

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 24.09.2022 14:49:06
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра механики, мехатроники и робототехники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
« 17 » 01 2022 г.



МЕХАНИКА

Методические указания к выполнению практических работ
для студентов направления
"Конструирование изделий легкой промышленности»

Курск 2022

УДК 621

Составители: Е.Н. Политов, О.В. Емельянова

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *А.В. Мальчиков*

Механика: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления "Конструирование изделий легкой промышленности" / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Е.Н. Политов, О.В. Емельянова. Курск, 2022. 106 с.: ил. 65, табл. 10. Библиогр.: с. 106.

Изложен план проведения практических (лабораторно-практических) занятий по дисциплине «Механика», рассмотрены примеры решения типовых задач механики. Приведены варианты расчётных схем, ход работы, а также задания для самоконтроля.

Методические указания соответствуют требованиям федеральных государственных образовательных стандартов.

Предназначены для студентов направления «Конструирование изделий легкой промышленности» всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 17.01.2022 . Формат 60x84 1/16
Усл.печ.л. 6,2. Уч.-изд.л. 5,6. Тираж 30 экз. Заказ 156. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

1. Основные понятия и определения механики	4
2 Определение кинематических характеристик точки	8
3. Решение задач кинематики твердого тела	20
4. Статика. Уравнения равновесия для плоской системы сил	23
5. Статика. Уравнения равновесия для пространственной системы сил	25
6 Решение задач динамики точки	28
7. Решение задач динамики механической системы	45
8 Структурный и кинематический анализ плоских рычажных механизмов	48
9 Моделирование механизмов, использующихся в оборудовании	61
10 Кинематический анализ кулачковых механизмов	73
11 Изучение работы фрикционных механизмов	76
12 Изучение работы ременных передач	81
13 Изучение работы цепных передач	84
14 Изучение работы зубчатых передач	88
15 Приводы. Силовые и кинематические характеристики	92
16. Расчет типовых элементов оборудования на растяжение-сжатие	97
17 Расчет типовых элементов оборудования на кручение	100
18 Расчет типовых элементов оборудования на изгиб	102
Рекомендуемый список литературы	106

1. Основные понятия и определения механики

Общие теоретические сведения

Статика - это раздел механики, в котором изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил, и операции преобразования одних систем в другие.

Материальной точкой называют простейшую модель материального тела любой формы, размеры которой достаточно малы и которую можно принять за геометрическую точку, имеющую определенную массу.

Механической системой, называется такая совокупность материальных точек, положение или движение каждой из которых определяется положением или движением других точек этой системы.

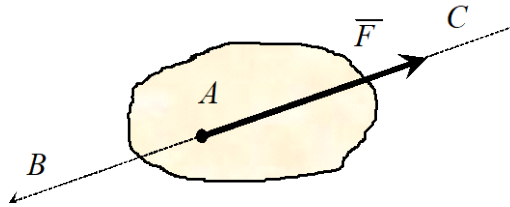
В теоретической механике вводится понятие **абсолютно твердого тела**. Это такое материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками всегда остается постоянным, т.е. геометрическая форма которого не изменяется ни при каких механических воздействиях со стороны других тел. (В дальнейшем абсолютно твердое тело будем для краткости называть просто твердым телом).

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется **свободным**. В противном случае тело считается **несвободным**. Все, что ограничивает перемещение тела в пространстве, называется **связью**.

Сила, с которой связь действует на тело, называется **реакцией связи**.

Состояние покоя или движения твердого тела (или его механическое состояние) зависит от характера его механического взаимодействия с другими телами. Под *механическим* понимают такое взаимодействие материальных тел, при котором происходит изменение движения или формы. Количественную меру механического действия одного материального тела на другое, характеризующую интенсивность и направление этого действия, называют *силой*. Сила является векторной величиной. Действие силы \vec{F} на твердое тело определяется (рис.1.1): 1) модулем $F = |\vec{F}|$; 2) направлением

BC (или линией действия силы); 3) точкой приложения A . В Международной системе единиц СИ единицей силы является ньютон: $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2$.



Р и с. 1.1. Характеристика силы

Сопротивление материалов – наука, изучающая прочность и надежность элементов конструкций и решающая следующие основные задачи:

- расчет элементов на прочность – способность элементов сопротивляться разрушению под действием приложенных сил;
- расчет на жесткость – способность элементов сопротивляться деформации;
- расчет на устойчивость – способность элементов и конструкций сохранять определенную форму равновесия.

1.1. Тестовые задания для самоконтроля

1. Раздел механики, в котором изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил, называется.....

- а). статика
- б). кинематика
- в). динамика
- г). кинетика

2. Раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения материальных тел без учета действующих на них сил, называется.....

- а). кинематика
- б). статика
- в). динамика
- г). кинетика

3. Раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил, называется.....

- а). динамика
- б). кинематика
- в). статика
- г). кинетика

4. В курсе «сопротивление материалов» не решаются задачи на элементов конструкций:

- а). прочность
- б). жесткость
- в). устойчивость
- г). экономическую эффективность

5. Способность элементов конструкций сопротивляться разрушению под действием приложенных сил называется:

- а). прочность
- б). жесткость
- в). устойчивость
- г). надежность

6. способность элементов конструкций сопротивляться деформации называется:

- а). жесткость
- б). устойчивость
- в). надежность
- г). прочность

7. Способность элементов и конструкций сохранять определенную форму равновесия называется:

- а). жесткость
- б). устойчивость
- в). надежность
- г). прочность

8. Совокупность материальных точек или абсолютно твердых тел, связанных между собой общими законами движения или взаимодействия, называется:

- а). механической системой
- б). механизмом
- в). машиной
- г). физической моделью

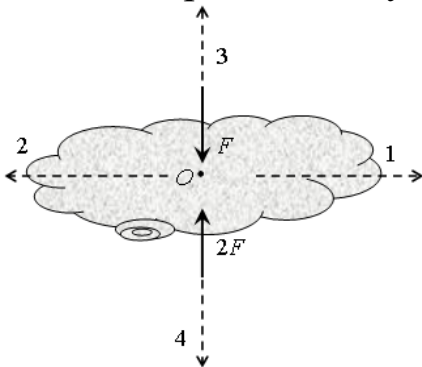
9. Количественная мера механического действия одного материального тела на другое, характеризующая интенсивность и направление этого действия, называется:

- а). сила
- б). масса
- в). мощность
- г). давление
- д). энергия

10. Кинематическим состоянием тела называется:

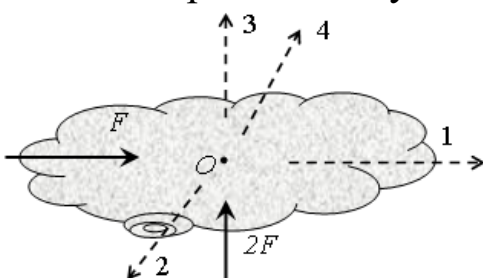
- а). состояние покоя или движения с неизменными параметрами
- б). ускоренное движение
- в). состояние невесомости
- г). деформированное состояние

12. К телу приложены две силы, как показано на рисунке. В каком направлении будет двигаться тело?



- а). 1
- б). 2
- в). 3
- г). 4
- д). тело будет покоиться

14. К телу приложены две силы, как показано на рисунке. В каком направлении будет двигаться тело?



- а). 1
- б). 2
- в). 3
- г). 4
- д). тело будет покоиться

2 Определение кинематических характеристик точки

Цель работы: Численно, с помощью компьютерной программной среды MATHCAD, по заданным уравнениям движения точки в координатной форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ (x, y — в сантиметрах, t — в секундах) составить уравнение траектории, построить ее. Найти законы изменения ее скорости, полного, касательного и нормального ускорений, а также изобразить на рисунке вектора скорости и ускорения и их проекции на оси координат.

Теоретическая часть работы

С целью нахождения уравнения траектории необходимо исключить время из уравнений движения и получить зависимость $y = f(x)$. Для этого выразим время t из одного уравнения и подставив в другое.

Например, если движение точки описывается уравнениями $x = at$, $y = bt^2$, то получаем

$$t = \frac{x}{a}; \quad y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2.$$

Для определения скорости точки в декартовых осях используют ее проекции на оси координат v_x и v_y . Они находятся путем дифференцирования выражений соответствующих координат точки по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Вектор скорости равен геометрической сумме векторов ее проекций

$$\bar{v} = \bar{v}_x + \bar{v}_y.$$

Поскольку составляющие v_x и v_y перпендикулярны друг другу, то значение скорости определяется формулой:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (2.1)$$

Для нахождения скорости при естественном способе задания движения следует вычислить производную от закона изменения дуговой координаты:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2.2)$$

Выражение (2) с учетом (1) дает возможность получить закон изменения пройденного точкой пути от времени:

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t \sqrt{v_x^2 + v_y^2} dt. \quad (2.3)$$

Линейное ускорение точки, как и линейную скорость, можно представить в виде суммы составляющих проекций на оси декартовой системы координат:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y,$$

а проекции ускорения равны первым производным от соответствующих проекций скоростей по времени:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Полное ускорение точки вычисляется по формуле:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Выражения проекций линейного ускорения на декартовы оси координат несут информацию только об изменении осевых составляющих скорости.

Характер изменения вектора скорости определяют проекции вектора ускорения на естественные оси кривой, по которой движется точка: касательную и главную нормаль.

Касательное ускорение точки \bar{a}_τ характеризует быстроту изменения скорости по величине и находится дифференцированием скорости по времени:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Если точка движется с постоянной скоростью, то касательное ускорение отсутствует.

Вектор \bar{a}_τ направляется *по касательной к траектории*. Он сонаправлен с вектором скорости при ускоренном движении точки и противоположен ему в случае замедленного движения.

Нормальное ускорение \bar{a}_n характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Для его расчета применяется формула

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

где ρ – радиус кривизны траектории.

При движении точки по прямой $a_n = 0$.

Вектор нормального ускорения \bar{a}_n всегда направляется к центру кривизны траектории, то есть по главной нормали.

Вектор полного ускорения точки равен геометрической сумме касательного и нормального ускорений

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n.$$

На рис. 1 показаны направления векторов скорости и ускорений точки в случае ее ускоренного движения.

Поскольку касательное и нормальное ускорения взаимно перпендикулярны, то полное ускорение точки рассчитывается по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Следовательно, полное ускорение точки равно нулю только в случае одновременного отсутствия касательной и нормальной составляющих, то есть при движении точки по прямой с постоянной скоростью.

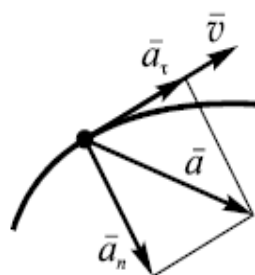


Рис.2.1

Контрольные вопросы

1. Что такое кинематика?
2. Основные кинематические характеристики движения?
3. Какие способы задания движения точки существуют, и в чем заключается особенность каждого из этих способов?
4. Как определяется скорость точки для различных способов задания движения?
5. Как определяется ускорение точки при естественном, векторном и координатном способах задания движения?
6. В каких случаях нормальное ускорение точки равно нулю?
7. Когда касательное ускорение при криволинейном движении равно нулю?

Пример.

Исходные данные: законы изменения координат точки, м:

$$x = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi t}{3}; \quad y = 2 \sin \frac{\pi t}{3} + 1.$$

Определить: траекторию точки; положение, скорость, ускорение и радиус кривизны траектории, соответствующие моменту времени $t_1=1\text{с}$.

Решение.

1 *Определяем уравнение траектории точки аналитически.* Для этого исключим из заданных уравнений движения время t . Поскольку в заданных выражениях время является аргументом функций синус и косинус, то воспользуемся известным тригонометрическим тождеством:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad .$$

В нашем случае

$$\sin \frac{\pi t}{3} = \frac{y-1}{2}; \quad \cos^2 \frac{\pi t}{3} = \frac{1-x}{2}.$$

Поскольку $\alpha = \frac{\pi t}{3}$, то $\sin^2 \frac{\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3} = 1$,

$$\text{Следовательно } \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{1-x}{2} = 1; \quad \frac{(y-1)^2}{2} - x - 1 = 0.$$

Отсюда находим: $x = \frac{(y-1)^2}{2} - 1$ - уравнением траектории является парабола.

Так как $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$, то движение точки происходит не по всей параболе, а по её участку $-1 \leq y \leq 3$.

Для построения траектории составим таблицу значений координат x и y :

Таблица 2.1

x	-1	0	1	2	3
y	1	-0,5	-1	-0,5	3

В масштабе строим траекторию движения точки.

2 Определяем координаты движущейся точки M , соответствующие моменту времени t_1 . Подставляя значение t_1 в заданные уравнения движения, находим:

$$x_1 = 1 - 2 \cos^2 \frac{\pi}{3} = 0,5 \text{ м}; \quad y_1 = 2 \sin \frac{\pi}{3} + 1 = 2,73 \text{ м}.$$

Изображаем на траектории точку M_1 с полученными координатами (рис.2).

Замечание: здесь и далее при расчетах численных значений величин аргумент тригонометрических функций следует подставлять в радианах.

3 Определяем линейную скорость точки. Для этого вначале находим законы изменения осевых проекций скорости:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{4\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3} \left(-\sin \frac{\pi t}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi t}{3};$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi t}{3}.$$

Тогда скорость точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{9} \sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \frac{4\pi^2}{9} \cos^2 \frac{\pi t}{3}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3}}$$

В момент времени $t_1=1$ с, получаем:

$$v_{x_1} = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 1,814 \text{ м/с};$$

$$v_{y_1} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 1,047 \text{ м/с}.$$

В соответствии с результатами расчетов на рисунке изображаем вектор скорости. Для этого в выбранном масштабе, например, в 1 см – 1 см/с, из точки M_1 откладываем составляющие вектора скорости v_x и v_y . Затем путем сложения составляющих получаем вектор скорости \vec{v} . При правильных расчетах и построениях этот вектор должен лежать на касательной к траектории движения, что и получилось на рисунке 2.

Замечание: масштаб для построения векторов следует подобрать так, чтобы длина вектора v_1 v была не менее 2 см.

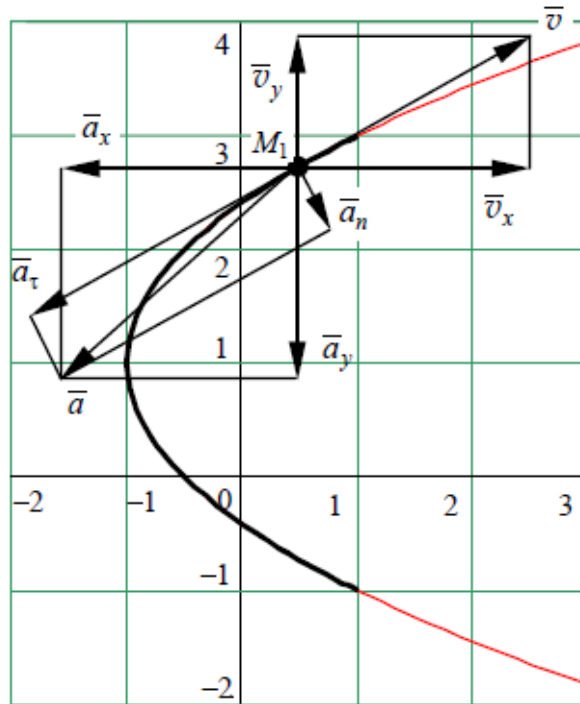


Рис.2.2

4 Строим график функции $v = f(t)$. Он изображен на рисунке 3. На участке от начала движения до момента времени $t = 0,63$ с скорость точки увеличивается, следовательно, в этот промежуток времени движение точки ускоренное, а на интервале от $t = 0,63$ с до $t = 1,57$ с скорость уменьшается, значит на нем движение точки замедленное. Далее происходит чередование этих видов движения.

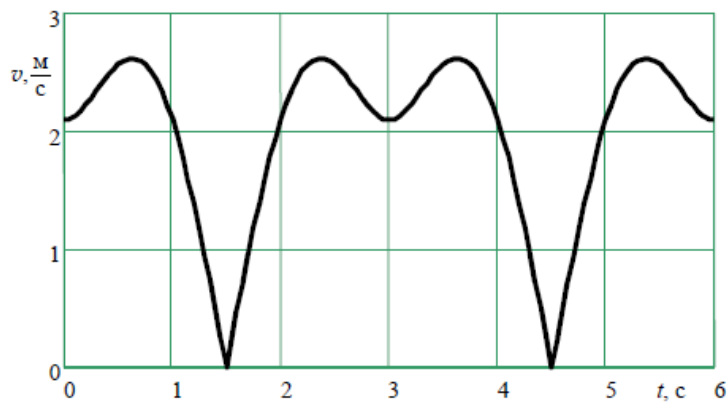


Рис.2.3.

5. Определяем линейное ускорение точки. Для этого находим осевые составляющие ускорения:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi t}{3} \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi^2}{9} \cos \frac{2\pi t}{3};$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{2\pi}{3} \left(-\sin \frac{\pi t}{3} \right) \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi t}{3}.$$

В момент времени $t_1=1$ с, получаем

$$a_{x1} = \frac{4\pi^2}{9} \cos \frac{2\pi}{3} = -2,19 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{y1} = -\frac{2\pi^2}{9} \sin \frac{\pi}{3} = -1,90 \text{ м/с}^2.$$

Линейное ускорение точки найдем по формуле $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$:

$$a = \sqrt{(-2,19)^2 + (-1,90)^2} = 2,9 \text{ м/с}^2.$$

Векторы $\vec{a}, \vec{a}_x, \vec{a}_y$ изображаем на рисунке 2, придерживаясь нового масштаба, напр. 1 см – 2 м/с².

6 Вычисляем проекции линейного ускорения точки на естественные оси координат. Зависимость касательного ускорения от времени имеет вид:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3} \frac{2 \sin \frac{2\pi t}{3} \cos \frac{2\pi t}{3} \frac{2\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi t}{3} \sin \frac{\pi t}{3} \frac{\pi}{3}}{2 \sqrt{\sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3}}} = \frac{\pi^2}{9} \frac{2 \sin \frac{4\pi t}{3} - \sin \frac{2\pi t}{3}}{\sqrt{\sin^2 \frac{2\pi t}{3} + \cos^2 \frac{\pi t}{3}}}$$

,

или по формуле: $a_\tau = |\vec{v} \cdot \vec{a} / v|$; $a_\tau = \left| \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} \right|$.

Касательное ускорение от времени и $t_1=1$ с:

$$a_\tau = \frac{\pi^2}{9} \frac{2 \sin \frac{4\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3}}{\sqrt{\sin^2 \frac{2\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3}}} = -2,849 \text{ м/с}^2.$$

Знак «минус», получившийся при расчете, показывает, что в рассматриваемый момент времени движение точки является замедленным.

Поскольку $a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}$, то

$$a_{n_1} = \sqrt{a^2 - a_{\tau_1}^2} = \sqrt{(2,9)^2 - (-2,849)^2} = 0,541 \text{ м/с}^2,$$

или по формуле: $a_n = |\vec{v} \times \vec{a} / v|$; $a_n = \left| \frac{v_x a_y - v_y a_x}{v} \right|$.

Изображаем на рисунке векторы касательного и нормального ускорений $\vec{a}_{\tau_1}, \vec{a}_{n_1}$ в том же масштабе, в котором ранее изображались векторы ускорений (в 1 см – 2 м/с²). Вектор касательного ускорения направлен по касательной к траектории движения. Поскольку в нашей задаче касательное ускорение получилось отрицательным, то оно направлено в сторону, противоположную направлению вектора скорости. Нормальное ускорение направлено перпендикулярно касательному к центру кривизны траектории. Векторная сумма касательного и нормального ускорений оказалась равна вектору полного ускорения, полученного через осевые проекции. Этот факт подтверждает правильность расчетов.

7 Определим радиус кривизны траектории в точке M_1 . Для этого используем формулу $a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Из неё получаем:

$$\rho = \frac{a_n}{v^2} = \frac{2,09^2}{0,541} = 8,07 \text{ м.}$$

Из описания решения следует, что построение графика с нанесением векторов скоростей и ускорений позволяет проверить правильность аналитических расчетов. При этом должны выполняться следующие условия:

- точка с координатами x_1, y_1 должна попасть на изображенную траекторию;
- вектор скорости v_1 , построенный как диагональ прямоугольника со сторонами v_{x_1} и v_{y_1} , должен быть направлен вдоль касательной к траектории в точке с координатами x_1, y_1 ;
- векторы ускорений, полученные как диагонали прямоугольников со сторонами a_{x_1}, a_{y_1} и a_{τ_1}, a_{n_1} , должны совпасть.

Ход работы

1. Ознакомиться с теоретической частью и примером выполнения задания.

2. На основании исходных данных, приведенных в таблице:

- в программной среде MATHCAD ввести уравнения траектории точки в осях $x - y$; определяем координаты точки x_1, y_1 , соответствующие заданному моменту времени t_1 ;
- для получения закона изменения от времени скорости $v(t)$ и ее составляющих $v_x(t), v_y(t)$ провести численное и символьное дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ первого порядка в момент времени t_1 ;
- для получения закона изменения от времени составляющих ускорения $a_x(t)$ и $a_y(t)$ провести численное и символьное дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ второго порядка, найти полное ускорение точки в момент времени t_1 ;
- провести численное определение модуля ускорений a_n и a_τ в момент времени t_1 , радиуса кривизны траектории ρ . В случае необходимости описать причину отсутствия ускорений a_n и a_τ .

Для этого откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление.

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится курсор в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Используя данные таблицы (рис.6) вводим следующие параметры: уравнения движения $x(t), y(t)$, и t_1 , используя оператор присваивания ":=", который применяется для задания значений переменным.

Подготовка вычислительных блоков облегчается благодаря выводу шаблона при задании того или иного оператора. Для этого служат палитры математических символов и шаблонов операторов и функций.

Вычисления выполняются посимвольным набором левой части вычисляемого выражения и установкой после него оператора вывода – знака « \Rightarrow » (равно).

Дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$

$$\frac{d}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d^2}{dt^2}$$

Аналогично, с помощью символьных редакторов, определяем модули a_t и a_n ускорений и радиус кривизны траектории ρ .

Листинг вычислений приведен на рис.2.4.

Уравнения движения

$$x(t) := 1 - 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2 \quad y(t) := 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) + 1 \quad t1 := 1$$

$$x(t1) = 0.5 \quad y(t1) = 2.732$$

Скорость точки

$$\frac{d}{dt}x(t) \rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3} \quad \frac{d}{dt}y(t) \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{3}$$

$$v_x := \frac{d}{dt}x(t1) \quad v_x = 1.814 \quad v_y := \frac{d}{dt}y(t1) \quad v_y = 1.047$$

$$v := \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = 2.094$$

Ускорение точки

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \rightarrow \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} - \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)^2}{9} \quad \frac{d^2}{dt^2}y(t) \rightarrow -\frac{2 \cdot \pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{3}\right)}{9}$$

$$a_x := \frac{d^2}{dt^2}x(t1) \quad a_x = -2.193 \quad a_y := \frac{d^2}{dt^2}y(t1) \quad a_y = -1.899$$

$$a := \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$a = 2.901$$

Касательное ускорение

$$a_t := \left| \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v} \right|$$

$$a_t = 2.849$$

Нормальное ускорение

$$a_n := \left| \frac{v_x \cdot a_y - v_y \cdot a_x}{v} \right| \quad \text{или} \quad a_n1 := \sqrt{a^2 - a_t^2}$$

$$a_n = 0.548 \quad a_n1 = 0.548$$

Радиус кривизны траектории

$$\rho := \frac{v^2}{a_n} \quad \rho = 8$$

Греческий

α	β	γ	δ	ε	ζ
η	θ	ι	κ	λ	μ
ν	ξ	ο	π	ρ	σ
τ	υ	φ	ψ	χ	ψ
ω	Α	Β	Γ	Δ	Ε
Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ
Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ
Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ
Ω					

Калькулятор

sin	cos	tan	ln	log
n!	i	x	√	°
e ^x	1/x	()	x ²	x ^y
π	7	8	9	/
1/4	4	5	6	×
÷	1	2	3	+
:=	.	0	-	=

Математический анализ

$\frac{d}{dx}$	$\frac{d^2}{dx^2}$	∞	\int_a^b	$\sum_{n=1}^{\infty}$	$\prod_{n=1}^{\infty}$	\int
\sum_n	\prod_n	$\lim_{x \rightarrow a}$	$\lim_{x \rightarrow a^+}$	$\lim_{x \rightarrow a^-}$	$\nabla_x f$	

Символьные

→	↪	Modifiers
float	rectangular	assume
solve	simplify	substitute
factor	expand	coeffs
collect	series	parfrac
fourier	laplace	ztrans
invfourier	invlaplace	invztrans
m ^T →	m ⁻¹ →	m →
explicit	combine	confrac
rewrite		

Рис.2.4. Листинг вычислений

3. Построить графики функций $x=f(y)$ и $v = f(t_2)$.

Для построения графиков функций $x=f(y)$ и $v = f(t_2)$ введём параметр t_2 как дискретный расчетный интервал времени, с шагом 0,1. Для этого на панели инструментов "График" щелкаем на кнопке с изображением графика – на экране появится шаблон графика. Введём в место ввода по оси X и Y - $x(t_2)$ и $y(t_2)$ - имя независимого аргумента. Отведём от графика указатель мыши и щелкаем левой кнопкой – график траектории движения будет построен.

Далее, аналогично, построим график $v = f(t_2)$.

Если Вы хотите просмотреть матрицу значений $x(t_2)$ и $y(t_2)$, то ниже графика $x=f(y)$ выводим их значения с помощью оператора вывода – знака « \Rightarrow » (равно). Справа в таблице имеется полоса прокрутки, с помощью которой можно просмотреть значения t_2 в интервале от 0 до 6.

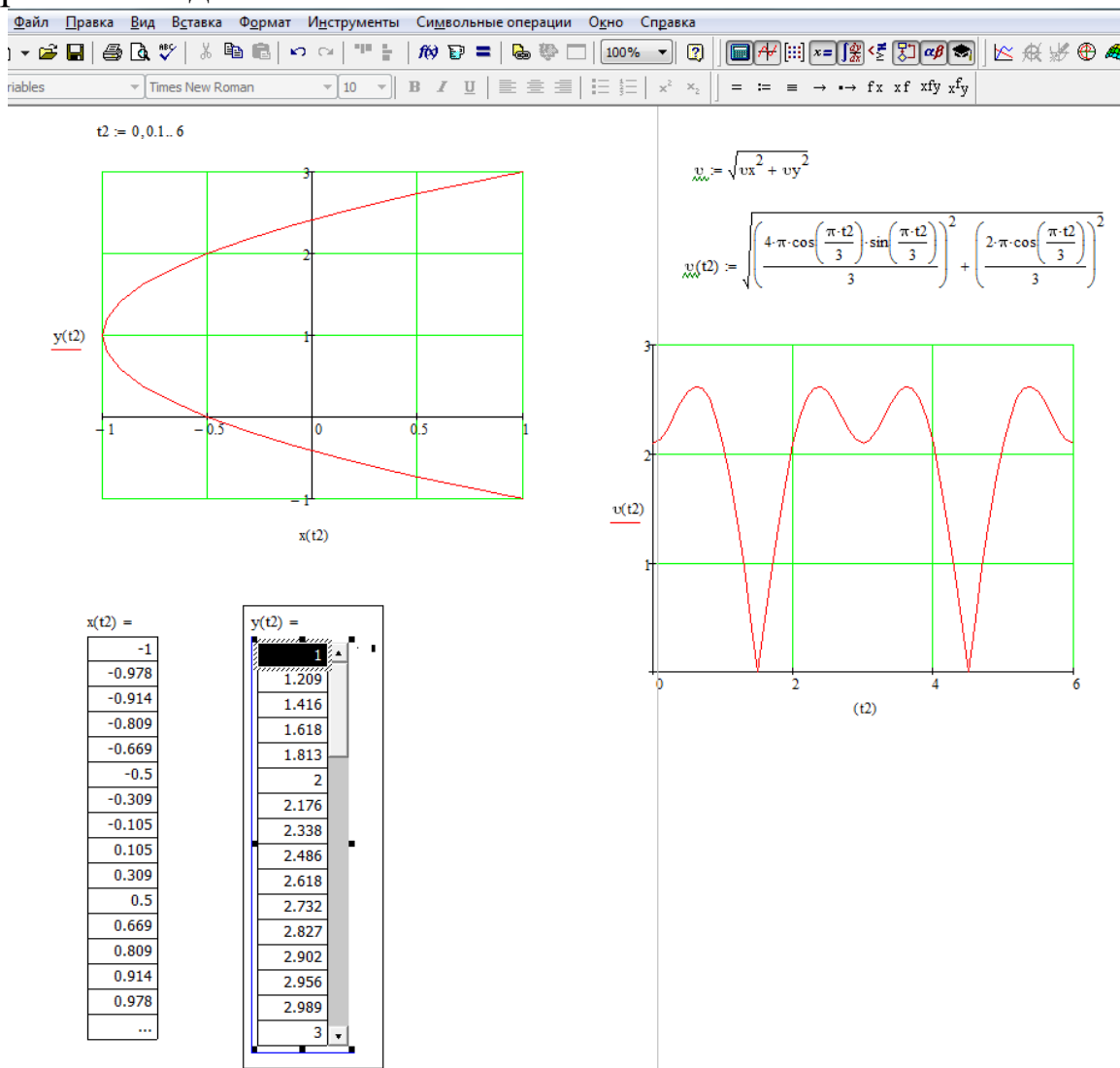


Рис. 2.5. Создание декартовых графиков

Листинг с построенными графиками приведен на рис.5.

