МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)
Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
« 11 » 12 ________ 2021 г.

Математическое и имитационное моделирование экономических процессов
методические указания к практическим занятиям для бакалавров направления
09.03.03 Прикладная информатика

Курск 2021

УДК 519.6
Составитель: Ю.А. Халин

Рецензент
Кандидат технических наук, с.н.с, доцент А.В. Ткаченко

Математическое и имитационное моделирование экономических процессов: методические указания к практическим занятиям / Юго- Зап. гос. ун-т; сост. Ю.А. Халин. Курск, 2021. 27с. Библиогр.: с. 27.

В работе рассматриваются численные методы решения вычислительных задач. Изложены краткие теоретические сведения, приведены примеры решения задач, а также задания для самостоятельного решения.
Методические рекомендации предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика.

Текст печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 14.12.2021 . Формат 60x84 1/16.
Усл.печ. л. 1,19 п.л . Уч.-изд. л. 1,08 . Тираж 100 экз. Заказ 1723. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1. Модель поведения потребителей

Рассмотрим рынок, на котором продаются товары n видов. Пусть p_1, p_2, …, p_n — цены этих товаров, вектор

$$\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n)$$

естественно назвать *вектором цен*.

Пусть некоторый потребитель обладает богатством M ден. ед., и x_i — это количество единиц i-го товара, которые данный потребитель приобретает на рынке ($i = 1, 2, \ldots, n$). Вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

координаты которого неотрицательны и соответствуют приобретаемым количествам товаров каждого вида, называется *набором товаров*, а множество всех наборов товаров

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0, \;\; \ldots, \;\; x_n \geqslant 0 \right\}$$

называется *пространством товаров* (поскольку на наборы товаров не налагается ограничений целочисленности, здесь предполагается, что можно приобрести произвольное — целое или дробное — количество любого товара, т. е. что все товары являются б е з г р а н и ч н о д е л и м ы - м и).

Стоимость набора товаров $\mathbf{x}$ равна, очевидно,

$$\mathbf{p}\mathbf{x} = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n .$$

Бюджетное множество $\mathcal{B}$ — это множество наборов товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, которые может себе позволить приобрести при данных ценах p_1, p_2, …, p_n потребитель, обладающий богатством I (при этом предполагается, что тратить в с е деньги необязательно).

С алгебраической точки зрения бюджетное множество описывается системой линейных неравенств

$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leqslant I, \\ x_1 \geqslant 0, \;\; x_2 \geqslant 0, \;\; \ldots, \;\; x_n \geqslant 0. \end{cases} \qquad (14.1.1)$$

Теорема о бюджетном множестве. *Бюджетное множество является выпуклым, ограниченным и замкнутым.*

Потребитель различает наборы товаров: один набор товаров он может считать для себя более предпочтительным, чем другой, два каких-то других набора товаров он может считать равноценными. Запись $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ означает, что потребитель считает набор товаров $\mathbf{x}$ не хуже набора товаров $\mathbf{y}$.

В качестве **первой аксиомы потребителя** примем, что относительно любых двух наборов товаров $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}$ потребитель может однозначно сказать, верно ли, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$. Тем самым, на пространстве товаров задано отношение слабого предпочтения «$\succcurlyeq$». Слабое предпочтение определяет еще два отношения на пространстве товаров:

- отношение равноценности «$\sim$»: $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда одновременно верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$ и $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}$; запись «$\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$» означает равноценность наборов товаров $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ с точки зрения данного потребителя: $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, а $\mathbf{y}$ не хуже $\mathbf{x}$;
- отношение сильного предпочтения «$\succ$»: $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, и неверно, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$; запись «$\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$» означает, что набор товаров $\mathbf{x}$ с точки зрения данного потребителя строго лучше набора товаров $\mathbf{y}$: $\mathbf{x}$ не хуже $\mathbf{y}$, но при этом $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ не равноценны.

Вторая аксиома потребителя описывает свойства отношений «$\succcurlyeq$», «$\sim$» и «$\succ$»:

- отношения слабого предпочтения и равноценности являются *рефлексивными* (т. е. для любого набора товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$);
- отношения слабого предпочтения, равноценности и сильного предпочтения являются *транзитивными* (т. е. для любых наборов товаров $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{C}$ из того, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$; из того, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$; из того, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$);
- отношение равноценности является *симметричным* (т. е. из того, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, следует, что $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$).

Третья аксиома потребителя говорит о том, что каждый товар является для потребителя *желательным*, т. е. если $\mathbf{x} \geqslant \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а если $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

Рациональное поведение потребителя состоит в выборе наиболее предпочтительного, с его точки зрения, набора товаров из бюджетного множества. При постановке и решении задачи определения рационального поведения потребителя удобнее оценивать привлекательность различных наборов товаров не с помощью отношений предпочтения и равноценности, а с помощью *функции полезности*, которая ставит в соответствие каждому набору товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ некоторое число $u(\mathbf{x})$ — полезность данного набора товаров — и удовлетворяет двум условиям:

- $u(\mathbf{x}) \geqslant u(\mathbf{y}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$;
- $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

(Из этих условий следует, очевидно, что $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y}) \ \Leftrightarrow \ \mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.)

Если выбран некоторый набор товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$, то множество $\mathcal{P}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{x}\}$ называется *множеством предпочтительности* для $\mathbf{x}$, а множество $\mathcal{N}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}\}$ называется *множеством непредпочтительности* для данного набора товаров. Система предпочтений называется *непрерывной*, если для любого набора товаров $\mathbf{x} \in \mathcal{C}$ множества предпочтительности и непредпочтительности являются замкнутыми.

