МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра биомедицинской инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
____________ 2017 г.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Математическая статистика»

Курск 2017

УДК 004.93:61

Составители: О.В. Шаталова, К.Д.А. Кассим.

Рецензент
Доктор технических наук, профессор Р.А. Томакова

Основы математической статистики: методические указания к практическим занятиям / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В. Шаталова, К.Д.А. Кассим. Курск, 2017. 133 с.

Предназначено для студентов специальности 30.05.03 «Медицинская кибернетика» по дисциплине «Математическая статистика». Может быть использована аспирантами, обучающимися по направленностям 05.11.13 – Системный анализ, управление и обработка информации и 05.11.17 – Приборы, системы и изделия медицинского назначения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 7,73. Уч.-изд. л. 7. Тираж 100 экз. Заказ .
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

3 семестр

Практическое занятие №1 «Классические и геометрические вероятности»

Краткие теоретические сведения

Основными в теории вероятностей являются понятия события и его вероятности.

Любое событие можно рассматривать как результат испытания (эксперимента, опыта).

Испытанием называется некоторое действие, явление, реализуемое при определенном комплексе условий.

Примеры. Бросание игральной кости (кубика), монеты, организация лотереи и т.д.

Каждое испытание характеризуется множеством возможных исходов (результатов).

Пример. Бросание монеты (испытание) характеризуется исходами: герб, решка (номинал монеты).

Событием называется любой исход испытания (эксперимента, опыта).

Примеры. Выпадение герба при бросании монеты, появление трех очков при бросании игральной кости, выигрыш в телебинго, покупка некачественного товара.

Все события могут быть разделены на три группы: 1. Достоверные. 2. Случайные. 3. Невозможные.

Событие называется *достоверным*, если в результате опыта оно обязательно происходит.

Пример. Извлечение белого шара из урны, содержащей только белые шары, является достоверным событием.

Событие называется *случайным*, если в результате опыта оно либо происходит, либо не происходит.

Примеры. Появление 5 очков при бросании игральной кости; выигрыш в лотерее; попадание в цель при стрельбе.

Событие называется *невозможным*, если в результате опыта, оно заведомо не происходит.

Пример. Появление 7 очков при бросании игральной кости.

Обычно события обозначают большими буквами латинского алфавита (с индексом или без них):

$$A, B, C, ...; \quad A_1, A_2, A_3, ..., A_n; \quad B_1, B_2, B_3, ..., B_n.$$

Достоверное событие обычно обозначают буквой Ω, а невозможное – символом $\varnothing$.

События А и В называются *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого в результате одного опыта.

Пример. Из урны, содержащей белые и черные шары, извлекли один шар. События: А – «извлечен белый шар» и В – «извлечен черный шар» являются несовместными событиями.

Любой опыт может быть охарактеризован множеством его возможных исходов (результатов). Например, если бросается игральная кость, то это множество следующее:

$$\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\},$$

где событие A_i означает появление грани с i очками. Эти события называются *элементарными событиями*, а их множество образует *пространство элементарных событий*.

Любое событие может быть представлено как некоторое множество элементарных событий.

Пример. Событие А – «выпало четное число очков при бросании игральной кости» образовано элементарными событиями A_2, A_4 и A_6. Обозначение: $A = \{A_2, A_4, A_6\}$.

Говорят, что события A_2, A_4 и A_6 *благоприятствуют* событию А, так как событие А имеет место тогда, когда имеет место одно из элементарных событий A_2, A_4 и A_6. Эти события называются *благоприятствующими исходами для А*.

Пусть опыт характеризуется n элементарными событиями $A_1, A_2, ..., A_n$. Они называются *возможными исходами* опыта(эксперимента, испытания).

Предположим, что некоторому событию А , которое может произойти в результате опыта, благоприятствуют m исходов. Пусть, из некоторых геометрических и физических соображений можно допустить, что исходы A_i равновозможны. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) определяет *классическую вероятност*ь события А.

Очевидно, для достоверного события Ω имеем $P(\Omega) = 1$, а для невозможного $\varnothing$, P($\varnothing$)=0. Для любого события

$$0 \le P(A) \le 1. \tag{1.2}$$

При вычислении вероятности P(A) по формуле (1.1) очень полезными оказываются основные понятия *комбинаторики*.

А. Перестановки. Пусть задано некоторое множество М, которое содержит n элементов. Очевидно, его элементы можно упорядочить различными способами.

Пример. Множество чисел (1, 2, 3) можно упорядочитьшестью способами:

(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2),
(3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1).

Каждое из полученных упорядоченных множеств называется *перестановкой* заданного множества. Если обозначить через P_n *число перестановок* некоторого множества из n элементов, тогда:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n. \tag{1.3}$$

Пример. Сколько различных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4 так, чтобы каждое число содержало все цифры, причем по одному разу каждую из них.

Решение. Очевидно, что из цифр 1,2, 3, 4 можно образовать $P_4 = 4! = 24$ таких чисел.

Б. Размещения. Пусть задано множество М, содержащее n элементов. Упорядоченные подмножества множества М которые содержат m элементов, где $m \le n$ называются *размещениями*.

Отметим, что одно размещение отличается от другого или порядком расположения, или хотя бы одним элементом. Число размещений из n элементов по m обозначается A_n^m. Формула для вычисления числа размещений:

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.4)$$

Заметим, что $P_n = A_n^m$.

<u>Пример.</u> На консультацию пришли 7 студентов. В аудитории 15 стульев. Сколькими способами можно рассадить студентов?

<u>Решение.</u> Число способов выразится размещениями:

$$A_{15}^7 = 15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9 = 32\,432\,400.$$

*В. Сочетания.*Пусть задано множество М, содержащее n элементов. Образуем неупорядоченные подмножества, которые содержат m элементов $(m \le n)$ и отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Говорят, что этиподмножества образуют *сочетания* из n элементов по m.Число таких сочетаний обозначается C_n^m и вычисляется по формуле:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}. \qquad (1.5)$$

<u>Пример.</u> На столе разложено 20 экзаменационных билетов. Пришедший на экзамен студент, случайно берет 2 билета. Сколько существует для него возможностей?

<u>Решение.</u> Очевидно, что число таких возможностей равно:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2!\cdot18!} = \frac{19\cdot20}{1\cdot2} = 190.$$

Имеет место формула $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Г. Пусть задано множество, которое содержит N элементов. Среди них имеются K элементов, которые обладают каким-то свойством. Из заданного множества случайно делается выборка n элементов. Среди отобранных желательно иметь k элементов с указанным свойством. Число таких выборок, очевидно, будет следующим:

$$l = C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}. \qquad (1.6)$$

Д. Пусть задано множество, которое содержит N элементов. Из него случайно берут один элемент. Число способов такого выбора, очевидно, совпадает с числом элементов, т. е. оно равно N. Выбранный элемент возвращается обратно. Опять берут один элемент. Всего возможностей N. Для обоих выборов число возможностей равно $N^2 = N \cdot N$. Если эту процедуру повторить s раз, то будем иметь N^s возможностей.