4. Вывести на печать графики функций $x=f(y)$ и $v = f(t)$. На графике функций $x=f(y)$ отметить точку $M_1(x,y)$ и в соответствии с результатами расчетов, выбранным масштабом, изобразить вектора скоростей и ускорений. По графику $v = f(t)$ дать характеристику движения точки.
5. Оформить отчет по работе.

3. Решение задач кинематики твердого тела

К простейшим видам движения твердого тела относятся поступательное и вращательное.

Поступательным называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, проведенная в этом теле, остается параллельной самой себе при перемещении. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения.

Вращательным называется такое движение твердого тела, при котором какие-нибудь две точки, принадлежащие телу, остаются все время неподвижными. Прямая, проходящая через эти точки, называется *осью вращения*.

Определение кинематических параметров тел, совершающих вращательное и поступательное движение

Пример решения задачи.

Механизм состоит из ступенчатых колес 1—3, находящихся в зацеплении или связанных ременной передачей, зубчатой рейки 4 и груза 5, привязанного к концу нити, намотанной на одно из колес. Радиусы ступеней колес равны соответственно: у колеса 1 — $r_1 = 2$ см, $R_1 = 4$ см, у колеса 2 — $r_2 = 6$ см, $R_2 = 8$ см, у колеса 3 — $r_3 = 12$ см, $R_3 = 16$ см. На ободьях колес расположены точки *A*, *B* и *C*.

Дано	Найти	
	скорости	ускорения
$v_5 = 2(t^2 - 3)$	v_A, v_C	ε_3, a_B, a_4

Определить в момент времени $t_1 = 2$ с указанные в таблице в столбцах «Найти» скорости (v — линейные, ω — угловые) и ускорения (a — линейные, ε — угловые) соответствующих точек или тел (v_5 — скорость груза 5 и т.д.).

Решение

- 1) Определим скорость и ускорение груза 5 в момент времени $t_1 = 2$ с
 $v_5 = 2(t^2 - 3) = 2(2^2 - 3) = 2$ см/с — скорость груза 5 направлена вниз.

$$a_5 = \dot{v}_5 = 4t = 4 \cdot 2 = 8 \text{ см/с}^2$$

Ускорение груза 5 также направлено вниз.

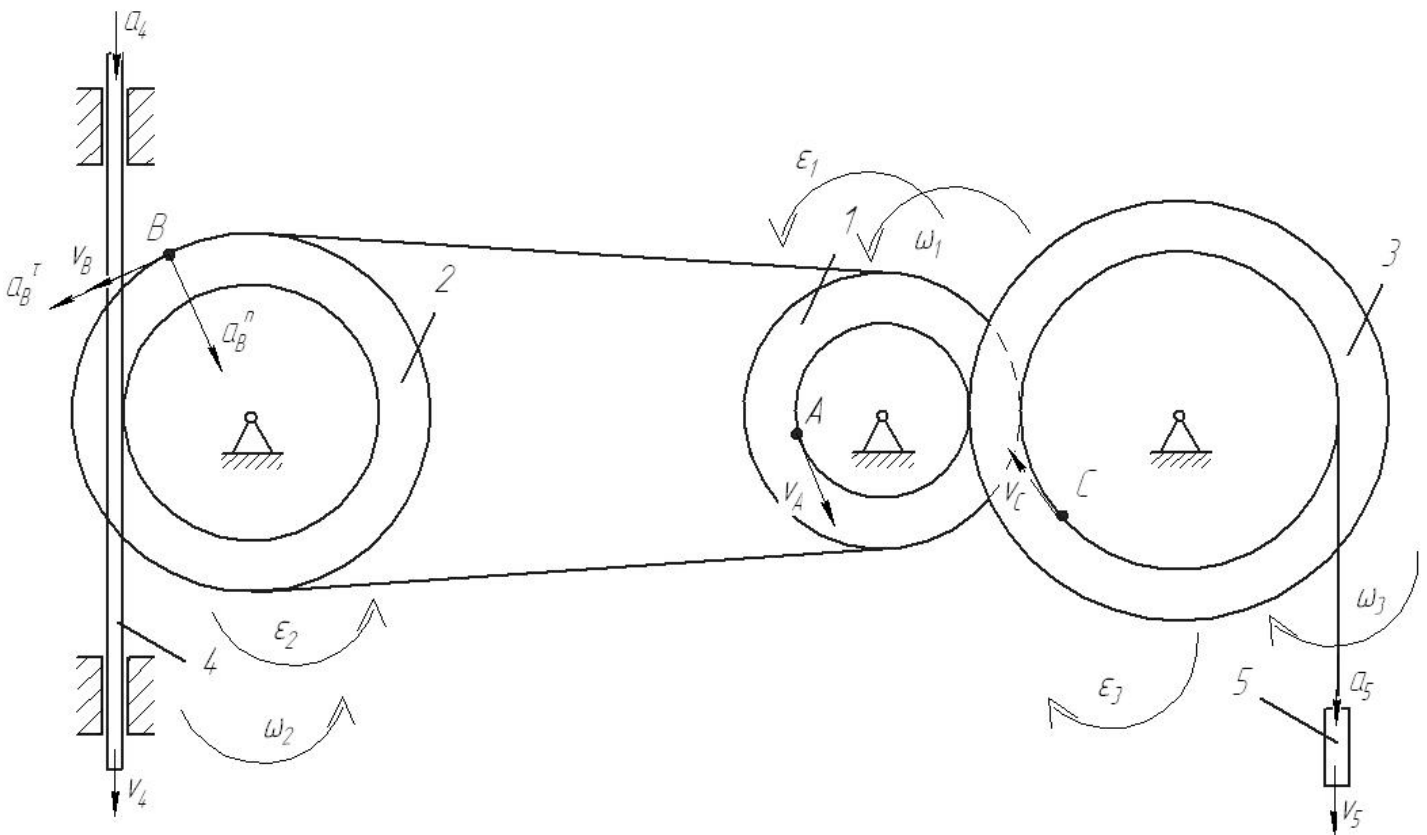


Рис. 3.1. Расчетная схема механизма с расстановкой векторов основных кинематических параметров

Рассмотрим расчетную схему (см. рисунок).

Определим кинематические соотношения.

$v_C = v_5 = 2 \text{ см/с}$ - скорость точки C .

$\omega_3 = \frac{v_5}{r_3}$ - угловая скорость колеса 3

$v_A = \omega_3 \cdot R_3 = \frac{v_5 \cdot R_3}{r_3} = \frac{2 \cdot 16}{12} = 2.67 \text{ см/с}$ - скорость точки A .

$\omega_1 = \frac{v_A}{r_1} = \frac{v_5 \cdot R_3}{r_3 r_1}$ - угловая скорость колеса 1

$v_B = \omega_1 \cdot R_1 = \frac{v_5 \cdot R_3 \cdot R_1}{r_3 r_1} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 4}{12 \cdot 2} = 5.33 \text{ см/с}$ - скорость точки B .

$\omega_2 = \frac{v_B}{R_2} = \frac{v_5 \cdot R_3 \cdot R_1}{r_3 r_1 R_2}$ - угловая скорость колеса 2

$v_4 = \omega_2 \cdot r_2 = \frac{v_5 \cdot R_3 \cdot R_1 \cdot r_2}{r_3 r_1 R_2} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 6}{12 \cdot 2 \cdot 8} = 4 \text{ см/с}$ - скорость рейки 4.

2) Определим ускорения

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = \frac{a_5}{r_3} = \frac{8}{12} = 0.67 \text{ c}^{-2} - \text{угловое ускорение колеса 3.}$$

$$a_4 = \dot{v}_4 = \frac{a_5 \cdot R_3 \cdot R_1 \cdot r_2}{r_3 r_1 R_2} = \frac{8 \cdot 16 \cdot 4 \cdot 6}{12 \cdot 2 \cdot 8} = 16 \text{ см/с}^2 - \text{ускорение тела 4.}$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^{\tau} + \vec{a}_B^n - \text{ускорение точки B}$$

$$a_B^{\tau} = v_B = \frac{a_5 \cdot R_3 \cdot R_1}{r_3 r_1} = \frac{8 \cdot 16 \cdot 4}{12 \cdot 2} = 21.33 \text{ см/с}^2 - \text{касательное уско-}$$

рение точки B

$$a_B^n = \frac{v_B^2}{R_2} = \frac{5.33^2}{8} = 3.56 \text{ см/с}^2 - \text{нормальное ускорение точки B}$$

$$a_B = \sqrt{(a_B^{\tau})^2 + (a_B^n)^2} = \sqrt{21.33^2 + 3.56^2} = 21.6 \text{ см/с}^2$$

Ответ: $v_A = 2.67 \text{ см/с}$

$v_C = 2 \text{ см/с}$

$\varepsilon_3 = 0.67 \text{ c}^{-2}$ $a_4 = 16 \text{ см/с}^2$

$a_B = 21.6 \text{ см/с}^2$

4. Статика. Уравнения равновесия для плоской системы сил

Для плоской произвольной системы сил можно составить три уравнения равновесия: $\sum F_{KX} = 0$, $\sum F_{KY} = 0$, $\sum M_0(\bar{F}_K) = 0$.

Определение реакций связей твёрдого тела

Жесткая рама закреплена в точке A шарнирно, а в точке B прикреплена или к невесомому стержню BB_1 , или к шарнирной опоре на катках; стержень прикреплен к раме и к неподвижной опоре шарнирами.

На раму действуют пара сил с моментом $M = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ и две силы, значения которых, направления и точки приложения указаны в таблице

Определить реакции связей в точках A и B , вызываемые заданными нагрузками. При окончательных подсчетах принять $l = 0,5 \text{ м}$.

$$F_2 = 20 \text{ Н} \quad \alpha_2 = 45^\circ \quad F_3 = 30 \text{ Н} \quad \alpha_4 = 30^\circ$$

Решение

1) Рассмотрим расчетную схему (см. рисунок 4.1). Расставим реакции связей: в точке A две реакции X_A и Y_A , в точке B – реакция направлена вдоль стержня R_B .

Разложим все силы на составляющие по осям координат:

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = 20 \cos 45^\circ = 14,1 \text{ Н}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 20 \sin 45^\circ = 14,1 \text{ Н}$$

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha_3 = 30 \cos 30^\circ = 26 \text{ Н}$$

$$F_{3y} = F_3 \sin \alpha_3 = 30 \sin 30^\circ = 15 \text{ Н}$$

2) Для определения трёх неизвестных реакций составим и решим три уравнения равновесия.

Уравнение моментов сил относительно точки A : $\sum M_A(F_i) = 0$

$$R_B \cdot 4l - M + F_{2x} \cdot 4l + F_{2y} \cdot 2l + F_{3x} \cdot 4l = 0 \quad (4.1)$$

Из (1) найдем реакцию R_B .

$$R_B = - \frac{-M + F_{2x} \cdot 4l + F_{2y} \cdot 2l + F_{3x} \cdot 4l}{4l}$$

$$-100/0,5 + 14,1 \cdot 4 + 14,1 \cdot 2 + 26 \cdot 4$$

$$R_B = \frac{-4}{-4} = 2,9 \text{ Н}$$

Уравнение проекций сил на ось X : $\sum F_{ix} = 0$

$$-F_{2x} - F_{3x} + X_A = 0 \quad (4.2)$$

Откуда

$$X_A = F_{2x} + F_{3x}$$

$$X_A = 14,1 + 26 = 40,1 \text{ Н}$$

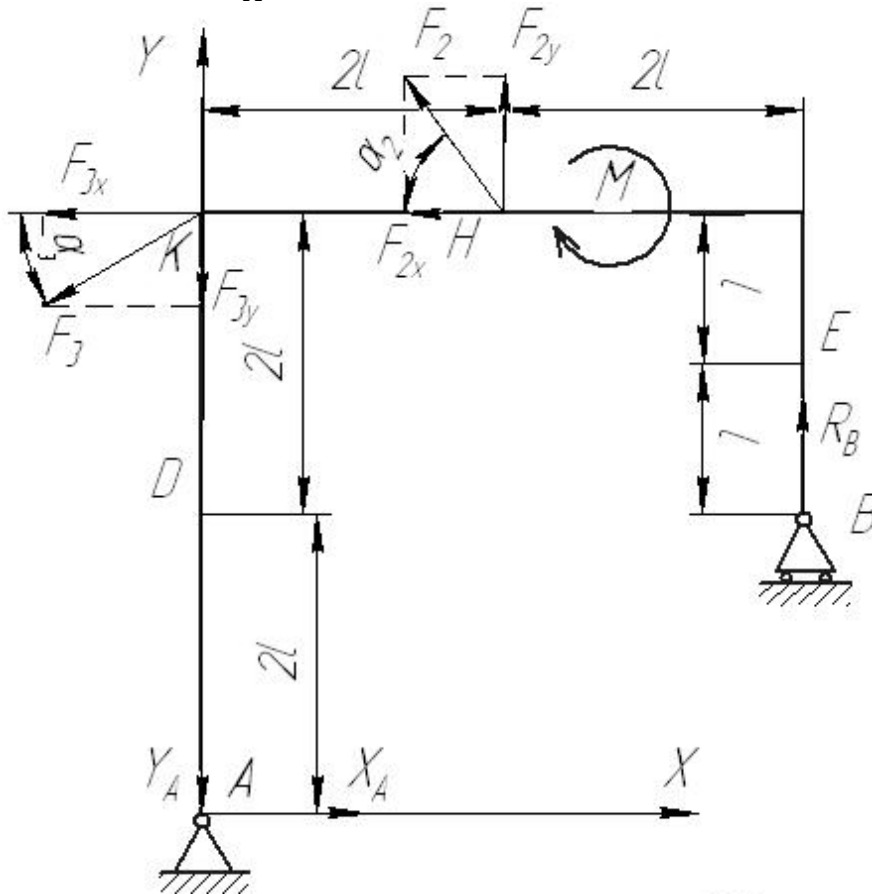


Рис. 4.1 Расчетная схема для определения реакций связей плоской рамы

Уравнение проекций сил на ось Y : $\sum F_{iy} = 0$

$$R_B + F_{2y} - F_{3y} - Y_A = 0 \quad (4.3)$$

Откуда

$$Y_A = R_B + F_{2y} - F_{3y}$$

$$Y_A = 2,9 + 14,1 - 15 = 2 \text{ Н}$$

Проверка: $\sum M_B(F_i) = 0$

$$Y_A \cdot 4l + X_A \cdot 2l - M + F_{2x} \cdot 2l - F_{2y} \cdot 2l + F_{3x} \cdot 2l + F_{3y} \cdot 4l = 0$$

$$2 \cdot 4 + 40,1 \cdot 2 - 100 / 0,5 + 14,1 \cdot 2 - 14,1 \cdot 2 + 26 \cdot 2 + 15 \cdot 4 = 0$$

$$200,2 - 200 = 0$$

Реакции найдены верно.

Ответ: $X_A = 40,1 \text{ Н}$; $Y_A = 2 \text{ Н}$; $R_B = 2,9 \text{ Н}$

5. Статика. Уравнения равновесия для пространственной системы сил

Для пространственной произвольной системы сил можно составить шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum m_z(\bar{F}_i) = 0; \quad \sum m_x(\bar{F}_i) = 0. \end{aligned}$$

Определение реакций связей твёрдого тела

Пример решения задачи.

Однородная прямоугольная плита весом $P = 5$ кН со сторонами $AB = 3l$, $BC = 2l$ закреплена в точке A сферическим шарниром, а в точке B цилиндрическим шарниром (подшипником) и удерживается в равновесии невесомым стержнем CC'

На плиту действуют пара сил с моментом $M = 6$ кН·м, лежащая в плоскости плиты, и две силы. Точки приложения сил (D , E , H) находятся в серединах сторон плиты.

Определить реакции связей в точках A , B и C . При подсчетах принять $l = 0,8$ м.

$$F_4 = 10 \text{ кН} \quad F_4 \parallel A(-Y) \quad F_2 = 6 \text{ кН} \quad F_2 \parallel ZA(-X) \quad \alpha_2 = 60^\circ$$

Решение

1) Рассмотрим расчетную схему (см. рисунок 5.1). Расставим реакции связей: в точке A три реакции X_A , Y_A и Z_A , в точке C – реакция направлена вдоль стержня N , в точке B – две реакции X_B и Z_B .

2) Для определения шести неизвестных реакций составим и решим шесть уравнений равновесия.

Уравнение моментов сил относительно оси Z : $\sum M_Z(F_i) = 0$

$$F_2 \sin \alpha_2 \cdot l - N \cos 60^\circ \cdot 2l = 0 \quad (5.1)$$

Из (5.1) найдем реакцию N .

$$\begin{aligned} N &= \frac{F_2 \sin \alpha_2 \cdot l}{\cos 60^\circ \cdot 2l} \\ N &= \frac{6 \sin 60^\circ \cdot 1}{2 \cos 60^\circ} = 5,2 \text{ Н} \end{aligned}$$

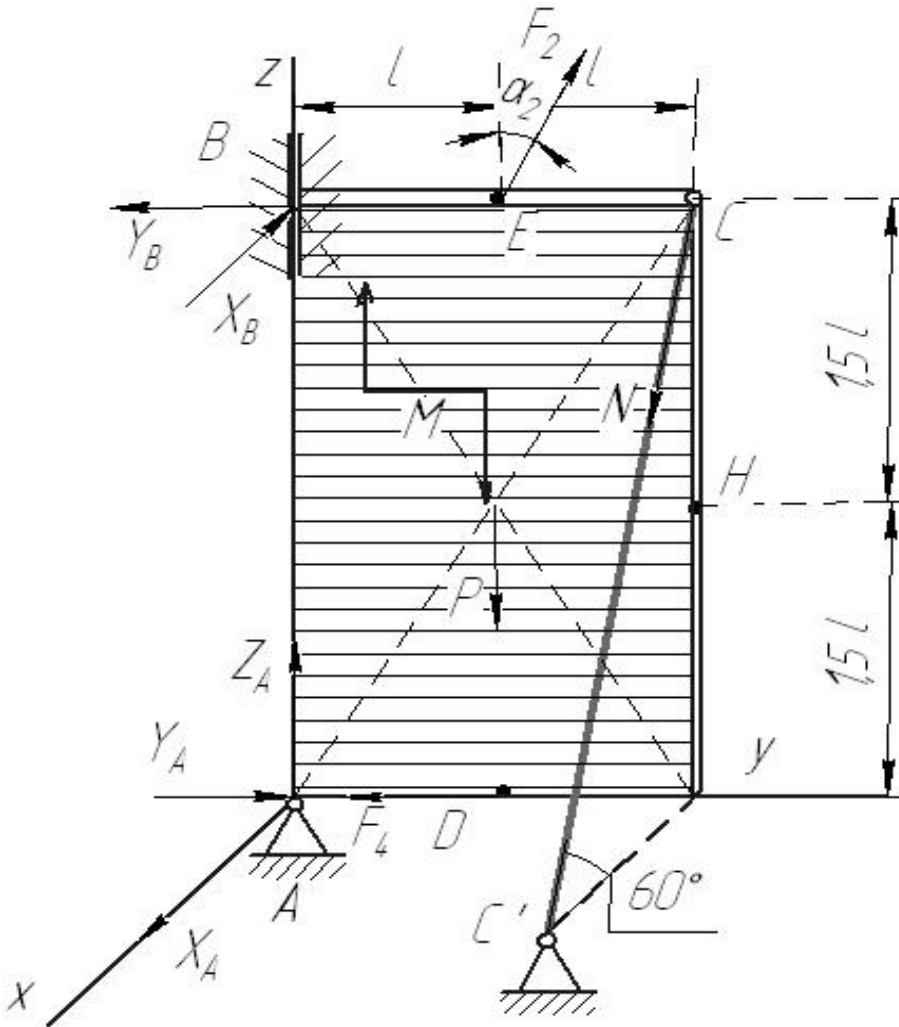


Рис. 5.1. Расчетная схема для определения реакций связей

Уравнение моментов сил относительно оси X : $\sum M_X(F_i) = 0$
 $-P \cdot l - N \sin 60^\circ \cdot 2l - M + F_2 \cos \alpha_2 \cdot l + Y_B \cdot 3l = 0$ (5.2)

Из (5.2) найдем реакцию Y_B .

$$Y_B = \frac{-P \cdot l - N \sin 60^\circ \cdot 2l - M + F_2 \cos \alpha_2 \cdot l}{-3l}$$

$$Y_B = \frac{-5 \cdot 1 - 5.2 \sin 60^\circ \cdot 2 - \frac{6}{0.8} + 6 \cos 60^\circ \cdot 1}{-3} = 6.2 \text{ кН}$$

Уравнение моментов сил относительно оси Y : $\sum M_Y(F_i) = 0$
 $N \cos 60^\circ \cdot 2l - X_B \cdot 3l = 0$ (5.3)

Из (5.3) найдем реакцию X_B .

$$X_B = \frac{N \cos 60^\circ \cdot 2l}{3l}$$

$$X_B = \frac{5.2 \cos 60^\circ \cdot 2}{3} = 1.7 \text{ кН}$$

Уравнение проекций сил на ось X : $\sum F_{ix} = 0$
 $N \cos 60^\circ - X_B - F_2 \sin \alpha_2 + X_A = 0$ (5.4)

Откуда

$$X_A = -(N \cos 60^\circ - X_B - F_2 \sin \alpha_2)$$

$$X_A = -(5.2 \cos 60^\circ - 1.7 - 6 \sin 60^\circ) = 4.3 \text{ кН}$$

Уравнение проекций сил на ось Y : $\sum F_{iy} = 0$
 $-F_4 + Y_A - Y_B = 0$ (5.5)

Откуда

$$Y_A = F_4 + Y_B$$

$$Y_A = 10 + 6.2 = 16.2 \text{ кН}$$

Уравнение проекций сил на ось Z : $\sum F_{iz} = 0$
 $F_2 \cos \alpha_2 - P - N \sin 60^\circ + Z_A = 0$ (5.6)

Откуда

$$Z_A = -(F_2 \cos \alpha_2 - P - N \sin 60^\circ)$$

$$Z_A = -(6 \cos 60^\circ - 5 - 5.2 \sin 60^\circ) = 6.5 \text{ кН}$$

Ответ: $X_A = 4.3 \text{ кН};$ $Y_A = 16.2 \text{ кН};$ $Z_A = 6.5 \text{ кН};$
 $X_B = 1,7 \text{ кН};$ $Y_B = 6.2 \text{ кН};$ $N = 5,2 \text{ кН}$

6 Решение задач динамики точки

Теоретическая часть работы

В динамике различают две задачи – прямую и обратную.

В прямой задаче проводится определение сил по заданному движению.

В обратной задаче по заданным силам определяется закон движения точки, составляются дифференциальные уравнения движения точки в виде

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}; \quad m\ddot{y} = \sum F_{iy}; \quad m\ddot{z} = \sum F_{iz}, \quad (6.1)$$

где $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ – проекции ускорения точки на оси координат;

F_x, F_y, F_z – проекции сил на оси координат.

Решение основной задачи динамики сводится к тому, чтобы из данных уравнений, зная силы, найти закон движения точки, т.е.

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (6.2)$$

Для этого надо проинтегрировать соответствующие дифференциальные уравнения, при этом появляются шесть постоянных: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. Для их определения в условии задачи должны быть включены дополнительные данные, называемые начальными условиями движения.

Начальные условия движения материальной точки определяют положение точки и ее скорость в некоторый фиксированный момент времени. Часто эти условия задаются для $t=0$.

Получить решение системы дифференциальных уравнений в аналитическом виде удаётся только в достаточно простых случаях, чаще всего интегрирование можно провести с помощью приближенных численных методов. Поэтому выполнение расчета движения материальной точки без и с учетом сил сопротивления воздуха проводим с помощью программной среды Mathcad.

Пример выполнения задания

Для материальной точки (рис.6.1) дано: $\alpha=15^0$, $\beta=45^0$, $\tau=0,3$ с, $f=0,1$, $v_A=16$ м/с, $P=0$, $h_1=0$, $m=1$ кг.

Найти:

l, T, d, h_2, v_C ; построить график траектории точки на участке ВС с учетом сопротивления воздуха.

Решение.

Приняв движущееся тело за материальную точку, составить дифференциальные уравнения ее движения на первом (прямолинейном) участке AB не учитывая сопротивления воздуха (т.е. при $\mu=0$) (рис.1).

Далее необходимо составить дифференциальные уравнения движения точки в воздухе на участке ВС под действием силы тяжести \bar{G} и силы сопротивления воздуха \bar{R} .

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

где v - модуль скорости \bar{v} ,

μ - коэффициент сопротивления воздуха.

На рисунке 6.1 приняты обозначения:

P – сила тяги;

\bar{G} – сила тяжести,

$\bar{F}_{\text{тр}}$ – сила трения,

\bar{N} – реакция нормальной поверхности.

При этом заданы:

m – масса точки;

v_A – начальная скорость;

f – коэффициент трения скольжения;

α - угол наклона участка AB к горизонту;

τ - время движения точки на участке AB ,

l – длина участка AB .

Численное решение дифференциальных уравнений можно проводить несколькими методами, например методом Эйлера или Рунге-Кутты. Выполним интегрирование уравнений движения точки на участке ВС в программной среде MATCAD с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка и сопоставим аналитическое решение с численным.

Дифференциальные уравнения движения тела на участке ВС были получены ранее:

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x};$$

$$m\ddot{y} = -\mu\dot{y} - mg.$$

Введем обозначение : $\frac{\mu}{m} = n;$

$$\ddot{x} = -n\dot{x};$$

$$\ddot{y} = -n\dot{y} - g.$$

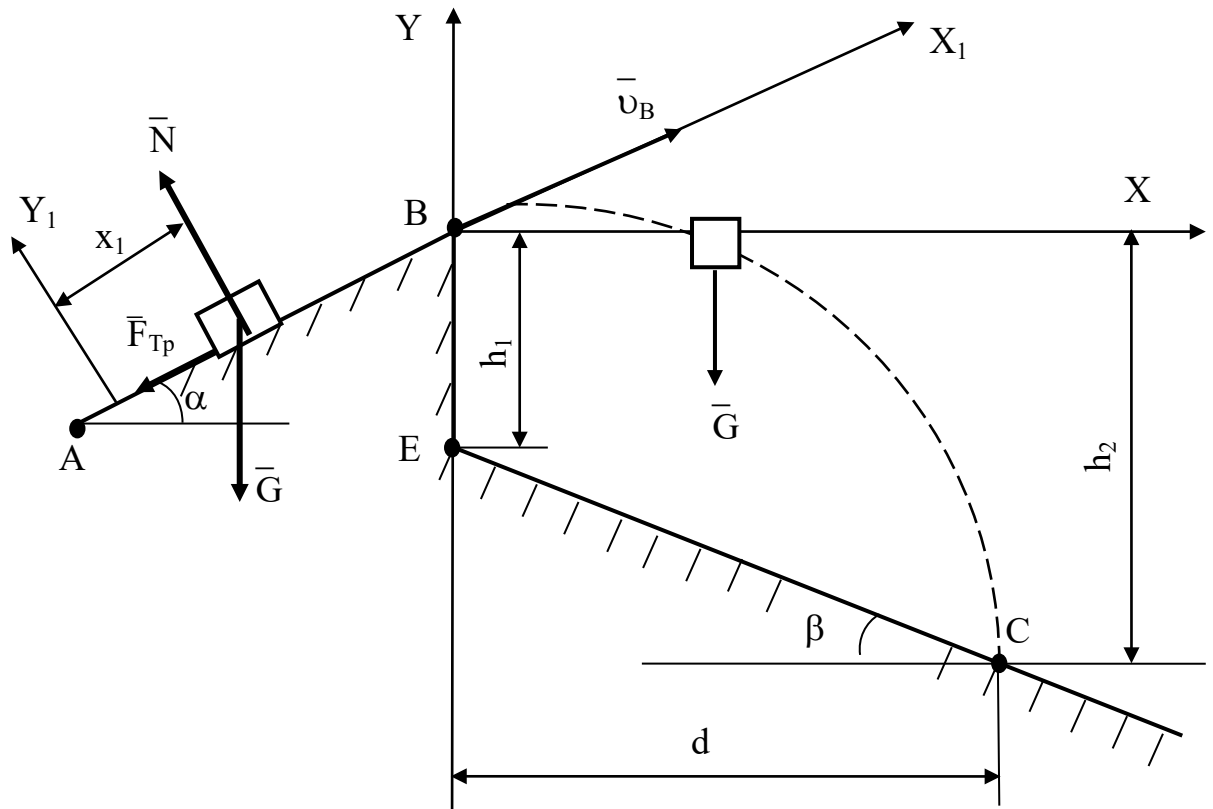


Рис.6.1 Расчетная схема

Откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление двух дифференциальных уравнений. Для первого уравнения $\ddot{x} = -n\dot{x}$ посимвольно введем следующие параметры (рис.6):

T- расчетное время;

N – число точек интегрирования, примем его равным 1000;

$V0x := V0 \cdot \cos(\alpha)$ - вектор начальных условий (проекция скорости на ось X в начальный момент времени на участке BC);

$NUx := \begin{pmatrix} 0 \\ V0 \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ - начальное перемещение;
- начальная скорость.