Теорема Дебре. *Если система предпочтений потребителя непрерывна, то для такого потребителя существует непрерывная функция полезности.*

Будем считать функцию полезности дифференцируемой, при этом частная производная $\partial u / \partial x_i$ имеет смысл *предельной полезности* i-го товара: она показывает, насколько увеличится полезность, если добавить к данному набору товаров $\mathbf{x}$ еще одну единицу i-го товара.

Перечислим **основные свойства функции полезности:**

- функция полезности определяется неоднозначно (если $u(\mathbf{x})$ — некоторая функция полезности, то, например, $u_1(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + a$, $u_2(\mathbf{x}) = bu(\mathbf{x})$ [при $b > 0$], $u_3(\mathbf{x}) = \log_c u(\mathbf{x})$ [при $c > 1$] и любая другая строго возрастающая функция от $u(\mathbf{x})$ также будут функциями полезности);
- функция полезности является строго возрастающей [аксиома желательности утверждает, что из того, что $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$; по определению функции полезности $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$, значит, если $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, то $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$];
- предельные полезности товаров положительны (поскольку функция полезности является строго возрастающей и дифференцируемой, то $\partial u / \partial x_i > 0$);
- небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность (или, иначе, предельная полезность первой единицы товара бесконечна):

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = +\infty;$$

- по мере увеличения потребления товара его предельная полезность уменьшается **(первый закон Госсена)**:

$$\partial^2 u / \partial x_i^2 < 0;$$

- при очень большом объеме потребления товара его дальнейшее увеличение не приводит к росту полезности:

$$\lim_{x_i \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0.$$

На практике используются следующие **конкретные функции полезности:**

- *мультипликативная:*

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ \alpha_n > 0, \ \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < 1$;

- *логарифмическая*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_d x_i,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $d > 1$;

- *квадратичная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

где матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$ должна быть отрицательно определенной;

- *пропорциональная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\left\{\frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \ldots, \frac{x_n}{k_n}\right\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n > 0$ и др.

Множество равноценных с точки зрения данного потребителя наборов товаров называется *поверхностью безразличия*. Если $u(\mathbf{x})$ — функция полезности данного потребителя, то поверхность безразличия — это множество наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью:

$$\{\mathbf{x} \in \mathcal{C} \ \mid \ u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}\}.$$

С геометрической точки зрения поверхность безразличия в пространстве n товаров представляет собой гиперповерхность $(n-1)$-го порядка.

В дифференциальной форме условие $u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}$ записывается так:

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0. \qquad (14.1.2)$$

Градиент функции полезности равен вектору предельных полезностей:

$$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Условие (14.1.2) означает, что градиент функции полезности перпендикулярен касательной к поверхности безразличия (рис. 14.1.1).

Из рис. 14.1.1 видно, что снижение полезности, вызванное уменьшением количества одного товара, можно, вообще говоря, компенсировать увеличением количества другого товара. Рассмотрим некоторый набор товаров

$$\mathbf{x}^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 \\ \vdots \\ x_j^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$$

и предположим, что количество i-го товара изменилось на величину dx_i, количество j-го товара изменилось на dx_j, а все остальные товары остались в тех же количествах, что и раньше; новый набор товаров

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_i^0 + dx_i \\ \vdots \\ x_j^0 + dx_j \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}.$$

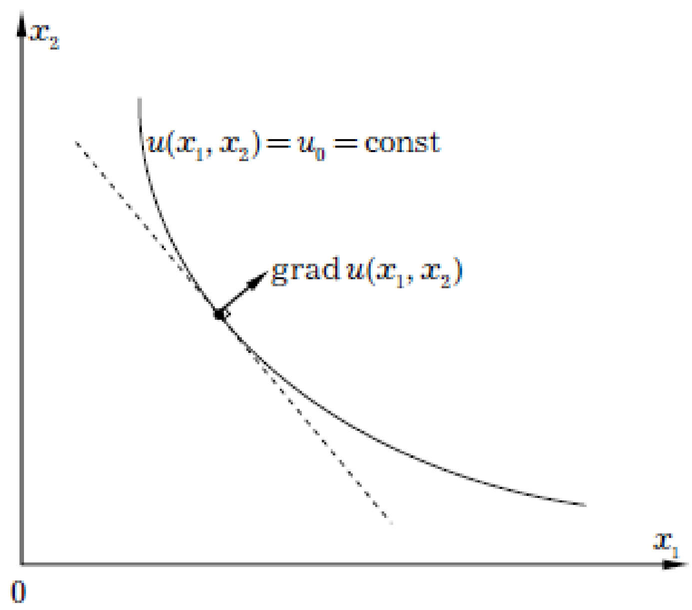

Рис. 14.1.1. *Поверхность безразличия и градиент функции полезности*

Чтобы старый и новый наборы товаров оказались на одной поверхности безразличия, необходимо выполнение условия (14.1.2). Учтем, что $dx_k = 0$ при $k \neq i, k \neq j$, тогда получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = 0,$$

откуда

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

Величина

$$r_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \mathrm{const}}} \frac{\Delta x_j}{-\Delta x_i} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

называется *предельной нормой замены* i-го товара j-м; она показывает, на сколько единиц должно увеличиться количество j-го товара, чтобы компенсировать потерю единицы i-го товара (т. е. чтобы полезность набора товаров не изменилась).