Пример. Игральная кость бросается 4 раза. Каково число возможных исходов?

Решение. При одном бросании имеем шесть возможных исходов. Для двух бросаний будем иметь $6^2 = 6 \cdot 6$ возможных исходов. При четырех бросаниях будем иметь 6^4 возможностей.

Пусть испытание, в результате которого имеет место событие A, повторяется n раз. Если A имело место k раз, тогда отношение

$$f(A) = \frac{k}{n}. \qquad (1.7)$$

называется *частотой* события A.

К. Пирсон (1857 - 1936) осуществил 24000 бросаний монеты. Герб (событие A) появился 12012 раз. Следовательно,

$$f(A) = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005 \approx 0{,}5.$$

Частота события или число, вокруг которого она колеблется, называется его *статистической вероятностью*.

Пусть заданы области G и g. Область g находится внутри области G (рисунок 1).

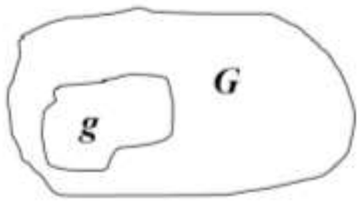


Рисунок 1 - Области G и g

Некоторая точка M наудачу проектируется на область G. Какова вероятность, что эта точка попадает в область g?

Предполагаем, что точка M может оказаться в любой точке области G. Обозначим через A событие «точка M попадает в области g». Очевидно, вероятность этого события будет прямо пропорциональна величине области g. Поэтому, естественно определить

$$P(A)=\frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}. \qquad (1.8)$$

В формуле (1.8) символ «mes» происходит от слова «мера» и означает длину, площадь или объем в зависимости от того, где расположены G и g (на прямой, на плоскости или в пространстве).

Вероятность, определения формулой (1.8), называется геометрической вероятностью события A.

Решение типовых задач

Задача 1.1. Набирая номер телефона своего товарища, студент забыл одну цифру и набрал ее случайно. Найти вероятность того, что был набран нужный номер.

Решение. Пусть A - событие «набран нужный номер». По классической формуле P(A)=m/n, где n - число всех возможных исходов, m - число исходов благоприятствующих A. Забытая цифра может быть любой из десяти: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, т. е. m=1, n=10.

Ответ. P(A)=1/10.

Задача 1.2. Набирая номер телефона, некто забыл последние 2 цифры, помня при этом лишь, что они различные. Найти вероятность того, что набран желаемый номер.

Решение. Пусть B - событие «набран желаемый номер». Очевидно, m=1, а n - число упорядоченных пар, которые можно образовать из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, т. е.

$$n=A_{10}^{2}=10\cdot 9=90 \Rightarrow P(B)=\frac{1}{90}.$$

Ответ. Вероятность набора желаемого номера равна 1/90 .

Задача 1.3. В партии имеется 10 деталей, 7 из них высшего качества. Найти вероятность того, что из 6 деталей, взятых наудачу, 4 будут высшего качества.

Решение.Введем событие А - «из 6 отобранных случайно деталей, 4 будут высшего качества».
Всего в партии 10 деталей, берут из них наудачу 6. Таким образом, $n = C_{10}^{6}$. В партии 7 деталей высшего качества и 3 не являются таковыми. Среди 6 отобранных, 4 должны быть высшего качества и 2 не будут этого качества. По формуле (1.6) находим $m = C_7^4 \cdot C_3^2$.Следовательно,

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. P(A)=1/2.

Задача 1.4. В коробке находятся 75 спичек, среди которых 5 без головок. Берут наугад 15 спичек. Найти вероятность того, что среди них будем иметь 3 спички без головок.

Решение.Введем событие А - «среди 15 отобранных спичек 3 будут без головок». $n = C_{75}^{15}, m = C_5^3 \cdot C_{70}^{12}$.

Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_5^3 \cdot C_{70}^{12}}{C_{75}^{15}} \approx 0{,}047.$

Ответ. Вероятность того, что среди 15 отобранных спичек 3 будут без головок, равна 0,047.

Задача 1.5. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в круг, попадет в треугольник.

Решение. Пусть А событие «точка попадет в треугольник».
Очевидно, P(A) будет равна отношению между площадями треугольника и круга.

$$P(A) = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2}{\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}414.$$

Ответ. Вероятность того, что точка попадает в треугольник, равна 0,414.

Задача 1.6. из интервала [0; 2] случайно берут два числа x и y. Найти вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенству

$$x^2/4 \le y \le x.$$

Решение. Пусть x и y декартовы координаты некоторой точки плоскости. Условие задачи приводит нас к следующим областям:

$$G = \{(x;y) : 0 \le x \le 2; 0 \le y \le 2\} \text{ и } g = \left\{(x;y) : \frac{x^2}{4} \le y \le x\right\}.$$

Вводим событие A – «числа x и y удовлетворяют неравенству $\frac{x^2}{4} \le y \le x$ ». Формула (1.8) для нашего случая будет выглядеть так: $P(A) = \frac{S_g}{S_G}$. На координатной плоскости xOy изображаем области G и g, вычисляем площади и берем их отношение. Получаем

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx}{4} = \frac{1}{3}.$$

Ответ. Вероятность того, что числа удовлетворяют заданному неравенству, равна 1/3.

Задачи для упражнений

1. Деревянный куб, все грани которого окрашены, распилили на 1000 одинаковых кубиков, которые положили в мешок и тщательно перемешали. Затем извлекли один кубик. Найти вероятности событий:

A – «кубик имеет три окрашенные грани».

B – «кубик имеет две окрашенные грани».

C – «кубик имеет одну окрашенную грань».

D – «кубик имеет ни одной окрашенной грани».

2. В ящике находятся 25 деталей первого сорта и 5 деталей второго сорта. Из него наудачу извлекают 10 деталей. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей окажутся две детали второго сорта.

3. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу, по одному извлекают все кубики. Какова вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке?

4. Цифры 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 написаны на карточках, которые помещаются в урну и тщательно перемешиваются. Из урны наудачу извлекают две карточки. Найти вероятность того, что из них можно образовать число, которое делится на 18.