Ввод матрицы осуществляем путем нажатия клавиши матрицы на панели математических символов и в открывшемся меню вводим необходимое количество строк и столбцов (рис.6.2).

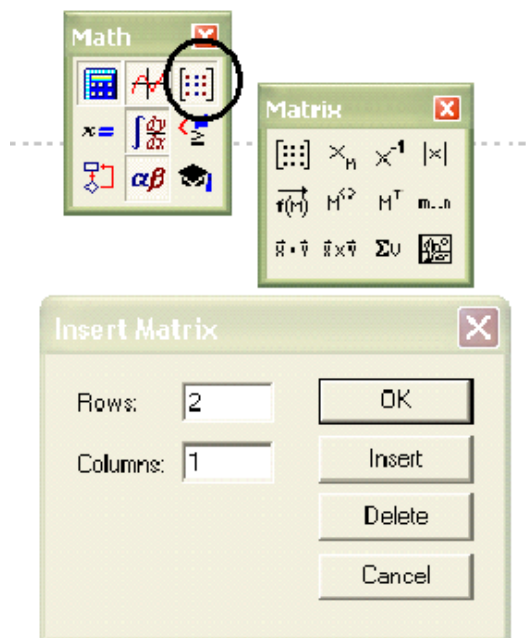


Рис.6.2

Затем аналогично введем вектор-столбец дифференциального уравнения:

$$XXX(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ -n \cdot X_1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{- скорость точки M;} \\ \text{- ускорение точки M.} \end{array}$$

Введем оператор интегрирования дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом интегрирования (вводится посимвольно):

$$XX := \text{rkfixed}(NUx, 0, T, N, XXX)$$

После его ввода система Mathcad производит интегрирование дифференциальных уравнений.

Если Вы хотите посмотреть матрицу решений, то сразу ниже оператора интегрирования введем XX и установим после него оператора вывода – знак «=» (равно) (рис.6.3).

	0	1	2
0	0	0	7.45
1	0.01	0.074	7.391
2	0.02	0.148	7.332
3	0.03	0.221	7.273
4	0.04	0.293	7.215
5	0.05	0.365	7.158
6	0.06	0.436	7.101
7	0.07	0.507	7.044
8	0.08	0.577	6.988
9	0.09	0.647	6.932
10	0.1	0.716	6.877
11	0.11	0.784	6.822
12	0.12	0.852	6.768
13	0.13	0.92	6.714
14	0.14	0.987	6.661
15	0.15	1.053	6.608

Рис.6.3

Матрица решения XX представляет собой матрицу вида:

$$(XX^{<0>}; XX^{<1>}; XX^{<2>}),$$

где $XX^{<0>}$ - вектор-столбец времени;

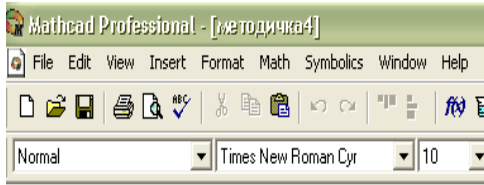
$XX^{<1>}$ - вектор-столбец перемещения;

$XX^{<2>}$ - вектор-столбец скорости.

Справа в таблице имеется полоса прокрутки, с помощью которой можно просмотреть значения T в интервале от 0 до 10.

Если нет необходимости просмотра матрицы решений, то сразу строим график координат точки в зависимости от времени, как было описано ранее. В шаблоне графика введем по оси абсцисс – время ($XX^{<0>}$) по оси ординат перемещение $XX^{<1>}$. Отведите от графика указатель мыши и щелкните левой кнопкой – график будет построен (рис.6.4).

Аналогичную процедуру повторяем для вычисления второго дифференциального уравнения $\ddot{y} = -n\dot{y} - g$. Параметры T и N повторно вводить не надо. Необходимо учесть, что проекция скорости на ось Y в начальный момент времени $V_{0y} := V_0 \cdot \sin(\alpha)$ (рис. 6.5). При построении графика введем по оси абсцисс – время ($YY^{<0>}$) по оси ординат перемещение $YY^{<1>}$.



$$V0x := V0 \cdot \cos(\alpha) \quad T := 10$$

$$NUx := \begin{pmatrix} 0 \\ V0 \cdot \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad N := 1000$$

$$XXX(t, X) := \begin{pmatrix} X_1 \\ -n \cdot X_1 \end{pmatrix}$$

$$XX := \text{rkfixed}(NUx, 0, T, N, XXX)$$

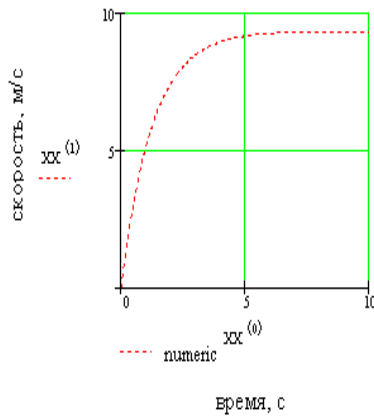
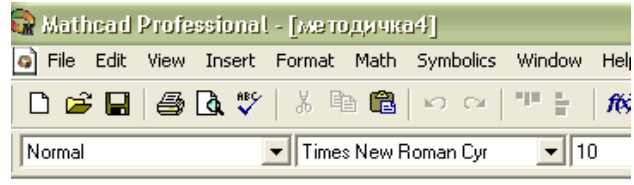


Рис. 6.4



$$V0y := V0 \cdot \sin(\alpha)$$

$$NUy := \begin{pmatrix} 0 \\ V0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$YYY(t, Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ -n \cdot Y_1 - g \end{pmatrix}$$

$$YY := \text{rkfixed}(NUy, 0, T, N, YYY)$$

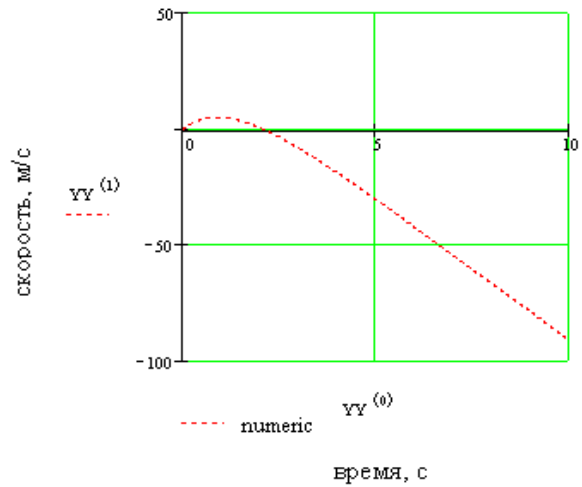


Рис. 6.5

По результатам вычислений надо сравнить графики, полученные аналитически и численно, написать отчет. В отчёт следует включить расчётную схему, исходные данные для расчёта, аналитическое и численное решение задачи, все необходимые формулы и графики. Необходимо привести основные выводы по содержанию работы.

Отчет оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ. К отчету прилагается расчетная часть программы.

Аналитическое решение задачи при отсутствии сопротивления

1. Рассмотрим движение тела на участке АВ. Запишем векторное уравнение движения материальной точки:

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}},$$

где $\vec{G} = m \vec{g}$;

\vec{N} – нормальная реакция поверхности;

$F_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения.

Спроецируем это уравнение на ось AX_1 :

$$m\ddot{x}_1 = \sum F_{ix};$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - F_{\text{тр}};$$

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N.$$

Определяем N из уравнения проекций на ось AY_1 :

$$0 = -mg \cos \alpha + N; \quad N = mg \cos \alpha; \quad F_{\text{тр}} = f mg \cos \alpha.$$

$$m\ddot{x}_1 = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha;$$

$$\ddot{x}_1 = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha;$$

$$\dot{x}_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + C_1;$$

$$x_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t=0$ $x_0 = 0$; $\dot{x}_0 = v_A$

Составим уравнения, полученные при интегрировании, для $t=0$ и найдем постоянные интегрирования:

$$\dot{x}_{10} = C_1 = v_A, \quad x_{10} = C_2 = 0;$$

$$\dot{x}_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + v_A;$$

$$x_1 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)\frac{t^2}{2} + v_A t.$$

Для момента τ когда тело покидает участок АВ:

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т.е.

$$v_B = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \tau + v_A;$$

$$l = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) \frac{\tau^2}{2} + v_A \tau.$$

2. Рассмотрим движение тела от точки В до точки С:

$$m \bar{a} = \bar{G}.$$

Спроецируем векторное уравнение на оси координат ВХ и ВУ:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = -mg;$$

$$\ddot{x} = 0; \quad \ddot{y} = -g;$$

$$\dot{x} = C_3; \quad \dot{y} = -gt + C_4;$$

$$x = C_3 t + C_5; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + C_4 t + C_6.$$

Начальные условия задачи: при $t=0$

$$x_0=0; \quad y_0=0;$$

$$\dot{x}_0 = v_B \cos \alpha; \quad \dot{y}_0 = v_B \sin \alpha.$$

Найдем постоянные интегрирования:

$$C_3 = v_B \cos \alpha; \quad C_4 = v_B \sin \alpha; \quad C_5 = 0; \quad C_6 = 0$$

Получим следующие уравнения проекций скоростей тела:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha; \quad \dot{y} = -gt + v_B \sin \alpha$$

и уравнения движения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t; \quad y = -g \frac{t^2}{2} + v_B \sin \alpha \cdot t$$

Уравнение траектории тела найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$t = \frac{x}{v_B \cos \alpha}; \quad y = -\frac{gx^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения $x=d$; $y=-h$:

$$-h = -\frac{gd^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} + d \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{d}, \quad h = d \operatorname{tg} \beta.$$

Получаем следующее квадратное уравнение для определения d :

$$\frac{gd^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha) d = 0.$$

Время T движения материальной точки на участке ВС найдем из уравнения:

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t, \text{ учитывая } x=d \text{ при } t=T:$$

$$T = \frac{d}{v_B \cos \alpha}.$$

Величину h_2 смещения материальной точки по вертикали на участке ВС определяем, подставляя значение T в уравнение $y(t)$:

$$h_2 = y(T), \text{ т.е.}$$

$$h_2 = g \frac{t^2}{2} - v_B T \sin \alpha.$$

Скорость в точке С находим, подставляя $t=T$ в выражение для модуля v_C :

$$v_C = \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (-v_B \sin \alpha + gT)^2}.$$

Подставляя исходные данные, получаем окончательно числовые значения следующих величин:

$v_B=14,9$ м/с, $l=5$ м, $d=53,5$ м, $T=3,7$ с, $h_2=53,5$ м, $v_C=35,5$ м/с, а также уравнение траектории (параболы) на втором участке ВС:
 $y=0,25x-0,0235x^2$.

Для движения материальной точки на втором участке ВС имеем векторное уравнение движения:

$$m \bar{a} = \bar{G} + \bar{R},$$

где \bar{R} – сила сопротивления воздуха.

Так как сила \bar{R} направлена противоположно скорости, то

$\bar{R} = -\mu \bar{v}$. Проекции сил \bar{G} и \bar{R} на координатные оси будут равны:

$$R_x = -\mu v_x = -\mu \frac{dx}{dt} = -\mu \dot{x};$$

$$G_x = 0;$$

$$R_y = -\mu v_y = -\mu \frac{dy}{dt} = -\mu \dot{y};$$

$$G_y = -G = -mg.$$

Проецируя уравнение на координатные оси ВХ и ВУ, получаем систему двух дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\mu\dot{x}; \\ m\ddot{y} = -\mu\dot{y} - mg. \end{cases}$$

Введем обозначение: $\frac{\mu}{m} = n$.

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -n\dot{x}; & \ddot{y} &= -(g + n\dot{y}); \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= -n\dot{x}; & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -(g + n\dot{y}). \end{aligned}$$

Это – дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Переписав их в виде

$$\frac{d\dot{x}}{\dot{x}} = -n dt; \quad \frac{n d\dot{y}}{g + n\dot{y}} = -n dt$$

и интегрируя, получим

$$\lg \dot{x} = -nt + C_1; \quad \lg(g + n\dot{y}) = -nt + C_2.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим по начальным условиям движения точка М. Так как в начальный момент (при $t=0$)

$$v_{0x} = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha; \quad v_{0y} = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha;$$

то $C_1 = \ln(v_0 \cos \alpha); \quad C_2 = \ln(g + nv_0 \sin \alpha);$

Следовательно,

$$\ln \dot{x} = \lg(v_0 \cos \alpha) - nt; \quad \ln(g + n\dot{y}) = \ln(g + nv_0 \sin \alpha) - nt,$$

или $\ln \frac{\dot{x}}{v_0 \cos \alpha} = -nt; \quad \ln \frac{g + n\dot{y}}{g + nv_0 \sin \alpha} = -nt.$

Отсюда находим:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-nt}; \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n} e^{-nt} - \frac{g}{n}.$$

Остается проинтегрировать эти уравнения, переписав их в виде

$$dx = v_0 \cos \alpha \cdot e^{-nt} \cdot dt; \quad dy = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n} e^{-nt} \cdot dt - \frac{g}{n} \cdot dt$$

и интегрируя, получим:

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{n} e^{-nt} + C_3; \quad y = -\frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n^2} e^{-nt} - \frac{g}{n} t + C_4.$$

Так как в начальный момент, т.е. при $t=0$, точка М находится в начале координат, то $x_0=y_0=0$, а потому

$$C_3 = \frac{v_0 \cos \alpha}{n}; \quad C_4 = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n}.$$

Следовательно,

$$x = -\frac{v_0 \cos \alpha}{n} (1 - e^{-nt}); \quad y = \frac{g + nv_0 \sin \alpha}{n^2} (1 - e^{-nt}) - \frac{g}{n} t.$$

Эти уравнения, выражающие зависимость координат точки М от времени, полностью определяют ее движение на участке ВС.

По полученным уравнениям в программной среде MATHCAD построим траекторию движения т.М на участке ВС. Для этого откроем Mathcad и подготовим в окне редактирования задание на вычисление.

Для запуска формульного редактора достаточно установить указатель мыши в любом свободном месте окна редактирования и щелкнуть левой кнопкой мыши. Появится курсор в виде маленького красного крестика. Его можно перемещать клавишами перемещения курсора.

Используя данные таблицы 1 и результаты аналитических решений вводим следующие параметры, входящие в дифференциальные уравнения движения точки М, на участке ВС: μ - коэффициент сопротивления воздуха; m - масса тела; V_0 (v_B) - скорость тела в т.В, которая будет являться начальной скоростью на участке ВС; α - угол наклона участка АВ к горизонту; g - ускорение свободного падения ($g=9,807 \text{ м/с}^2$); t - дискретный расчетный интервал времени, с шагом 0,1. Затем вводим уравнения движения $x(t)$ и $y(t)$ (рис.4).

Подготовка вычислительных блоков облегчается благодаря выводу шаблона при задании того или иного оператора. Для этого служат палитры математических символов и шаблонов операторов и функций.

Вычисления выполняются посимвольным набором левой части вычисляемого выражения и установкой после него оператора вывода - знака « \Rightarrow » (равно).

После ввода уравнений движения и известных значений можно строить графики функций. Для этого щелкните на кнопке с изображением графика – на экране появится шаблон графика. Введите в место ввода по оси X и Y - $x(t)$ и $y(t)$ - имя независимого аргумента. Отведите от графика указатель мыши и щелкните левой кнопкой – график траектории движения на участке ВС будет построен (рис.6.6). Дополнительно построим графики координат точки в зависимость от времени (рис.6.7).

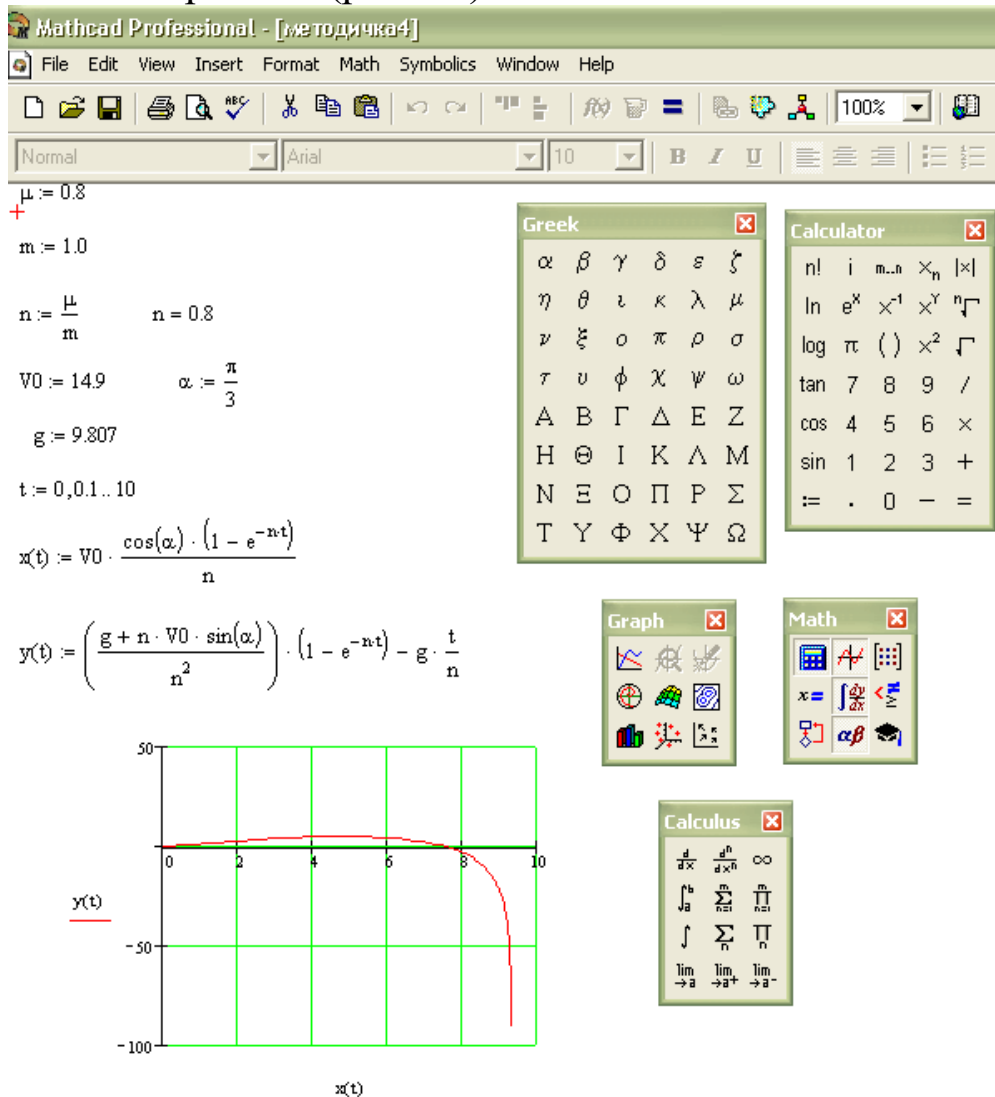


Рис. 6.6

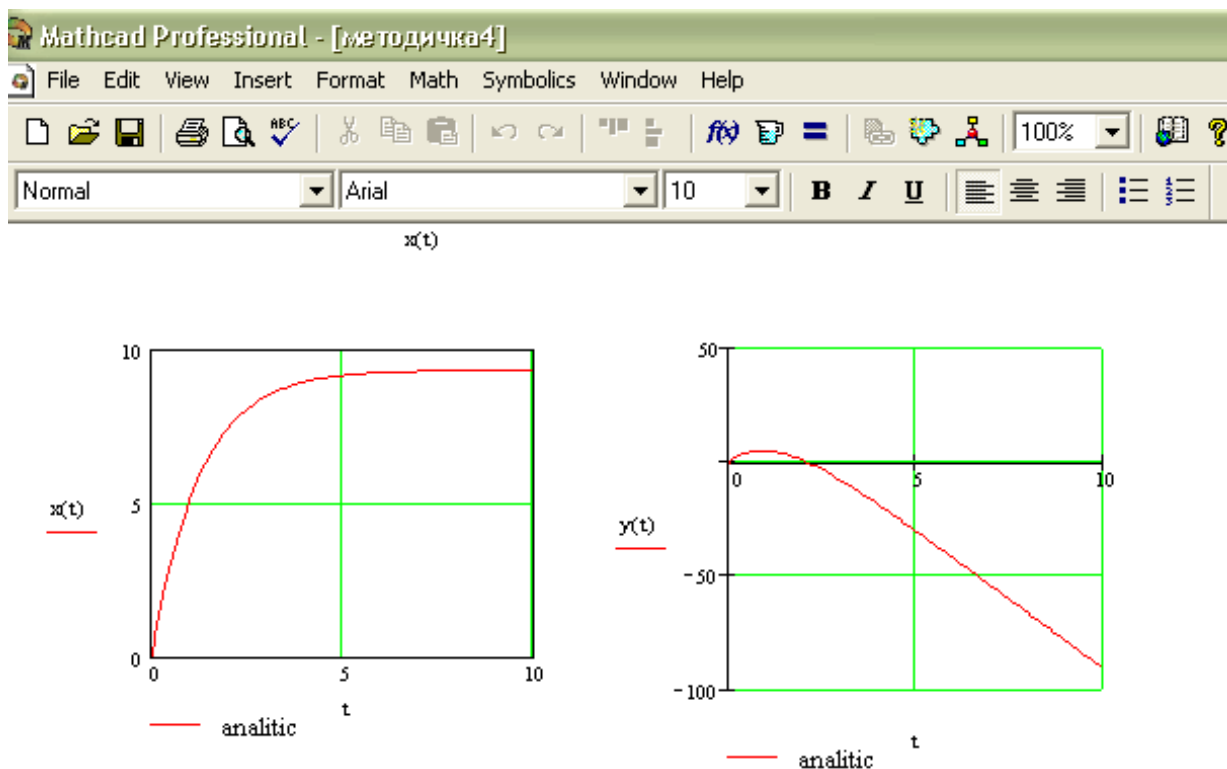


Рис.6.7

3. Выполнение задания численным методом с применением ЭВМ

Ход работы

1. Ознакомиться с теоретической частью и примером выполнения задания.
2. На основании исходных данных, приведенных в таблице:
 - в программной среде МATHCAD ввести уравнения траектории точки в осях $x - y$; определяем координаты точки x_1, y_1 , соответствующие заданному моменту времени t_1 ;
 - для получения закона изменения от времени скорости $v(t)$ и ее составляющих $v_x(t), v_y(t)$ провести численное и символическое дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ первого порядка в момент времени t_1 ;
 - для получения закона изменения от времени составляющих ускорения $a_x(t)$ и $a_y(t)$ провести численное и символическое дифференцирование функций $x(t)$ и $y(t)$ второго

порядка, найти полное ускорение точки в момент времени t_1 ;

- провести численное определение модуля ускорений a_n и a_τ в момент времени t_1 , радиуса кривизны траектории ρ . В случае необходимости описать причину отсутствия ускорений a_n и a_τ .

Вопросы для самоконтроля

1. Какие основные законы динамики точки вы знаете?
2. Каковы две основные задачи динамики материальной точки?
3. Запишите дифференциальные уравнения движения материальной точки в проекциях на координатные оси.
4. Как определить постоянные при интегрировании дифференциальных уравнений движения материальной точки?
5. Численное и аналитическое решение дифференциальных уравнений. Способы и методы.

Задание

Для всех вариантов задания необходимо, приняв движущееся тело за материальную точку, сначала составить дифференциальные уравнения ее движения на первом (прямолинейном) участке АВ не учитывая сопротивления воздуха (т.е. при $\mu=0$) (рис.6.8).

Далее необходимо составить дифференциальные уравнения движения точки в воздухе на участке ВС под действием силы тяжести \bar{G} и силы сопротивления воздуха \bar{R} .

$$\bar{R} = -\mu \bar{v},$$

где v - модуль скорости \bar{v} ,

μ - коэффициент сопротивления воздуха.

Зная угол β наклона плоскости ЕС к горизонту, перепад высот $h_1 = BE$, необходимо найти время полета T в воздухе, горизонтальную дальность d , высоту h_2 , длину l участка АВ и построить графически траекторию движения материальной точки на участке ВС.

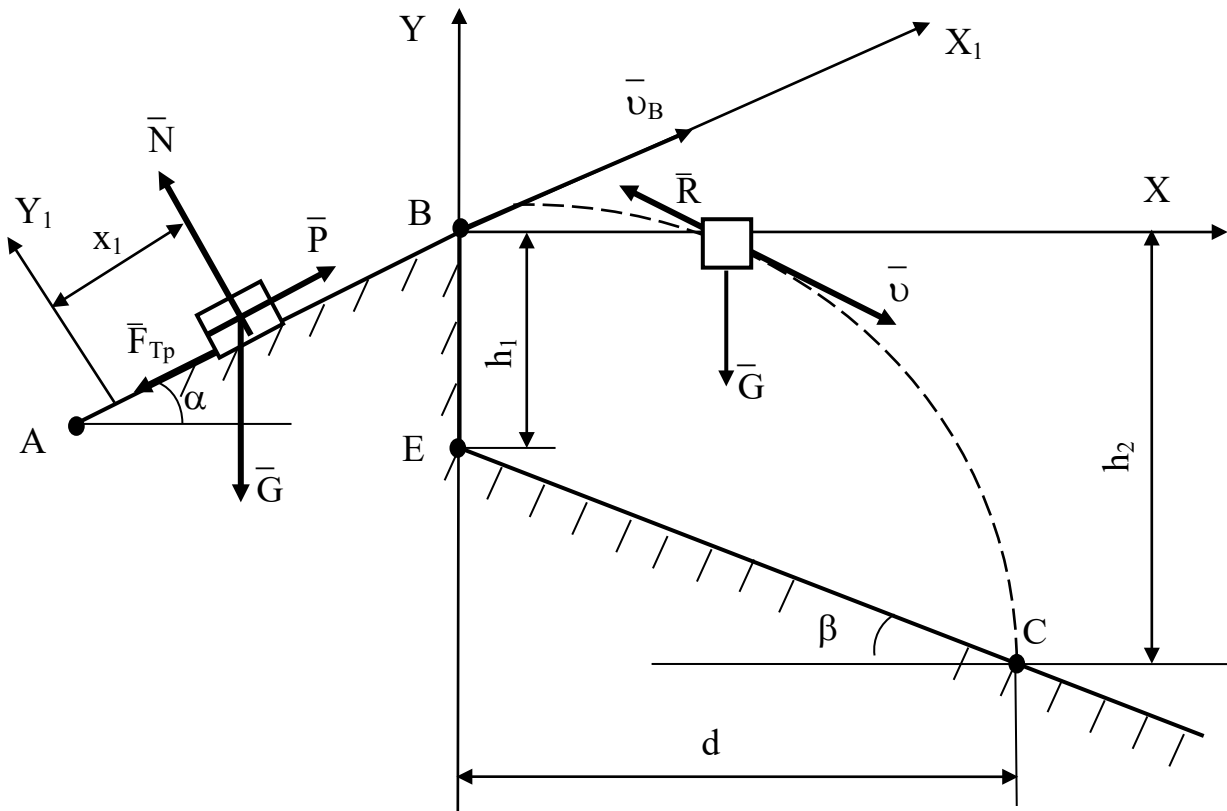


Рис.6.8

На рисунке 6.8 приняты обозначения:

\bar{P} – сила тяги;

\bar{G} – сила тяжести,

$\bar{F}_{\text{Тр}}$ – сила трения,

\bar{N} – реакция нормальной поверхности.

