & -\sin(\varphi_2) \\ 0 & \sin(\varphi_2) & \cos(\varphi_2) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Вектор обобщенных координат имеет вид:

$$\mathbf{q} = [\varphi_1 \quad \varphi_2]^T. \quad (7)$$

Запишем радиус-векторы, описывающие положение точек  $C_1, C_2$ :

$$\mathbf{r}_{\tilde{N}1} = \mathbf{T}_{10} \begin{bmatrix} 0.5l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_{O1} = \mathbf{T}_{10} \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{\tilde{N}2} = \mathbf{r}_{O1} + \mathbf{T}_{21} \mathbf{T}_{10} \begin{bmatrix} 0.5l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Ниже приведён код Mathcad, реализующий вывод уравнений движения механизма. Первая часть кода задает геометрию звеньев.

### Листинг 1 Код, задающий геометрию звеньев

Задание радиус-векторов точек

$$\mathbf{r}_{O01}(l) := \begin{pmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_{1O1C1}(l) := \begin{pmatrix} l_1 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_{1O1O2}(l) := \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_{2O2C2}(l) := \begin{pmatrix} 0 \\ l_2 \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решим прямую задачу кинематики – запишем необходимые матрицы поворота, найдем положения центров масс звеньев.

### Листинг 2 Код, решающий прямую задачу кинематики

Нахождение матриц перехода

$$\mathbf{T}_{10}(q) := \begin{pmatrix} \cos(q_0) & -\sin(q_0) & 0 \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{21}(q) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) \end{pmatrix}$$

Нахождение матрицы перехода T20

$$\mathbf{T}_{20}(q) := \mathbf{T}_{10}(q) \cdot \mathbf{T}_{21}(q) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(q_0) & -\cos(q_1) \cdot \sin(q_0) & \sin(q_0) \cdot \sin(q_1) \\ \sin(q_0) & \cos(q_0) \cdot \cos(q_1) & -\cos(q_0) \cdot \sin(q_1) \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) \end{pmatrix}$$

Нахождение вектора  $rC1$

$$rC1(q,l) := T10(q) \cdot r1O1C1(l) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\cos(q_0) \cdot l_1}{2} \\ \frac{\sin(q_0) \cdot l_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Нахождение вектора  $rC2$

$$rC2(q,l) := T10(q) \cdot r1O1O2(l) + T20(q) \cdot r2O2C2(l) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(q_0) \cdot l_1 - \frac{\cos(q_1) \cdot \sin(q_0) \cdot l_2}{2} \\ \sin(q_0) \cdot l_1 + \frac{\cos(q_0) \cdot \cos(q_1) \cdot l_2}{2} \\ \frac{\sin(q_1) \cdot l_2}{2} \end{pmatrix}$$

Найдем производные от полученных векторов (см. листинг 3).

Листинг 3 Код, реализующий нахождение производных от радиус-векторов (8)-(9)

Задание вектора обобщенных скоростей в векторной форме

$$v(v) := \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \quad n := 2$$

$$v1(q,v,l) := \text{Jacob}(rC1(q,l), q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sin(q_0) \cdot v_0 \cdot l_1}{2} \\ \frac{\cos(q_0) \cdot v_0 \cdot l_1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v2(q,v,l) := \text{Jacob}(rC2(q,l), q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sin(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot v_1 \cdot l_2}{2} - \frac{\cos(q_0) \cdot \cos(q_1) \cdot v_0 \cdot l_2}{2} - \frac{\sin(q_0) \cdot v_0 \cdot l_1}{2} \\ \cos(q_0) \cdot v_0 \cdot l_1 - \frac{\cos(q_1) \cdot \sin(q_0) \cdot v_0 \cdot l_2}{2} - \frac{\cos(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot v_1 \cdot l_2}{2} \\ \frac{\cos(q_1) \cdot v_1 \cdot l_2}{2} \end{pmatrix}$$

Отметим, что функция `simplify` преобразует символьные выражения к более простой форме, и её вызов принуждает Mathcad

произвести необходимые вычисления и записать результат в память.

Найдем угловую скорость звеньев механизма, используя метод, описанный в [2].

#### Листинг 4 Код, задающий геометрию звеньев

$$dT10_0(q, v) := \text{Jacob}(T10(q)^{\langle 0 \rangle}, q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(q_0) \cdot v_0 \\ \cos(q_0) \cdot v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dT10_1(q, v) := \text{Jacob}(T10(q)^{\langle 1 \rangle}, q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\cos(q_0) \cdot v_0 \\ -\sin(q_0) \cdot v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dT10_2(q, v) := \text{Jacob}(T10(q)^{\langle 2 \rangle}, q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dT10(q, v) := \text{stack}(dT10_0(q, v)^T, dT10_1(q, v)^T, dT10_2(q, v)^T) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(q_0) \cdot v_0 & -\cos(q_0) \cdot v_0 & 0 \\ \cos(q_0) \cdot v_0 & -\sin(q_0) \cdot v_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega1(q, v) := dT10(q, v) \cdot T10(q)^T$$

$$\Omega1(q, v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -v_0 & 0 \\ v_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega1(q, v) := \begin{pmatrix} -\Omega1(q, v)_{1,2} \\ \Omega1(q, v)_{0,2} \\ -\Omega1(q, v)_{0,1} \end{pmatrix} \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$



$$dT20_0(q, v) := \text{Jacob}(T20(q)^{\langle 0 \rangle}, q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -\sin(q_0) \cdot v_0 \\ \cos(q_0) \cdot v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$dT20_1(q, v) := \text{Jacob}(T20(q)^{\langle 1 \rangle}, q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \sin(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot v_1 - \cos(q_0) \cdot \cos(q_1) \cdot v_0 \\ -\cos(q_1) \cdot \sin(q_0) \cdot v_0 - \cos(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot v_1 \\ \cos(q_1) \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$dT20_2(q, v) := \text{Jacob}(T20(q)^{\langle 2 \rangle}, q, n) \cdot v(v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot v_0 + \cos(q_1) \cdot \sin(q_0) \cdot v_1 \\ \sin(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot v_0 - \cos(q_0) \cdot \cos(q_1) \cdot v_1 \\ -\sin(q_1) \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$dT20(q, v) := \text{stack}(dT20_0(q, v)^T, dT20_1(q, v)^T, dT20_2(q, v)^T)^T$$