Часто бывает удобно иметь дело не с абсолютными величинами, а с относительными. *Эластичность замены* i-го товара j-м (e_i^j) показывает, на сколько процентов должно увеличиться количество j-го товара, чтобы компенсировать уменьшение количества i-го товара на 1%:

$$e_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \mathrm{const}}} \frac{\Delta x_j / x_j}{-\Delta x_i / x_i} = -\frac{x_i}{x_j} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \mathrm{const}}} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{x_j} r_i^j = \frac{x_i}{x_j} \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}.$$

Теперь сформулируем математически **задачу потребителя:** *требуется из бюджетного множества выбрать набор товаров, обладающий максимальной полезностью:*

$$u(\mathbf{x}) \to \max,$$
$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

Запишем эту задачу подробнее [с учетом (14.1.1)]:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n \leqslant I, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ \ x_n \geqslant 0. \end{cases} \qquad (14.1.3)$$

Теорема существования решения задачи потребителя. *Решение*

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

задачи потребителя (14.1.3) *существует и лежит на границе бюджетного множества:*

$$p_1x_1^* + p_2x_2^* + \cdots + p_nx_n^* = I\,. \tag{14.1.4}$$

Теорема единственности решения задачи потребителя. *Если функция полезности является строго выпуклой вверх, то решение задачи потребителя* (14.1.3) *является единственным.*

С учетом (14.1.4) задачу потребителя можно переписать в виде классической задачи на условный экстремум:

$$\begin{aligned} &u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max, \\ &p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I. \end{aligned} \tag{14.1.5}$$

Задачу (14.1.5) можно решить с помощью метода множителей Лагранжа: функция Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n)\,,$$

условный максимум в задаче (14.1.5) совпадает с безусловным максимумом функции Лагранжа, который удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I. \end{cases} \tag{14.1.6}$$

Условия (14.1.6), определяющие оптимальное решение задачи потребителя, означают, в частности, что при ценах p_1, p_2, ..., p_n потребитель, обладающий богатством I, выбирает набор товаров, который соответствует полному использованию богатства I, причем вектор предельных полезностей товаров пропорционален вектору цен:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \ldots : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : \ldots : p_n\,.$$

Отсюда следует, что в оптимальной точке предельная норма замены i-го товара j-м равна отношению цен i-го и j-го товаров:

$$r_i^j = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}\,. \tag{14.1.7}$$

Равенство (14.1.7) можно содержательно интерпретировать в виде **второго закона Госсена:** взаимозаменяемыми являются такие количества товаров, которые имеют одинаковую стоимость.

Можно сделать еще один вывод из условий (14.1.6): у всех товаров в оптимальной точке отношения предельных полезностей к ценам совпадают и равны λ^*:

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial u / \partial x_n}{p_n} = \lambda^*.$$

Это дает ответ на вопрос об **экономическом смысле множителя Лагранжа** λ^*: множитель Лагранжа равен предельной полезности одной денежной единицы (поскольку в оптимальной точке часть предельной полезности каждого товара, приходящаяся на единицу его цены, равна λ^*).

Если из условий (14.1.6) выразить $\mathbf{x}^*$ как функцию от цен и богатства, то получим *функцию спроса* данного потребителя: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)$.

Рассмотрим, как изменится спрос потребителя, если изменится цена одного из товаров (например, j-го).

Предположим вначале, что при изменении цены j-го товара на величину Δp_j (при неизменных ценах остальных товаров) происходит компенсация богатства на такую величину ΔI, чтобы новая точка оптимального спроса осталась на той же поверхности безразличия, что и старая [иными словами, чтобы полезность набора товаров

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_j + \Delta p_j, \ldots, p_n,\ I + \Delta I),$$

оптимального при векторе цен $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_j + \Delta p_j \quad \cdots \quad p_n)$ и богатстве $M + \Delta M$, была бы равна полезности набора товаров

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n,\ I),$$

оптимального при векторе цен $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_j \quad \cdots \quad p_n)$ и богатстве I (рис. 14.1.2)].

Если теперь устремить Δp_j к нулю и рассмотреть предел

$$\lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j} = \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i' - x_i^*}{\Delta p_j} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_j + \Delta p_j, \ldots, p_n, I + \Delta I) - x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n, I)}{\Delta p_j},$$

то мы получим изменение спроса на i-й товар при изменении цены j-го товара на единицу и сопутствующем компенсирующем изменении богатства; это изменение обозначается

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}') = u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j}.$$

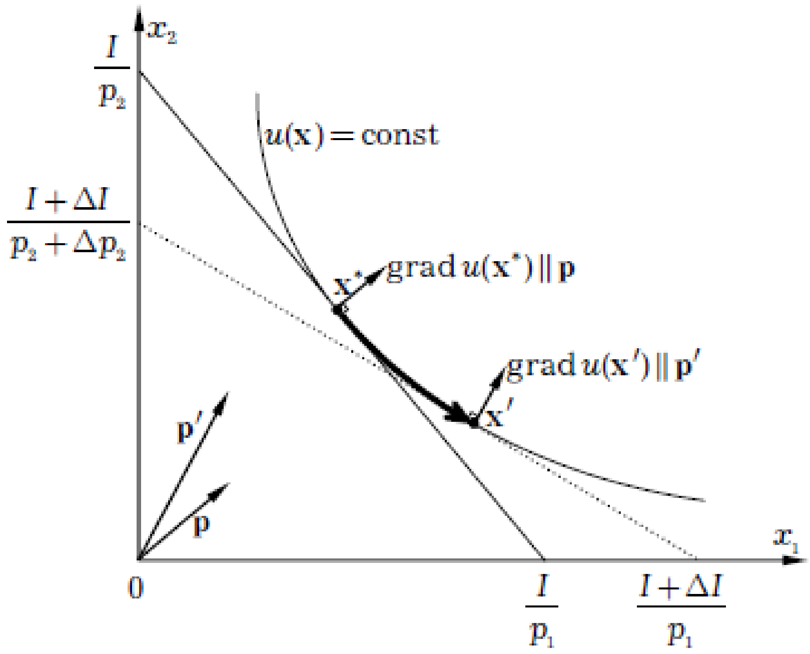

Рис. 14.1.2. *Изменение спроса с компенсацией дохода*

Величина $(\partial x_i^* / \partial p_j)_{\text{комп.}}$ отражает эффект замещения — при изменении цены j-го товара и компенсирующем изменении богатства потребитель останется на той же кривой безразличия, что и раньше, для чего заменит часть j-го товара другими товарами.

