МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«_15_» _01_________ 2021 г.

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Математика»
для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Курск 2021

УДК 51

Составитель: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова

Рецензент
Доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
Н.А. Хохлов

Математика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Математика» для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова. – Курск, 2021. – 17 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». Материал предназначен для студентов очной и заочной форм обучения по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математика».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.01.21 . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 25 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задания по работам

1. Тема «Интегральное исчисление».

Найти интеграл $\int \frac{x^2+5}{x^2-4}dx$.

Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^4+16}$.

Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2(3x)}$.

Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

2. Тема «Дифференциальные уравнения».

Найти общее решение дифференциального уравнения $xy' - y = 1$.

Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' + 5y = 0$.

3. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции $z = \cos(3x - 4y)$ найти частные производные второго порядка.

4. Тема «Теория вероятностей».

Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первый станок выйдет из строя равна 0,2, для второго станка эта вероятность равна 0,1, а для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что

а) все станки будут работать;

б) выйдет из строя один станок;

в) выйдут из строя два станка;

г) хотя бы один станок выйдет из строя.

5. Тема «Математическая статистика».

Задан вариационный ряд выборки. Найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, размах выборки, асимметрию, эксцесс.

x_i	3	5	6	8	9	10	14
n_i	2	10	15	20	38	11	4

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

1. Тема «Интегральное исчисление».

Неопределённым интегралом называется множество всех первообразных, то есть $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)$ – подынтегральная функция;

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

dx – дифференциал от переменной x.

Основные свойства неопределённого интеграла

1. Постоянный множитель выносится за знак интеграла, то есть $\int C \cdot f(x)dx = C\int f(x)dx$, где $C = const$.

2. Интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от этих функций, то есть $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$, где $C = const$.

Основные используемые интегралы приведены в таблице 1. Номера со «звёздочкой» означают часто встречающиеся случаи соответствующих номеров без «звёздочек».

Таблица 1

Таблица неопределённых интегралов

№	Формула	№	Формула
1	2	3	4
1	$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	11	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$	12	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4
2^*	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
2^{**}	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	13^*	$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a+x}{a-x} \right\rvert + C$ или $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{a-x}{a+x} \right\rvert + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$		
4^*	$\int e^x dx = e^x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	15^*	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$
7	$\int tgx dx = -\ln\lvert \cos x \rvert + C$	17	$\int shx dx = chx + C$
8	$\int ctgx dx = \ln\lvert \sin x \rvert + C$	18	$\int chx dx = shx + C$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	19	$\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	20	$\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$
21	$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$		
22	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$		

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4} dx$.

Решение.

$$\int \frac{x^2+5}{x^2-4}dx = \int \frac{(x^2-4)+4+5}{x^2-4}dx = \int \frac{(x^2-4)+9}{x^2-4}dx =$$

$$= \int \left(\frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{9}{x^2-4} \right) dx = \int \left(1 + \frac{9}{x^2-4} \right) dx = \int 1dx + 9\int \frac{dx}{x^2-4} =$$

$$= \begin{bmatrix} \textit{таблица} & 1 \\ \textit{формулы} & 1 \textit{ и } 14 \end{bmatrix} = x + \frac{9}{4}\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right| + C.$$

Если подынтегральная функция представляет собой произведение, то внесение одного из сомножителей под знак дифференциала может привести к табличному интегралу.

Метод подведения под знак дифференциала основан на равенстве $\int f(g(x))d(g(x)) = F(g(x)) + C$. То есть главной задачей является приведение подынтегрального выражения к виду $f(g(x))d(g(x))$. При этом нужно пользоваться формулой для расчёта дифференциала функции $g'(x)dx = d(g(x))$. Наиболее часто встречающиеся дифференциалы приведены в таблице 2.