При этом заданы:

m – масса точки;

v_A – начальная скорость;

f – коэффициент трения скольжения;

α – угол наклона участка АВ к горизонту;

τ – время движения точки на участке АВ,

l – длина участка АВ.

На рис.6.9 схема 1 соответствует вариантам 1-5, схема 2 – вариантам 6-10, схема 3 – вариантам 11-15, схема 4 – вариантам 16-20, схема 5 – вариантам 21-25, схема 6 – вариантам 26-30.

Заданные величины для 30 вариантов содержатся в таблице 1.

Задание выполняется в два этапа.

На первом этапе необходимо решить данную задачу аналитически с применением ЭВМ. При построении графика траектории точки на участке ВС следует использовать уравнение траектории

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha}$$

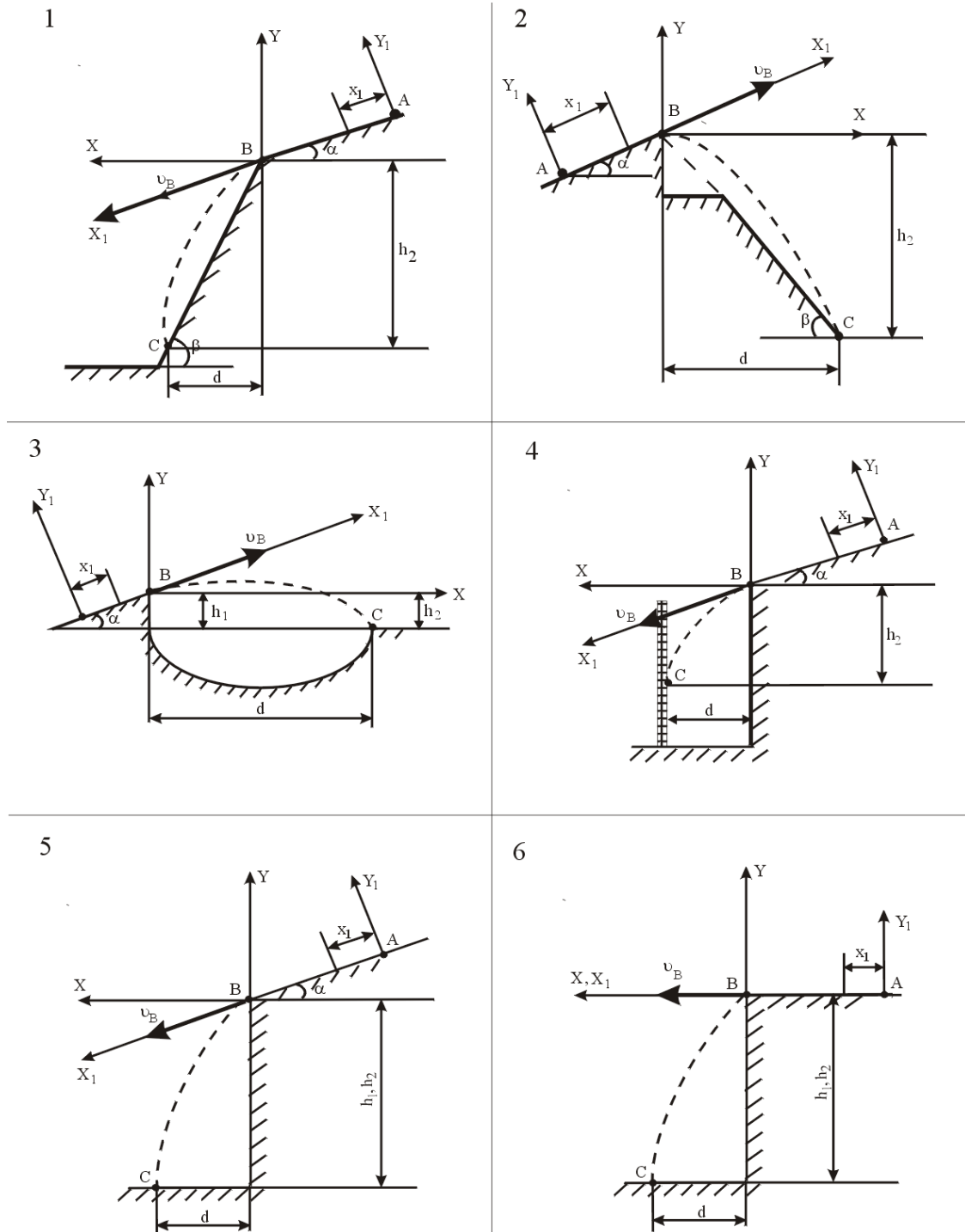


Рис.6.9

Таблица 6.1

№ п/п	№ схемы	α , град	β , град	m , кг	f	P , кН	τ , с	h_1 , м	v_A , м/с	μ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	30	60	1	0,2	0	2,5	0	0	0,8
2	1	15	45	1	0,2	0	5,2	0	2	0,8
3	1	30	60	1	0,22	0	1,6	0	2	0,8
4	1	30	60	1	0	0	2	0	0	0,8
5	1	30	45	1	0,32	0	3	0	0	0,5
6	2	20	30	1	0,1	0	0,2	0	20,9	0,5
7	2	15	45	1	0,1	0	0,32	0	16	0,5
8	2	20	60	1	0	0	0,3	0	21	0,5
9	2	15	45	1	0,1	0	0,3	0	14,3	0,5
10	2	15	60	1	0	0	0,21	0	12	0,9
11	3	30	0	400	0	2,6	18	1,15	0	0,9
12	3	30	0	400	0	0	3,2	1,5	20	0,9
13	3	60	0	400	0	2	20	1,3	0	0,9
14	3	30	0	400	0	2,2	11,7	0,51	0	0,9
15	3	60	0	280	0	3	20,6	2	0	0,7
16	4	30	0	1	0,2	0	1,1	3,5	1	0,7
17	4	45	0	1	0,42	0	1	6	8	0,7
18	4	30	0	1	0,1	0	1	5,4	0	0,7
19	4	15	0	1	0,13	0	1,5	3,1	1	0,7
20	4	45	0	1	0,3	0	0,91	4	0	0,09
21	5	30	0	1	0,1	0	1,5	10	1	0,09
22	5	45	0	1	0,28	0	2	20	0	0,09
23	5	45	0	1	0	0	2	20	0	0,08
24	5	45	0	1	0,2	0	2,5	22	0	0,65
25	5	60	0	1	0,2	0	1,9	4,5	0	0,65
26	6	0	0	1	0,2	0	8,1	20	7	0,65
27	6	0	0	1	0,1	0	2	4,7	4	0,78
28	6	0	0	1	0,3	0	1	5	5,2	0,76
29	6	0	0	1	0,16	0	1,3	20	3	0,78
30	6	0	0	1	0,25	0	2,7	5	9,6	0,9

7. Решение задач динамики механической системы

Применение теоремы об изменении кинетической энергии к решению задач динамики механической системы

Пример решения задания.

Механическая система состоит из грузов 1 и 2 (коэффициент трения грузов о плоскость $f = 0,1$), цилиндрического сплошного однородного катка 3 и ступенчатых шкивов 4 и 5 с радиусами ступеней $R_4 = 0,3$ м, $r_4 = 0,1$ м, $R_5 = 0,2$ м, $r_5 = 0,1$ м (массу каждого шкива считать равномерно распределенной по его внешнему ободу) Тела системы соединены друг с другом нитями, намотанными на шкивы; участки нитей параллельны соответствующим плоскостям (см. рис. 7.1 и табл. 7.2).

Под действием силы F и сил тяжести система приходит в движение из состояния покоя. При движении системы на шкивы 4 и 5 действуют постоянные моменты сил сопротивлений, равные соответственно M_4 и M_5 . Определить скорости груза 1 в тот момент времени, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1 .

Таблица 7.1 – Данные для расчета

m_1 кг	m_2 кг	m_3 кг	m_4 кг	m_5 кг	M_4 Н·м	M_5 Н·м	F , Н	S_1 м
6	0	4	0	8	0,3	0	240	1,6

Решение

1) Используем теорему об изменении кинетической энергии механической системы:

$$T - T_0 = \sum A_i$$

В начальный момент времени система покоится: $T_0 = 0$

Тогда получим:

$$T = \sum A_i$$

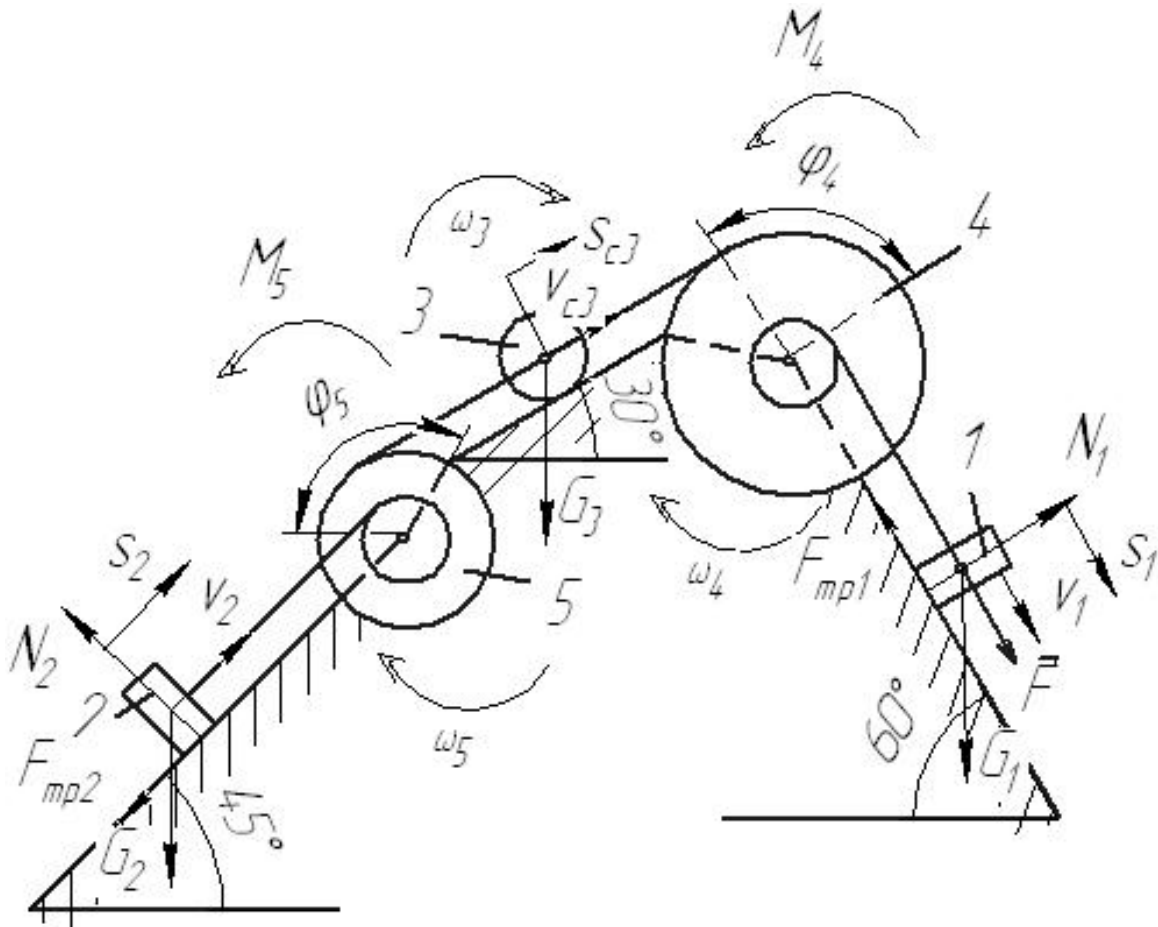


Рис. 7.1. Расчетная схема

2) Определим кинетическую энергию системы в конечный момент времени, когда пройденный телом 1 путь составит s_1 .

$$T = T_1 + T_3 + T_5$$

Найдем кинетические энергии тел, имеющих ненулевую массу.

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2 - \text{поступательное движение}$$

$$T_5 = J_5 \omega_5^2 / 2 - \text{вращательное движение}$$

где $J_5 = m_5 R_5^2$ – момент инерции колеса 5.

$$T_3 = m_3 v_{c3}^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2 - \text{плоское движение}$$

где $J_3 = m_3 R_3^2 / 2$ – момент инерции колеса 3.

Выразим все скорости через скорость 1 тела v_1 .

$$\omega_4 = \frac{v_1}{r_4}$$

$$v_{c3} = \omega_4 R_4 = 3v_1 \quad \omega_3 = \frac{v_{c3}}{R_3} = \frac{3v_1}{R_3}$$

$$\omega_5 = \frac{v_{c3}}{R_5} = \frac{3v_1}{R_5} \quad v_2 = \omega_5 r_5 = 1,5v_1$$

Тогда получим выражение для кинетической энергии системы в конечный момент:

$$T = m_1 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 2 + 9m_3 v_1^2 / 4 + 9m_5 v_1^2 / 2$$

$$T = v_1^2 \left(m_1 / 2 + 9m_3 / 2 + 9m_3 / 4 + 9m_5 / 2 \right)$$

Получим:

$$T = v_1^2 \left(6/2 + 9 \cdot 4/2 + 9 \cdot 4/4 + 9 \cdot 8/2 \right) = 66v_1^2$$

3) Найдём сумму работ внешних сил за время движения системы.

$$A_F = F \cdot s_1 = 240 \cdot 1,6 = 384 \text{ Дж} - \text{работа силы } F.$$

$A_{G_1} = G_1 s_1 \cos 30^\circ = 6 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot \cos 30^\circ = 81,5 \text{ Дж}$ - работа силы тяжести G_1 .

$$A_{F_{mp1}} = -F_{mp1} s_1 - \text{работа силы трения } F_{mp1}.$$

$$F_{mp1} = fN = fG_1 \sin 30^\circ$$

$$A_{F_{mp1}} = -fG_1 s_1 \sin 30^\circ = -0,1 \cdot 6 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot \sin 30^\circ = -4,7 \text{ Дж}$$

$$A_{M_4} = -M_4 \varphi_4 - \text{работа момента сопротивления } M_4.$$

$$\varphi_4 = s_1 / r_4$$

$$A_{M_4} = -M_4 s_1 / r_4 = -\frac{0,3 \cdot 1,6}{0,1} = -4,8 \text{ Дж}$$

$$A_{G_3} = -G_3 s_{c3} \cos 60^\circ - \text{работа силы тяжести } G_3.$$

$$s_{c3} = 3 \cdot s_1$$

$$A_{G_3} = -3G_3 s_1 \cos 60^\circ = -3 \cdot 4 \cdot 9,8 \cdot 1,6 \cdot \cos 60^\circ = -94,1 \text{ Дж}$$

Работа остальных сил и моментов равна нулю.

Тогда:

$$\sum A_i = 384 + 81,5 - 4,7 - 4,8 - 94,1 = 362 \text{ Дж}$$

4) Получим:

$$66v_1^2 = 362$$

$$\text{откуда: } v_1 = \sqrt{362/66} = 2,34 \text{ м/с}$$

8 Структурный и кинематический анализ плоских рычажных механизмов

Цель работы: выполнить структурный анализ механизма и кинематический анализ плоского рычажного механизма.

Общие теоретические положения

Звенья и кинематические пары

Рычажными называются механизмы с геометрическим замыканием (запиранием) звеньев во вращательных и поступательных кинематических парах.

Благодаря этому они могут передавать большие усилия и мощности, чем другие механизмы в аналогичных условиях. Звенья механизмов сравнительно просты в изготовлении.

Механизмы применяют в основном для преобразования вращательного движения входного звена в качательное или возвратно-поступательное движение выходного звена.

Если звенья механизма движутся в одной плоскости, то механизм называется плоским.

Каждый механизм состоит из отдельных звеньев, одно из которых является неподвижным и называется стойкой. Остальные звенья относительно стойки совершают вполне определенные движения.

Звенья механизма в зависимости от их функции в механизме разделяют на входные и выходные, ведущие и ведомые. **Входным** называют звено, которому сообщается движение от двигателя, **выходным** - звено, реализующее движение, для которого и предназначен механизм.

Подвижное соединение двух звеньев образует кинематическую пару. Наибольшее распространение получили кинематические пары, в которых одно звено относительно другого совершает вращательное или поступательное движение. В соответствии с этим пары называют вращательными или поступательными.

Участки звеньев пары, которыми они входят в соприкосновение называют элементами пары. Если соприкосновение происходит по поверхности, то пара называется низшей, а если по линии или в точке, то - высшей. Примерами низших пар могут быть ползун и стойка

(неподвижная направляющая), цилиндрический шарнир (вал и подшипник) и т.д.

Классы кинематических пар

Определение движения звеньев кинематической пары объясняется ее структурой. Известно, что каждое звено в отдельности имеет 6 степеней свободы, т. е. может получать 6 возможных перемещений в пространстве - три поступательных вдоль координатных осей и три вращательных относительно этих осей.

При соединении звеньев в кинематическую пару, каждое из них накладывает на другое ограничения в движении (связи), в результате чего теряется определенное число степеней свободы. По числу связей, наложенных на относительное движение звеньев, кинематические пары делятся на 5 классов.

Наибольшее распространение имеют пары V-го класса (они имеют лишь одну степень свободы): звенья в них могут получать либо вращательное, либо поступательное движение. В парах IV-го класса возможно 2 относительных движения звеньев; например, свободный цилиндрический шарнир имеет две степени свободы - вращательное вокруг оси и поступательное вдоль этой оси [1-5].

В таком же движении находятся звенья всех высших пар (в плоских кинематических цепях) и поэтому они относятся к парам IV-го класса. Таким образом, пары V-го класса одноподвижны, пары IV-го класса - двухподвижны .

Кинематические цепи и механизмы

Совокупность соединенных между собой звеньев в кинематические пары называют *кинематической цепью*. Кинематические цепи разделяют на разомкнутые (открытые, незамкнутые) и замкнутые цепи, а также на простые и сложные цепи. Разомкнутая цепь (рис.1.1, а) имеет свободные элементы, к которым могут быть присоединены другие звенья. В замкнутой цепи все звенья образуют замкнутый контур, не имеющий свободных элементов (рис.1.1,б, в).

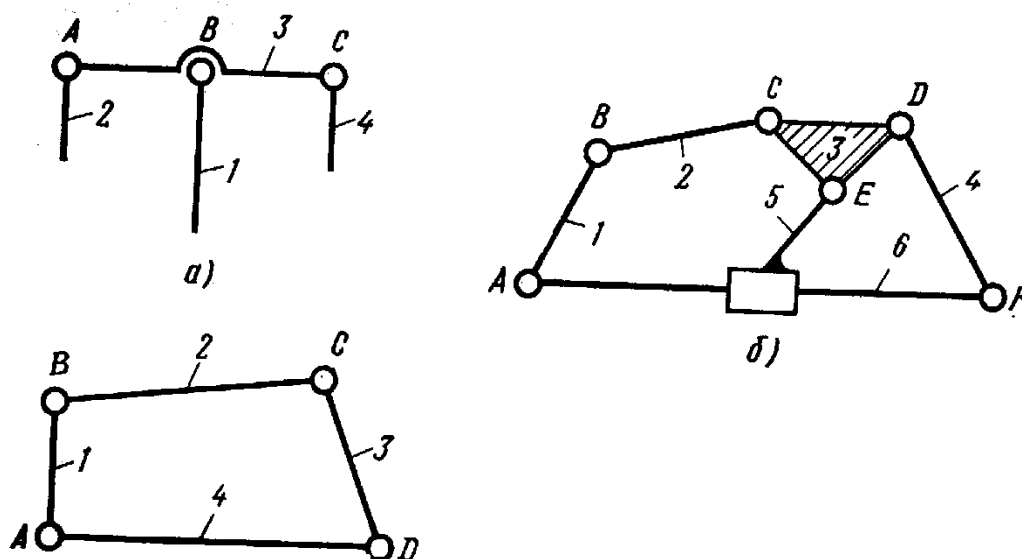


Рис. 8.1. Кинематические цепи:

а – разомкнутая, простая; б – замкнутая сложная; в – замкнутая простая; 1–6 – кинематические пары

Простой называют цепь, в которой каждое звено входит в состав не более двух кинематических пар (рис. 8.1, а, а). Сложная цепь имеет в своем составе базисные звенья, которые включаются в три и более кинематических пар (рис. 8.1, б базисным звеном является звено *CDE*).

В кинематических цепях все звенья подвижны. Если же одно из звеньев закрепить неподвижно, то цепь превращается в механизм. По характеру движения точек звеньев механизма относительно выбранной плоскости кинематические цепи и механизмы разделяют на плоские и пространственные. В плоских цепях и механизмах точки всех звеньев движутся параллельно одной плоскости. Такое движение в рычажных механизмах обеспечивается параллельным расположением осей шарниров. Если же оси шарниров расположены не параллельно, то точки звеньев описывают пространственные траектории, т.е. движутся не параллельно одной плоскости.

Каждый механизм имеет звенья ведущие и ведомые. Ведущее звено, совершающее вращательное движение с поворотом на угол 360 градусов, называют кривошипом (рис. 8.2, а). Звено поступательного движения называют ползуном (рис. 8.2, б). Звено, совершающее качательное движение называют коромыслом (рис. 1.2, в).

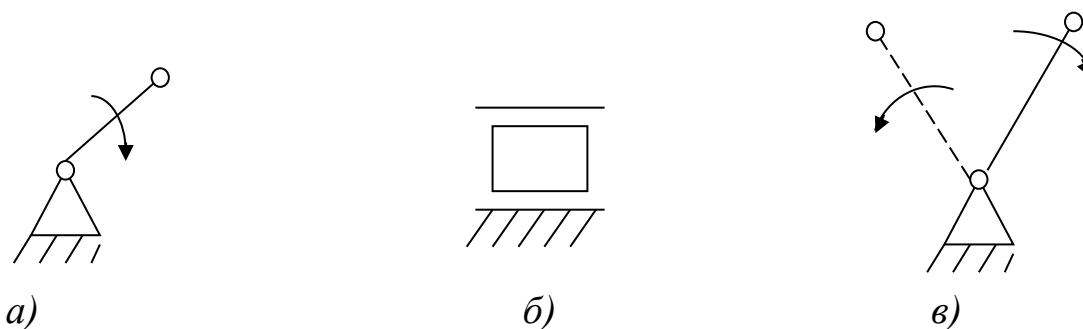


Рис. 8.2. Звенья механизма: а) – кривошип; б) – ползун 3; в) - коромысло

Качающееся или вращающееся звено, которое является подвижной направляющей для ползуна, называется кулисой (рис. 8.3,а). Звено, совершающее плоско-параллельное движение, называется шатунном (рис. 8.3, б). Обычно шатун соединяет кривошип и ползун, кривошип и коромысло, кулису и ползун.

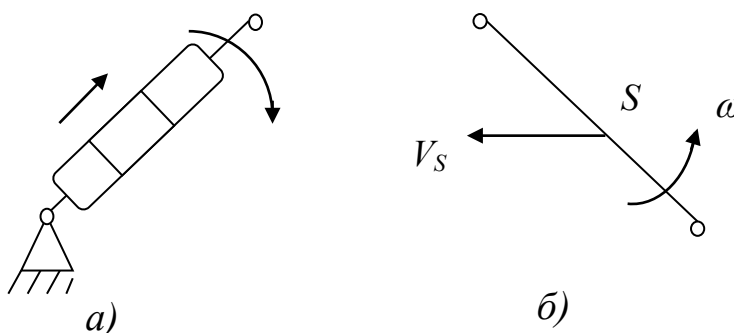


Рис. 8.3. Звенья механизма: а) – кулиса; б) – шатун

Степень подвижности механизма

Число подвижных звеньев, которое необходимо для сообщения ведомым звеньям заданных движений, зависит от структуры механизма, т. е. от числа звеньев и числа кинематических пар различных классов. Эта зависимость отражается структурной формулой механизма, определяющей степень подвижности (число ведущих звеньев) в зависимости от его структуры.

Для плоских механизмов формула для определения степени подвижности (формула П.Л.Чебышева) имеет вид:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4, \quad (8.1)$$

где W - степень подвижности механизма;

n - число подвижных звеньев;

p_5 - число пар V-го класса;

p_4 -число пар IV-го класса.

Условное обозначение звеньев и кинематических пар

Кинематические цепи и механизмы изображают графически в виде схем и планов. Схемой называют изображение звеньев и пар с помощью специально принятых условных обозначений, но без определенного масштаба. План изображает цепь или механизм в принятом масштабе с учетом известных длин звеньев.

Звено рычажного механизма изображают отрезком прямой с кружочками на концах, изображающие элементы для образования вращательных пар (рис. 8.5,а). Звено, совершающее поступательное движение в направляющих (ползун), изображается прямоугольником с элементом вращательной пары (рис. 8.5,б). Неподвижное звено (стойка) отмечается штриховкой или изображается равнобедренным треугольником со штриховкой (рис. 8.5,в).

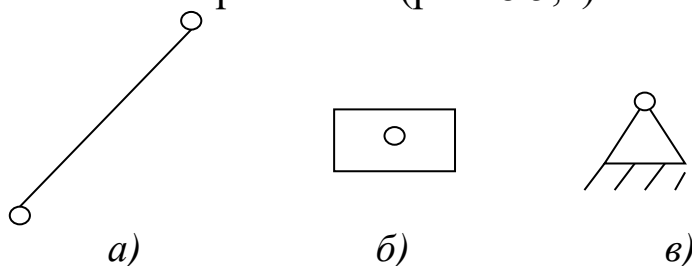


Рис. 8.5. Схематическое обозначение звеньев: а) – звено вращательного или плоского движения; б) – ползун; в) - стойка

Если звенья присоединяются к стойке, образуя вращательные пары в нескольких местах, удаленных друг от друга, то стойка изображается соответствующим числом треугольников со штриховкой, которая отмечается одним числом.

Пример. Провести структурный анализ механизма, схема которого изображена на рис. 8.6.

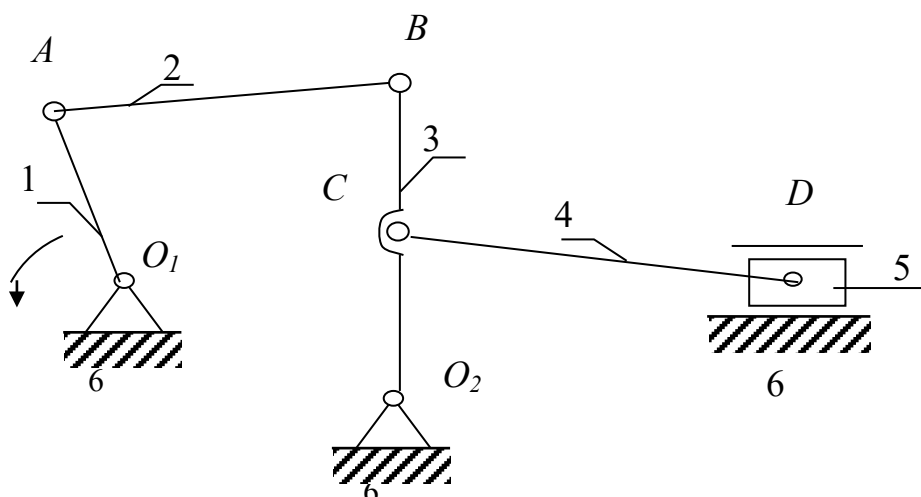


Рис. 8.6. Структурный анализ плоского рычажного механизма

1. Определяем звенья и кинематические пары, составляющие данный механизм (табл. 8.1)

Таблица 8.1 - Характеристика звеньев и кинематических пар

№ п/п	Звенья		Кинематические пары		
	Наименование звеньев	Роль звена	Обозначения	Звенья, пары	Относит. движение звеньев
1	Кривошип	Ведущее	O_1	6-1	Вращательное
2	Шатун	Ведомое	A	1-2	
3	Коромысло		B	2-3	
4	Шатун		C	3-4	
5	Ползун		O_2	6-3	
6	Стойка	Неподвиж.	D	4-5	Вращательное
			D	6-5	Поступательн.

2. Определяем класс и порядок механизма, степень его подвижности.

$$\text{Степень подвижности механизма: } W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$$

Кинематический анализ механизма

Кинематический анализ механизмов состоит в определении движения звеньев механизма по заданному закону движения ведущего звена.

Основные задачи кинематического анализа: определение положения звеньев и траекторий отдельных точек звеньев механизма; определе-

ние скоростей и ускорений точек звеньев и определение угловых скоростей и угловых ускорений звеньев механизма.

При этом задаются структурная схема механизма с указанием размеров звеньев и законы движения ведущих звеньев механизма.

Рассмотрим пример кинематического расчёта механизма *графоаналитическим методом*.

Наиболее распространённым является метод планов, при этом длины звеньев, перемещения точек, скорости и ускорения изображаются в соответствующих масштабах (μ_s , μ_v , μ_a).