$$\Omega2(q, v) := dT20(q, v) \cdot T20(q)^T$$

$$\Omega2(q, v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -v_0 & \sin(q_0) \cdot v_1 \\ v_0 & 0 & -\cos(q_0) \cdot v_1 \\ -\sin(q_0) \cdot v_1 & \cos(q_0) \cdot v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega2(q, v) := \begin{pmatrix} -\Omega2(q, v)_{1,2} \\ \Omega2(q, v)_{0,2} \\ -\Omega2(q, v)_{0,1} \end{pmatrix} \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(q_0) \cdot v_1 \\ \sin(q_0) \cdot v_1 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Найдем кинетическую и потенциальную энергию системы (см. листинг 5)

Листинг 5 Код, реализующий нахождение кинетической и потенциальной энергии системы

$$\underline{J1(j)} := \begin{pmatrix} j_0 & 0 & 0 \\ 0 & j_1 & 0 \\ 0 & 0 & j_2 \end{pmatrix} \quad \underline{J2(j)} := \begin{pmatrix} j_3 & 0 & 0 \\ 0 & j_4 & 0 \\ 0 & 0 & j_5 \end{pmatrix}$$

$$T1(q, v, j, l, m) := \frac{1}{2} \cdot (\underline{J1(j)} \cdot \omega1(q, v))^T \cdot \omega1(q, v) + \frac{1}{2} \cdot (m_0 \cdot v1(q, v, l))^T \cdot v1(q, v, l)$$

$$T2(q, v, j, l, m) := \frac{1}{2} \cdot (\underline{J2(j)} \cdot \omega2(q, v))^T \cdot \omega2(q, v) + \frac{1}{2} \cdot (m_1 \cdot v2(q, v, l))^T \cdot v2(q, v, l)$$

$$\underline{T}(q, v, j, l, m) := T1(q, v, j, l, m) + T2(q, v, j, l, m)$$

$$\Pi(q, l, m, g) := r0C1(q, l)_1 \cdot m_0 g + r0C2(q, l)_1 \cdot m_1 g \rightarrow g \cdot \left( \sin(q_0) \cdot l_1 + \frac{\cos(q_0) \cdot \cos(q_1) \cdot l_2}{2} \right) \cdot m_1 + \frac{g \cdot \sin(q_0) \cdot l_1 \cdot m_0}{2}$$

Запишем код, реализующий составление уравнений движения.

Листинг 5 Код, реализующий составление уравнений движения.

$$\underline{A}(q, v, j, l, m) := \text{Jacob}(\text{Jacob}(T(q, v, j, l, m), v, n))^T, v, n)$$

$$\underline{C}(q, v, j, l, m) := \text{Jacob}(\text{Jacob}(T(q, v, j, l, m), v, n))^T, q, n) \cdot v(v) - \text{Jacob}(T(q, v, j, l, m), q, n)^T$$

$$\underline{G}(q, l, m, g) := \text{Jacob}(\Pi(q, l, m, g), q, n)^T$$

$$\begin{aligned}
A(q, v, j, 1, m) \text{ simplify} &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{(1_1)^2 \cdot m_0}{4} + (1_1)^2 \cdot m_1 + j_2 + j_3 + \frac{\cos(q_1)^2 \cdot (1_2)^2 \cdot m_1}{4} & \frac{\sin(q_1) \cdot 1_1 \cdot 1_2 \cdot m_1}{2} \\ \frac{\sin(q_1) \cdot 1_1 \cdot 1_2 \cdot m_1}{2} & \frac{(1_2)^2 \cdot m_1}{4} - \sin(q_0)^2 \cdot j_3 + \sin(q_0)^2 \cdot j_4 + j_3 \end{bmatrix} \\
C(q, v, j, 1, m) \text{ simplify} &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\sin(2 \cdot q_0) \cdot (v_1)^2 \cdot j_3}{2} - \frac{\sin(2 \cdot q_0) \cdot (v_1)^2 \cdot j_4}{2} - \frac{\sin(2 \cdot q_1) \cdot v_0 \cdot v_1 \cdot (1_2)^2 \cdot m_1}{4} - \frac{\cos(q_1) \cdot (v_1)^2 \cdot 1_1 \cdot 1_2 \cdot m_1}{2} \\ \frac{\sin(2 \cdot q_1) \cdot (v_0)^2 \cdot (1_2)^2 \cdot m_1}{8} - \sin(2 \cdot q_0) \cdot v_0 \cdot v_1 \cdot j_3 + \sin(2 \cdot q_0) \cdot v_0 \cdot v_1 \cdot j_4 \end{bmatrix} \\
G(q, 1, m, g) \text{ simplify} &\rightarrow \begin{bmatrix} \frac{g \cdot \cos(q_0) \cdot 1_1 \cdot m_0}{2} + g \cdot \cos(q_0) \cdot 1_1 \cdot m_1 - \frac{g \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_0) \cdot 1_2 \cdot m_1}{2} \\ \frac{g \cdot \cos(q_0) \cdot \sin(q_1) \cdot 1_2 \cdot m_1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\Phi(\mu, v) := \begin{pmatrix} \mu_0 \cdot v_0 \\ \mu_1 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{NULL} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\underline{m} &:= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 5 \end{pmatrix} & \underline{g} &:= 9.81 & \underline{1} &:= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.5 \end{pmatrix} & \underline{\mu} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 2 & \underline{j} &:= \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.01 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\underline{A}(q, v) := A(q, v, j, 1, m) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.015625 \cdot \cos(2.0 \cdot q_1) + 1.031875 & -0.0125 \cdot \sin(q_1) \\ -0.0125 \cdot \sin(q_1) & 1.03125 \end{pmatrix}$$