Таблица 2

Таблица основных дифференциалов

№	Формула	№	Формула
1	$x^n dx = \frac{d\left(x^{n+1}\right)}{n+1},\ n \neq -1$	4	$\sin x dx = -d(\cos x)$
1^*	$x dx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right)$	5	$\cos x dx = d(\sin x)$
1^{**}	$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right)$	6	$\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$
2	$\frac{dx}{x} = d(\ln x)$	7	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d(ctgx)$
3	$a^x dx = \frac{d\left(a^x\right)}{\ln a}$	8	$\frac{dx}{1+x^2} = d(arctgx) = -d(arcctgx)$
3^*	$e^x dx = d\left(e^x\right)$	9	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) = -d(\arccos x)$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{xdx}{x^4+16}$.

Решение.

$$\int \frac{xdx}{x^4+16} = \int \frac{1}{x^4+16}\cdot xdx = \begin{bmatrix} \text{таблица} & 2 \\ \text{формула} & 1^* \end{bmatrix} = \int \frac{1}{x^4+16}\cdot \frac{1}{2} d\left(x^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{x^4+16} = \begin{bmatrix} \text{обозначим} \\ t = x^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+16} = \begin{bmatrix} \text{таблица} & 1 \\ \text{формула} & 13 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} arctg\,\frac{t}{4} + C = \frac{1}{8} arctg\,\frac{t}{4} + C = \frac{1}{8} arctg\,\frac{x^2}{4} + C.$$

Замечание: часто при нахождении неопределённых интегралов полезно пользоваться формулой

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b) = \frac{1}{k}\int f(t)dt, \text{ где } k \neq 0.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2(3x)}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(3x)} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\cos^2(3x)} = \begin{bmatrix} \text{обозначим} \\ t = 3x \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \begin{bmatrix} \text{таблица} & 1 \\ \text{формула} & 9 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} tg\, t + c = \frac{1}{3} tg(3x) + C.$$

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)-$ одна из её первообразных, тогда справедлива формула $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, называемая формулой Ньютона-Лейбница.

Пример. Вычислить определённый интеграл $\int\limits_0^\pi \sin xdx$.

Решение.

$$\int\limits_0^\pi \sin xdx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

2. Тема «Дифференциальные уравнения».

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид: $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx+P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy=0$.

Алгоритм решения:

1) Перенесём $P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy$ в правую часть уравнения: $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx=-P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy$.

2) Разделим переменные, используя пропорцию: $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx=-\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$.

3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения: $\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx=-\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$.

Также уравнение с разделяющимися переменными может иметь вид: $y'=f(x)\cdot g(y)$.

Алгоритм решения:

1) Заменим $y'=\frac{dy}{dx}$, получим уравнение вида $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$.

2) Разделим переменные, используя пропорцию: $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$.

3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения: $\int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$.

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'-y=1$.

Решение.

$$xy'-y=1,$$
$$xy'=y+1,$$
$$x\cdot\frac{dy}{dx}=y+1,$$
$$\frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{d(y+1)}{y+1} = \int \frac{dx}{x}.$$

Замечание: в случае, когда в левой и правой частях дифференциального уравнения интегралы обращаются в логарифмические функции, необходимо прибавлять не постоянную C, а постоянную $\ln C$. Это позволяет упростить ответ, воспользовавшись такими свойствами логарифмов, как $\ln|a| + \ln|b| = \ln|a \cdot b|$ или $\ln|a| - \ln|b| = \ln\left|\frac{a}{b}\right|$ $(b \neq 0)$.

Возвращаясь к нашему дифференциальному уравнению, получим

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln C,$$

$$\ln|y+1| = \ln|Cx|,$$

$$y+1 = Cx.$$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = Cx - 1$.

Дифференциальное уравнение вида $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$, где a, b, c – числа (причём $a \neq 0$), называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y_{oo} = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2,$$

где C_1, C_2 – числа, а $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$ – частные решения, образующие фундаментальную систему решений.

Фундаментальную систему y_1 и y_2 образуют в случае, когда отношение $\frac{y_1}{y_2} \neq const$.