Этот метод рассмотрим на примере кривошипно-ползунного механизма, показанного на рис. 8.8.

Пример. Построить план положений и план скоростей механизма.

Планом положений называется графическое изображение временного расположения звеньев механизма соответствующее выбранному моменту времени. С помощью планов механизма можно наглядно проследить за движением его звеньев и точек. Для построения траекторий точек *A, B* и *C* необходимо построить ряд последовательных положений механизма (рис. 8.7,а, 8.7,б). Плавная линия, проведённая через все одноимённые точки механизма, и будет искомой траекторией точки звена.

Диаграммой перемещений называется график движения исполнительного звена за один цикл (оборот кривошипа) в зависимости от времени или угла поворота кривошипа (рис. 8.9,б).

Для цикловых механизмов, в том числе рычажных, на диаграмме движения четко определяются рабочий и холостой ход исполнительного звена. Также по диаграмме движения можно определить ряд важных геометрических и кинематических характеристик механизма: ход исполнительного звена, коэффициент изменения средней скорости исполнительного звена на рабочем и холостом ходу, положения механизма, соответствующие максимальной и минимальной скорости исполнительного звена и т.д.

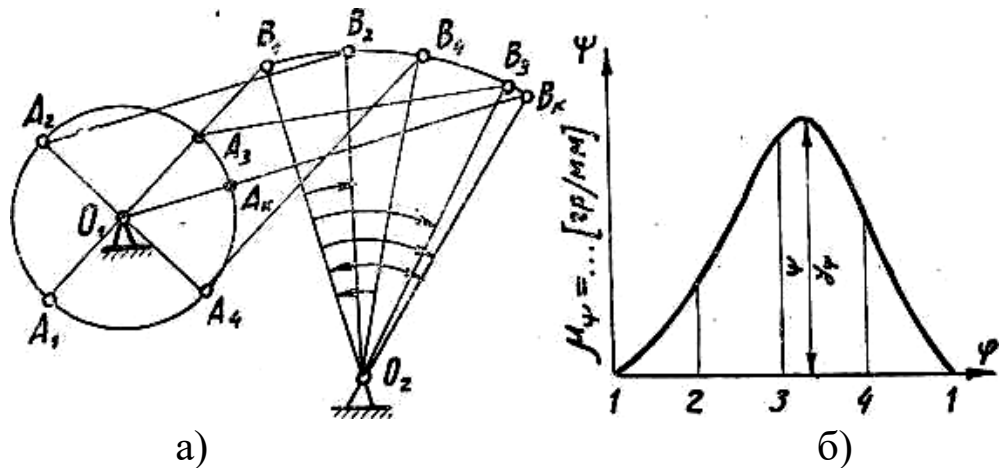


Рисунок 8.7. Кривошипно-коромысловый механизм:

а) – план положений; б) диаграмма перемещений:

φ – угол поворота кривошипа, ψ – угол поворота коромысла; 1-4 – положения механизма

Для построения траекторий точек A, B и C необходимо построить ряд последовательных положений механизма (рис.8.7,б). Плавная линия, проведённая через все одноимённые точки механизма, и будет искомой траекторией точки звена.

Для построения плана скоростей должна быть известна кинематическая схема механизма и задан закон движения ведущего звена. Построим планы скоростей и ускорений для схемы, показанной на рис.8.8,а. Известны, длины звеньев и угловая скорость кривошипа OA ($\omega_1 = \text{const}$)

$$\text{Скорость точки } A: \\ \bar{v}_A = \omega_1 \cdot l_{OA}; \quad \bar{v}_A \perp OA.$$

Скорость точки B определяется по теореме о скоростях точек тела, совершающего плоское движение:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}; \quad \bar{v}_{BA} \perp AB.$$

Для определения скоростей строим план скоростей в масштабе

$$\mu_v = \frac{v_A}{P_{va}},$$

где P_{va} – отрезок на плане скоростей, изображающий скорость точки A .

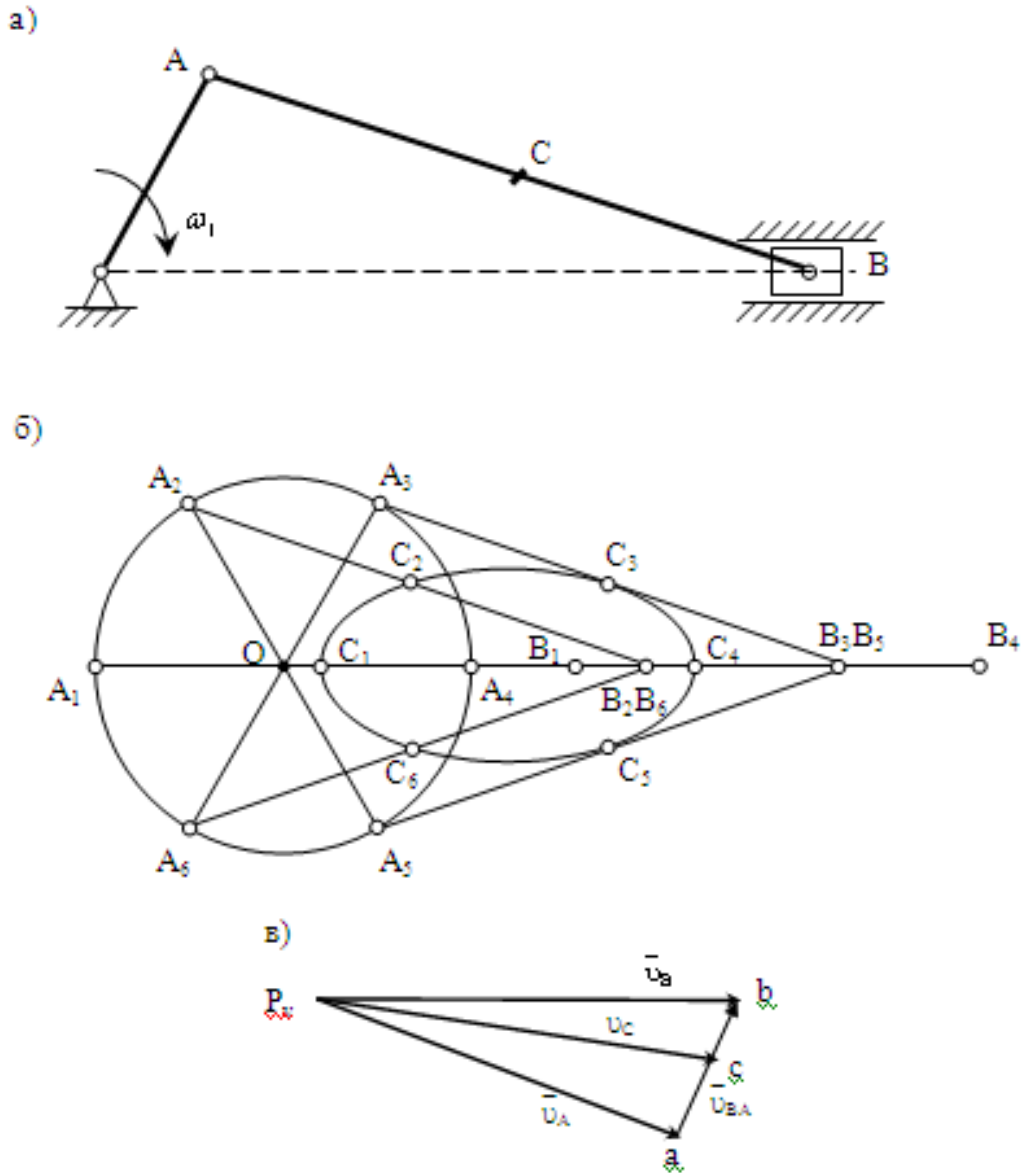


Рис.8.8. Кривошипно-ползунный механизм:
а – схема; б – план положений; в – план скоростей

Из произвольного полюса P_V (рис.8.8, в) проводим отрезок $P_V a$, из точки a проводим прямую в направлении $\underline{u}_{BA} (\perp AB)$, а из полюса P_V проводим прямую в направлении \underline{u}_B . Точка пересечения прямых b , определит концы векторов \underline{u}_B и \underline{u}_{BA} . Их величины:

$$u_B = \mu_V(P_V b); \quad u_{BA} = \mu_V(ab).$$

Для определения скорости точки C воспользуемся теоремой подобия, согласно которой отрезки на плане механизма подобны отрезкам на плане скоростей, т.е.

$$\frac{AB}{AC} = \frac{ab}{ac}; \quad ac = ab \frac{AC}{AB}; \quad v_C = \mu_v(P_{vc}).$$

Угловая скорость шатуна AB :

$$\omega_{AB} = \frac{v_{BA}}{l_{AB}}.$$

Объекты выполнения работы - планшеты с моделями рычажных механизмов.

Общий вид планшетов приведен на рис. 8.9.

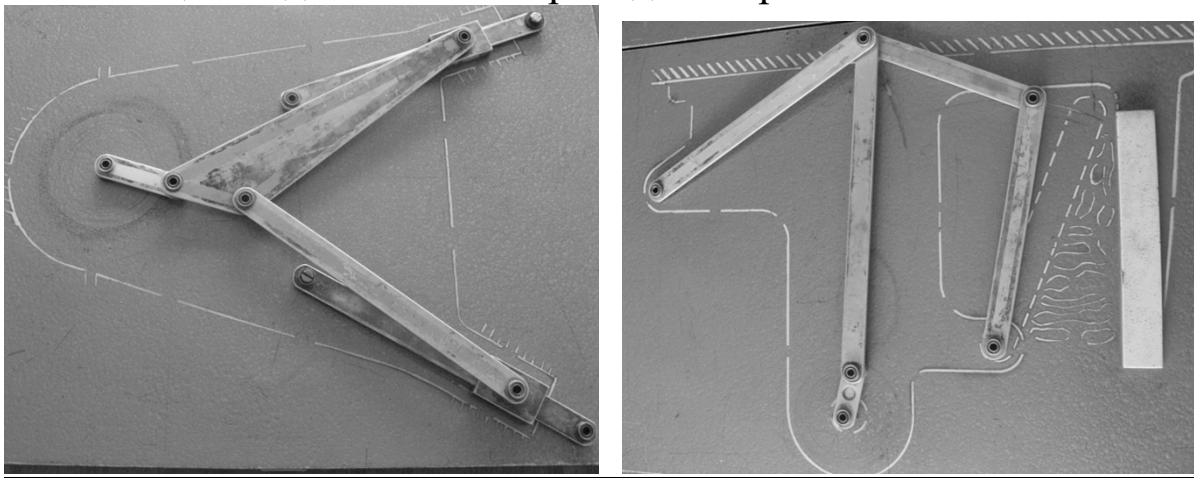


Рис. 8.9. Общий вид планшетов

Содержание работы

1. Изучить общие теоретические сведения, подготовить конспект.
2. Ознакомиться с схемой и движением механизма. Определить основные геометрические параметры: длины звеньев, расстояния между характерными точками и т.д. Начертить кинематическую схему механизма.

Линейный масштаб: $\mu_l = l_{AB}/AB = \underline{\hspace{2cm}}$ (м/мм)

3. Заполнить таблицу характеристик звеньев и кинематических пар (пример: табл.1.1).
4. Определить степень подвижности механизма:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где W - степень подвижности механизма; n - число подвижных звеньев; p_5 - число пар V-го класса; p_4 - число пар IV-го класса.

5. Построить (начертить) план механизма для 8 положений, образующих замкнутый цикл движения, для чего разбить траекто-

рию движения кривошипа на 8 равных частей (в предположении, что кривошип вращается с постоянной угловой скоростью).

6. Определить по плану механизма крайние положения звеньев, траектории движения характерных точек, направление рабочего и холостого хода, а также положения механизма, в которых скорость исполнительного звена имеет наибольшее и наименьшее значение.
7. Построить диаграмму движения исполнительного звена. Для этого определить изменение положения исполнительного звена (линейное или угловое) для каждого положения механизма (положения кривошипа). Полученные данные занести в таблицу 8.2.

Диаграмма движения представляет собой график зависимости $s = f(\varphi)$ для поступательного движения исполнительного звена $\psi = f(\varphi)$ для вращательного (качательного) движения исполнительного звена,

где s , ψ – соответственно линейное и угловое перемещение исполнительного звена;

φ – угол поворота кривошипа

На диаграмме отметить и определить :

- ход исполнительного звена s_{\max} (или ψ_{\max});
- рабочий и холостой ход;
- положения механизма, в которых скорость исполнительного звена имеет наибольшее и наименьшее значение (сравнить эти данные с полученными в п.5)

Таблица 8.2 – Данные для построения диаграммы движения

Положение механизма	Угол поворота кривошипа $\varphi, ^\circ$	Перемещение исполнительного звена
1	0	0
2	45	
3	90	
...		
8		
1	360	0

8. Для выбранного положения механизма записать уравнения, связывающие между собой скорости характерных точек механизма, и построить план скоростей механизма.

Задав величину угловой скорости вращения кривошипа (пусть $\omega_{\text{кривошип}} = 10$ рад/с), определить скорости характерных точек и угловые скорости звеньев механизма.

Заполнить таблицу кинематических параметров (табл. 8.3)

Таблица 8.3.- Основные кинематические параметры механизма

Параметр		Расчетная формула	Значение, м/с
Скорость	точки <i>A</i>	$\vec{v}_A = \omega_1 \cdot l_{OA}$	
	точки _____		
	точки _____		
Угловая скорость	звена <i>OA</i>		
	звена _____		

9. Сформулировать выводы по работе.

10. Оформить отчет по работе

Контрольные вопросы

1. Что называют звеньями и кинематическими парами?
2. Как классифицируются кинематические пары по относительно-му движению звеньев, видам элементов и классам?
3. Что называют кинематической цепью и как классифицируют кинематические цепи?
4. В чем отличие механизма от кинематической цепи? Какие звенья имеет механизм?
5. Как определить степень подвижности механизма?
6. Диаграмма положений механизма. Что такое рабочий и холостой ход выходного звена?

7. В чём заключается кинематический анализ механизмов?
8. Порядок построения планов скоростей и определение скоростей точек механизма и угловых скоростей звеньев

Контрольные задания

1. Провести структурный анализ заданного рычажного механизма
2. По известной схеме механизма построить положение всех звеньев и точек механизма для заданного положения кривошипа.
3. Для заданного положения механизма построить план скоростей, определить скорости характерных точек

9 Моделирование механизмов, использующихся в оборудовании

Цель работы:

1. Построить имитационную модель рычажного механизма;
2. Получить графики перемещения, скорости и ускорения от времени, а также траекторию движения точек механизма;
3. Продемонстрировать работу исследуемого механизма.

Общие теоретические сведения

В швейных машинах различают *основные* механизмы, в которых исполнительным звеном является основной рабочий орган, и *дополнительные*, которые необходимы для механизации вспомогательных приемов или других действий при формировании стежка.

К основным механизмам относятся механизм иглы, механизм челнока, механизм нитепритягивателя, механизм продвижения материала и др.

К дополнительным механизмам относятся направители материала, механизмы обрезки края материала, обрезки ниток, подъема лапки и т.д.

Рассмотрим типовые схемы рычажных основных механизмов швейных машин.

Механизм иглы.

Механизм иглы в швейной машине челночного стежка предназначен для преобразования вращательного движения главного вала машины в прямолинейное возвратно-поступательное движение иглы.

Типовые схемы рычажных механизмов игловодителя приведены на рис. 9.1.

Основным параметром механизма иглы является общий ход иглы, т.е. перемещение из крайнего верхнего в крайнее нижнее положение. Рабочий ход иглы составляет обычно 30-70 мм.

Важной характеристикой рычажного механизма является также закон движения исполнительного звена за один цикл движения (один полный оборот кривошипа).

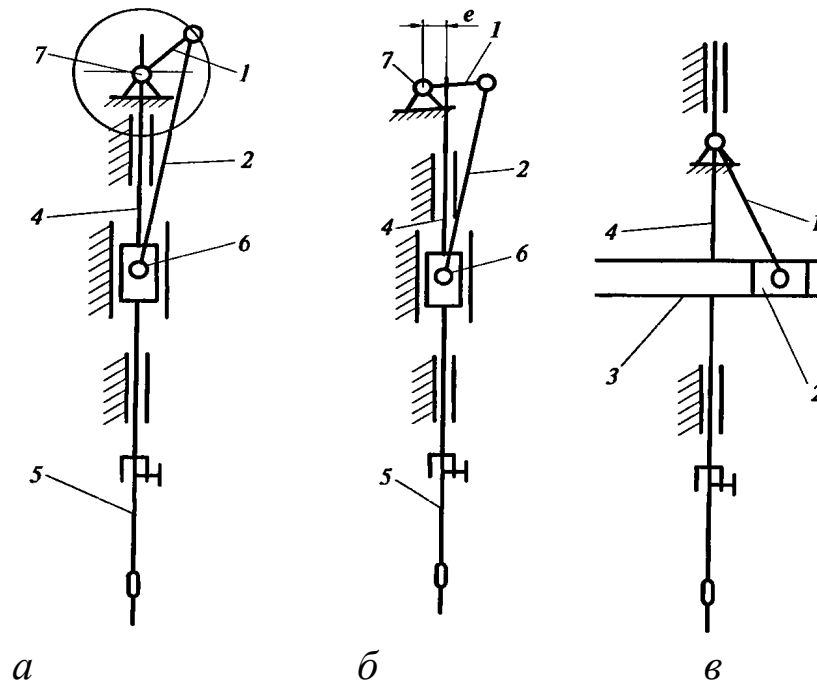


Рис. 9.1. Схемы механизмов игл:

а – кривошипно-ползунный аксиальный; *б* – кривошипно-ползунный дезаксиальный; *в* – кривошипно-кулисный;
 1 – кривошип, 2 – шатун (*а, б*), кулисный камень (*в*), 3 – кулиса (направляющая), 4 – ось игловодителя, 5 – игла, 6 – ползун, 7 – ось вращения кривошипа, *е* - дезаксиал

Типовой закон движения исполнительного звена механизма игловодителя представлен на рис. 9.2. С точки зрения работы швейной машины заштрихованная на рис. 9.2. область является рабочим ходом, в течение которого происходит вход иглы в материал, образование петли-напуска и дальнейший выход иглы из материала.

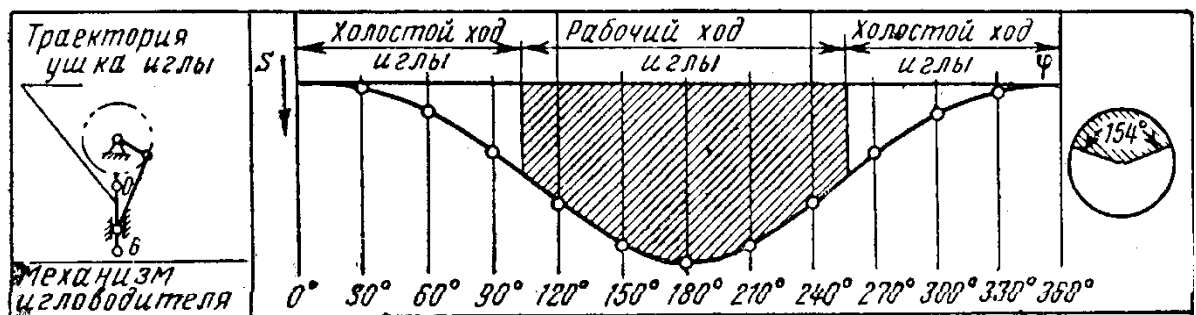


Рис. 9.2. Типовой закон движения исполнительного звена механизма игловодителя

Выбор схемы механизма и подбор соотношения его геометрических параметров позволяет добиться требуемого закона движения

иглы (продолжительности рабочего хода, хода иглы, закона изменения скорости и ускорения иглы и т.д.).

Механизм нитепритягивателя.

Механизм нитепритягивателя в швейной машине челночного стежка сообщает необходимое движение нитепритягивателю и служит для подачи и затяжки (притягивания к материалу) игольной нитки в процессе образования челночного стежка, т.е. данный механизм предназначен для преобразования вращательного движения кривошипа в возвратно-вращательное движение рычага нитепритягивателя.

Типовые схемы рычажных механизмов нитепритягивателя приведены на рис. 9.3.

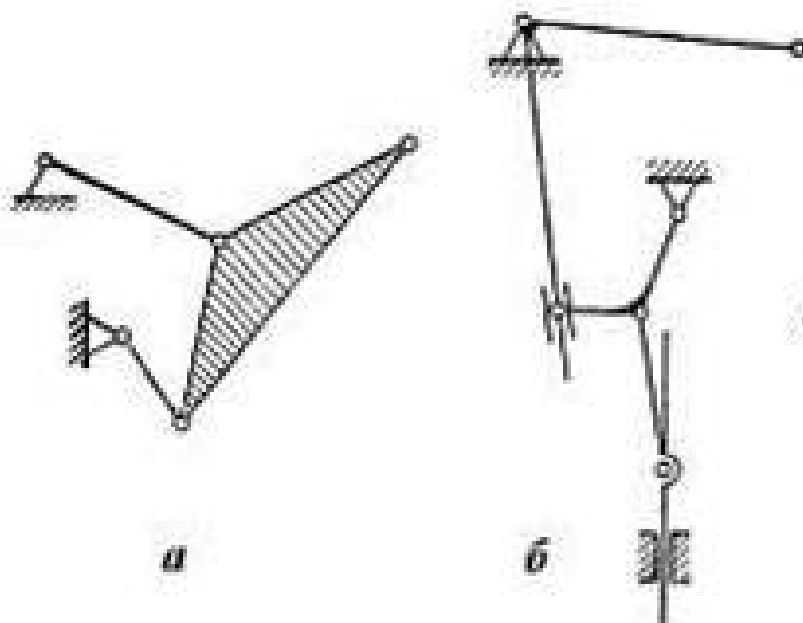


Рис. 9.3. Схемы рычажных механизмов нитепритягивателей:
 а – кривошипно-коромысловый; б – кривошипно-кулисный

Основным параметром механизма нитепритягивателя является ход рычага, т.е. перемещение из крайнего верхнего в крайнее нижнее положение. Рабочий ход ушка нитепритягивателя составляет обычно 70-80 мм.

Типовой закон движения исполнительного звена механизма нитепритягивателя представлен на рис. 9.4.



Рис. 9.4. Типовой закон движения исполнительного звена механизма нитепритягивателя

Механизм качающегося челнока.

В некоторых швейных машинах применяются челноки с колебательным поворотным движением, примерная схема которых приведена на рис. 9.5.

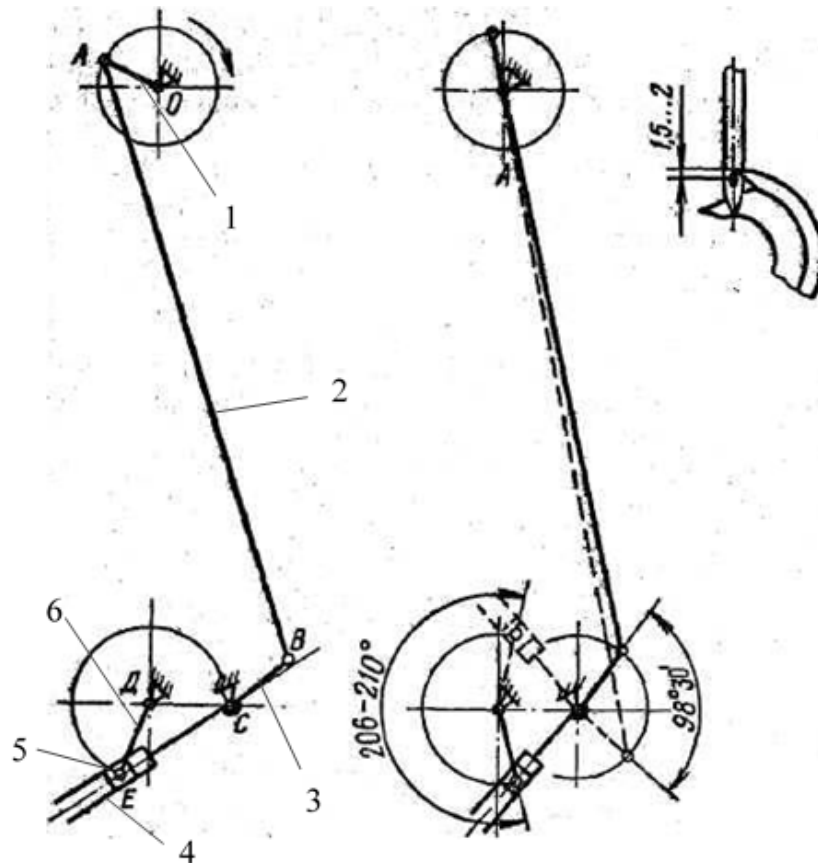


Рис. 9.5. Кинематическая схема качающегося челнока:
1 – кривошип; 2 – шатун; 3 – коромысло; 4 – кулиса; 5 – кулисный камень; 6 – кулиса (челнок)

Вращение главного вала (кривошипа) 1 преобразуется в возвратно-качательное движение коромысла 3 вокруг оси C посредством шатуна 2. Второй конец качающегося вала C выполнен в виде кулисы 4, которую охватывает кулисный камень 5, шарнирно связанный с коромыслом 6. На одном валу с коромыслом 6 закреплен толкатель челнока. Таким образом, вращательное движение главного вала (кривошипа) 1 через шатун 2 и коромысло 3 преобразуется в качательное движение вала кулисы вокруг оси C с требуемым углом качания ($98,5^\circ$); кулисный же механизм через кулисный камень 5 и коромысло 6 сообщает валу челнока качательное движение также с требуемым углом качания ($206 - 210^\circ$).

Механизм продвижения материала.

При образовании челночного-стежка перемещение материала может быть выполнено:

- Реечным транспортером, когда перемещение материала обеспечивает зубчатая рейка (см. рис. 9.6);
- Дисковым (роликовым) транспортером, когда транспортирование материала выполняется дисками с рифлеными поверхностями;
- Рамкой, фиксирующей материал между двумя пластинами и выполняющей перемещение в пределах размеров рамки.

На рис. 9.6. приведен один из вариантов схемы рычажного механизма перемещения зубчатой рейки.

Рейка имеет смещение и по вертикали, и по горизонтали. При правильном согласовании этих двух движений рейка имеет эллипсообразную траекторию движения. Каждое направление движения рейки получает от соответствующего узла подъема и перемещения рейки.

Обычно механизм продвижения материала реечного типа имеет ведомые звенья (рис. 9.7.): рычаг (шатун) 2 с рейкой, рычаг (коромысло) продвижения 1, рычаг (коромысло) подъема 3.

При возвратно-вращательном движении коромысло 1 сообщает горизонтальные перемещения, а коромысло 3 – подъем и опускание рейки с рычагом 2. Следовательно, величина $L_{ст}$ продвижения рейки 2 зависит от размаха движений коромысла 1, а подъем Y_p рейки – от величины Y прокачивания коромысла 3. Узел регулятора длины стежка и обратного хода рейки всегда кинематически связан с узлом продвижения.

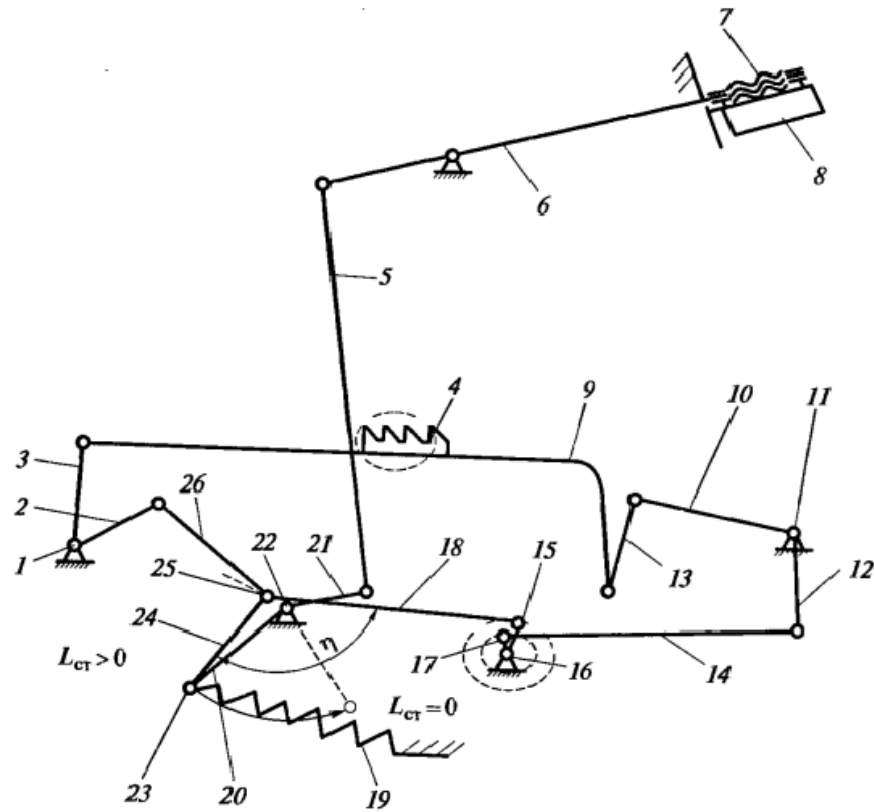


Рис. 9.6. Плоская кинематическая схема рычажного механизма перемещения рейки.