$$\underline{C}(q, v) := C(q, v, j, 1, m) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} -0.0125 \cdot \cos(q_1) \cdot (v_1)^2 - 0.03125 \cdot \sin(2.0 \cdot q_1) \cdot v_0 \cdot v_1 \\ 0.015625 \cdot \sin(2 \cdot q_1) \cdot (v_0)^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{G}(q) := G(q, 1, m, g) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0.73575 \cdot \cos(q_0) - 0.613125 \cdot \sin(q_0 - 1.0 \cdot q_1) - 0.613125 \cdot \sin(q_0 + q_1) \\ -1.22625 \cdot \cos(q_0) \cdot \sin(q_1) \end{pmatrix}$$

$$\underline{\Phi}(v) := \Phi(\mu, v) \text{ simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \cdot v_0 \\ 2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ddq}(q, v, Q) := -A(q, v)^{-1} \cdot \left[ C(q, v) + G(q) + \Phi(v) - \begin{pmatrix} Q_0 \\ Q_1 \end{pmatrix} \right]$$

Ниже представлен код, моделирующий движение механизма при отключенных приводах.

Листинг 6 Код, реализующий численное решение уравнений (22)

```

Func(Time, Δt) :=
  Count ←  $\frac{\text{Time}}{\Delta t}$ 
  v ← NULL
  q ←  $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ 
  for i ∈ 0..Count
    Q ← NULL
    ε ← ddq(q, v, Q)
    v ← v + ε · Δt
    q ← q + v · Δt +  $\frac{1}{2}$  · ε · Δt2
    Outi,0 ← Δt · i
    for j ∈ 0..1
      Outi,j+1 ← qj
      Outi,j+3 ← vj
  Out

Res := Func(10, 1 · 10-3)

```

На рисунке 2 показаны временные зависимости обобщенных координат, полученные с помощью описанного алгоритма.

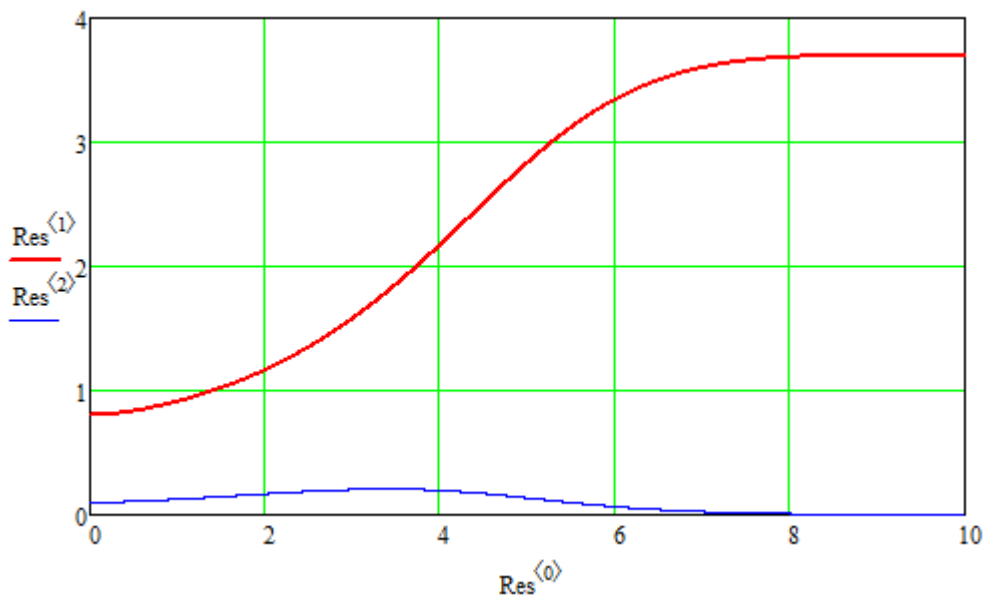


Рисунок 2 Временные зависимости обобщенных координат  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

На рисунке 3 показаны временные зависимости обобщенных скоростей, полученные с помощью описанного алгоритма.

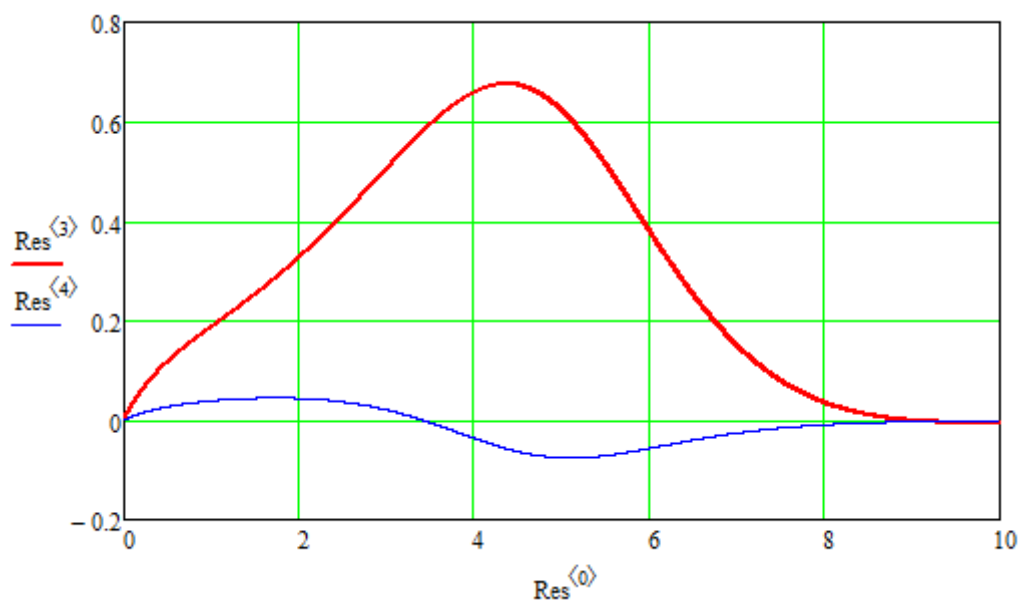


Рисунок 3 Временные зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$

Промоделируем движение механизма при наличии ПД регулятора. Используются следующие матрицы коэффициентов:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}, \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Будем рассматривать случай, когда  $\mathbf{q}^* = \left[ \frac{1}{9}\pi \quad \frac{1}{6}\pi \right]^T$ . Ниже представлен код, реализующий моделирование управляемого движения механизма.