Найдем величину такого компенсирующего изменения богатства dI при бесконечно малом изменении цены j-го товара (на dp_j) и неизменных остальных ценах [т. е при изменении цен p_i всех остальных товаров (с номерами $k \neq j$) на $dp_k = 0$]. Из условий оптимального поведения потребителя (14.1.6) получаем, что

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = \lambda^* \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k, \quad dI = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k .$$

Чтобы полезность не изменилась, необходимо и достаточно, чтобы $du = 0$, и поскольку предельная полезность денег $\lambda^* \neq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} p_k dx_k = 0 .$$

Но тогда

$$dI = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_i = x_j^* dp_j \qquad (14.1.8)$$

(где мы учли также, что $dp_k = 0$ при $k \neq j$).

На самом деле компенсации богатства потребителя при изменении цен не происходит, и изменение спроса потребителя на i-й товар при изменении цены j-го товара на единицу равно

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (14.1.9)$$

Уравнение (14.1.9), полученное в 1915 г. Е. Е. Слуцким, играет важнейшую роль в теории потребительского спроса. Вычитаемое в этом уравнении отражает эффект дохода, связанный с изменением потребительской ценности единицы богатства. Фактически потребитель не остается на той же поверхности безразличия, что и раньше, а переходит на другую поверхность безразличия, соответствующую другим количествам товаров, которые он может позволить себе приобрести при изменении цены j-го товара и неизменном богатстве и ценах остальных товаров. Эффект дохода и эффект замещения иллюстрируется рис. 14.1.3.

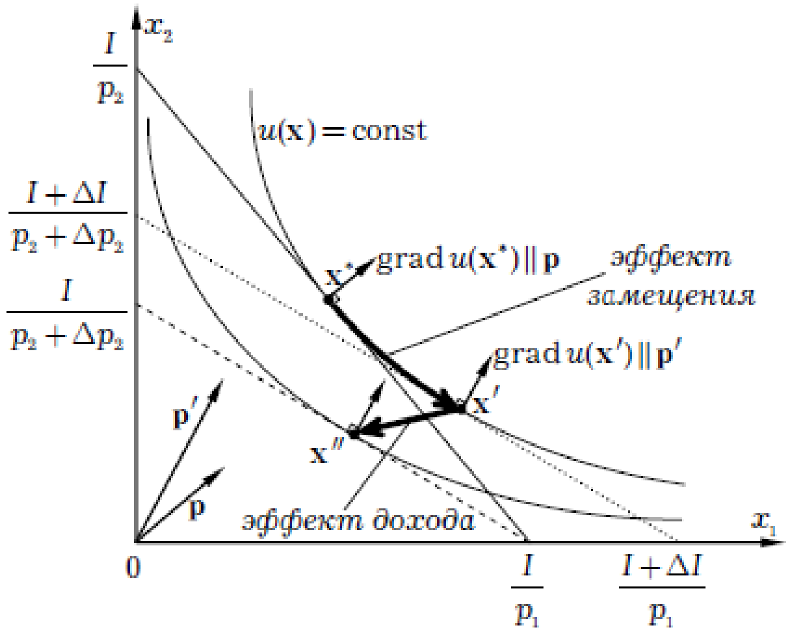

Рис. 14.1.3. *Эффект дохода и эффект замещения*

Можно показать, что

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}} < 0, \qquad (14.1.10)$$

т. е. при увеличении цены (i-го) товара спрос на него падает даже в том случае, если увеличение цены сопровождается компенсирующим изменением богатства.

Товар с номером i называется *ценным*, если при увеличении богатства спрос на него растет, т. е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0, \qquad (14.1.11)$$

и *малоценным*, если при увеличении богатства спрос на этот товар снижается:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0.$$

В оптимальной точке [согласно (14.1.6)]

$$\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^* = I .$$

Продифференцируем левую и правую части этого равенства по I:

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k^*}{\partial I} = 1 .$$

Отсюда (с учетом того, что все $p_k > 0$) следует, что среди частных производных $\partial x_k^* / \partial I$ есть хотя бы одна положительная, т. е. обязательно существует хотя бы один ценный товар.

Товар с номером i называется *нормальным*, если при увеличении его цены спрос на него падает, т. е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0 ,$$

и *товаром Гиффина*, если при увеличении цены этого товара спрос на него растет:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0 .$$

Спрос на ценный товар обязательно падает при увеличении его цены: в правой части уравнения Слуцкого (14.1.9), записанного при $j = i$,

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* < 0$$

уменьшаемое отрицательно согласно (14.1.10), а вычитаемое неотрицательно, так как $\partial x_i^* / \partial I > 0$ согласно (14.1.11), а спрос x_i^* не может быть отрицательным. Таким образом, ценные товары не могут быть товарами Гиффина.