5. В группе 25 студентов, среди которых 15 ребят. Было куплено и распределено 5 билетов в театр. Найти вероятность того, что в театр пойдут 3 ребят.

6. Площадь разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На нее случайно бросается игла длиной $2l$ ($l<a$). Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.

7. Заданы два неотрицательных числа, которые не превосходят единицу. Найти вероятность того, что сумма этих чисел не превзойдет единицу, а их произведение будет не больше $2/9$.

8. Два студента условились встретиться в определенном месте в течение часа. Первый пришедший ждет второго 15 минут, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый может прийти на нее случайно в любой момент указанного часа.

9. Деревянный прут, длиной l случайно обломали в двух местах. Найти вероятность того, что из трех образовавшихся кусков можно составить треугольник.

10. На книжную полку ставят 10 книг. Найти вероятность того, что 3 определенные книги окажутся рядом.

11. Десять друзей случайным образом садятся в десять вагонов поезда. Найти вероятность того, что ни один из них не окажется в вагоне со своим другом.

12. В урне находятся 3 белых и 7 черных шаров. Наудачу извлекли 2 шара. Найти вероятность того, что они будут белыми.

13. Номер телефона состоит из 6 цифр. Найти вероятность того, что у случайно набранного номера все цифры различны.

14. На складе находятся 100 пар сапог: 10 пар имеют черный цвет, остальные - коричневый. Наудачу взяли 8 пар. Какова вероятность, что все взятые пары будут коричневыми?

15. Некто, набирая номер телефона, забыл последние 2 цифры, помня лишь, что они различны и нечетны. Найти вероятность того, что будет набран нужный номер.

16. В некоторый момент времени в лифте 9 - этажного дома находятся 7 пассажиров. Найти вероятность того, что 2 пассажира выйдут на одном этаже, а остальные 5 - на разных этажах.

17. Семь путешественников случайным образом садятся в поезд, имеющий 12 вагонов. Найти вероятность того, что в каждый из вагонов сядет не более одного путешественника.

18. На спортивной студенческой базе находятся 30 ребят и 25 девчат. Для изучения мнения относительно графика тренировок наудачу отбирают 10 студентов. Найти вероятность того, что в эту группу попадет 8 ребят и 2 девчат.

19. Трамвай имеет 3 вагона. В него случайно садятся 8 человек. Найти вероятность того, что в первый вагон сядет 3 человека.

20. В урне находятся 20 белых и 10 черных шаров. Извлекают наудачу 11 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажутся 7 белых.

21. Имеется шесть прутиков длиной в 2, 4, 6, 8, 10 и 12 см. Из них наудачу берутся три. Найти вероятность того, что из них можно построить треугольник.

22. Бросают 5 игральных костей. Найти вероятность того, что одно очко выпадет, по крайней мере, на одной кости.

23. В чемпионате страны по футболу участвуют 16 команд, которые разбиты на 2 одинаковые подгруппы. Найти вероятность того, что 2 лучшие команды попадут в разные подгруппы.

24. В ящике находятся 200 яблок, среди которых 25 испорчены. Найти вероятность того, что среди 10 случайно отобранных яблок будут испорченные.

25. В лифт 9 - этажного здания на первом этаже село 5 человек. Каждый из них может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятности событий:

а) все пассажиры выйдут на одном этаже;

б) все пассажиры выйдут на восьмом этаже;

в) все пассажиры выйдут на разных этажах.

26. В библиотеке имеется 10 различных книг. 5 книг стоят по 4 лея каждая, 3 книги стоят по 1 лею, а 2 книги - по 3 лея. Найти вероятность того, что 2 книги, взятые наугад, стоят 5 лей.

Практическое занятие №2 «Сложение и умножение вероятностей»

Краткие теоретические сведения

Пусть заданы два события A и B .

Суммой событий A и B называется событие $C = A \cup B$, которое происходит тогда, когда происходит хотя бы одно из событий A или B.

Пример. Пусть A - «попадание в мишень при первом выстреле», B - «попадание в мишень при втором выстреле». Тогда $C = A \cup B$ - «попадание в мишень по крайней мере один раз при двух выстрелах».

Произведением событий A и B называется событие $D = A \cap B$, которое происходит тогда, когда происходят оба события A и B .

Пример. Пусть A - «извлечение белого шара первый раз из урны», B - «извлечение белого шара второй раз из урны». Тогда $D = A \cap B$ - «последовательное извлечение двух белых шаров из урны».

Замечание. Иногда сумму событий A и B обозначают через A+B , а произведение - через $A \cdot B$.

Если A и B любые события, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \tag{2.1}$$

Для двух событий A и B ($A \cap B = \varnothing$) имеем

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{2.2}$$

Пусть A, B, C – три произвольных события. Тогда

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если события A, B, C попарно несовместны, то

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C). \tag{2.4}$$

Формулы (2.3) и (2.4) могут быть распространены на n событий. Например, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \tag{2.5}$$

Говорят, что события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют *полную группу событий*, если в результате испытания, одно из них обязательно происходит, т.е. $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

Широкое применение на практике имеет полная группа попарно несовместных событий.

Пример. При бросании игральной кости события A_i - «выпало i очков» - образуют полную группу попарно несовместных событий. Для таких событий справедливо равенство

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \qquad (2.6)$$

Частным случаем полной группы является группа, состоящая из двух несовместных событий

$$A_1 = A \quad и \quad A_2 = \overline{A}.$$

Например, появление числа, выражающего номинал монеты (A) и появление герба ($\overline{A}$) при бросании монеты являются событиями, образующими полную группу.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным событием* для события A.

Очевидно, что противоположным для $\overline{A}$ является событие A. Поэтому говорят обычно о двух противоположных друг другу событиях. Легко выводится формула

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \qquad (2.7)$$

Переход к противоположному событию зачастую существенно облегчает подсчет вероятностей.

Условной вероятностью P(A/B) называется вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B уже наступило.

Имеет место формула умножения вероятностей:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A), \qquad (2.8)$$

или

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B). \qquad (2.9)$$

Формула (2.8) (или (2.9)) может быть распространена на n произвольных событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot ... \cdot P\left(A_n \Big/ \bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \qquad (2.10)$$

Говорят, что событие A не зависит от события B, если

$$P(A/B) = P(A). \qquad (2.11)$$

Независимость имеет взаимный характер: если A не зависит от B, тогда и событие B не зависит от события A. Говорят, поэтому, о независимых событиях A, B. Для таких событий имеем:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.12)$$

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если каждое из них и любая комбинация остальных независимы.