Листинг 6 Код, реализующий моделирование управляемого движения механизма

```

q_desired :=  $\begin{pmatrix} 20 \cdot \frac{\pi}{180} \\ 30 \cdot \frac{\pi}{180} \end{pmatrix}$ 

Kp :=  $\begin{pmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix}$    Kd :=  $\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$ 

Func(Time, Δt) :=
  Count ←  $\frac{\text{Time}}{\Delta t}$ 
  v ← NULL
  q ←  $\begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.1 \end{pmatrix}$ 
  for i ∈ 0..Count
    Q ← Kp·(q_desired - q) + Kd·(0 - v)
    ε ← ddq(q, v, Q)
    v ← v + ε·Δt
    q ← q + v·Δt +  $\frac{1}{2}$ ·ε·Δt2
    Outi,0 ← Δt·i
    for j ∈ 0..1
      Outi,j+1 ← qj
      Outi,j+3 ← vj
  Out

Res := Func(10, 1·10-3)

```

На рисунке 4 показаны временные зависимости обобщенных координат, полученные с помощью описанного алгоритма.

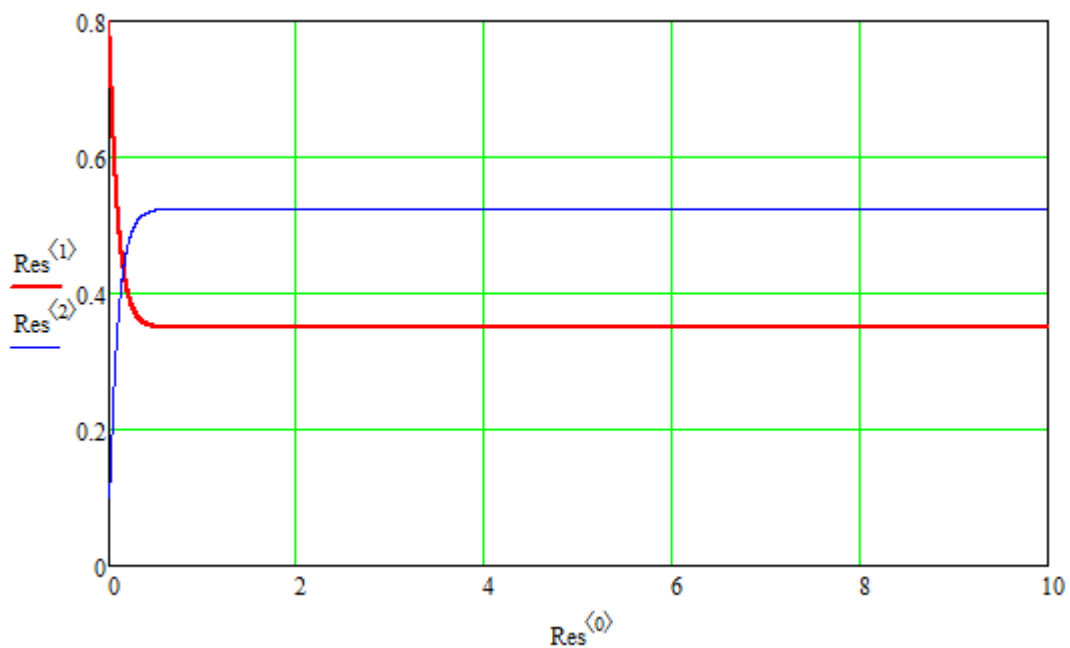


Рисунок 4 Временные зависимости обобщенных координат  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

На рисунке 5 показаны временные зависимости обобщенных скоростей, полученные с помощью описанного алгоритма.

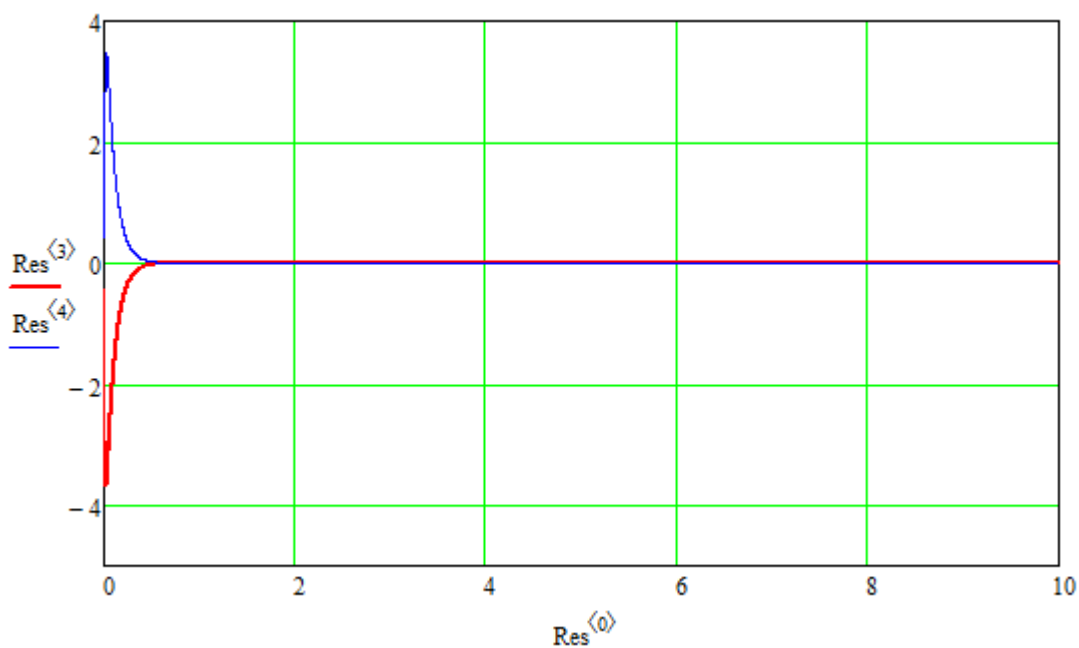


Рисунок 5 Временные зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$

Уменьшим значения коэффициентов регулятора:

$$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

На рисунке 6 показаны временные зависимости обобщенных координат, полученные для случая (11).

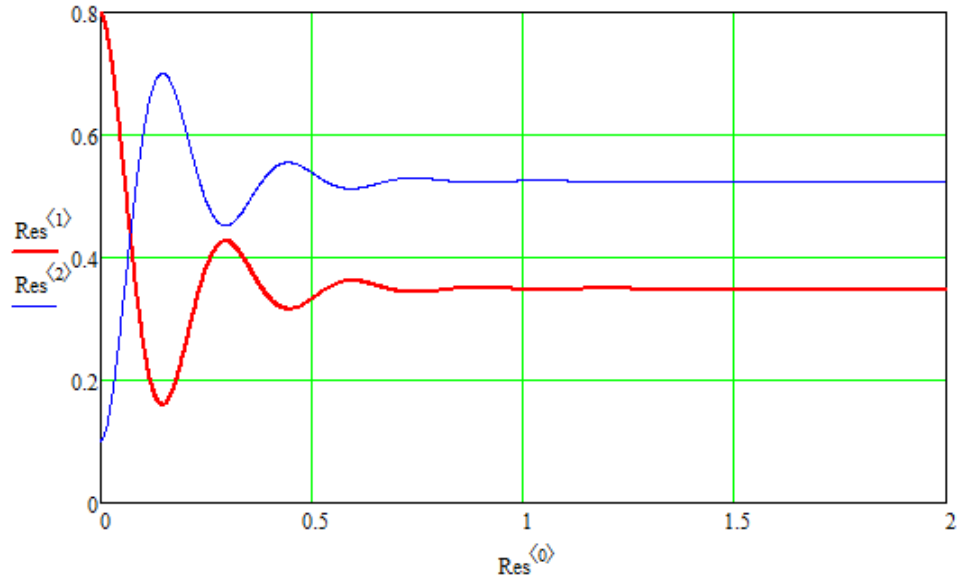


Рисунок 6 Временные зависимости обобщенных координат  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

На рисунке 7 показаны временные зависимости обобщенных скоростей, полученные для случая (11).

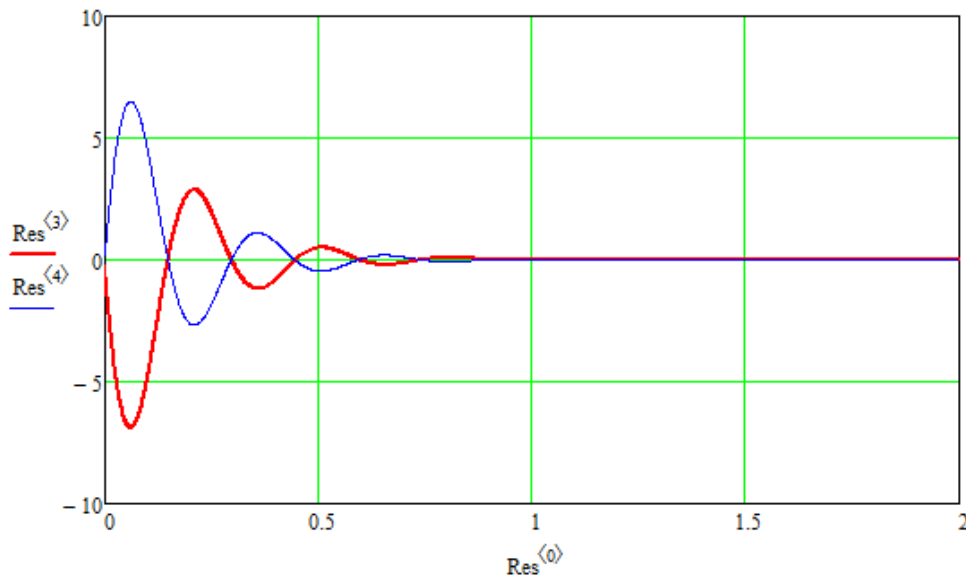


Рисунок 7 Временные зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$



Обратим внимание на появление колебаний на полученных графиках. На рисунке 8 показаны фазовые портреты  $\dot{\varphi}_1(\varphi_1)$  и  $\dot{\varphi}_2(\varphi_2)$