Эйлером было предложено частное решение искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$. Тогда $y' = k \cdot e^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$. Подставив y, y', y'' в уравнение $a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = 0$, получим

$$a \cdot k^2 \cdot e^{kx} + b \cdot k \cdot e^{kx} + c \cdot e^{kx} = 0,$$

$$e^{kx} \cdot \left(a \cdot k^2 + b \cdot k + c\right) = 0.$$

Из последнего уравнения получим $a \cdot k^2 + b \cdot k + c = 0$, это равенство называется характеристическим уравнением. В зависимости от корней этого уравнения, общее решение находится тремя способами.

Если дискриминант характеристического уравнения $D = b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два различных вещественных корня $k_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ и $k_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Тогда общее однородное решение исходного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y_{oo} = C_1 \cdot e^{k_1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k_2 \cdot x}$.

Если дискриминант характеристического уравнения $D = b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет два одинаковых вещественных корня $k_1 = k_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Тогда общее однородное решение исходного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $y_{oo} = e^{k_1 \cdot x}(C_1 + C_2 \cdot x)$.

Если дискриминант характеристического уравнения $D = b^2 - 4ac < 0$, то уравнение имеет два комплексных корня. Пусть $\sqrt{D} = \sqrt{-1 \cdot d^2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{d^2} = d \cdot \sqrt{-1} = d \cdot i$, где $d > 0$, $i = \sqrt{-1}$. Тогда корни характеристического уравнения будут равны $k_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{-b \pm d \cdot i}{2a} = -\dfrac{b}{2a} \pm \dfrac{d}{2a} \cdot i = \alpha \pm \beta \cdot i$.

Общее однородное решение исходного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в этом случае имеет вид $y_{oo} = e^{\alpha \cdot x}(C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x))$.

Замечание: характеристическое уравнение можно получать, делая следующие замены $y'' = k^2$, $y' = k$, $y = k^0 = 1$.

Пример. Найти общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Решение. Используя замену $y'' = k^2$, $y' = k$, $y = 1$, получим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$. Дискриминант квадратного уравнения $D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$, тогда

$\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1}=4i$. $k_{1,2}=\dfrac{2\pm 4i}{2}=\dfrac{2(1\pm 2i)}{2}=1\pm 2i$ – комплексные корни, следовательно, выберем формулу из случая 3 $(\alpha=1,\quad \beta=2)$.

Тогда общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $2y''-5y'-3y=0$ имеет вид $y_{oo}=e^{x}(C_1\cdot\cos(2x)+C_2\cdot\sin(2x))$.

3. Тема «Функции нескольких переменных».

Пусть дана функция $z=f(x,y)$, определённая и непрерывная в некоторой области D. Полагая, например, $y=const$, получим производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной x. Она также может обозначаться $f'_x(x,y)$.

Аналогично, полагая $x=const$, получим производную $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной y. Она также может обозначаться $f'_y(x,y)$.

Частными производными второго порядка функции $z=f(x,y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\text{ или } f''_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\text{ или } f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\text{ или } f''_{xy}(x,y);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\text{ или } f''_{xy}(x,y).$$

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z=f(x,y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Пример. Для функции $z = \cos(3x-4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [y = const] = (\cos(3x-4y))' = -\sin(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$

$$= -\sin(3x-4y)\cdot(3\cdot x' - 0) = -3\sin(3x-4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [x = const] = (\cos(3x-4y))' = -\sin(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$

$$= -\sin(3x-4y)\cdot(0 - 4\cdot y') = 4\sin(3x-4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = [y = const] = (-3\sin(3x-4y))' = -3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$

$$= -3\cos(3x-4y)\cdot(3\cdot x' - 0) = -9\cos(3x-4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [x = const] = (-3\sin(3x-4y))' = -3\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$

$$= -3\cos(3x-4y)\cdot(0 - 4\cdot y') = 12\cos(3x-4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = [x = const] = (4\sin(3x-4y))' = 4\cos(3x-4y)\cdot(3x-4y)' =$$

$$= 4\cos(3x-4y)\cdot(0 - 4\cdot y') = -16\cos(3x-4y).$$

4. Тема «Теория вероятностей».