Резюмируя, замечаем, что все товары делятся на три категории (табл. 14.1.1):

• нормальные ценные товары, примером такого товара является масло: если цена мяса увеличится, то потребитель приобретет его меньше, а если увеличится богатство потребителя, то он увеличит потребление мяса;

• нормальные малоценные товары, примером такого товара служит маргарин: потребитель приобретет меньше маргарина и в том случае, когда увеличится цена маргарина, и в том случае, когда увеличится богатство потребителя;

• т о в а р ы Г и ф ф и н а, в качестве примера такого товара традиционно приводят картофель в Ирландии XIX в.: в то время большая часть потребительских расходов населения тратилась на приобретение картофеля, но по мере увеличения богатства потребители предпочитали покупать больше мяса и меньше картофеля; при увеличении цены картофеля реальный доход потребителя уменьшался настолько, что он уже не могли покупать столько же мяса, как и прежде, и потому был вынужден увеличивать потребление картофеля.

Два товара с номерами i и j называются *взаимозаменяемыми*, если увеличение цены j-го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства приводит к увеличению спроса на i-й товар:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} > 0;$$

товары называются *взаимодополняющими*, если увеличение цены j-го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства ведет к уменьшению спроса на i-й товар:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} > 0.$$

Т а б л и ц а 14.1.1

Влияние изменения дохода / Влияние изменения цены товара	ценные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$	малоценные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$
нормальные товары: $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$	пример: мясо	пример: маргарин
товары Гиффина: $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$	—	пример: картофель в середине XIX в. в Ирландии

Эти определения корректны, поскольку можно показать, что матрица

$$\mathbf{D} = \left(d_{ij} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

является с и м м е т р и ч н о й, т. е.

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} = \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Примерами пар взаимозаменяемых товаров являются яблоки и груши, чай и кофе, сыр и колбаса и т. п.; примерами пар взаимодополняющих товаров являются компьютеры и компьютерные принтеры, автомобили и бензин, брюки и ремни и т. д.

Можно показать, что для любого товара обязательно найдется другой товар, составляющий с первым взаимозаменяемую пару. В частности, если рассматривать рынок двух товаров, то эти два товара обязательно должны быть взаимозаменяемыми.

Пример 14.1.1. В пространстве трех товаров известен вектор цен $\mathbf{p} = (2 \quad 5 \quad 6)$, богатство потребителя $I = 30$ ден. ед. и его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$. Требуется описать (с помощью системы неравенств) бюджетное множество и изобразить его графически. Затем следует определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен $\mathbf{p}$. После этого нужно убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Далее следует определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

Решение. В рассматриваемом примере система неравенств (14.1.1) принимает вид

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leqslant 30, \\ x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0, \ x_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

С геометрической точки зрения (рис. 14.1.4) данное бюджетное множество

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leqslant 30,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \right\}$$

представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой находится в начале координат, а три другие — соответственно в точках $I/p_1 = 30/2 = 15$, $I/p_2 = 30/5 = 6$ и $I/p_3 = 30/6 = 5$ на осях Ox_1, Ox_2, и Ox_3.

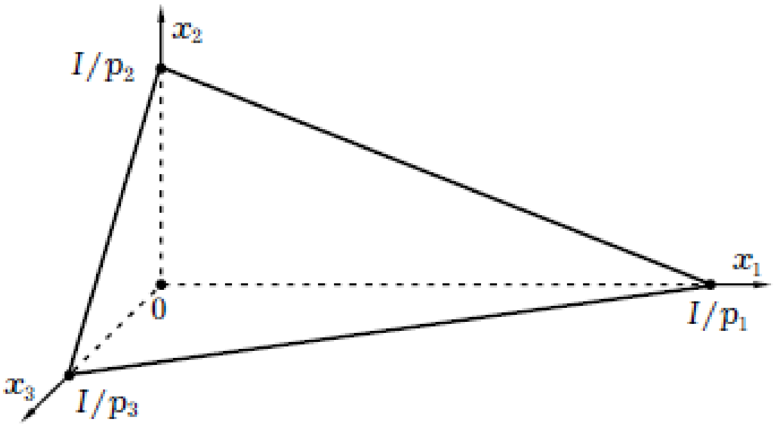

Рис. 14.1.4. *Бюджетное множество*

Предельные полезности товаров в данном примере равны

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2 x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}},$$

поэтому условия (14.1.6) для определения функции спроса принимают вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} = \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1}, \\ \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 x_3}{4\lambda^2 p_1^2}, \\ \dfrac{x_3}{4\lambda p_1} = \lambda p_2, \\ \dfrac{x_2}{4\lambda p_1} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4\lambda^2 p_2 p_3, \\ x_3 = 4\lambda^2 p_1 p_2, \\ x_2 = 4\lambda^2 p_1 p_3, \\ 12\lambda^2 p_1 p_2 p_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_1}, \\ x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_2}, \\ x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3p_3}, \\ \lambda^* = \sqrt{\dfrac{I}{12 p_1 p_2 p_3}}. \end{cases}$$

Таким образом, функция спроса данного потребителя

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \begin{pmatrix} I/(3p_1) \\ I/(3p_2) \\ I/(3p_3) \end{pmatrix}, \qquad (14.1.12)$$

а предельная полезность денег

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12 p_1 p_2 p_3}}.$$

При данном векторе цен $\mathbf{p} = (2 \quad 5 \quad 6)$ и богатстве $I = 30$ получаем:

$$x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1} = \frac{30}{3 \cdot 2} = 5, \quad x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2} = \frac{30}{3 \cdot 5} = 2,$$

$$x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3} = \frac{30}{3 \cdot 6} = \frac{5}{3}, \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12 p_1 p_2 p_3}} = \sqrt{\frac{30}{12 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Итак, вектор спроса при данных ценах и данном богатстве таков:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}.$$