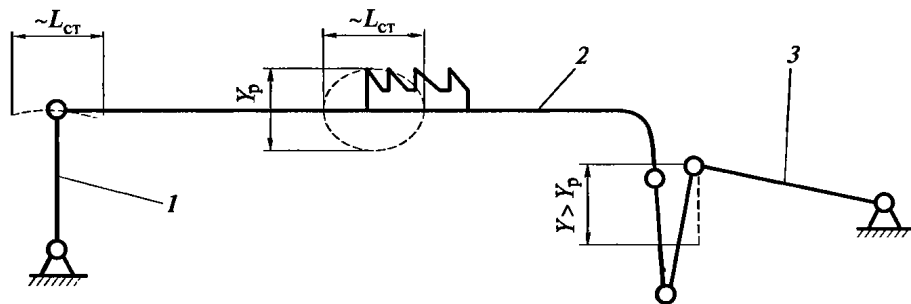


Рис. 9.7. Ведомые звенья механизма перемещения зубчатой рейки: 1 – рычаг продвижения; 2 - шатун с рейкой; 3 – рычаг подъема

Описание программы

1. Запуск приложения.

Для запуска следует запустить файл тмм2.exe. Откроется главное окно приложения, содержащее три кнопки.

2. Окно построения механизма.

Нажмите "Запуск". Откроется окно построения механизма. Данное окно содержит главное меню приложения, кнопки построения механизма и область построения механизма. Здесь будет производиться построение механизма и наглядная демонстрация его работы.

3. Главное меню приложения.

Содержит четыре основных пункта: Файл, Правка, Функции и Сервис (в данной версии не активен).

3.1. Нажмите "Файл". Откроется подменю, содержащее следующие пункты:

3.1.1. Создать. Создается новый механизм. Если до этого существовал не сохраненный механизм в окне построения, то его предлагается сохранить.

3.1.2. Открыть. Открытие существующего файла с механизмом в формате *.tmm.

3.1.3. Сохранить. Сохранение текущего механизма в формате *.tmm.

3.1.4. Печать. Вывод механизма на принтер.

3.1.5. Выход. Закрытие окна построения механизма.

3.2. Нажмите "Правка". Откроется подменю, содержащее следующие пункты:

3.2.1. Отмена. Отмена последнего действия при построении механизма.

3.2.2. Удалить звено. Удалить последнее созданное звено.

3.2.3. Удалить точку. Удалить последнюю созданную точку.

3.2.4. Установить точку. Установка точки в аналитическом режиме.

3.3. При нажатии "Функции" откроется подменю, содержащее следующие пункты:

3.3.1. Кинематика. Исследование механизма на положения, скорости и ускорения.

3.3.2. Траектории. Режим показа траектории какой-либо точки.

С левой стороны окна находятся кнопки построения механизма, а под ними координаты текущего положения курсора мыши в области построения.

Пример построения кулисного механизма

Кулисные механизмы являются достаточно сложными для построения по сравнению с другими рычажными механизмами. Существуют несколько видов кулисных механизмов: с качающейся кулисой, с вращающейся кулисой, с кулисой, движущейся поступательно и т.д.

Построим механизм с качающейся кулисой. Для этого запустим файл `tmm2.exe` и приступим к работе:

1. Установим опору O_1 в любой точке рабочей области программы. В последствии к этой точке будет присоединено ведущее звено.

2. Установим вторую опору O_2 ниже первой на некотором расстоянии.

3. Поставим шарнир B левее и выше верхней опоры.

4. Соединим точки O_2 и B (прямую ведём от O_2 к B).

5. Установим на качающейся кулисе O_2B кулисный камень A («ползун на звене»). Следует учесть, что расстояние O_1O_2 должно быть больше O_1A – необходимое условие механизма с качающейся кулисой.

6. Соединим точки O_1 и A .

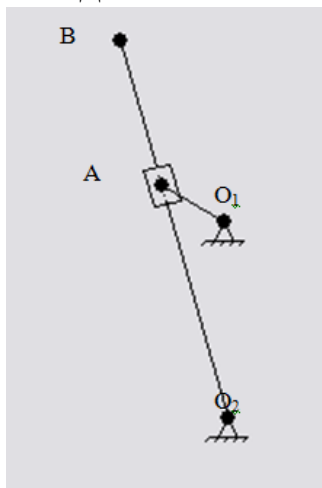


Рис.9.8. Модель механизма с качающейся кулисой

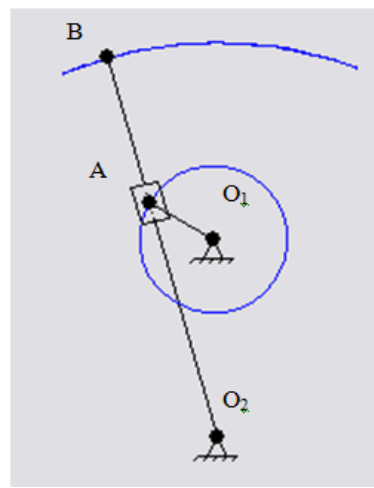


Рис.9.9. Траектории точек кулисного механизма

Теперь мы можем пустить в ход полученный механизм и наблюдать его работу в любых скоростных режимах, перемещая бегунок на панели «Скорость». Выбрав «Траектория» в меню «Кинематика», можно, щёлкнув на нужной точке, получить её траекторию

(рис.9.9). Если траектория точки больше нас не интересует, можно её удалить, повторно выбрав «Траектория» и щёлкнув на выбранной точке.

В том же меню выберем «Кинематика точек». В новом окне мы можем получить графики изменения положения, скорости и ускорения любой точки механизма, а также распечатать эти графики.

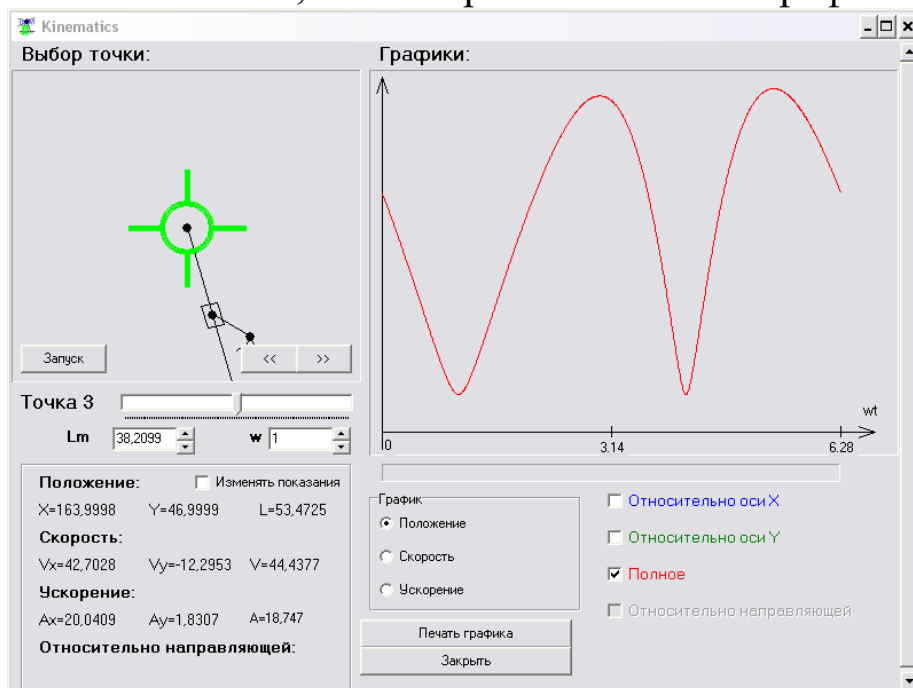


Рис. 9.10. Кинематика точек механизма.

В левом верхнем углу зелёная визирная метка показывает выбранную точку, для которой справа построен график положения (полная зависимость). Можно запустить механизм нажатием кнопки «Запуск», и программа бегущей вертикальной линией покажет на графике изменение положения точки во времени.



Рис. 9.11. Панель изменения длины и угловой скорости ведущего звена.

На рис.9.11 изображена панель, с помощью которой можно изменять характеристики ведущего звена.

Аналогично проводится построение графика ускорений.

Таким образом, с помощью программы «ТММ 2.0» можно достаточно просто и быстро смоделировать рычажный механизм любо-

го типа и подробно исследовать его кинематические характеристики, а также вывести траекторию любой точки механизма. Программа имеет очень удобный интерфейс, позволяющий быстро сориентироваться и приступить к работе.

Рекомендации

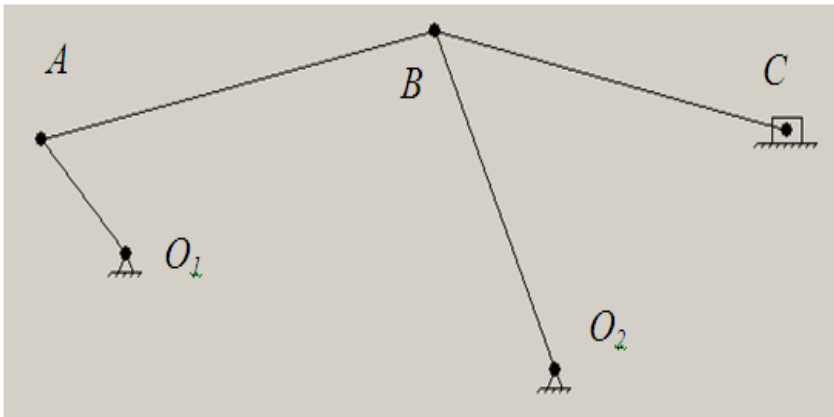
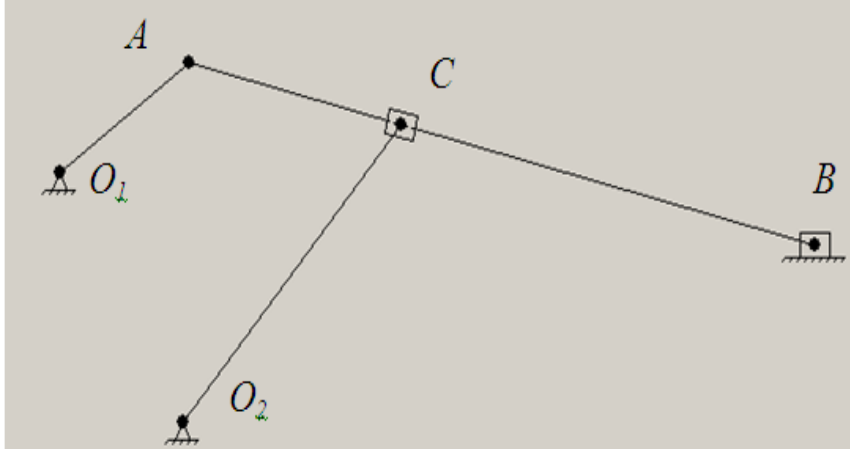
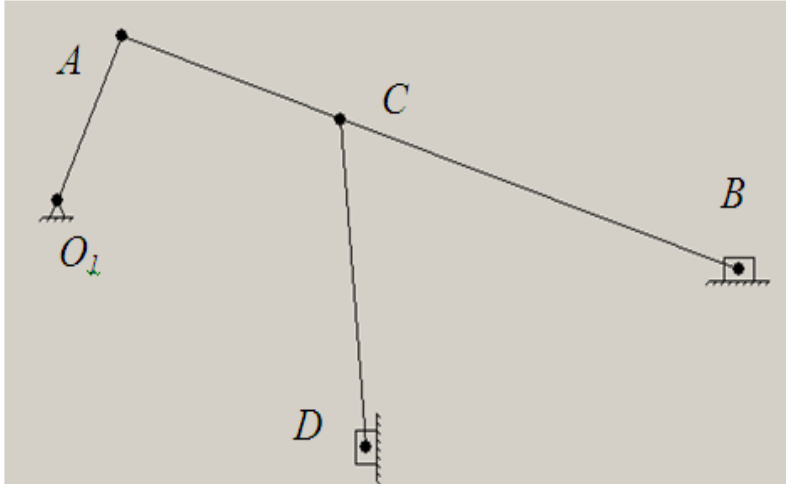
В меню «помощь» программы ТММ 2.0 демонстрируется порядок построения некоторых наиболее типичных схем рычажных механизмов. Данный раздел можно использовать при построении модели заданного механизма.

Задание

Построить имитационную модель рычажного механизма в соответствии со схемой (на выбор) из табл. 9.1. (Примечание. В качестве схемы можно использовать задание на п.з. № 8 или задание на курсовую (контрольную) работу).

Таблица 9.1- Варианты схем механизмов

Вариант	Схема
1	<p>The diagram shows a lever mechanism with two pivot points, O_1 and O_2. A horizontal lever is pivoted at O_1 and O_2. Point C is located on the lever between O_2 and O_1. Point A is located on the lever between O_1 and B. Point D is connected to C by a vertical link and has a sliding contact with a horizontal guide.</p>

Вариант	Схема
2	 <p>A schematic diagram of a mechanism. It consists of a frame with two revolute joints at points O_1 and O_2. A link is connected to O_1 at point A and to O_2 at point B. A second link is connected to B and to a slider joint at point C. A third link connects A and C. The slider joint at C moves horizontally along a guide.</p>
3	 <p>A schematic diagram of a mechanism. It consists of a frame with two revolute joints at points O_1 and B. A link is connected to O_1 at point A and to B at point C. A second link is connected to A and to a slider joint at point C. A third link connects C and B. The slider joint at C moves vertically along a guide.</p>
4	 <p>A schematic diagram of a mechanism. It consists of a frame with two revolute joints at points O_1 and D. A link is connected to O_1 at point A and to D at point C. A second link is connected to A and to a slider joint at point B. A third link connects C and B. The slider joint at B moves horizontally along a guide.</p>

Порядок выполнения работы

1. В соответствии с заданием к работе определить тип рычажно-го механизма.
2. Построить механизм в программе «ТММ 2.0».

3. Изобразить траекторию точки выходного звена с помощью компоненты «Траектория».

4. Исследовать кинематические характеристики механизма. Получить график изменения положения, скорости и ускорения точки.

5. Результаты выполнения работы сохранить в виде файла с расширением в формате *.tmn с необходимыми графиками кинематических характеристик. Сохраненный файл предоставить преподавателю на проверку.

Контрольные вопросы

1. Какие типовые рычажные механизмы применяются в швейном оборудовании?
2. Каков принцип и порядок построения рычажных механизмов?
3. Как провести анализ кинематических характеристик механизмов с помощью построенной модели?
4. Как осуществить оптимизацию параметров рычажных механизмов с помощью исследованной программы и моделей?

10 Кинематический анализ кулачковых механизмов

Цель работы: изучить структуру и кинематические параметры кулачковых механизмов.

Общие теоретические положения

Кулачковые механизмы предназначены для преобразования движения (как правило, вращательного) входного звена – кулачка в согласованное движение по строго заданному закону выходного звена – толкателя. Закон движения толкателя определяется профилем кулачка и является основной характеристикой кулачкового механизма, от которой зависят его функциональные свойства.

Схема механизма представлена на рис. 10.1, 10.2.

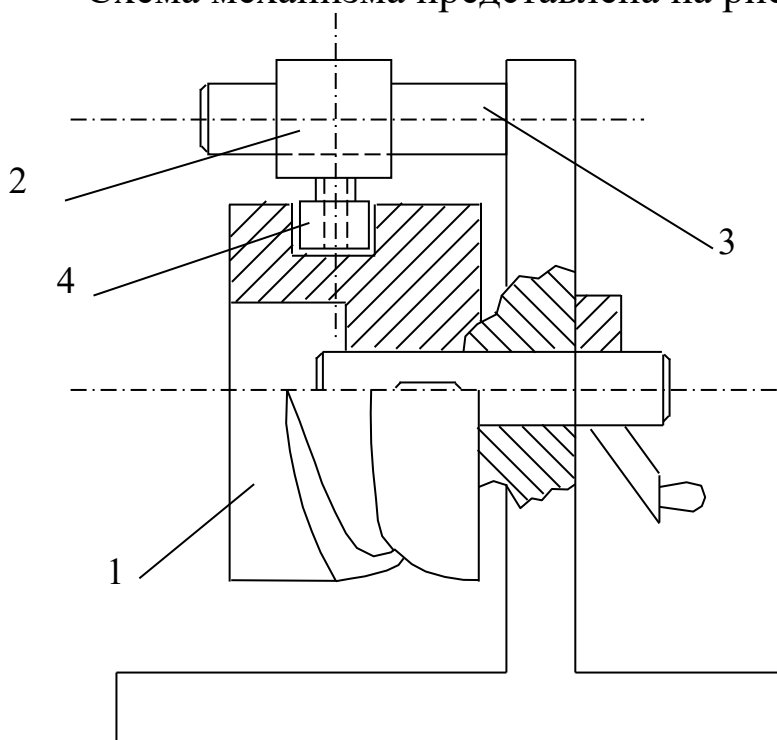


Рис. 10.1. Схема барабанного кулачкового механизма:
1 – кулачок; 2 – толкатель; 3 – стойка; 4 – ролик

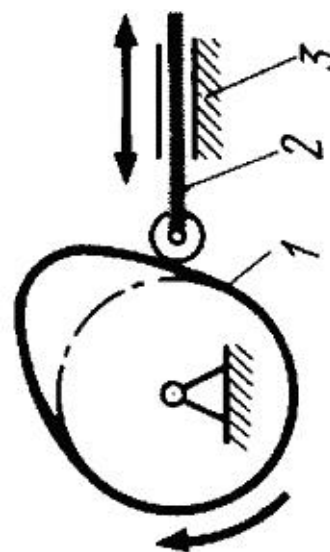


Рис 10.2. Схема дискового кулачкового механизма:
1 - кулачок; 2 - толкатель; 3 - стойка

Контакт кулачка с толкателем может обеспечиваться *геометрическим замыканием* за счёт пазов, охватывающих роликов (см. рис.

10.1) или *силовым замыканием* кинематической пары путём воздействия силы: тяжести, упругости пружин, давления воздуха или жидкости (см. рис. 10.2).

Рабочая поверхность толкателей, воспринимающая нагрузку от кулачка, подвержена износу. Чтобы уменьшить износ, распределить его равномернее по контактной поверхности толкателя и увеличить надёжность и долговечность механизма, используют башмаки различной конструкции: роликовые, тарельчатые. Выполнение башмаков в виде роликов позволяет частично исключить трение скольжения, заменив его трением качения, уменьшить износ элементов высшей кинематической пары и повысить надёжность механизма.

Критерием силовой работоспособности является угол давления α , определяющий положение нормали к профилю кулачка в высшей кинематической паре относительно вектора скорости контактной точки ведомого звена. Чем больше угол давления, тем больше реакции в кинематических парах.

Габаритные размеры механизма, обеспечивающие эффективную работу кулачкового механизма, зависят от заданных условий и ограничений, таких как закон движения толкателя и допустимый угол давления, требований к реверсивности кулачка.

Содержание работы

1. Начертить схему механизма, обозначить звенья.
2. Повернуть кулачок 1 так, чтобы толкатель 2 занял крайнее положение, соответствующее углу поворота кулачка θ .
3. Поворачивая последовательно кулачок на углы, кратные 10 градусам, замерить величины перемещения S_2 мм толкателя по шкале.
4. По результатам измерений построить график зависимости перемещений 2 толкателя от угла φ кулачка.
5. Отметить на диаграмме зависимости $S_z(\varphi)$ фазовые углы: удаления, дальнего стояния, приближения и ближнего стояния.
6. Определить, при каких углах поворота кулачка скорость толкателя имеет максимальное и минимальное значение.
7. Определить степень подвижности механизма по формуле:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4$$

8. Сформулировать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Как называются звенья механизма?
2. Как называются фазы работы механизма?
3. Что называется углом давления?
4. Каково назначение ролика в кулачковых механизмах?
5. Что такое замыкание?
6. От чего зависят минимальные размеры кулачка?

11 Изучение работы фрикционных механизмов

Цель работы: изучение конструкций и кинематических характеристик фрикционных передач.

Общие теоретические положения

Фрикционной передачей называют механизм, в котором движение одного жесткого звена преобразуется в движение другого жесткого звена за счет сил трения.

Во фрикционных передачах вращательное движение ведущего звена преобразуется или во вращательное или в поступательное движение ведомого звена. Передачи могут иметь как постоянное передаточное отношение (рис.11.1), так и переменное (рис.11.2 – 11.4). В последнем случае передача называется вариатором.

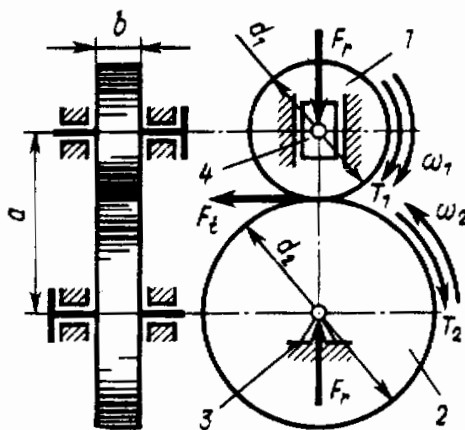


Рис.11.1. Схема фрикционного механизма: 1 - ведущий каток; 2 – ведомый каток; 3 – неподвижная опора; 4 – подвижная опора

Достоинства передач: простота конструкции, плавность и бесшумность работы, возможность бесступенчатого регулирования угловых скоростей.

Недостатки: большое давление на валы и опоры, необходимость регулировки силы прижатия катков, сравнительно высокий износ.

Фрикционные механизмы характеризуется передаточным отношением. С учетом коэффициента проскальзывания ε можно записать для передачи

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{d_2}{d_1(1-\varepsilon)}; \quad (11.1)$$

для вариатора (рис. 11.2)

$$u_{\max} = \frac{\omega_1}{\omega_{2\min}} = -\frac{R_{\max}}{R_1}; \quad u_{\min} = \frac{\omega_1}{\omega_{2\max}} = -\frac{R_{\min}}{R_1}; \quad (11.2)$$

где d_1 и d_2 - соответственно диаметры ведущего и ведомого катков; R_{\max} , R_{\min} и R_1 - соответственно радиусы диска и ведущего колеса.

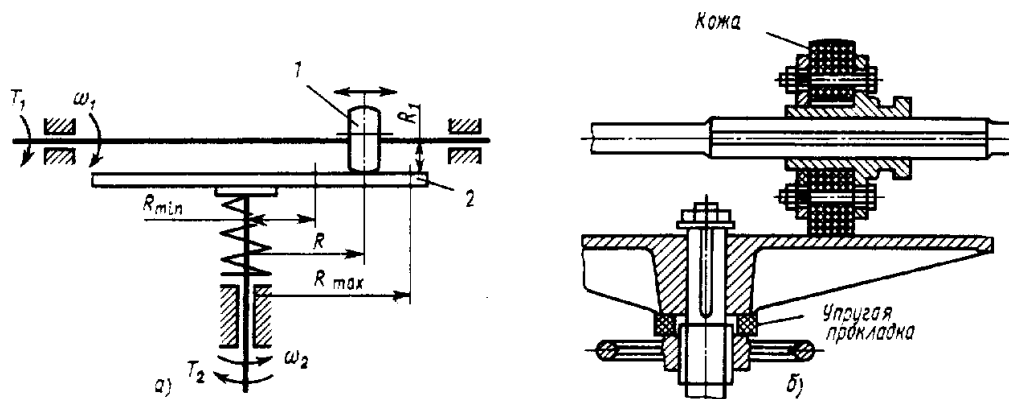


Рис.11.2. Схема фрикционного вариатора:
1 – ведущий каток; 2- ведомый диск

В швейном оборудовании нашли применение вариаторы различных типов.

Рассмотрим некоторые конструкции вариаторов.

Лобовые вариаторы (см. рис.11.2). Ведущий каток 1 радиуса R_1 , устанавливается на валу на скользящей шпонке и может перемещаться вдоль оси. Ведомый каток 2 радиуса R_2 закреплен на валу неподвижно. За счет нажимного устройства создается сила трения, необходимая для работы вариатора. Бесступенчатое изменение угловой скорости в этом вариаторе достигается перемещением вдоль вала ведущего катка 1; при этом $R_1 = \text{const}$; $R_2 \neq \text{const}$. Отсюда передаточное число

$$u \approx R_2/R_1 \neq \text{const},$$

здесь не учитывается проскальзывание катков, поэтому равенство приближенное.

Лобовой вариатор позволяет изменять направление и частоту вращения ведомого вала, останавливать его на ходу без выключения привода.

Торовые вариаторы (см. рис. 11.3). На концы валов насажены две торовые чашки 1 и 2. Вращение от ведущей чашки к ведомой пе-

редается промежуточными дисками 3, свободно вращающимися на осях 4. Угловая скорость ведомой чашки изменяется при одновременном повороте осей 4 вокруг шарнира 5. При этом изменяются радиусы R_1 и R_2 чашек 1 и 2, т. е. $R_1 \neq const$; $R_2 \neq const$. Отсюда $u \approx R_2/R_1 \neq const$

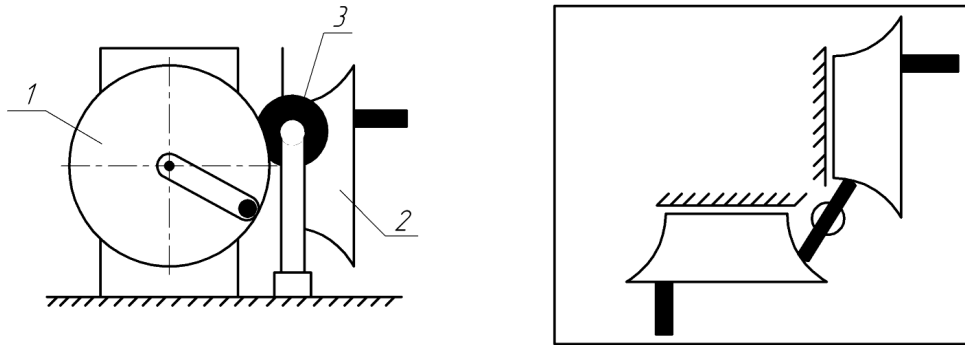


Рис. 11.3. Торový вариатор: 1 — ведущая торовая чашка; 2 — ведомая торовая чашка; 3 — ролик; 4 — оси дисков; 5 — шарниры осей

Вариатор с коническими катками (см. рис. 11.4). На ведущем и ведомом валу установлены катки 1 и 2 с рабочими поверхностями конической формы. Вращение от ведущего катка 7 к ведомому 2 передается промежуточным диском 3 цилиндрической формы, свободно вращающимся на оси 4. Пружина 5 обеспечивает необходимую силу нажатия для нормальной работы вариатора. При перемещении промежуточного диска 3 вдоль оси 4 радиусы R_1 и R_2 ведущего 1 и ведомого 2 катков изменяются. В данной конструкции вариатора $R_1 \neq const$; $R_2 \neq const$. Отсюда

$$u \approx R_2/R_1 \neq const$$

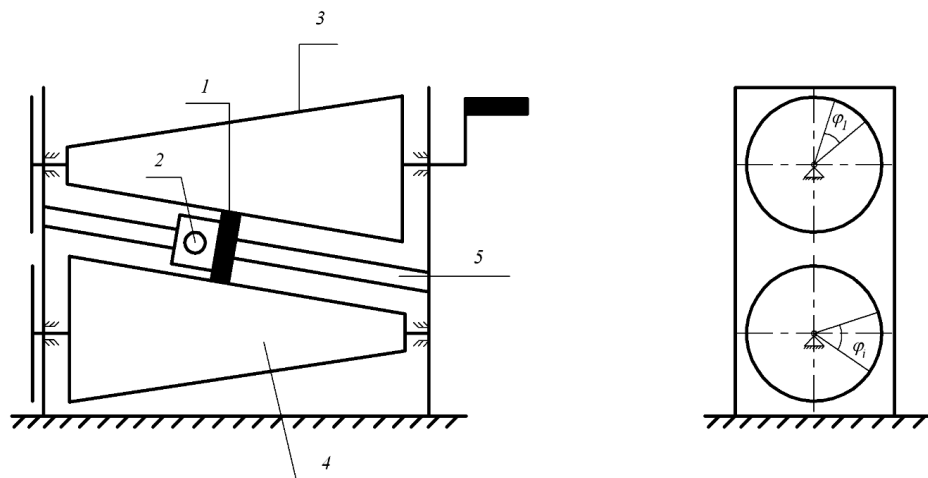


Рис. 11.4. Конусный вариатор: 1 — ролик, 2 — фиксатор, 3 — ведущий каток; 4 — ведомый каток; 5 — направляющая (стойка).