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы в совокупности, то

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n). \qquad (2.13)$$

Решение типовых задач

Задача 2.1. В коробке находятся катушки с нитками. 40% из них белые, 20% - красные, 25% - синие и 15% - зеленые. Найти вероятность того, что взятая наугад катушка будет с красными или зелеными нитками.

Решение. Пусть A событие - «взяли катушку с красными или зелеными нитками». A_1 - «взяли катушку с красными нитками». A_2 - «взяли катушку с зелеными нитками». Очевидно, A_1 и A_2 несовместны и $A = A_1 \cup A_2$. Следовательно,

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2),$$

$$P(A_1)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5},\quad P(A_2)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}.$$

Поэтому $P(A)=\frac{1}{5}+\frac{3}{20}=\frac{4+3}{20}=\frac{7}{20}$.

Ответ.Вероятность того, что взятая наудачу катушкабудет с красными или зелеными нитками, равна 7/20.

Задача 2.2. Для того чтобы сдать экзамен студент должен ответить на 3 вопроса. Программа содержит 30 вопросов, из которых студент подготовил лишь 25. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Решение.Пусть А событие - «студент сдаст экзамен». A_1 - «студент ответит на первый вопрос». A_2- «студент ответит на второй вопрос». A_3 - «студент ответит на третий вопрос».

$$P(A)=P(A_1\cap A_2\cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1\cap A_2)=$$
$$=\frac{25}{30}\cdot\frac{24}{29}\cdot\frac{23}{28}=\frac{115}{203}\approx 0{,}57.$$

Ответ. Вероятность того, что студент сдаст экзамен, равна 0,57.

Задача 2.3. В урне находятся 8 белых и 6 черных шаров. Последовательно извлекают два шара без возврата. Найти вероятность того, что будут извлечены шары: белый, черный.

Решение.Обозначим через В событие «извлеклипоследовательно шары: белый, черный». B_1 - «первый раз извлекли белый шар». B_2 - «второй раз извлекли черный шар». Тогда, $B=B_1\cap B_2$. Поэтому

$$P(B)=P(B_1\cap B_2)=P(B_1)\cdot P(B_2/B_1)=\frac{8}{14}\cdot\frac{6}{13}=\frac{4}{7}\cdot\frac{6}{13}=\frac{24}{91}\approx 0{,}26.$$

Ответ. Вероятность того, что будут извлечены последовательно белый и черный шар, равно 0,26.

Задача 2.4. Три стрелка производят по одному выстрелу по мишени. Вероятности попадания в мишень соответственно равны 0,7; 0,8 и 0,9. Найти вероятности событий:

А - в мишень попадут все стрелки;

В - в мишень попадет один стрелок;

С - в мишень попадет хотя бы один стрелок.

Решение. Вводим события: A_1 - «первый стрелок попадает в мишень». A_2 - «второй стрелок попадает в мишень». A_3 - «третий стрелок попадает в мишень». Имеем:

$$P(A_1)=0{,}7 \Rightarrow P(\overline{A}_1)=1-P(A_1)=1-0{,}7=0{,}3;$$
$$P(A_2)=0{,}8 \Rightarrow P(\overline{A}_2)=1-P(A_2)=1-0{,}8=0{,}2;$$
$$P(A_3)=0{,}9 \Rightarrow P(\overline{A}_3)=1-P(A_3)=1-0{,}9=0{,}1;$$
$$A=A_1 \cap A_2 \cap A_3,$$
$$P(A)=P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3),$$

так как события A_1, A_2 и A_3 независимы в совокупности (следует из условий задачи). Тогда

$$P(A)=0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Находим P(B). Имеем:

$$B=(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3). \quad (2.14)$$

Слагаемые суммы (2.14) являются несовместными событиями. В свою очередь, события в скобках независимы, поэтому

$$P(B)=P(A_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)+P(\overline{A}_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)+P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap A_3)=$$
$$=P(A_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(A_3)=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}3\cdot 0{,}2\cdot 0{,}9=0{,}092.$$

Находим $P(\overline{C})$. $\overline{C}$ - «в мишень не попадает ни один стрелок».

$$\overline{C}=\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3,$$
$$P(\overline{C})=P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}006.$$

Следовательно,

$$P(C)=1-0{,}006=0{,}994.$$

Ответ. $P(A)=0{,}504; \quad P(B)=0{,}092; \quad P(C)=0{,}994$.

Задача 2.5. Охотник попадает в мишень с вероятностью 0,4. Сколько раз он должен стрелять, чтобы с вероятностью не меньше чем 0,9 можно было бы утверждать о поражении мишени хотя бы раз.

Решение. Пусть A событие – «охотник попал в мишень хотя бы раз». $\overline{A}$ - «охотник не попал в мишень ни разу». Обозначим через n число выстрелов. Тогда, $P(\overline{A})=(0{,}6)^n$.

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(0{,}6)^n.$$

Из условий задачи следует неравенство

$$1-(0{,}6)^n \ge 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}1 \ge (0{,}6)^n.$$

Прологарифмируем по основанию 10 обе части полученного неравенства. Получим $n\lg 0{,}6 \le \lg 0{,}1$. Делим на lg0,6<0 обе части и приходим к результату $n \ge \dfrac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}6}=4{,}5$. Так как n должно быть целым, то $n \ge 5$.

Ответ. Охотник должен стрелять хотя бы 5 раз.

Задача 2.6. На полке в магазине находятся 80 пачек сигарет. Среди них имеются 4 пачки с порченными сигаретами. Найти вероятность того, что кто-то, покупая 4 пачки, получит хотя бы две пачки с порченными сигаретами.

Решение. Пусть A – «было куплено хотя бы две пачки с порченными сигаретами». A_1 - «было куплено две пачки с порченными сигаретами». A_2- «было куплено три пачки с порченными сигаретами». A_3 - «было куплено четыре пачки с порченными сигаретами». События A_1, A_2, A_3 несовместимы и $A=A_1 \cup A_2 \cup A_3$.

По классической формуле находим вероятности

$$P(A_1)=\frac{C_4^2 \cdot C_{76}^2}{C_{80}^4}; \quad P(A_2)=\frac{C_4^3 \cdot C_{76}^1}{C_{80}^4}; \quad P(A_3)=\frac{C_4^4}{C_{80}^4}.$$

Следовательно,

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{1}{C_{80}^4}\cdot(C_4^2\cdot C_{76}^2+C_4^3\cdot C_{76}^1+1)\approx 0{,}01.$$

Ответ. $P(A)\approx 0{,}01$.

Задача 2.7. Из двух орудий стреляют по цели. Для первого орудия вероятность попадания в цель равна 0,7, а для второго 0,8. Найти вероятность того, что цель будет поражена хотя бы раз, если из каждого орудия стреляют по одному разу.