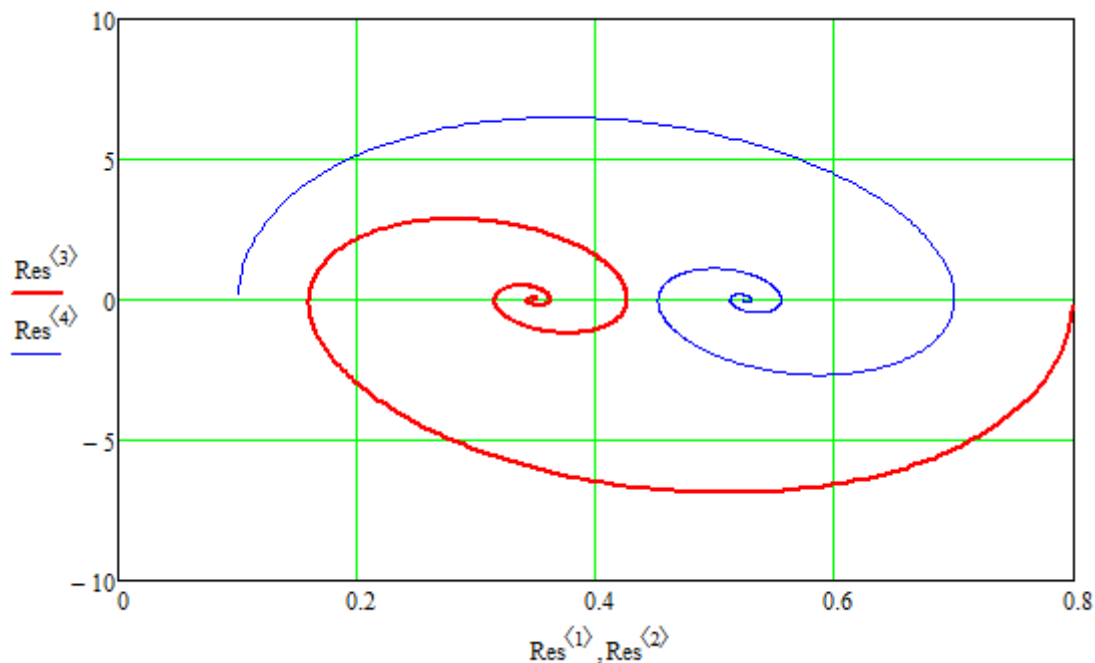


Рисунок 8 Фазовые портреты  $\dot{\varphi}_1(\varphi_1)$  и  $\dot{\varphi}_2(\varphi_2)$

Рассмотрим случай, когда  $\mathbf{q}^*$  является функцией времени:

$$\mathbf{q}^*(t) = [\sin(2t) \quad \cos(3t)]^T. \quad (12)$$

На рисунке 9 показаны временные зависимости обобщенных координат, полученные для случая, когда использованы коэффициенты регулятора (10).

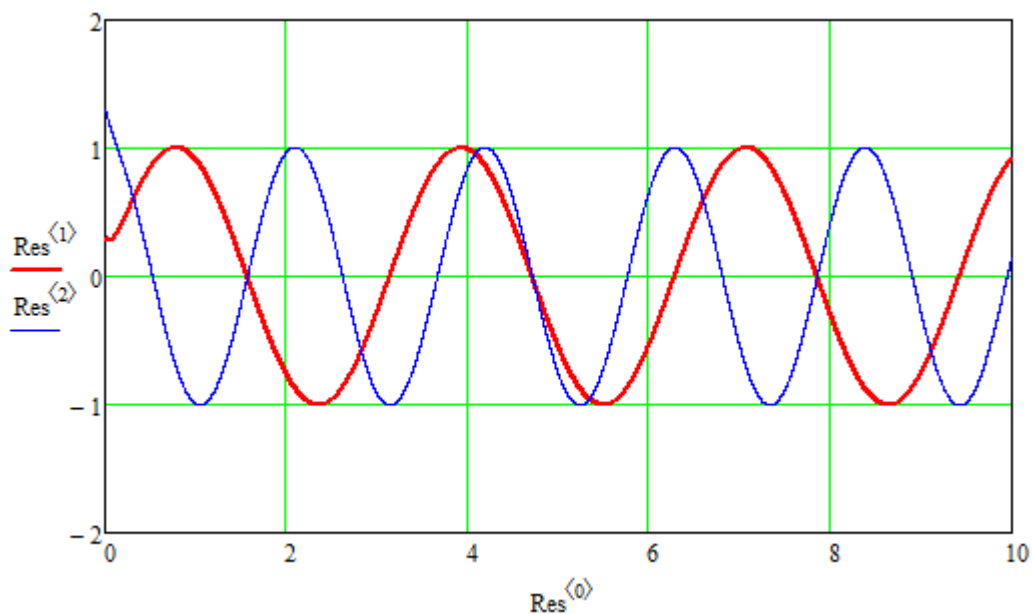


Рисунок 9 Временные зависимости обобщенных координат  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

На рисунке 10 показаны временные зависимости обобщенных скоростей, полученные для случая, когда использованы коэффициенты регулятора (10).

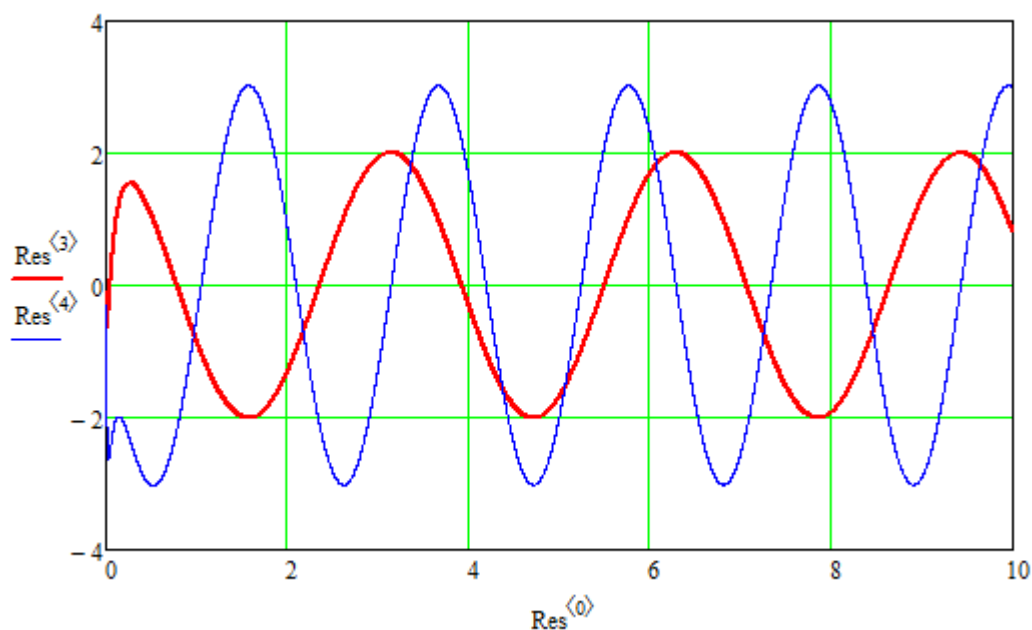


Рисунок 10 Временные зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$

На рисунке 11 показаны временные зависимости обобщенных координат, полученные для случая, когда использованы коэффициенты регулятора (11).