Убедимся теперь, что для данного потребителя действительно выполняется уравнение Слуцкого. Рассмотрим, например, что произойдет со спросом при изменении цены первого товара. Пусть цена первого товара изменилась с p_1 до $p_1+\Delta p_1$. Если произошло соответствующее компенсирующее изменение богатства на величину

$$\Delta I = x_1^*\Delta p_1 = \frac{I\Delta p_1}{3p_1}$$

[определенную по формуле (14.1.8)], то новая точка спроса

$$\mathbf{x}^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) = \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix},$$

т. е. изменение спроса составляет

$$\Delta\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) - \mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} - \dfrac{I}{3p_1} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} - \dfrac{I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} - \dfrac{I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(I+\Delta I)p_1 - I(p_1+\Delta p_1)}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1\Delta I - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix}.$$

Подставим сюда $\Delta I = I\Delta p_1/(3p_1)$, получим

$$\Delta\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1 I\Delta p_1/(3p_1) - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим изменение спроса при бесконечно малом изменении цены первого товара и компенсирующем изменении дохода:

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_1^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{-2I}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} = -\frac{2I}{9p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_2^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1\to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1p_2} = \frac{I}{9p_1p_2},$$

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\Delta x_3^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{\dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(x')=u(x^*)}} \frac{I}{9p_1p_3} = \frac{I}{9p_1p_3}.$$

Найдем теперь $\partial x_i^* / \partial p_1$, $\partial x_i^* / \partial I$ $(i = 1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_1)]}{\partial p_1} = -\frac{I}{3p_1^2}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_2)]}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} = \frac{\partial[I/(3p_3)]}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_1)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_1}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_2)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_2}, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{\partial[I/(3p_3)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_3}.$$

Замечаем, что

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_1^* = -\frac{2I}{9p_1^2} - \frac{1}{3p_1}\frac{I}{3p_1} = -\frac{I}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1},$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_2^*}{\partial I} x_1^* = \frac{I}{9p_1p_2} - \frac{1}{3p_2}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1},$$

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_3^*}{\partial I} x_1^* = \frac{I}{9p_1p_3} - \frac{1}{3p_3}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1},$$

т. е. уравнение Слуцкого (14.1.9) для данного потребителя действительно выполняется.

Поскольку

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_1} > 0, \qquad \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_2} > 0, \qquad \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{1}{3p_3} > 0,$$

все три товара ценные (так как ценные товары не могут быть товарами Гиффина, все три товара являются нормальными). Первый и второй товары являются взаимозаменяемыми, так как

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \frac{I}{9p_1p_2} > 0.$$

Точно так же можно показать, что первый и третий, а также второй и третий товары образуют взаимозаменяемые пары, а взаимодополняющие товары для данного потребителя отсутствуют. ❑

Индивидуальные задания

В пространстве трех товаров известен вектор цен $\mathbf{p} = (p_1 \;\; p_2 \;\; p_3)$, богатство потребителя I и его функция полезности $u(x_1, x_2, x_3)$ [они приведены для каждого варианта в табл. 14.2.1]. Требуется описать (с помощью системы неравенств) бюджетное множество и изобразить его графически. Затем следует определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен $\mathbf{p}$. После этого нужно убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Далее следует определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффина; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими.

№ вар.	Исходные данные			№ вар.	Исходные данные		
	p	I	$u(x_1, x_2, x_3)$		**p**	I	$u(x_1, x_2, x_3)$
1	(7 3 2)	42	$x_1\sqrt{x_2x_3}$	19	(5 8 4)	60	$2x_1x_2x_3$
2	(1 3 4)	24	$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$	20	(4 9 6)	72	$\dfrac{x_1x_2}{3}+x_3$
3	(5 2 4)	60	$x_1+\dfrac{x_2x_3}{2}$	21	(7 5 2)	35	$4x_1x_2+x_3^2$
4	(2 3 4)	60	$x_1^2+2x_2x_3$	22	(3 8 5)	60	$3\sqrt{x_1x_2}x_3$
5	(5 8 4)	120	$\ln(x_1x_2x_3)$	23	(1 7 2)	56	$2x_1\sqrt{x_2}x_3$
6	(4 9 6)	36	$x_1x_2\sqrt{x_3}$	24	(4 7 3)	42	$3\sqrt{x_1}x_2x_3$
7	(7 5 2)	70	$\sqrt{x_1}x_2x_3$	25	(2 5 6)	60	$2x_1x_2\sqrt{x_3}$
8	(3 8 5)	120	$x_1\sqrt{x_2}x_3$	26	(3 6 9)	72	$2\ln(x_1x_2x_3)$
9	(1 7 2)	28	$\sqrt{x_1x_2}x_3$	27	(2 7 6)	21	$3x_1^2+2x_2x_3$
10	(4 7 3)	84	$2x_1x_2+x_3^2$	28	(2 3 6)	36	$3x_1+\dfrac{x_2x_3}{2}$
11	(2 5 6)	30	$\dfrac{x_1x_2}{3}+x_3$	29	(3 2 8)	48	$\sqrt{x_1}+2\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}$
12	(3 6 9)	36	$x_1x_2x_3$	30	(3 8 5)	30	$2x_1\sqrt{x_2x_3}$
13	(2 7 6)	42	$2x_1x_3+x_2^2$	31	(5 2 4)	30	$\sqrt{2x_1x_2}x_3$
14	(2 3 6)	18	$2\ln(x_1x_2x_3)$	32	(2 3 4)	30	$3x_1\sqrt{x_2}x_3$
15	(3 2 8)	24	$x_1^3+x_2^3+x_3^3$	33	(4 7 3)	21	$\sqrt{2x_1}x_2x_3$
16	(1 3 4)	48	$x_1^3+2x_2^3+x_3^3$	34	(3 6 9)	18	$x_1x_2\sqrt{2x_3}$
17	(5 2 4)	120	$3\ln(x_1x_2x_3)$	35	(7 3 2)	84	$4x_1x_2+3x_3^2$
18	(2 3 4)	120	$3x_1x_3+x_2^2$				

Контрольные вопросы:

1. Как рассчитывается бюджетное множество?
2. Сформулируйте теорему Дебре.
3. Перечислите основные свойства функции полезности
4. Сформулируйте математическую задачу потребителя
5. В чем заключается Теорема единственности решения задачи потребителя?

МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1. Модель взаимодействия потребителей и производителей. Рыночное равновесие

Рассмотрим рынок n товаров с k участниками. Пусть вектор

$$\mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix}$$

определяет начальные запасы товаров у j-го участника, а $u^j(\mathbf{x}) = u^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция полезности j-го участника ($j = 1, 2, \ldots, k$).

Предположим, что участники рынка согласны обмениваться товарами. Для этого они должны ввести некоторую денежную единицу и определить вектор рыночных цен $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n)$.

Если на рынке будут установлены некоторые цены товаров: $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то начальное богатство каждого участника (до обмена) в денежном выражении определяется как

$$I_j = \mathbf{p}\mathbf{x}^j = \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

При этом суммарное предложение i-го товара на рынке будет равно суммарным запасам этого товара у всех участников:

$$Q_i^S = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Теперь можно для каждого участника поставить задачу потребителя и определить функции спроса участников рынка:

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \\ \tilde{x}_2^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j(p_1, p_2, \ldots, p_n, I_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \\ \tilde{x}_2^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j\left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \end{pmatrix}, \qquad (16.1.1)$$

$$j = 1, 2, \ldots, k.$$

Таким образом, суммарный спрос всех участников на i-й товар будет равен

$$Q_i^D=\sum_{j=1}^{k}\tilde{x}_i^j\left(p_1,p_2,\ldots,p_n,\sum_{l=1}^{n}p_lx_l^j\right),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Согласно **закону Вальраса** рыночное равновесие определяется равенством суммарного спроса и суммарного предложения по каждому товару:

$$Q_i^D=Q_i^S,\quad i=1,2,\ldots,n$$

или

$$\sum_{j=1}^{k}\tilde{x}_i^j\left(p_1,p_2,\ldots,p_n,\sum_{l=1}^{n}p_lx_l^j\right)=\sum_{j=1}^{k}x_i^j,\quad i=1,2,\ldots,n. \qquad (16.1.2)$$

Можно показать, что одно из уравнений данной системы обязательно является следствием остальных, поэтому цены $p_1,p_2,\ldots,p_n$ определяются из этой системы с точностью до коэффициента пропорциональности. Это очевидно: ведь цены зависят от выбора денежной единицы.

Таким образом, можно определить равновесное конечное распределение товаров между участниками рынка, подставив в функции спроса (16.1.1) равновесные цены, определенные из системы (16.1.2).

Пример 16.1.1. Рассматривается рынок трех товаров. Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка, если эти участники обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1,x_2,x_3)=\sqrt{x_1x_2x_3}$, а начальные запасы товаров у участников рынка составляют

$$\mathbf{x}^1=\begin{pmatrix}x_1^1\\x_2^1\\x_3^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^2=\begin{pmatrix}x_1^2\\x_2^2\\x_3^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^3=\begin{pmatrix}x_1^3\\x_2^3\\x_3^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}^4=\begin{pmatrix}x_1^4\\x_2^4\\x_3^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\6\end{pmatrix}.$$

Решение. Пусть цены товаров на рынке определяются вектором $\mathbf{p}=(p_1\quad p_2\quad p_3)$, тогда начальное богатство первого участника составит

$$I_1=\mathbf{p}\mathbf{x}^1=p_1x_1^1+p_2x_2^1+p_3x_3^1=p_1+2p_2+3p_3.$$

Аналогично определяется начальное богатство второго, третьего и четвертого участников рынка:

$$I_2=\mathbf{p}\mathbf{x}^2=2p_1+2p_2+2p_3,\ I_3=\mathbf{p}\mathbf{x}^3=3p_1+4p_2+5p_3,\ I_4=\mathbf{p}\mathbf{x}^4=p_1+p_2+6p_3.$$

Функции спроса участников одинаковы, так как функция полезности у них одна и та же. Для данной функции полезности функция спроса (14.1.12):

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1,p_2,p_3,I_j)=\begin{pmatrix}I_j/(3p_1)\\I_j/(3p_2)\\I_j/(3p_3)\end{pmatrix},\qquad j=1,2,3,4,$$

была определена в примере 14.1.1.

Суммарный спрос на первый товар составляет

$$Q_1^D = \frac{I_1}{3p_1} + \frac{I_2}{3p_1} + \frac{I_3}{3p_1} + \frac{I_4}{3p_1} =$$

$$= \frac{(p_1 + 2p_2 + 3p_3) + (2p_1 + 2p_2 + 2p_3) + (3p_1 + 4p_2 + 5p_3) + (p_1 + p_2 + 6p_3)}{3p_1} =$$

$$= \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1},$$

аналогично определяется суммарный спрос на второй и третий товары:

$$Q_2^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2}, \qquad Q_3^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3}.$$

Суммарное предложение первого товара равно

$$Q_1^S = x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 = 1 + 2 + 3 + 1 = 7,$$

$$Q_2^S = x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 = 2 + 2 + 4 + 1 = 9,$$

$$Q_3^S = x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4 = 3 + 2 + 5 + 6 = 16.$$

Запишем условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения каждого товара:

$$\begin{cases} Q_1^D = Q_1^S, \\ Q_2^D = Q_2^S, \Leftrightarrow \\ Q_3^D = Q_3^S \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1} = 7, \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2} = 9, \\ \dfrac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 21p_1, \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 27p_2, \\ 7p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 48p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 - 18p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 + 9p_2 - 32p_3 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений с помощью метода Жордана — Гаусса иллюстрируется табл. 16.1.1.