Решение. Пусть A_1 - «первое орудие попадает в цель». A_2 - «второе орудие попадает в цель». A- «мишень поражена хотябы один раз». Очевидно, $A=A_1\cup A_2$. События A_1 и A_2совместны и независимы, поэтому

$$P(A)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=$$
$$=0{,}7+0{,}8-0{,}7\cdot 0{,}8=1{,}5-0{,}56=0{,}94$$

Ответ. Вероятность того, что цель будет поражена хотя бы один раз, равна 0,94.

Задача 2.8. Завод выпускает электролампы. Из них производственный брак составляет 3%, а 5% - монтажный брак. Найти вероятность того, что отобранная наугадэлектролампа будет бракованной.

Решение. Пусть A событие - «электролампа имеет брак». A_1 - «электролампа имеет брак производства». A_2 - «электролампа имеет монтажный брак». Тогда $A=A_1\cup A_2$. События A_1 и A_2 совместны и независимы, поэтому

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1)\cdot P(A_2)=0{,}03+0{,}05-0{,}0015\approx 0{,}079.$$

Ответ. Вероятность того, что отобранная электролампа будет бракованной, равна 0,079.

Задачи для упражнений

1. На стадионе установлены три экрана. Вероятности того, что в данный момент горят экраны, равны соответственно 0,9; 0,8; и 0,7. Найти вероятности событий:

а) в данный момент горят два экрана;

б) в данный момент горит не более одного экрана;

в) в данный момент горят 3 экрана.

2. На сборку поступают детали с трех станков. Первый станок дает 20% деталей, второй - 30%, а третий - 50%. Найти вероятности того, что из трех взятых наугад деталей:

а) все будут выпущены разными станками;

б) все будут выпущены третьим станком;

в) две детали выпущены вторым станком.

3. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9; для второго экзамена эта вероятность равна 0,7; для третьего - 0,6. Найти вероятности событий:

А - «студент сдаст два экзамена»;

В - «студент сдаст хотя бы два экзамена»;

С - «студент сдаст не более двух экзаменов».

4. Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность, что будет сделано 4 выстрела?

5. Шесть охотников заметили лису и выстрелили одновременно. В предположении, что каждый охотник попадает и убивает лису с вероятностью 1/3, найти вероятность того, что лиса будет убита.

6. Слово «вектор» образовано из букв, написанных на карточках, которые перемешиваются и опускаются в урну. Затем достают по одной 4 карточки и располагают их в24ряд слева направо. Найти вероятность того, что получилось слово «крот».

7. Для прохождения производственной практики студентам было предложено 15 мест г. Курск, 8 – в Железногорске и 7 – в Курчатове. Найти вероятность того, что 2 студента пройдут практику в одном городе.

8. На складе находятся 40 пар обуви черного цвета, 25 пар коричневого, 23 пары белого и 12 пар обуви красного цвета. Внешне коробки обуви ничем не отличаются. Найти вероятность того, что взятая наугад коробка содержит обувь белого или красного цвета.

9. Бросается игральная кость. Найти вероятности следующих событий:

а) при однократном бросании игральной кости получим четное или кратное трём число очков;

б) при трёхкратном бросании игральной кости только один раз получим четное или кратное трём число очков;

в) при четырёхкратном бросании игральной кости хотя бы один раз получим четное или кратное трём число очков.

10. Случайно образуется двузначное число. Найти вероятность того, что это число будет делиться:

а) на 2 или на 5;

б) на 2 и на 5.

11. Написанные на 30 карточках числа от 11 до 40, помещаются в мешочек и перемешиваются. Найти вероятность того, что при случайном отборе одной карточки получим число, которое делится на 2 или на 3.

12. Найти вероятность того, что при бросании трех игральных костей, хотя бы на одной выпадет два очка.

13. Преподаватель подготовил для экзамена 20 билетов, из которых 5 по алгебре, 5 по геометрии и 10 по математическому анализу. Студент берет последовательно три билета, без возвращения. Найти вероятности событий:

А - «студент взял 3 билета по алгебре»;

В - «студент взял один билет по геометрии»;

С - «студент взял хотя бы один билет по математическому анализу».

14. Два стрелка стреляют по цели по одному разу. Вероятность поражения цели для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена один раз.

15. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение смены потребует его внимания первый станок, равна 0,7; второй - 0,75; третий - 0,8. Найти вероятность того, что в течение смены внимания рабочего потребуют какие-либо два станка.

16. Радист трижды вызывает корреспондента. Вероятность того, что будет принят первый вызов, равна 0,2; второй - 0,3; третий - 0,4. События, состоящие в том, что вызов будет услышан, независимы. Найти вероятность того, что корреспондент услышит вызов радиста.

17. Для сообщения об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора - автомата. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95; второй - 0,9. Найти вероятность того, что при аварии поступит сигнал: а) хотя бы от одного сигнализатора; б) только от одного сигнализатора.

18. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна 1/7. Какова вероятность того, что обладатель пяти билетов лотереи выиграет: а) по всем пяти билетам ? б) ни по одному ? в) хотя бы по одному билету ?

19. Экзаменационный билет содержит три вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый, второй вопросы, равна по 0,9; на третий - 0,8. Найти вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо ответить:

а) на все вопросы;

б) по крайней мере, на два вопроса билета.

20. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что при случайном выборе билета, студент ответит на него, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

21. Имеется 60 предметов, среди которых 4 с дефектами. Эти предметы разделены на 4 одинаковые группы. Найти вероятность того, что в каждую группу попадет по одному предмету с дефектом.

22. Заводом послана автомашина за различными материалами на четыре базы. Вероятность наличия нужного материала на первой базе равна 0,9, на второй - 0,95, на третьей - 0,8, на четвертой - 0,6. Найти вероятность того, что только на одной базе не окажется нужного материала.

23. Три команды A_1, A_2, A_3 спортивного общества А состязаются соответственно с тремя командами B_1, B_2, B_3 общества В. Вероятности того, что команды общества А выиграют матчи у команд общества В, таковы:

при встрече A_1 с B_1 - 0,8;

при встрече A_2 с B_2 - 0,4;

при встрече A_3 с B_3 - 0,4.

Для победы необходимо выиграть не менее двух матчей из трех (ничьи во внимание не принимаются). Найти вероятность победы общества А.