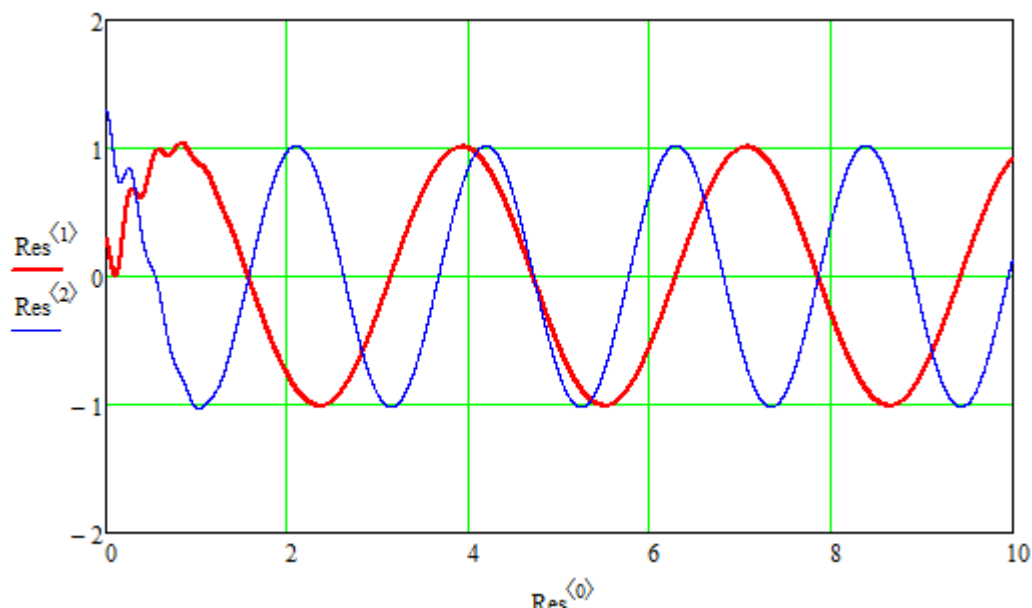


Рисунок 11 Временные зависимости обобщенных координат  $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$

На рисунке 12 показаны временные зависимости обобщенных скоростей, полученные для случая, когда использованы коэффициенты регулятора (11).

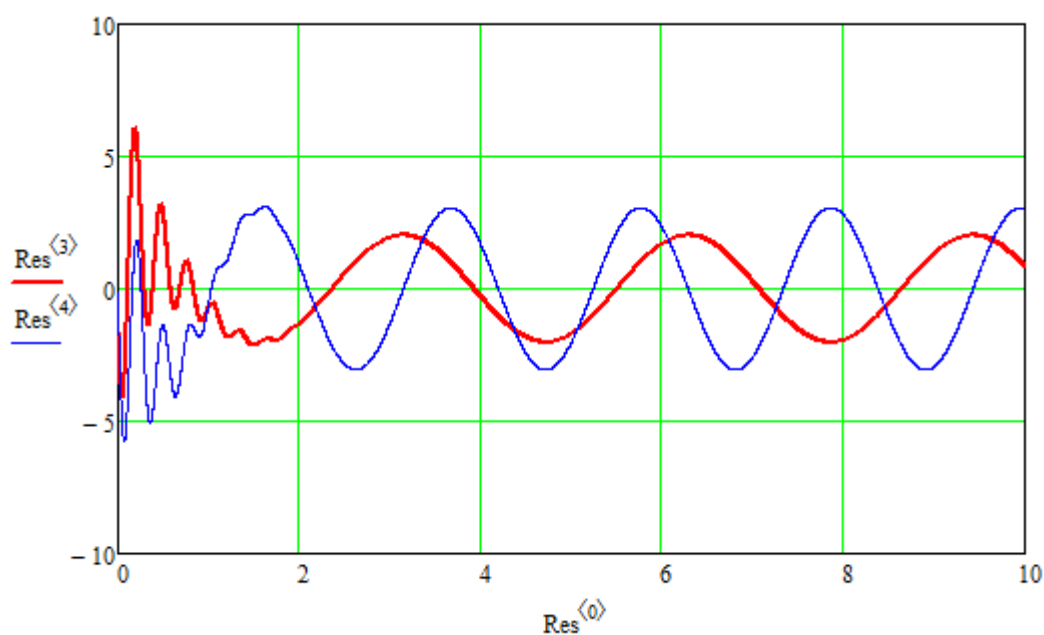


Рисунок 12 Временные зависимости обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t), \dot{\varphi}_2(t)$

### 3. Задание на выполнение лабораторной работы

Задание на выполнение лабораторной работы состоит в построении графиков временных зависимостей обобщенных координат и скоростей, а также фазовых портретов для рассмотренного механизма. В таблице указаны значения  $\mathbf{q}^*$ ,  $\mathbf{K}_p$  и  $\mathbf{K}_d$ , для которых требуется выполнить построение