Таким образом, общее решение системы для определения равновесных цен таково:

$$p_1 = \frac{16}{9}\alpha, \quad p_2 = \frac{16}{7}\alpha, \quad p_3 = \alpha,$$

где, очевидно, цена третьего товара $\alpha > 0$. Ясно, что цены определяются относительно, поэтому для удобства положим $p_3 = \alpha = 63$ ден. ед., тогда

$$p_1 = \frac{16}{9} \cdot 63 = 112 \text{ ден. ед.}, \qquad p_2 = \frac{16}{7} \cdot 63 = 144 \text{ ден. ед.}$$

Таблица 16.1.1

−14	9	16	0
$\boxed{7}$	−18	16	0
7	9	−32	0
0	$\boxed{-27}$	48	0
1	−18/7	16/7	0
0	27	−48	0
0	1	−16/9	0
1	0	−16/7	0
0	0	0	0

При таких ценах начальные запасы участников рынка определяют их богатство:

$$I_1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 112 + 2\cdot 144 + 3\cdot 63 = 589,$$
$$I_2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 2\cdot 112 + 2\cdot 144 + 2\cdot 63 = 638,$$
$$I_3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3 = 3\cdot 112 + 4\cdot 144 + 5\cdot 63 = 1227,$$
$$I_4 = p_1 + p_2 + 6p_3 = 112 + 144 + 6\cdot 63 = 634.$$

Теперь можно определить равновесное распределение товаров:

$$\tilde{\mathbf{x}}^1(p_1,p_2,p_3,I_1) = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{3p_1} \\ \frac{I_1}{3p_2} \\ \frac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{589}{3\cdot 112} \\ \frac{589}{3\cdot 144} \\ \frac{589}{3\cdot 63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{589}{336} \\ \frac{589}{432} \\ \frac{589}{189} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}^2(p_1,p_2,p_3,I_2) = \begin{pmatrix} \frac{I_2}{3p_1} \\ \frac{I_2}{3p_2} \\ \frac{I_2}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{638}{336} \\ \frac{638}{432} \\ \frac{638}{189} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^3(p_1,p_2,p_3,I_3) = \begin{pmatrix} \frac{I_3}{3p_1} \\ \frac{I_3}{3p_2} \\ \frac{I_3}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1227}{336} \\ \frac{1227}{432} \\ \frac{1227}{189} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{x}}^4(p_1,p_2,p_3,I_4) = \begin{pmatrix} \frac{I_4}{3p_1} \\ \frac{I_4}{3p_2} \\ \frac{I_4}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{634}{336} \\ \frac{634}{432} \\ \frac{634}{189} \end{pmatrix}. \ \square$$

Индивидуальные задания

Рассматривается рынок трех товаров. Четыре участника рынка обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1, x_2, x_3)$ (такими же, как в модели поведения потребителя, они приведены для каждого варианта в табл. 14.2.1), начальные запасы товаров у участников рынка составляют соответственно

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix}$$

(векторы $\mathbf{x}^1$ — $\mathbf{x}^4$ приведены для каждого варианта в табл. 16.2.1).

Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка.

Таблица 16.2.1

№	Исходные данные				№	Исходные данные				№	Исходные данные			
вар.	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	вар.	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	вар.	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$
1	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\6\end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\6\\3\end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}6\\4\\6\end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\5\end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$	31	$\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	32	$\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	33	$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	34	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	35	$\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix}$					

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте функцию спроса участников рынка.
2. По закону Вальраса сформулируйте рыночное равновесие.
3. Сформулируйте условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баллод Б.А. Методы и алгоритмы принятия решений в экономике: учеб. пособие / Б.А. Баллод, Н.Н. Елизарова. – М.: Финансы и статистика, ИНФРА-М, 2009. – 224с.

2. Грицюк С.Н. Математические методы и модели в экономике: учебник/ С.Н.Грицюк, Е.В.Мирзоева, В.В.Лысенко. - Ростов на Дону: Феникс, 2007. – 348 с.

3. Ильченко А.Н. Практикум по экономико – математическим методам: учебное пособие / А.Н.Ильченко, О.Л.Ксенофонтова, Г.В.Канакина. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА – М. 2009. – 288 с.

4. Лугинин О.Е. Экономико-математические методы и модели: теория и практика с решением задач: учебн. пособие/ О.Е.Лугинин, В.Н.Фомишина. – Ростов на Дону : Феникс, 2009. – 440 с.

5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебн. Пособие для вузов / В.В.Федосеев, А.Н.Гармаш и др.; Под ред.В.В.Федосеева. – М.:ЮНИТИ, 2005 – 304 с.

6. Экономико-математические методы и модели: Учебн. Пособие/ кол. авторов под ред. С.И.Макарова. – М.: КНОРУС, 2009. – 240 с.

7. Экономико-математические методы и модели.Задачник: учебно-практическое пособие/ кол. авторов под ред. С.И.Макарова. – М.: КНОРУС, 2009. – 208 с.