Практическое занятие №3 «Формула полной вероятности. Формула Байеса»

Краткие теоретические сведения

Пусть событие A может произойти при условии появления одного из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу, т.е.

$$B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n \qquad (3.1)$$

Предположим также, что события попарно несовместны

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \ i \neq j, \ i, j=1, 2, \ldots, n. \qquad (3.2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + ... + \\ + P(B_n) \cdot P(A/B_n). \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Формула (3.3) может быть переписана более компактно

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i). \qquad (3.4)$$

Формула (3.3) (или (3.4)) называется формулой *полной вероятности*. События $B_1, B_2, ..., B_n$ называются обычно *гипотезами*. Вероятности гипотез

$$P(B_1), P(B_2), ..., P(B_n) \qquad (3.5)$$

заданы. Производится испытание, чьим результатом является событие A. Появление A может изменить заданные вероятности. Поэтому можно поставить задачу определения условных вероятностей

$$P(B_1 / A), P(B_2 / A), ..., P(B_n / A). \qquad (3.6)$$

Имеем

$$P(B_k / A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A / B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}, \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (3.7)$$

Формула (3.7) называется *формулой Байеса*.

Вероятности (3.5), которые известны до испытания, называются *вероятностями априори*, а вероятности (3.6), которые вычисляются по (3.7), называются *вероятностями апостериори*.

Решение типовых задач

Задача 3.1. Управление лотереи организует специальный тираж с четырьмя категориями выигрышей. Вероятности того, что купленный билет будет принадлежать соответствующей категории, приведены в таблице.

Категория	1	2	3	4
Вероятность принадлежности	0,46	0,24	0,16	0,14

Даны также вероятности выигрыша для каждой категории:

Категория	1	2	3	4
Вероятность выигрыша	0,55	0,25	0,06	0,14

Найти вероятность того, что купленный билет будет выигрышным.

Решение. Пусть А событие «купленный билет будет выигрышным». Вводим события - гипотезы:

B_1 - «билет относится к первой категории»,

B_2 - «билет относится к второй категории»,

B_3 - «билет относится к третьей категории»,

B_4 - «билет относится к четвертой категории».

Тогда,

$$P(B_1) = 0{,}46; \quad P(B_2) = 0{,}24; \quad P(B_3) = 0{,}16; \quad P(B_4) = 0{,}14.$$

Даны также условные вероятности

$$P(A/B_1)=0{,}55;\;\; P(A/B_2)=0{,}25;\;\; P(A/B_3)=0{,}06;\;\; P(A/B_4)=0{,}14.$$

Используя формулы (3.3), получаем

$$P(A)=0{,}46\cdot 0{,}55+0{,}24\cdot 0{,}25+0{,}16\cdot 0.06+0{,}14\cdot 0{,}14\approx 0{,}34.$$

Ответ. Вероятность того, что купленный билет будет выигрышным, равна 0,34.

Задача 3.2. В спортклубе имеется 15 мячей, из которых 9 новые. Для первой игры случайно взяли 3 мяча, которые после нее вернули. Для второй игры снова взяли 3 мяча. Найти вероятность того, что мячи, взятые для второй игры, все новые.

Решение. Обозначим через A событие «для второй игры было взято 3 новых мяча». Неизвестно, какие мячи были взяты для первой игры, поэтому вводим события-гипотезы: B_i - «взято i новых мячей для первой игры», i=0, 1, 2, 3. Применим формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned}&P(A)=P(B_0)\cdot P(A/B_0)+P(B_1)\cdot P(A/B_1)+\\&+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3).\end{aligned}\qquad(3.8)$$

Вычислим все вероятности, присутствующие в этой формуле, используя классическое определение (формула (1.1))

$$P(B_0)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3};\;\; P(B_1)=\frac{C_9^1\cdot C_6^2}{C_{15}^3};\;\; P(B_2)=\frac{C_9^2\cdot C_6^1}{C_{15}^3};\;\; P(B_3)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3};$$

$$P(A/B_0)=\frac{C_9^3}{C_{15}^3};\;\; P(A/B_1)=\frac{C_8^3}{C_{15}^3};\;\; P(A/B_2)=\frac{C_7^3}{C_{15}^3};\;\; P(A/B_3)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}.$$

Подстановка этих данных в формулу (3.8) дает:

$$P(A)=\frac{C_6^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_9^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^1\cdot C_6^2}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_8^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^2\cdot C_6^1}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_7^3}{C_{15}^3}+\frac{C_9^3}{C_{15}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{15}^3}=0{,}089.$$

Ответ. Вероятность того, что для второй игры взяли три новых мяча, равна 0,089.

Задача 3.3. В группе спортсменов 20 лыжников, 6 велосипедистов и 4 бегуна. Для того чтобы попасть на соревнование каждый спортсмен должен выполнить квалификационную норму. Вероятность выполнения нормы для велосипедиста равна 0,8; для лыжника - 0,9; для бегуна - 0,75. Найти вероятность того, что спортсмен, выбранный наугад, выполнит квалификационную норму.

Решение. Пусть A событие «спортсмен выполнит норму»; B_1 - «спортсмен является лыжником»; B_2 - «спортсмен является велосипедистом»; B_3 - «спортсмен является бегуном».

$$P(B_1)=\frac{20}{30}=\frac{2}{3};\ \ P(B_2)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5};\ \ P(B_3)=\frac{4}{30}=\frac{2}{15}.$$

$$P(A/B_1)=0{,}9;\ \ P(A/B_2)=0{,}8;\ \ P(A/B_3)=0{,}75.$$

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+P(B_3)\cdot P(A/B_3).$$

Следовательно,

$$P(A)=\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{2}{15}\cdot\frac{3}{4}=\frac{43}{50}=0{,}86.$$

Ответ. Вероятность того, что взятый наугад спортсмен, выполнит квалификационную норму, равна 0,86.

Задача 3.4. С подводной лодки пускают по военному кораблю четыре торпеды. Вероятность того, что торпеда попадет в корабль, равна 0,3. Для потопления корабля достаточно двух торпед, а если одна торпеда попадает в корабль, то он погружается с вероятностью 0,6. Найти вероятность потопления корабля.