Объект выполнения работы: макет конусного вариатора (рис. 11.4).

Содержание работы

1. Ознакомиться с конструкцией вариатора и нарисовать его кинематическую схему.
2. Замерить основные геометрические параметры .
3. С помощью штангенциркуля измерить диаметры d_1 ведущего и d_2 ведомого катков в точке их касания с роликом.
4. Составить формулу для вычисления расчетного передаточного отношения от входного к выходному звену и определить его значение:

$$u_{\text{расч}} = \frac{d_2}{d_1} \quad (11.3)$$

5. Определить фактическое передаточное отношение через углы поворотов ведущего и ведомого вала. Для этого необходимо повернуть ведущий вал на угол φ_1 и измерить угол поворота φ_2 ведомого, после чего вычислить передаточное отношение по формуле

$$U_{\text{факт}} = \varphi_1 / \varphi_2 \quad (11.4.)$$

6. Определить коэффициент проскальзывания ε

$$\varepsilon = 1 - \frac{u_{\text{расч}}}{u_{\text{факт}}} \quad (11.5)$$

7. Переместить ролик в некоторое следующее положение и повторить пункты 3-6 для этого положения.
8. Определить расчетное и фактическое передаточное отношение вариатора, а также коэффициент проскальзывания для пяти фиксированных положений ролика, перемещая его от одного крайнего положения до другого.
9. Полученные результаты занести в таблицу (см. табл. 11.1).
10. Построить графики зависимости расчетного передаточного отношения фрикционного вариатора и коэффициента проскальзывания от положения ролика.
11. Сформулировать выводы по работе.

Таблица 11.1- Результаты измерений

№	Перемещение ролика S , мм	Диаметры катков		Передаточное отношение $U_{расч}$	Угол поворота катков, °		Передаточное отношение $U_{факт}$	Коэффициент проскальзывания ε
		d_1 , мм	d_2 , мм		φ_1	φ_2		
1								
2								
3								
4								
5								

Контрольные вопросы

1. Какая передача называется фрикционной? Что такое вариатор?
2. Перечислите преимущества и недостатки фрикционных механизмов.
3. Как определяется передаточное отношение фрикционной передачи?
4. Как меняется передаточное отношение механизма при изменении положения ролика?
5. Из каких звеньев состоит механизм?
6. Что такое коэффициент проскальзывания и как он определяется?

12 Изучение работы ременных передач

Цель работы – изучение конструкций и кинематических свойств ременных передач.

Общие теоретические положения

Ременные передачи относятся к передачам с гибкими связями. Ременная передача является фрикционным механизмом и служит для передачи вращательного движения на большие расстояния.

Ременная передача (рис.12.1) состоит из двух шкивов 1 и 2, связанных ремнем 3 и натяжного устройства 4, обеспечивающего передачу движения за счет сил трения.

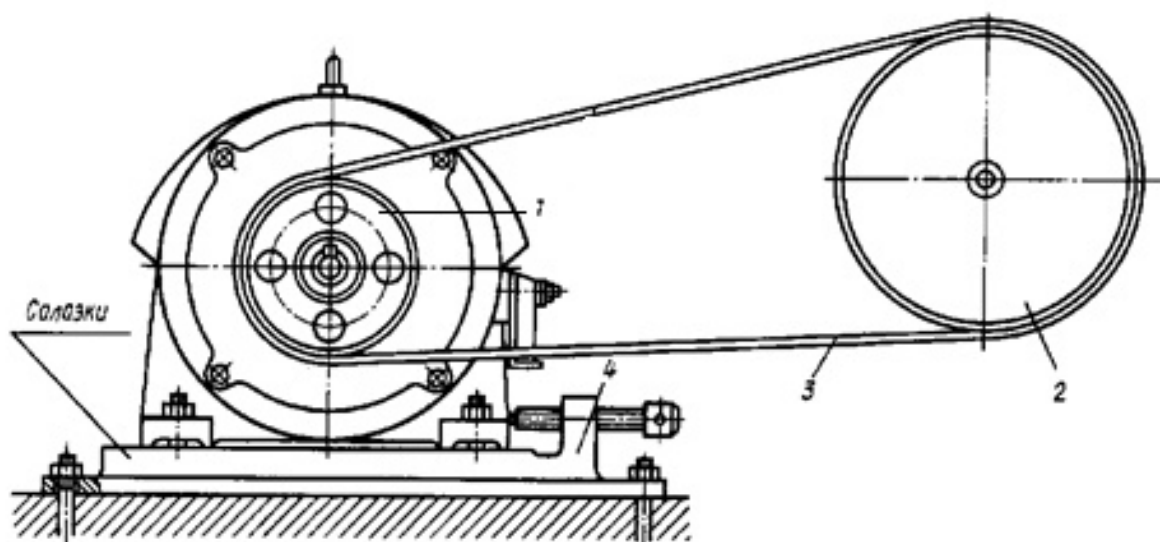


Рис.12.1. Схема ременной передачи:

1 – ведущий шкив, 2 – ведомый шкив, 3- ремень, 4 – натяжное устройство

По типу ремней передачи делят на плоско-ременные (рис.12.2, а, б), клиноремные (рис.12.2, в) круглоремные (рис. 12.2, г, д).

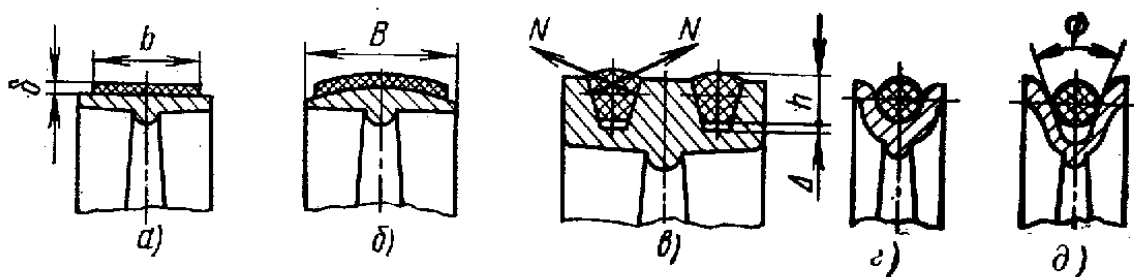


Рис.12.2. Типы ремней

Ременная передача является одним из старейших типов механических передач, сохранивших свое значение до последнего времени. Основные преимущества ременной передачи: возможность передачи движения на значительное расстояние (до 15 м и более); плавность и бесшумность работы, обусловленные эластичностью ремня и позволяющие работать при высоких скоростях: предохранение механизмов от резких колебаний нагрузки вследствие упругости ремня; предохранение механизмов от перегрузки за счет возможного проскальзывания ремня; простота конструкции и эксплуатации (передача не требует смазки).

Основными недостатками ременной передачи являются: повышенные габариты (для одинаковых условий диаметры шкивов примерно в пять раз больше диаметров зубчатых колес); некоторое непостоянство передаточного отношения, вызванное зависимостью скольжения ремня от нагрузки; повышенная нагрузка на валы и их опоры, связанная с большим предварительным натяжением ремня (увеличение нагрузки на валы в 2...3 раза по сравнению с зубчатой передачей); низкая долговечность ремней (в пределах от 1000 до 5000 ч).

Ременные передачи применяют преимущественно в тех случаях, когда по условиям конструкции валы расположены на значительных расстояниях.

Основными критериями работоспособности ременных передач являются: тяговая способность, определяемая силой трения между ремнем и шкивом, долговечность ремня, которая в условиях нормальной эксплуатации ограничивается разрушением ремня от усталости.

Окружные скорости на шкивах определяются по формулам

$$v_1 = \pi d_1 n_1 / 60; \quad v_2 = \pi d_2 n_2 / 60.$$

Учитывая упругое скольжение ремня, можно записать $v_2 < v_1$ или

$$v_2 = v_1 (1 - \varepsilon),$$

где ε — коэффициент скольжения.

При этом передаточное отношение

$$u = n_1 / n_2 = v_1 d_2 / (v_2 d_1) = d_2 / [d_1 (1 - \varepsilon)].$$

Величина ε зависит от нагрузки, поэтому в ременной передаче передаточное отношение не является строго постоянным. При нор-

мальных рабочих нагрузках $\varepsilon \approx 0,0.1...0.2$. Небольшое значение ε позволяет приближенно принимать

$$u \approx d_2/d_1 \quad (12.1)$$

Ременные передачи используют как понижающие при мощностях $N \leq 50 \text{ кВт}$, линейных скоростях ремня $V \approx 5-15 \text{ м/с}$ и передаточных отношениях $u \leq 4$.

Объект выполнения работы: макет клиноременной передачи.

Содержание работы

1. Используя модель, составить кинематическую схему ременной передачи. Определить тип ремня.

2. Определить основные геометрические параметры и кинематические соотношения:

a - межосевое расстояние,

d_1, d_2 - диаметры шкивов,

u - передаточное отношение (см. 12.1)).

3. Проверить передаточное отношение, используя модель механизма. Для этого повернуть входное звено на угол φ_1 и измерить угол поворота φ_2 выходного звена, после чего вычислить передаточное отношение по формуле

$$U_{12} = \varphi_1 / \varphi_2$$

Сравнить результаты, полученные для аналитического и экспериментального способа определения передаточного отношения.

4. Сформулировать выводы по работе

Контрольные вопросы

1. Какие передачи называются ременными, для чего они предназначены?

2. Назовите основные типы ременных передач

3. Достоинства и недостатки ременных передач.

4. Как определяется передаточное отношение механизма?

5. При известных размерах шкивов и скорости вращения ведущего шкива найти скорость ведомого шкива (или наоборот).

13 Изучение работы цепных передач

Цель работы – изучение конструкций и кинематических свойств цепных передач.

Общие теоретические положения

Цепная передача принадлежит числу передач с гибкими связями (рис.13.3). Гибким звеном является цепь, входящая в зацепление с зубьями звездочек. Следовательно, цепную передачу можно классифицировать как передачу зацеплением с гибкими связями. Зацепление позволяет обойтись без предварительного натяжения цепи.

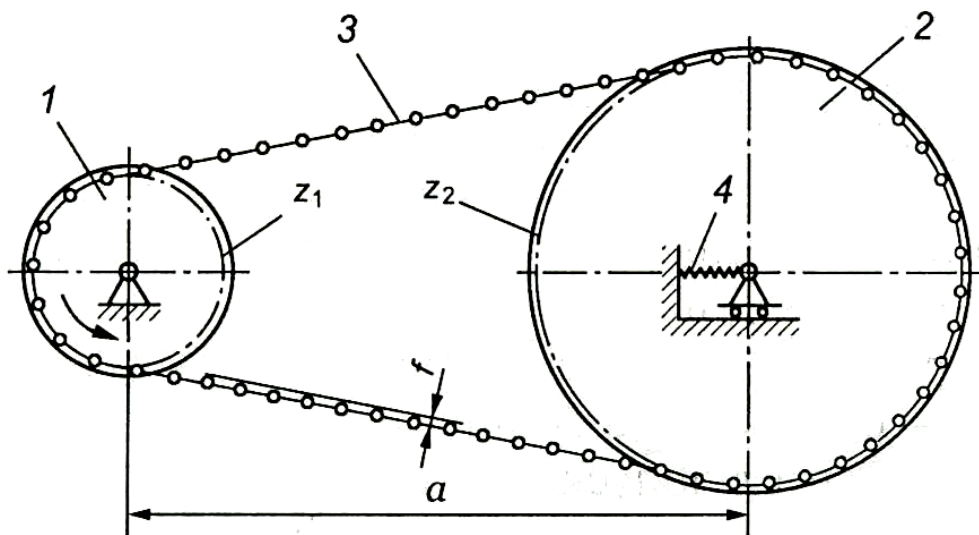


Рис. 13.3 Цепная передача:

1 – ведущая звёздочка; 2 – ведомая звёздочка; 3 – цепь;
4 – натяжное устройство

Цепные передачи разделяют по следующим основным признакам:

1. По типу цепей: с роликовыми (рис.13.4,а), с втулочными (рис. 13.4,б), с зубчатыми(рис. 13.4,в);
2. По числу рядов цепи делят на однорядные (рис.13.4,а) и многорядные (рис.13.4,б);
3. По числу ведомых звездочек: двухзвенные (рис.13.4) и многозвенные (рис.13.5).

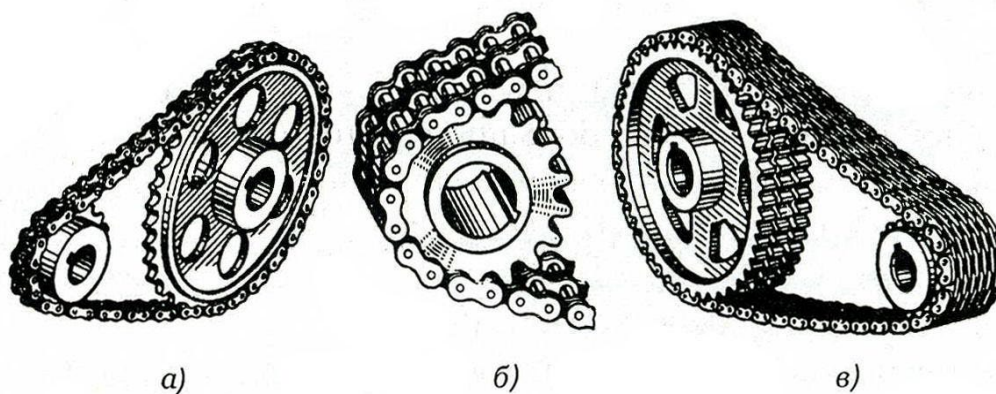


Рис. 13.4. Типы цепных передач:
a – с роликовой цепью; *б* – с втулочной цепью;
в – с зубчатой цепью

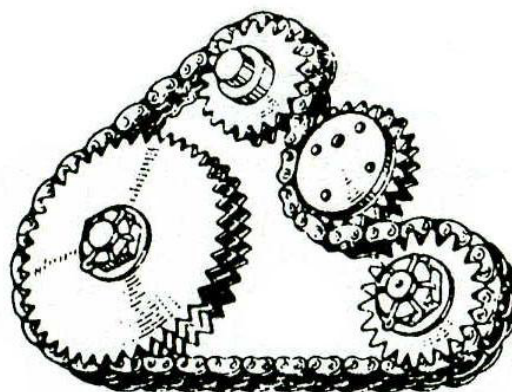


Рис. 13.5. Многозвенная цепная передача

На рис.13.6 - 13.8 показаны конструкции приводных цепей.

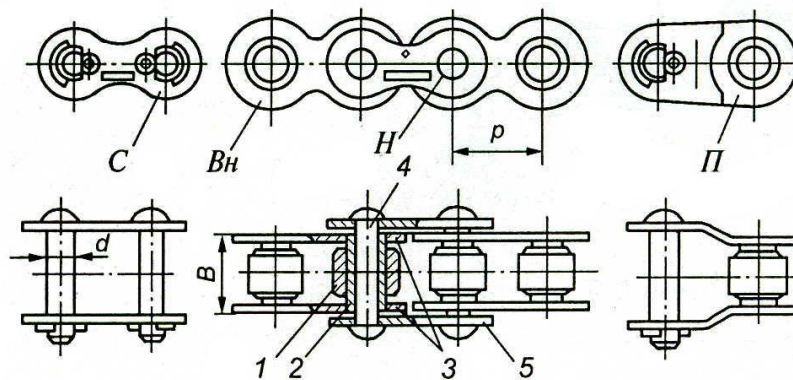


Рис. 13.6. Роликовая цепь:
 1 – ролик; 2 – втулка; 3 – пластины внутреннего звена; 4 – валик; 5 – пластины наружного звена

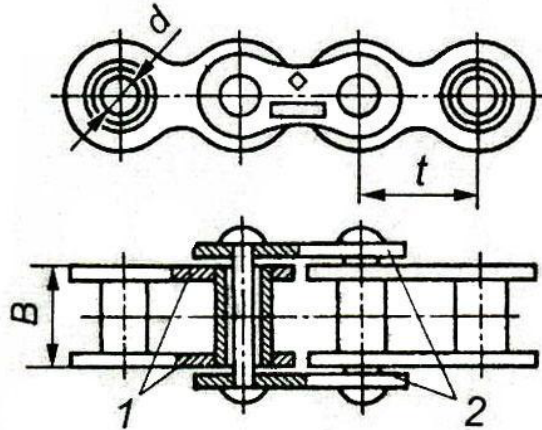


Рис. 13.7. Втулочная цепь:

1 - пластины внутреннего звена; 2 – пластины наружного звена

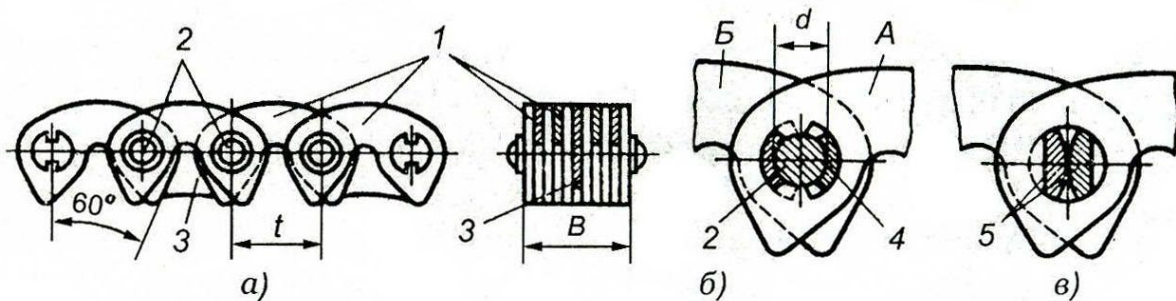


Рис. 13.8. Зубчатая цепь:

1 – пластины; 2 – валики; 3 – направляющие пластины; 4 – шарнир; 5 - призмы

Основные геометрические соотношения цепных передач следующие.

Передаточное отношение

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}, \quad (13.1)$$

где ω_1, ω_2 – угловая скорость соответственно ведущей и ведомой звёздочки; z_1, z_2 – число зубьев соответственно ведущей и ведомой звёздочки

Передаточное отношение цепных передач обычно находится в диапазоне $u = 2 - 6$

Межосевое расстояние обычно находится в диапазоне:

$$a \geq (30 - 50)t,$$

где t - шаг цепи.

Допускаемая величина стрелы провисания

$$f = (0,002 - 0,004)a.$$

Делительный диаметр звездочки

$$d = \frac{t}{\sin(180^\circ / z)}.$$

Достоинства цепной передачи: высокий КПД (0.95 – 0.97), отсутствие проскальзывания цепи, меньшие, чем в ременных передачах нагрузки на валы, возможность передачи крутящего момента на сравнительно большие расстояния.

Недостатки: шум, необходимость применения натяжных устройств.

Содержание работы

1. Используя модель, составить кинематическую схему цепной передачи. Определить тип цепи.

2. Определить (измерить) основные геометрические параметры и кинематические соотношения:

a - межосевое расстояние,

z_1, z_2 - числа зубьев звездочек,

d_1, d_2 - делительные диаметры звездочек,

u - передаточное отношение (см. 13.1)),

t - шаг цепи.

3. Проверить передаточное отношение, используя модель механизма. Для этого повернуть входное звено на угол φ_1 и измерить угол поворота φ_2 выходного звена, после чего вычислить передаточное отношение по формуле

$$U_{12} = \varphi_1 / \varphi_2$$

Сравнить результаты, полученные для аналитического и экспериментального способа определения передаточного отношения.

4. Сформулировать выводы по работе

Контрольные вопросы

1. Какие передачи называются цепными?
2. Достоинства и недостатки цепных передач.
3. Особенности применения той или иной цепи.
4. Как определяется передаточное отношение цепной передачи?
5. При известных размерах звездочек и скорости вращения ведущей звездочки найти скорость ведомой звездочки (или наоборот).

14 Изучение работы зубчатых передач

Цель работы: исследование кинематики зубчатого механизма, определение передаточного отношения.

Общие теоретические положения

Кинематический анализ зубчатых механизмов заключается в определении угловых скоростей выходных и промежуточных звеньев по известным угловым скоростям входных звеньев.

Зубчатые механизмы могут быть плоскими и пространственными. У плоских механизмов звенья вращаются относительно параллельных осей. Пространственные механизмы применяют для передачи вращательного движения между пересекающимися или скрещивающимися осями.

Кроме того, зубчатые механизмы подразделяют на механизмы с неподвижными и подвижными осями вращения (планетарные механизмы).

Для выполнения кинематического анализа необходимо определить передаточное отношение зубчатой передачи. Передаточным отношением U_{12} называется отношение угловой скорости ω_1 входного зубчатого колеса 1 к угловой скорости ω_2 зубчатого колеса 2:

$$U_{12} = \omega_1 / \omega_2 \quad (14.1)$$

У плоских механизмов передаточное отношение положительное, если зубчатые колеса вращаются в одном направлении, и отрицательное, если колеса вращаются в разные стороны.

Угловые скорости колес, находятся в зацеплении, обратно пропорциональны радиусам делительных окружностей r и числам зубьев.

Таким образом, передаточное отношение для пары зубчатых колес внешнего зацепления (рис. 14.1, а)

$$U_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = r_1 / r_2 = -z_2 / z_1 \quad (14.2)$$

внутреннего зацепления (рис. 5.1 б.)

$$U_{12} = \omega_1 / \omega_2 = n_1 / n_2 = r_1 / r_2 = z_2 / z_1 \quad (14.3)$$

На кинематической схеме направление вращения зубчатых колес можно показать стрелками.

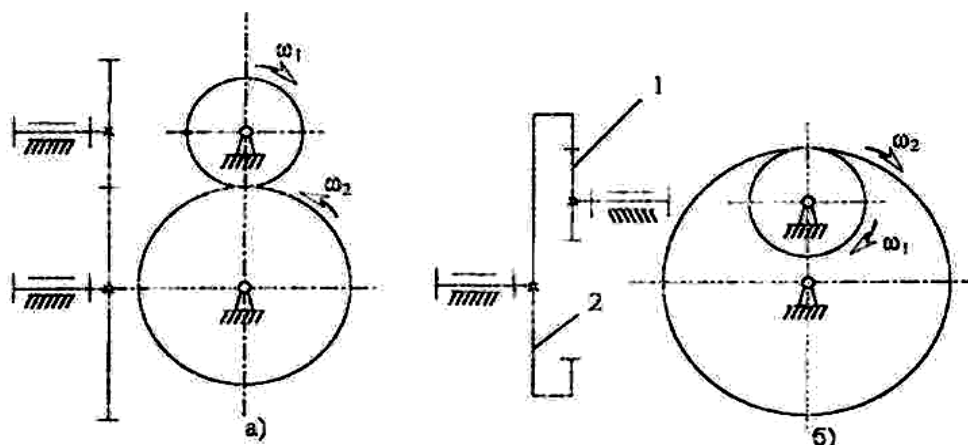


Рис. 14.1. Схемы простых зубчатых механизмов с параллельными неподвижными осями.

Многозвенные зубчатые механизмы с неподвижными осями подразделяют на рядовые и ступенчатые (рис. 14.2 а, б).

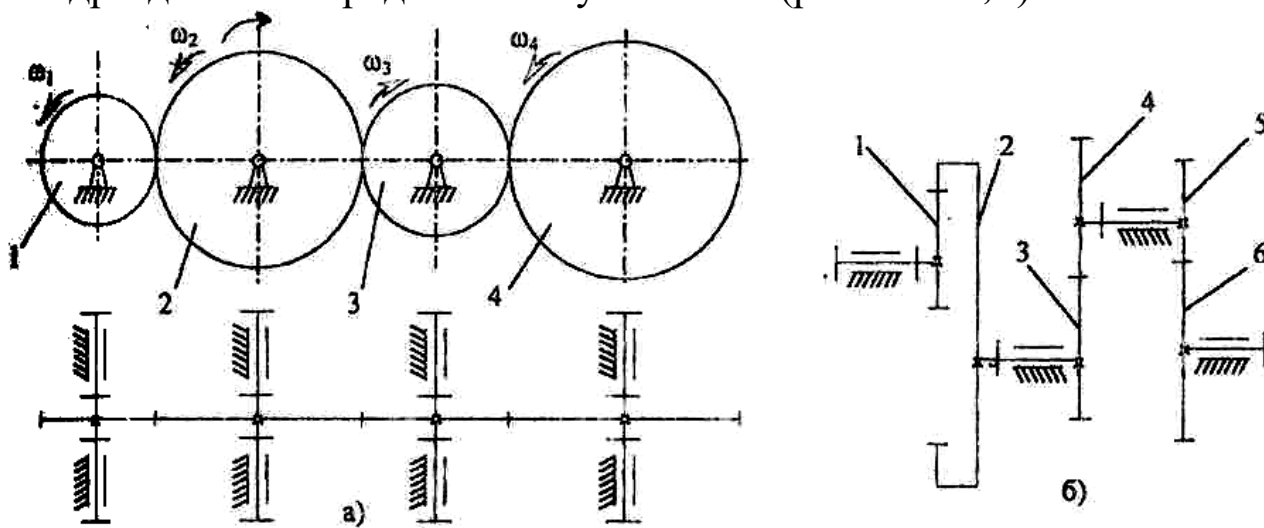


Рис. 5.2. Схемы многозвенных зубчатых механизмов: а – рядовая (с паразитными колесами), б - ступенчатая

Общее передаточное отношение многозвенного механизма равно произведению передаточных отношений отдельных механизмов (ступеней):

$$U_{i1} = U_I \cdot U_{II} \cdot U_{III} \cdot \dots \cdot U_N, \quad (14.4)$$

где U_I – передаточное отношение I ступени (пары зубчатых колес, находящихся в зацеплении), U_{II} – передаточное отношение II ступени и т.д.

В общем случае при i ведущих колесах и j ведомых колесах в механизме и k внешних зацеплениях формула (5.4) имеет вид:

$$U_{1n} = (-1)^k \frac{\prod_{j=1}^n z_j^{\text{ведом}}}{\prod_{i=1}^n z_i^{\text{ведущ}}} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (14.5)$$

где Π - знак произведения,

ω_1 – угловая скорость входного звена; ω_n – угловая скорость выходного звена.

В формуле (14.5) в числителе стоит произведение числа зубьев *ведомых* колес, в знаменателе - произведение числа зубьев *ведущих* колес.

Передаточное отношение механизма изображенного на рис. 14.2, а:

$$U_{14} = (-z_2/z_1) \cdot (-z_3/z_2) \cdot (-z_4/z_3) = -z_4/z_1$$

Общее передаточное отношение рядового механизма не зависит от числа зубьев промежуточных колес. Эти колеса применяют для измерения направления вращения выходного звена при неизменном направлении вращения входного либо для обеспечения передачи движения при большом расстоянии между осями вращения входного и выходного колес.

Для ступенчатого механизма (рис. 14.2, б) передаточное отношение определяется по формуле

$$U_{16} = (-1)^2 \frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5} = \frac{\omega_1}{\omega_6}$$

Знак передаточного отношения определяют также по правилу стрелок (по направлению вращения колес).

Подбирая числа зубьев в ступенчатом механизме, можно получить большие передаточные отношения, чем у рядовой передачи.

Объекты выполнения работы: модели зубчатых механизмов с неподвижными осями.

Содержание работы и отчета

1. Записать название и цель работы, а также краткие теоретические сведения
2. Используя модель механизма (в соответствии с вариантом), составить кинематическую схему зубчатого механизма. В соответствии с

вариантом определить (*записать*) числа зубьев зубчатых колес и угловую скорость входного звена.

3. Используя (14.4, 14.5) составить формулы для вычисления передаточных отношений ступеней редуктора и общего передаточного отношения от входного к выходному звену, определить их значения.

4. Определить угловую скорость выходного вала в соответствии с исходными данными и результатами вычислений

5. Результаты вычислений представить в таблице.

Таблица 14.1- Параметры зубчатого механизма

Числа зубьев				Передаточное отношение			Угловая скорость выходного вала
Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	U_{12}	U_{34}	U_{14}	ω_4 , рад/с

6. Сформулировать выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Для чего предназначены зубчатые механизмы с неподвижными осями?
2. Чем отличаются рядовые передачи от ступенчатых?
3. Как определяется передаточное отношение механизма?
4. Какие колеса называют паразитными и на что они влияют?
5. Для заданной схемы зубчатого механизма при известных числах зубьев колес и скорости входного звена определить скорость вращения выходного звена (или наоборот).