Пример. Три станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение смены первый станок выйдет из строя равна 0,2, для второго станка эта вероятность равна 0,1, а для третьего – 0,3. Найти вероятность того, что

а) все станки будут работать;

б) выйдет из строя один станок;

в) выйдут из строя два станка;

г) хотя бы один станок выйдет из строя.

Решение. Пусть в схеме кружок со знаком «плюс» означает, что станок в течение смены работает исправно, тогда кружок со знаком «минус» означает, что станок выйдет из строя.

I		II		III	
$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$	$\oplus$	$\ominus$
0,8	0,2	0,9	0,1	0,7	0,3

а) все станки работают $= \oplus$ и $\oplus$ и $\oplus$

$p = 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}504;$

б)

$\begin{matrix}\text{выйдет из строя}\\ \text{один станок}\end{matrix} = \ominus$ и $\oplus$ и $\oplus$ или $\oplus$ и $\ominus$ и $\oplus$ или $\oplus$ и $\oplus$ и $\ominus$

$p = 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}308;$

в)

$\begin{matrix}\text{выйдут из строя}\\ \text{два станка}\end{matrix} = \ominus$ и $\ominus$ и $\oplus$ или $\oplus$ и $\ominus$ и $\ominus$ или $\ominus$ и $\oplus$ и $\ominus$

$p = 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}3 = 0{,}092;$

г) $\begin{matrix}\text{хотя бы один станок}\\ \text{выйдет из строя}\end{matrix} = 1 - \oplus$ и $\oplus$ и $\oplus$

$p = 1 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}7 = 0{,}496.$

5. Тема «Математическая статистика».

Пример. Задан вариационный ряд выборки. Найти: выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение, размах выборки, асимметрию, эксцесс.

x_i	3	5	6	8	9	10	14
n_i	2	10	15	20	38	11	4

Решение. Объём выборки: $n = 2 + 10 + 15 + 20 + 38 + 11 + 4 = 100$.

1) Выборочное среднее:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 15 + 8 \cdot 20 + 9 \cdot 38 + 10 \cdot 11 + 14 \cdot 4}{100} = \frac{814}{100} = 8{,}14.$$

2) Выборочная дисперсия:

$$\overline{x^2} = \frac{3^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 10 + 6^2 \cdot 15 + 8^2 \cdot 20 + 9^2 \cdot 38 + 10^2 \cdot 11 + 14^2 \cdot 4}{100} = \frac{7050}{100} = 70{,}5;$$

$S^2 = 70{,}5 - 8{,}14^2 \approx 4{,}2.$

3) Выборочное среднеквадратическое отклонение:

$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\tilde{\mu}_2} = \sqrt{4{,}2} \approx 2{,}05.$

4) Размах выборки: $R = 14 - 3 = 11.$

5) Начальные моменты:

– 1-го порядка $\tilde{\nu}_1 = \bar{x} = 8{,}14;$

– 2-го порядка $\tilde{\nu}_2 = \overline{x^2} = 70{,}5$;

– 3-го порядка

$$\tilde{\nu}_3 = \frac{3^3 \cdot 2 + 5^3 \cdot 10 + 6^3 \cdot 15 + 8^3 \cdot 20 + 9^3 \cdot 38 + 10^3 \cdot 11 + 14^3 \cdot 4}{100} = \frac{64462}{100} \approx 644{,}6;$$