Решение. Вводим события:

A - «корабль будет потоплен»;

B_i - «в корабль попало i торпед», i=0, 1, 2, 3, 4;

$\overline{A}$ - «корабль не будет потоплен».

$$P(\overline{A})=P(B_0)\cdot P(\overline{A}/B_0)+P(B_1)\cdot P(\overline{A}/B_1)+P(B_2)\cdot P(\overline{A}/B_2)+$$
$$+P(B_3)\cdot P(\overline{A}/B_3)+P(B_4)\cdot P(\overline{A}/B_4)=P(B_0)\cdot P(\overline{A}/B_0)+P(B_1)\cdot P(\overline{A}/B_1),$$

так как $P(\overline{A}/B_2) = P(\overline{A}/B_3) = P(\overline{A}/B_4) = 0$,
$P(B_0)$ - вероятность того, что ни одна торпеда не попадет в корабль. Так как события независимы, имеем:

$$P(B_0) = (1-0{,}3)^4 = (0{,}7)^4 \approx 0{,}24.$$

$P(B_1)$ - вероятность того, что одна из четырех торпед попадет в корабль. Ее можно вычислить по формуле Бернулли.

$$P(B_1) = C_4^1 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^3 \approx 0{,}41.$$

Условные вероятности

$$P(\overline{A}/B_0) = 1; \quad P(\overline{A}/B_1) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

Следовательно,

$$P(\overline{A}) = 0{,}24 \cdot 1 + 0{,}41 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}4.$$
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) \approx 0{,}6.$$

Ответ. Вероятность потопления корабля равна 0,6.

Задача 3.5. Магазин получает обувь с трех фабрик. 35% обуви поставляет магазину фабрика N_1, 40% - фабрика N_2, а остальная обувь производится на фабрике N_3. Фабрика N_1 дает 5% брака, вторая - 12% брака и третья дает в среднем 8% брака. Некто купил пару обуви, которая оказалась качественной. Найти вероятность того, что эта пара обуви выпущена фабрикой N_2.

Решение. Вводим события - гипотезы:

B_i - « пара обуви выпущена фабрикой N_i», i=1,2,3. Тогда,

$$P(B_1) = 0{,}35; \quad P(B_2) = 0{,}4; \quad P(B_3) = 0{,}25.$$

Вводим также событие А – «купленная пара обуви качественная».
Нужно найти $P(B_2/A)$. Используя формулу Байеса, получим

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A/B_i)} =$$

$$= \frac{0,4\cdot 0,88}{0,35\cdot 0,95 + 0,4\cdot 0,88 + 0,25\cdot 0,92} \approx 0,385.$$

Ответ. Вероятность того, что купленная пара обуви выпущена фабрикой N_2, равна 0,385.

Задача 3.6. Для участия в соревнованиях из трех групп берут студентов: из первой группы - 4 студента, из второй - 6 и из третьей группы - 5. Вероятности попадания студента из групп N_1, N_2 и N_3 в сборную Университета равны 0,9; 0,7; и 0,8 соответственно. Выбранный наудачу студент попал в сборную. Найти вероятность того, что он из первой группы.

Решение.Пусть А - событие «студент, выбранный наудачу, попал в сборную Университета». Вводим события - гипотезы: B_1 - «студент из первой группы», B_2 - «студент из второй группы», B_3 - «студент из третьей группы». Нужно вычислить $P(B_1/A)$. Используя формулу Байеса, будем иметь

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i)\cdot P(A/B_i)};$$

где $P(B_1) = 4/15;\ \ P(B_2) = 2/5;\ \ P(B_3) = 1/3;$

$P(A/B_1) = 0,9;\ \ P(A/B_2) = 0,7;\ \ P(A/B_3) = 0,8.$

Поэтому,

$$P(B_1/A) = \frac{\frac{4}{15}\cdot\frac{9}{10}}{\frac{4}{15}\cdot\frac{9}{10} + \frac{2}{5}\cdot\frac{7}{10} + \frac{1}{3}\cdot\frac{8}{10}} = \frac{4\cdot 9}{4\cdot 9 + 6\cdot 7 + 5\cdot 8} \approx 0,31.$$

Ответ. Вероятность того, что студент, включенный в сборную, из первой группы, равна 0,31.

Задача 3.7. Имеются 3 урны со следующим составом: в первой урне 5 белых и 5 черных шаров, во второй урне - 6 белых и 8 черных шаров, а в третьей урне - 3 белых и 10 черных шаров. Из урны, выбранной наугад, извлечен белый шар. Найти вероятность того, что извлечение производилось из второй урны.

Решение. Вводим события - гипотезы: B_1 - «извлечениепроизводилось из первой урны», B_2 - «извлечениепроизводилось из второй урны», B_3 - «извлечение производилось из третьей урны». Имело место событие A - «был извлечен белый шар». Вычислим:

$$P(B_2 / A) = \frac{P(B_2) \cdot P(A / B_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}. \qquad (3.10)$$

Имеем $P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}$,

$$P(A / B_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}; \;\; P(A/B_2) = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}; \;\; P(A/B_3) = \frac{3}{13}.$$

Подставим эти вероятности в формулу (3.10). Получим

$$P(B_2 / A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{13}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7} + \frac{3}{13} \right)} \approx 0{,}37.$$

Ответ. Вероятность того, что извлечение производилось из второй урны, равно 0,37.

Задачи для упражнений

1. На сборку поступает 40% деталей с первого станка, 30% - со второго, 20% - с третьего и с четвертого станка поступает 10% от общего количества деталей. Известно, что первый станок дает 2% брака, второй - 1%, третий - 0,5% и четвертый - 0,2%. Найти вероятность того, что случайно поступающая на сборку деталь - качественная.

2. По самолету производится три выстрела, с вероятностями попадания, равными 0,4; 0,5 и 0,7 соответственно. Для сбития самолета достаточно трех попаданий. В результате одного попадания самолет будет сбит с вероятностью 0,2; а для двух попаданий эта вероятность равна 0,6.

а) Найти вероятность того, что в результате трех выстрелов самолет будет сбит.

б) Самолет был сбит. Найти вероятность того, что это произошло в результате двух попаданий.

3. В урне находятся 10 шаров, из которых 7 белых. Из нее выпал один шар. Найти вероятность извлечения после этого из урны белого шара.

4. Две урны имеют одинаковый состав: a белых шаров и b черных. Из первой урны во вторую переложили один шар, перемешали, затем из второй в первую урну опять переложили шар. После этих процедур из первой урны извлекают один шар. Найти вероятность того, что извлеченный шар будет черным.

5. В составе студенческого отряда две бригады студентов второго курса и одна бригада с первого курса. В каждой бригаде второкурсников 4 мальчика и 6 девочек, а в бригаде первокурсников 5 мальчиков и 3 девочки. Из бригады, выбранной наудачу, посылается в город один студент.

а) Найти вероятность того, что в город поедет мальчик.

б) В город поехал мальчик. Найти вероятность того, что это студент первого курса.

6. В специализированную больницу поступают больные, которые страдают болезнями B_1, B_2 и B_3. 50% больныхстрадают болезнью B_1, 30% имеют болезнь B_2 и 20% - болезнь B_3. Вероятности излечения этих болезней равны 0,7; 0,8; 0,9 соответственно. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что он страдал болезнью B_2.