15 Приводы. Силовые и кинематические характеристики

Цель занятия: приобретение знаний и навыков определения основных кинематических и силовых параметров механических передач

Краткие теоретические сведения

Одним из основных элементов машины является передаточный механизм, установленный между двигателем и исполнительным органом.

На рис. 15.1 дана типовая схема машины.

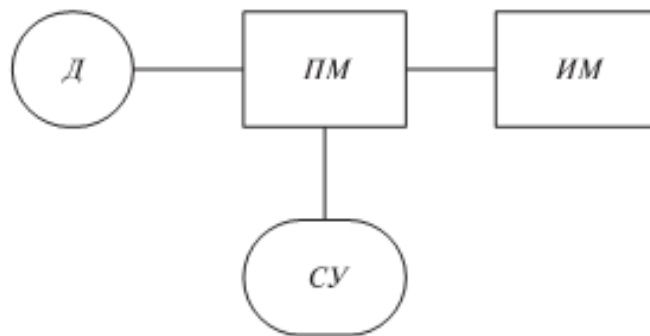


Рис. 15.1: Д – двигатель, ПМ – передаточный механизм, ИМ – исполнительный механизм, СУ – система управления приводом

Передаточный механизм должен обеспечивать с заданной степенью точности передачу движения и его преобразование, быть экономичным и безопасным в работе.

1. Передаточное отношение привода

Важнейшей характеристикой передач вращательного движения является **передаточное отношение**, которое показывает, во сколько раз угловая скорость ω (или частота вращения n) ведомого звена больше или меньше угловой скорости (частоты вращения) ведущего звена.

$$U = \frac{\omega_{\text{ведущ}}}{\omega_{\text{ведом}}} = \frac{n_{\text{ведущ}}}{n_{\text{ведом}}}, \quad (15.1)$$

где $\omega_{\text{ведущ}}$ – угловая скорость ведущего звена;

$\omega_{\text{ведом}}$ – угловая скорость ведомого звена.

Для зубчатых передач передаточное отношение можно определить, зная число зубьев каждого из колес:

$$U = \frac{z_2}{z_1} \quad (15.2)$$

Для цепных передач передаточное отношение можно определить, зная число зубьев ведущей и ведомой звездочек:

$$U = \frac{z_2}{z_1} \quad (15.3)$$

Для ременных передач передаточное отношение можно определить, зная диаметры ведущего и ведомого шкивов:

$$U = \frac{d_2}{d_1} \quad (15.4)$$

Для фрикционных передач передаточное отношение можно определить, зная диаметры ведущего и ведомого катков:

$$U = \frac{d_2}{d_1} \quad (15.5)$$

Привод может включать несколько передаточных механизмов (ступеней). При этом значение общего передаточного отношения определяется произведением передаточных отношений отдельных кинематических ступеней привода

$$u_{\text{об}} = u_{12} \cdot u_{23} \dots u_n = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (15.6)$$

Пример 1.

Определить частоту вращения вала 3, если диаметры шкивов равны соответственно (мм): $d_1 = 300$, $d_2 = 750$, числа зубьев конической шестерни и колеса: $z_2 = 50$, $z_3 = 100$, $n_1 = 2500$ об/мин (рис. 15.2).

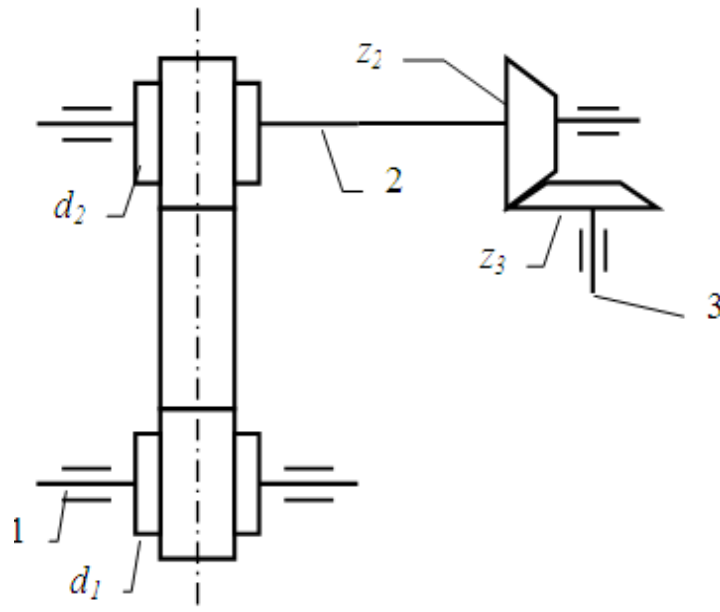


Рис. 15.2

Решение.

Данный передаточный механизм является двухступенчатым: первая ступень – ременная передача (вращение передается с шкива 1 на шкив 2), вторая ступень – коническая зубчатая передача (вращение передается с шестерни 2 на колесо 3).

Общее передаточное отношение определим по формуле (15.6):

$$u_{об} = u_{12} \cdot u_{23} = \frac{n_1}{n_3}$$

$$u_{12} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{750}{300} = 2.5$$

$$u_{23} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{100}{50} = 2$$

Тогда

$$u_{об} = u_{12} \cdot u_{23} = 2,5 \cdot 2 = 5$$

и

$$n_3 = \frac{n_1}{u_{об}} = \frac{2500}{5} = 500 \text{ об / мин}$$

2. Коэффициент полезного действия передачи, мощность

Если к ведущему валу передачи подвести мощность P_1 , то с ведомого можно будет отобрать мощность P_2 , которая несколько

меньше затраченной P_1 (следствие потерь на трение и др. сопротивления). Эти потери выражаются коэффициентом полезного действия:

$$\eta = P_2 / P_1 \quad (15.7)$$

Поскольку

$$P = T \cdot \omega \quad (15.8)$$

и

$$\omega = (\pi \cdot n) / 30 \quad (15.9)$$

где T – момент вращения;

ω – угловая скорость,

$$\text{то} \quad \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2 \omega_2}{T_1 \omega_1} = \frac{T_2 n_2}{T_1 n_1} = \frac{T_2}{T_1 u_{12}} \quad (15.10)$$

В силовой (понижающей) передаче (редуктор)

$$\omega_1 > \omega_2, \quad T_2 > T_1, \quad T_2 = T_1 \cdot u_{12} \cdot \eta$$

Пример 2.

Определить мощность и крутящий момент, передаваемые колесом, если известны числа зубьев шестерни и колеса: ($Z_1 = 18, Z_2 = 45$). $T_1 = 10 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $n_1 = 900 \text{ об/мин}$. Коэффициент полезного действия передачи принять $\eta = 0.95$

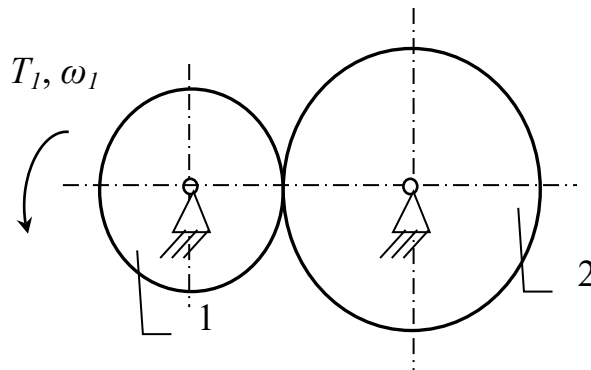


Рис. 15.3

Решение (см. рис.15.3).

Мощность на ведущем колесе определим по формуле (15.8):

$$P_1 = T_1 \cdot \omega_1,$$

где $\omega_1 = (\pi \cdot n_1) / 30 = (\pi \cdot 900) / 30 = 94,2 \text{ рад/с}$ – угловая скорость ведущего колеса (шестерни)

$$P_1 = 10 \cdot 94,2 = 942 \text{ Вт}$$

Мощность на ведомом колесе определим из (15.7):

$$P_2 = P_1 \cdot \eta = 942 \cdot 0,95 = 895 \text{ Вт} \quad (P_2 < P_1)$$

Передаточное отношение

$$U = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Для зубчатых передач передаточное отношение можно определить, зная число зубьев каждого из колес:

$$U = \frac{z_2}{z_1} = \frac{45}{18} = 2.5$$

Тогда

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{U} = \frac{94.2}{2.5} = 37.7 \quad (\text{рад/с})$$

Тогда крутящий момент на валу ведомого колеса будет равен:

$$T_2 = \frac{P_2}{\omega_2} = \frac{895}{37.7} = 23.7 \quad \text{Н}\cdot\text{м}$$

Ответ: $P_2 = 895$ Вт, $T_2 = 23.7$ Н·м

Контрольные вопросы

1. Назначение передаточного механизма
2. Основные типы механических передач
3. Как определяется передаточное отношение различных механических передач?
4. Силовые характеристики механических передач

16. Расчет типовых элементов оборудования на растяжение-сжатие

Для заданной схемы (рис.16.1) требуется:

1. Построить эпюру осевых нагрузок.
2. Определить размер *квадратного* сечения стержня исходя из условий прочности.

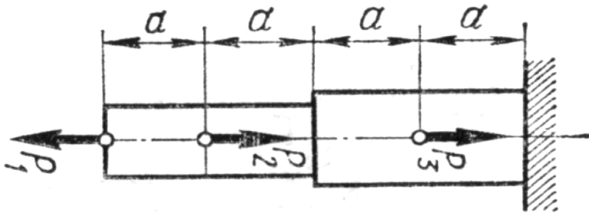


Рис. 16.1 Расчётная схема бруса

Исходные данные

Сила, кН			Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]$, МПа
P_1	P_2	P_3	
12	7	8	220

Решение.

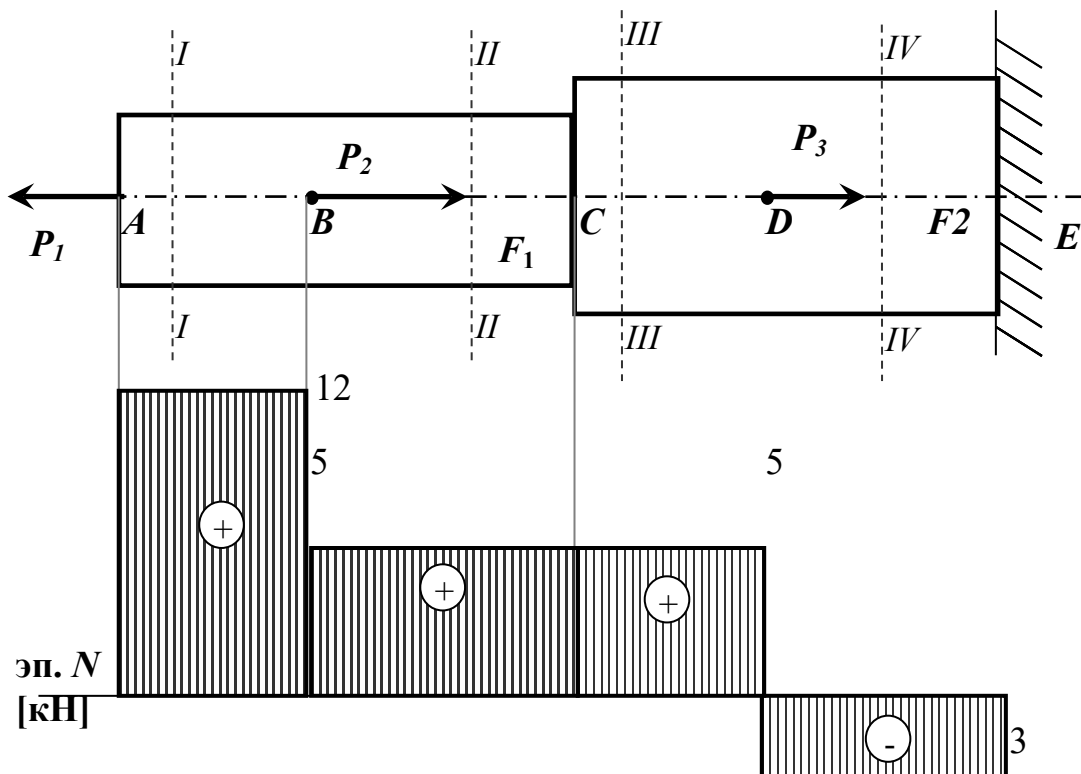


Рис. 16.2 Расчётная схема и эпюра внутренних продольных усилий бруса

Расставим характерные точки (сечения) – те, в которых приложены нагрузки или изменяется характер поперечного сечения (форма, размер).

В данном случае таких характерных точек 5: A, B, C, D, E .

Таким образом, необходимо рассмотреть 4 характерных участка бруса, начиная с левого конца его, т.е. с точки A .

Рассмотрим характерный участок AB .

Мысленно проведём поперечное сечение бруса $I-I$ между точками A и B , отбросим правую часть бруса, оставив в рассмотрении левую, действие отброшенной части заменив реакцией.

Из условия равновесия (равенство проекций сил на ось x , получим:

Из условия равновесия (равенство проекций сил на ось x , получим:

$$N = P_1 = 12 \text{ кН},$$

т.е. внутренняя продольная сила в сечении $I-I$ является растягивающей.

Несложно установить, что значение внутренней силы N неизменно на всём участке AB .

Выбирая масштаб, строим соответствующий участок эпюры продольных сил (в размерности кН), сила N на участке AB постоянна.

Далее рассмотрим участок BC .

Проведем сечение $II-II$ в произвольном месте между точками B и C . Отбросим левую часть, её действие заменим реакцией, направим реакцию в сторону от сечения, считая её растягивающей силой.

Получим баланс сил, показанный на рис. 5.

Из условия равновесия имеем:

$$N = P_1 - P_2 = 12 - 7 = 5 \text{ кН},$$

Строим соответствующий участок эпюры продольных сил, сила N на участке BC постоянна.

Аналогично рассматриваем остальные участки стержня, проводя сечения $III-III$ и $IV-IV$ соответственно и вновь отбрасывая левую часть бруса.

Участок CD :

$$N = P_1 - P_2 = 12 - 7 = 5 \text{ кН},$$

Участок DE :

$$N = P_1 - P_2 - P_3 = 12 - 7 - 8 = -3 \text{ кН}$$

Условие прочности при растяжении (сжатии) стержня имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{N}{A} \right|_{\max} \leq [\sigma], \quad (16.1)$$

где σ_{\max} – наибольшее по модулю нормальное напряжение на соответствующей ступени стержня, N – продольное усилие в сечении стержня, A – площадь поперечного сечения соответствующей ступени бруса, $[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение, зависящее от материала стержня.

Поскольку поперечные сечения бруса квадратные, то сторона квадрата h определится как: $h = \sqrt{A}$.

В данном случае брус имеет две ступени, соответственно необходимо рассмотреть условия равновесия (1) для каждой из ступеней.

Размер сечения для ступени 1 определится из выражения:

$$h_1 \geq \sqrt{\frac{N_I}{[\sigma]}} \quad (16.2)$$

Размер сечения для ступени 2 определится из выражения:

$$h_2 \geq \sqrt{\frac{N_{II}}{[\sigma]}} \quad (16.3)$$

Подставляя числовые данные в выражения (16.2) и (16.3), определим размеры поперечных сечений стержня, при которых прочность бруса будет обеспеченной.

$$h_1 \geq \sqrt{\frac{12 \cdot 10^3 \text{ Н}}{220 \cdot 10^6 \text{ Па}}} = 0,0074 \text{ (м) или } 8 \text{ мм}$$

$$h_2 \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{220 \cdot 10^6 \text{ Па}}} = 0,0048 \text{ (м) или } 5 \text{ мм}$$

17 Расчет типовых элементов оборудования на кручение

Для заданной схемы вала (рис. 17.1) требуется:

1. Построить эпюру крутящих моментов.

Определить диаметры круглых сечений вала исходя из условий прочности и жёсткости.

Модуль упругости второго рода принять равным $G = 8 \cdot 10^4$ МПа

Исходные данные для расчёта вала

Крутящий момент, кН·м			Допускаемое касательное напряжение $[\tau]$, МПа	Допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]$, рад
T_1	T_2	T_3		
2	3	1	35	0,003

Решение.

Из условия равновесия $\Sigma T = 0$ находим значение момента X :

$$T_1 - T_2 - T_3 + X = 0;$$

$$X = -T_1 + T_2 + T_3 = -2 + 3 + 1 = 2 \text{ кН·м}.$$

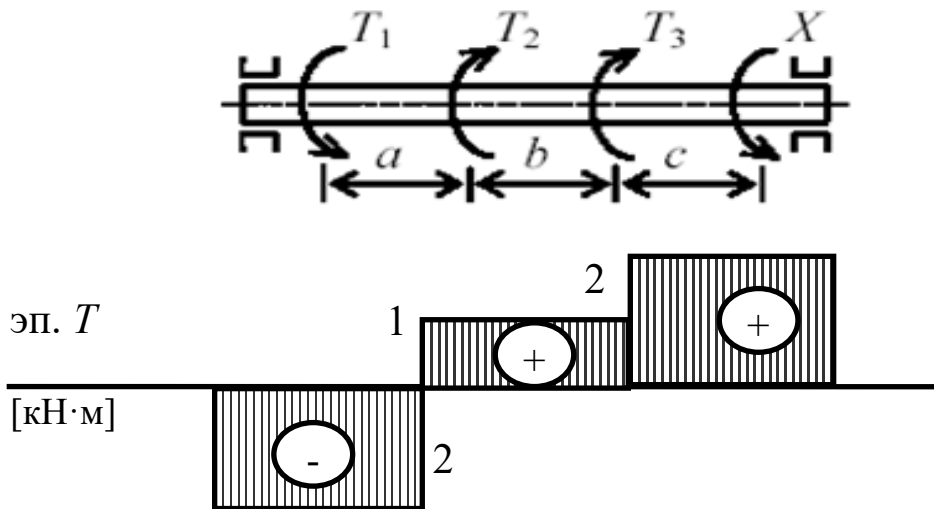


Рис. 17.1 Расчётная схема вала и эпюра крутящих моментов

Используя метод сечений, вычисляем крутящие моменты на участках вала.

$$\text{Участок } AB: M = -T_1 = -2 \text{ кН·м};$$

$$\text{Участок } BC: M = -T_1 + T_2 = -2 + 3 = 1 \text{ кН·м};$$

$$\text{Участок } CD: M = -T_1 + T_2 + T_3 = -2 + 3 + 1 = 2 \text{ кН·м}.$$

По найденным значениям строим эпюру крутящих моментов

Диаметр вала определим из условия прочности на кручение:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau], \quad (4)$$

где $W_p = 0,2d^3$ – полярный момент сопротивления вала круглого сечения.

Тогда диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T_{\max}}{0,2[\tau]}} \quad (17.1)$$

Подставляя числовые значения, получим

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 35 \cdot 10^6}} = 0,0659 \text{ м}$$

Округляя полученное значение диаметра до стандартного значения, получим

$$d = 70 \text{ мм}$$

Определим диаметр вала из условия жёсткости:

$$\Theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GI_p} \leq [\Theta], \quad (17.2)$$

где G – модуль упругости 2 рода

$I_p = 0,1d^4$ – момент инерции круглого сечения вала.

Тогда

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{T_{\max}}{0,1G \cdot [\Theta]}} \quad (17.3)$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{2 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,003}} = 0,096 \text{ м}$$

Округляя до стандартного значения, получим $d = 100$ мм.

Из двух расчётных диаметров (по критерию прочности вала и по условию жёсткости) выбираем наибольшее значение, т.е. принимаем $d = 100$ мм

18 Расчет типовых элементов оборудования на изгиб

Для заданной схемы балки (рис. 18.1) требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
2. Для опасного сечения определить размер квадратного сечения из условия изгибной прочности.

Данные для расчёта взять в таблице 18.1 (если какая-либо величина в таблице имеет значение со знаком «-», то она считается направленной в противоположную сторону).

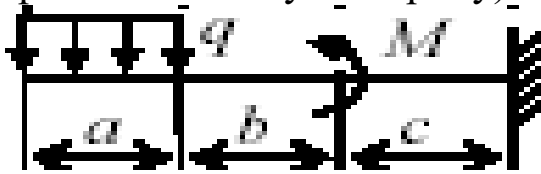


Рис. 18.1 Расчётная схема балки

Таблица 18.1 Исходные данные для расчёта балки

Распределенная нагрузка q , кН/м	Сосредоточенная сила P , кН	Момент пары сил M , кН·м	Линейные размеры, м			Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]$, МПа
			a	b	c	
8	2	0.5	0.3	0.5	0.2	190

Решение

Для данной схемы консольной балки реакции в заделке можно не определять, если при этом начинать решение задачи с наиболее удалённого от заделки конца.

Расставим характерные точки.

Таким образом, необходимо рассмотреть 3 характерных участка, начиная с левого конца балки.

Используем метод сечений.

Рассмотрим участок AB .

Проведем сечение $I-I$ в произвольном месте балки между точками A и B , зададим положение сечения координатой x_1 , отсчитываемой от левого конца балки, отбросим правую часть балки, оставив в рассмотрение левую от сечения часть, а действие отброшенной части заменим реакцией.

Используем метод сечений.

Рассмотрим участок AB .

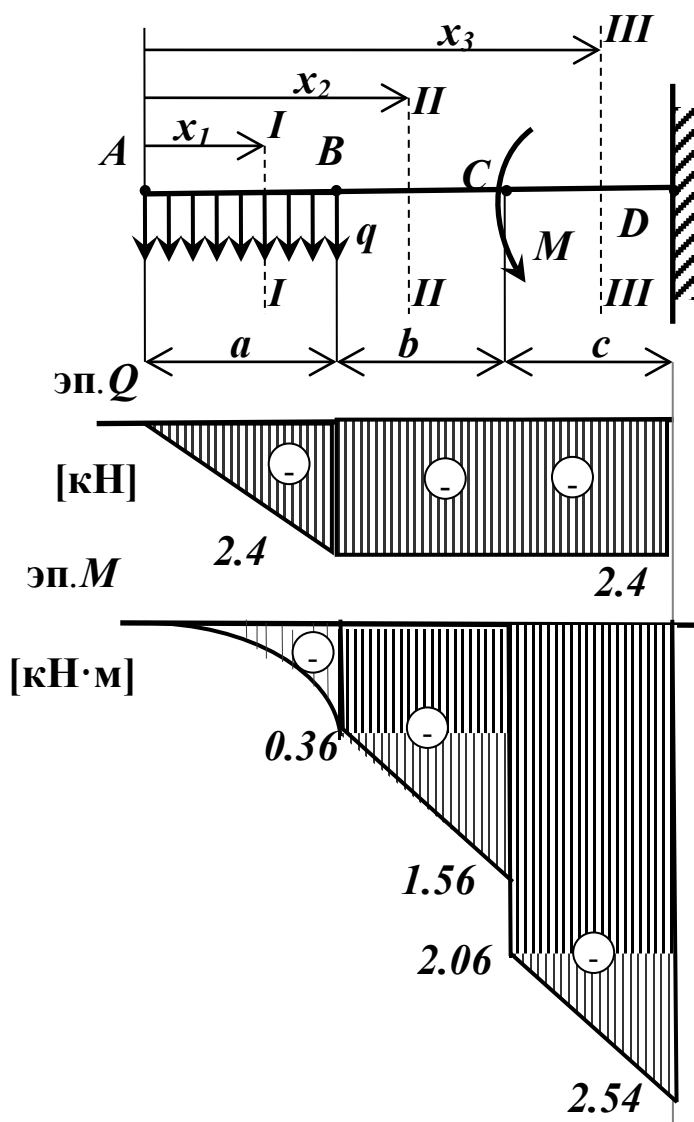


Рис. 18.2 Расчётная схема балки на изгиб и эпюры внутренних силовых факторов

Проведем сечение $I-I$ в произвольном месте балки между точками A и B , зададим положение сечения координатой x_1 , отсчитываемой от левого конца балки, отбросим правую часть балки, оставив в рассмотрение левую от сечения часть, а действие отброшенной части заменим реакцией.

$$Q = -qx_1$$

Т.е. поперечная сила на участке AB переменная, линейно зависит от координаты x_1 .

Определим значение поперечной силы в крайних точках участка AB ; при этом, поскольку сечение проводили в произвольном месте

на участке AB , необходимо рассмотреть всю совокупность возможных положений сечений, т.е.

$$0 \leq x_1 \leq a.$$

При $x_1 = 0$

$$Q = -8 \cdot 0 = 0 \text{ кН}$$

При $x_1 = a = 0,3 \text{ м}$

$$Q = -8 \cdot 0,3 = -2,4 \text{ кН}$$

Запишем уравнение изгибающего момента в сечении $I-I$.

$$M = -qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} = -\frac{qx_1^2}{2}$$

Изгибающий момент на участке AB определяется квадратичной зависимостью.

График изгибающего момента на участке AB можно построить по 3 точкам, используя основные свойства эпюр Q и M : на данном участке эпюра изгибающего момента представляет собой параболу, выпуклостью направленной к распределённой нагрузке.

При $x_1 = 0$

$$M = -8 \cdot 0^2 = 0 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_1 = a/2 = 0,15 \text{ м}$

$$M = -8 \cdot 0,15^2 / 2 = -0,09 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_1 = a = 0,3 \text{ м}$

$$M = -8 \cdot 0,3^2 / 2 = -0,36 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок BC .

Проводим сечение $II-II$, на расстоянии x_2 от левого края балки, отбрасываем правую часть, заменив её действие реакцией. При этом

$$a \leq x_2 \leq a + b$$

Запишем уравнения для поперечной силы Q и изгибающего момента M для данного сечения.

$$Q = -q \cdot a$$

Т.е. на участке BC значение силы Q не зависит от положения сечения и равно:

$$Q = -8 \cdot 0,3 = -2,4 \text{ кН}$$

Изгибающий момент:

$$M = -qa \cdot (x_2 - a/2)$$

линейно зависит от координаты поперечного сечения.

При $x_2 = a = 0,3 \text{ м}$

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (0,3 - 0,3/2) = -0,36 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_2 = a + b = 0,3 + 0,5 = 0,8$ м

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (0,8 - 0,3/2) = -1,56 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Участок CD.

Проводим сечение III-III, на расстоянии x_3 от левого края балки, отбрасываем правую часть, заменив её действие реакцией. При этом

$$a + b \leq x_3 \leq a + b + c$$

Запишем уравнения для поперечной силы Q и изгибающего момента M для данного сечения.

$$Q = -q \cdot a$$

Т.е. на участке CD значение силы Q не зависит от положения сечения и равно:

$$Q = -8 \cdot 0,3 = -2,4 \text{ кН}$$

Изгибающий момент:

$$M = -qa \cdot (x_3 - a/2) - M$$

линейно зависит от координаты поперечного сечения.

При $x_3 = a + b = 0,3 + 0,5 = 0,8$ м

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (0,8 - 0,3/2) - 0,5 = -2,06 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

При $x_3 = a + b + c = 0,3 + 0,5 + 0,2 = 1,0$ м

$$M = -8 \cdot 0,3 \cdot (1,0 - 0,3/2) - 0,5 = -2,54 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

По полученным данным строим эпюру поперечных сил и эпюру изгибающих моментов (рис. 18.2).

Условие изгибной прочности балки записывается выражением:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_z} \leq [\sigma], \quad (18.1)$$

M_{\max} – максимальный изгибающий момент (в опасном сечении), Н·м;

W_z – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки, м³,

для квадратного сечения $W_z = h^3/6$ (h – сторона квадрата, м)

$[\sigma]$ – допускаемое нормальное напряжение.

Тогда из формулы (18.1) выразим размер квадратного сечения:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6|M_{\max}|}{[\sigma]}} \quad (18.2)$$

Подставляя числовые данные, получим:

$$h \geq \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 2,54 \cdot 10^3}{190 \cdot 10^6}} = 0,043 \text{ м}$$

Принимаем $h = 45$ мм.

Рекомендуемый список литературы

1. Локтионова, О.Г. Лекции по теоретической механике: учебное пособие / О.Г. Локтионова, С.Ф. Яцун, О.В. Емельянова; Юго-Зап. Гос. Ун-т. Курск, 2014.-188с.
2. Основы механики : учебное пособие / С. Ф. Яцун [и др.]. - 2-е изд., перераб. и доп. - Москва : ИНФРА-М, 2021. - 248 с.
3. Яцун, С.Ф. Основы функционирования технических систем : учебное пособие / С. Ф. Яцун, А. Н. Рукавицын, Е. Н. Политов ; Юго-Западный государственный университет. - Курск : Университетская книга, 2019. - 195 с.
4. Манжосов, В.К. Механика [Электронный ресурс]: учебно-практическое пособие / В.К. Манжосов, О.Д. Новикова, А.А. Новиков; Ульяновск : УлГТУ, 2012. - 342 с. : ил., табл., схем. - Библ. в кн. - Университетская библиотека online: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=363451>