Таблица 1 Задания на выполнение лабораторной работы

№	Задание
1	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\pi &amp; \frac{1}{3}\pi \end{bmatrix}^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [\sin(4t) \quad \cos(6t)]^T</math></p> <p><math>\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 200 &amp; 0 \\ 0 &amp; 100 \end{bmatrix}</math>, <math>\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 2 &amp; 0 \\ 0 &amp; 5 \end{bmatrix}</math>.</p>
2	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{2}{9}\pi &amp; \frac{1}{5}\pi \end{bmatrix}^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.3\sin(2t) \quad 0.3\cos(2t)]^T</math></p> <p><math>\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 100 &amp; 0 \\ 0 &amp; 100 \end{bmatrix}</math>, <math>\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 100 &amp; 0 \\ 0 &amp; 10 \end{bmatrix}</math>.</p>
3	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{11}{30}\pi &amp; \frac{2}{7}\pi \end{bmatrix}^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.2\sin(2t) \quad 0.1\cos(3t)]^T</math></p> <p><math>\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 1500 &amp; 0 \\ 0 &amp; 1500 \end{bmatrix}</math>, <math>\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 10 &amp; 0 \\ 0 &amp; 10 \end{bmatrix}</math>.</p>
4	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}\pi &amp; \frac{3}{11}\pi \end{bmatrix}^T</math></p>

	<p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.5 \sin(2t) \quad 0.5 \cos(4t)]^T</math></p> $\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$
5	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \left[ \frac{4}{7}\pi \quad \frac{3}{7}\pi \right]^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.7 \sin(3t) \quad 0.2 \cos(3t)]^T</math></p> $\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}.$
6	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \left[ \frac{3}{8}\pi \quad \frac{5}{8}\pi \right]^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.75 \sin(4t) \quad 0.25 \cos(3t)]^T</math></p> $\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 50 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$
7	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \left[ \frac{4}{5}\pi \quad \frac{1}{7}\pi \right]^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.25 \sin(5t) \quad 0.55 \cos(4t)]^T</math></p> $\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 150 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix}.$
8	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \left[ \frac{5}{9}\pi \quad \frac{5}{6}\pi \right]^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.45 \sin(3t) \quad 0.65 \cos(3t)]^T</math></p>

	$\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 400 & 0 \\ 0 & 400 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}.$
9	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{6}{5}\pi &amp; \frac{7}{5}\pi \end{bmatrix}^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.85 \sin(6t) \quad 0.85 \cos(5t)]^T</math></p> $\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 300 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}.$
10	<p>1) <math>\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} \frac{10}{9}\pi &amp; \frac{5}{6}\pi \end{bmatrix}^T</math></p> <p>2) <math>\mathbf{q}^*(t) = [0.25 \sin(4t) \quad 0.5 \cos(2t)]^T</math></p> $\mathbf{K}_p = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} 35 & 0 \\ 0 & 35 \end{bmatrix}.$

## 5. Оформление отчета о выполнении лабораторной работы

Требования к отчету:

- отчет содержит титульный лист, описание выполняемого задания, описание проделанной работы, анализ полученных результатов, выводы, список использованной литературы;
- отчет выполняется на листах формата А4, 14 кегль, одинарный межстрочный интервал;
- список литературы оформляется согласно ГОСТ 7.1-2003.

### Рекомендуемая литература

1. Савин С.И. Решение прямой задачи кинематики для плоского механизма средствами математического пакета Mathcad: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных

- систем и роботов» [Текст] / С.И. Савин// Юго-Зап. гос. ун-т; Курск, 2016. 17 с.
2. Савин С.И. Определение угловых скоростей звеньев механизма средствами математического пакета Mathcad: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» [Текст] / С.И. Савин// Юго-Зап. гос. ун-т; Курск, 2016. 12 с.
  3. Савин С.И. Составление уравнений динамики символьными методами средствами программного пакета Mathcad: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» [Текст] / С.И. Савин// Юго-Зап. гос. ун-т; Курск, 2016. 23 с.
  4. Савин С.И. Решение обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с применением средств программного пакета Mathcad, применительно к задачам механики: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» [Текст] / С.И. Савин// Юго-Зап. гос. ун-т; Курск, 2016. 21 с.
  5. Савин С.И. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами (применительно к задачам механики). Метод Эйлера, метод Рунге-Кутты четвёртого порядка, метод Рунге двойного пересчета: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Моделирование и исследование мехатронных систем и роботов» [Текст] / С.И. Савин// Юго-Зап. гос. ун-т; Курск, 2016. 22 с.
  6. Calin Belta, Vijay Kumar On the Computation of Rigid Body Motion [Электронный ресурс] Доступна по адресу: [http://hyness.bu.edu/Publications\\_files/belta\\_Kumar\\_rigid\\_ck\\_2002.pdf](http://hyness.bu.edu/Publications_files/belta_Kumar_rigid_ck_2002.pdf)
  7. Kumar V., Rigid Body Motion and the Euclidean Group [Электронный ресурс] Доступна по адресу: <http://www.seas.upenn.edu/~meam620/notes/RigidBodyMotion3.pdf>

8. Теоретическая механика, МФТИ, Открытое образование [Электронный ресурс] Доступна по адресу: <https://openedu.ru/course/mipt/ТНМЕСН/>
9. Айзерман М.А. Классическая механика, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 380с.
10. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 304с.
11. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики / В двух томах, т. 1, М.: Лань, 2009. – 736с.
12. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики, М.: Издательство МГУ, 2000. – 720с.
13. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики / В двух томах, т. 2, М.: Дрофа, 2006. – 720с.
14. Featherstone, Roy. Rigid body dynamics algorithms. Springer, 2014.
15. Siciliano, B. and Khatib, O. eds., 2008. Springer handbook of robotics. Springer Science & Business Media.
16. Канатников А.Н., Крищенко А.П., Четвериков В.Н. Дифференциальное исчисление функций многих переменных, М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. – 456с.
17. Канатников А.Н., Крищенко А.П. Математика в техническом университете. Выпуск 4. Линейная алгебра, М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 336с.
18. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, М.: Книга по Требованию, 2012. – 667с.
19. Воднев В.Г., Наумович А.Ф., Наумович Н.Ф. Математический словарь высшей школы, М.: Издательство МПИ, 1989. – 527с.