– 4-го порядка

$$\tilde{\nu}_4 = \frac{3^4 \cdot 2 + 5^4 \cdot 10 + 6^4 \cdot 15 + 8^4 \cdot 20 + 9^4 \cdot 38 + 10^4 \cdot 11 + 14^4 \cdot 4}{100} = \frac{620754}{100} \approx 6207{,}5.$$

6) Центральные моменты

– 2-го порядка $\tilde{\mu}_2 = S^2 = 4{,}2$;

– 3-го порядка

$$\tilde{\mu}_3 = \tilde{\nu}_3 - 3\tilde{\nu}_1 \cdot \tilde{\nu}_2 + 2\tilde{\nu}_1^3 = 644{,}6 - 3 \cdot 8{,}14 \cdot 70{,}5 + 2 \cdot 8{,}14^3 \approx 1{,}7;$$

– 4-го порядка

$$\tilde{\mu}_4 = \tilde{\nu}_4 - 4\tilde{\nu}_1 \cdot \tilde{\nu}_3 + 6\tilde{\nu}_1^2 \cdot \tilde{\nu}_2 - 3\tilde{\nu}_1^4 = 6207{,}5 - 4 \cdot 8{,}14 \cdot 644{,}6 + 6 \cdot 8{,}14^2 \cdot 70{,}5 - 3 \cdot 8{,}14^4 \approx 76{,}1.$$

7) Асимметрия $\tilde{A}_S = \dfrac{\tilde{\mu}_3}{S^3} = \dfrac{1{,}7}{2{,}05^3} \approx 0{,}2$.

$0{,}25 < \left|\tilde{A}_S\right| \leq 0{,}5$, то есть асимметрия умеренная.

8) Эксцесс $\tilde{E}_X = \dfrac{\tilde{\mu}_4}{S^4} - 3 = \dfrac{76{,}1}{2{,}05^4} - 3 \approx 4{,}3 - 3 = 0{,}3$.

Так как $\tilde{E}_X > 0$, то кривая распределения является островершинной.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.

2. Что называется неопределенным интегралом?

3. Дайте определение операции интегрирования. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.

4. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.

5. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.

6. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

7. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.

8. Понятие определенного интеграла.

9. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла?

10. Перечислите свойства определенного интеграла.

11. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.

12. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется решением дифференциального уравнения?
13. Дайте определение порядка дифференциального уравнения.
14. Что называется общим решением дифференциального уравнения, частным решением?
15. Укажите общий вид дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, а также алгоритм их решения.
16. Укажите общий вид линейных дифференциальных уравнений. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
17. Укажите общий вид дифференциальных уравнений Бернулли. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
18. Дайте определение дифференциальных уравнений высших порядков.
19. Укажите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и методы его решения.
20. Что называется функцией нескольких переменных?

21. Что такое частная производная?

22. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?

23. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.

24. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

25. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?

26. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
27. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
28. Дайте определение полной группы событий.
29. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
30. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
31. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
32. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
33. Какие виды случайных величин вы знаете?
34. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.
35. Какие важнейшие распределения случайных величин вы знаете?
36. Какие виды вариационных рядов вы знаете?
37. Какие графики используются для изображения дискретных вариационных рядов?
38. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
39. Дайте понятие доверительного интервала.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. -М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007. -416 с.
3 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2012.-479 с.
4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2011.-404 с.
5. Бойцова Е.А. Практикум по математике [Текст]: учебное пособие. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -160 с.
6. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие/ Е.А.Бойцова. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -156 с.

7. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В. Журавлева и др. −Курск: ЮЗГУ, 2015. -175, [3] с.
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2 [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -432 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3 [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -544 с.
11. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: индивидуальные задания / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. –Курск: ЮЗГУ, 2014.-52 с.
12. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1 для студентов технических специальностей / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -15 с.
13. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания по выполнению лабораторной работы №15 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И. Студеникина, Т.В. Шевцова. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
14. Расчёт вероятностей случайных событий [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Журавлёва, Е.А. Панина. – Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
15. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: КурскГТУ, 2012. -35 с.