7. В группе из 20 студентов, пришедших на экзамен, восемь подготовлены отлично, шесть - хорошо, четыре - посредственно, и два - плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, может ответить на все вопросы, хорошо - на 35, посредственно - на 25, плохо - на 10 вопросов. Вызванный наугад студент ответил на три произвольно заданных вопроса. Найти вероятность того, что этот студент подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

8. Три завода выпускают электролампы. Первый завод выпускает 45% всей продукции, второй - 40% и третий - 15%. 70% электроламп первого завода стандартны, 80% - со второго и 81% - с третьего завода. Найти вероятность того, что купленная в магазине электролампа будет стандартной.

9. Два стрелка производят по некоторой цели по одному выстрелу. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,2; а для второго - 0,6. В цель попали один раз. Найти вероятность того, что промахнулся первый стрелок.

10. Имеются две урны с шарами. В первой урне находятся 5 белых и 6 черных шаров. Во второй - 4 белых и 8 черных шаров. Из первой урны перенесли во вторую наудачу 3 шара, после чего из второй урны извлекли 4 шара. Найти вероятность того, что все извлеченные шары белые.

11. Имеем 6 урн следующего состава: в двух урнах находится по 2 белых и 4 черных шара, три урны содержат по 2 белых и 8 черных шаров, а в одной урне имеется 6 белых и 2 черных шара. Из урны, взятой наудачу, извлекают один шар. Найти:

а) вероятность того, что извлеченный шар белый;

б) вероятность того, что извлекли белый шар из одного из составов.

12. В группе из 20 стрелков имеются четыре отличных, десять хороших и шесть посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего - 0,7, для посредственного - 0,5. На линию огня вызывают наугад два стрелка. Они производят по одному выстрелу. Найти вероятность того, что стрелки попадут в цель.

13. На торговой базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек первого завода, 90 соответствуют стандарту, а из 100 штук, изготовленных на втором заводе, стандартны 80. Определить вероятность того, что взятая наудачу с базы лампочка, будет стандартная.

14. Двадцать пять экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Студент может ответить только на 40 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительно вопрос из другого билета.

15. Радиолампа, поставленная в телевизор, может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями $p_1 = 0{,}25$; $p_2 = 0{,}5$ и $p_3 = 0{,}25$. Вероятности того, что лампа проработает определенное количество часов, для этих партий соответственно равны: 0,1; 0,2 и 0,4. Найти вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

16. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1% бракованных, со второго - 0,2%, с третьего - 0,25%, с четвертого - 0,5%. Производительности их относятся как4:3:2:1 соответственно. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена: а) на первом; б) на втором; в) на третьем; г) на четвертом станке. Как проверить правильность вычислений этих вероятностей ?

17. Имеется 10 одинаковых по виду урн. Из них в 9 находятся по 2 черных и два белых шара, а в одной - 5 белых и один черный шар. Из наугад взятой урны извлечен шар. Найти вероятность того, что этот шар взят из урны, содержащей 5 белых шаров, если он оказался белым.

18. Группа из 20 стрелков упражняется в стрельбе. Пять стрелков попадают в мишень с вероятностью 0,8; семь стрелков - с вероятностью 0,7; шесть - с вероятностью 0,6 и двое - с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. Какой группе, вероятнее всего, принадлежит этот стрелок?

19. Пассажир может обратиться для получения билета в одну из трех касс. Вероятности обращения в каждую кассу зависят от их местоположения и равны соответственно: 0,3; 0,45 и 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира не будут билетов, равна для первой кассы 0,4, для второй - 0,2 и для третьей - 0,1. Пассажир направился за билетом в одну из касс и приобрел билет. Найти вероятность того, что это была первая касса.

20. Для участия в спортивных соревнованиях были привлечены студенты из двух групп: из первой - 10 студентов, из второй - 8. Вероятность участия в соревнованиях для студента первой группы равна 0.9, а для студента второй группы - 0.7. Найти вероятности событий:

А - «студент будет участвовать в соревнованиях»;

В - «студент не будет участвовать в соревнованиях».

Практическое занятие №4 «Формула Бернулли. Формулы Муавра-Лапласа»

Краткие теоретические сведения

Пусть испытания (опыт), в результате которого появляется событие A или $\overline{A}$, повторяются n раз. Заданы вероятности

$$P(A) = p; \quad P(\overline{A}) = 1 - p = q.$$

Предположим, что испытания независимы. Обозначим через $P_n(m)$ вероятность того, что в n испытаниях событие A произойдет m раз, где m=1, 2, …, n.

Известно, что эта вероятность вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (4.1)$$

Число m_0 называется *наивероятнейшим числом*, если

$$P_n(m_0) = \max_{0 \le m \le n} P_n(m) \qquad (4.2)$$

Для числа m_0 имеет место неравенство

$$n\,p - q \le m_0 \le n\,p + p \qquad (4.3)$$

Имеем

$$n\,p + p - (np - q) = np + p + np + q = p + q = 1.$$

Если np-q (а также np+p) целое число, то неравенству (4.3) удовлетворяют два числа m_0 и $m_0 - 1$. Для дробных np-q и np+p имеем одно наивероятнейшее число m_0.

Применение формулы (4.1) становится довольно трудным когда n и m являются большими числами. В таких случаях, обычно, делают приближенные вычисления, в основе которых локальная формула Муавра-Лапласа.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x_{m,n}), \qquad (4.4)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (4.5)$$

$$x_{m,n} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.6)$$

Формула (4.4) применяется следующим образом. Для заданных значений m, n, p, q вычисляется $x_{m,n}$. Затем из таблиц находят $\varphi(x_{m,n})$. Значения функции (4.5) можно найти в любом учебнике или задачнике по теории вероятностей и математической статистике. Найденное в таблице значение функции, умножается на число $\frac{1}{\sqrt{npq}}$. В результате получим приближенное значение вероятности $P_n(m)$.

Замечание. Функция (4.5) табулирована для $x \in [0;4]$. $\varphi(x) \approx 0$ для $x>4$. Для нахождения $\varphi(x)$ при $x<0$ используют ее четность, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Иногда нужно найти вероятность того, что в серии из n независимых испытаний, число появлений события А будет заключено между двумя заданными значениями m_1 и m_2, т.е. $m_1 \le m \le m_2$.

Введем обозначение

$$P_n(m_1; m_2) = P_n(m_1 \le m \le m_2). \qquad (4.7)$$

Очевидно,

$$P_n(m_1; m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + \ldots + P_n(m_2). \qquad (4.8)$$

Таким образом, можно вычислить $P_n(m_1; m_2)$, вычислив каждое слагаемое суммы (4.8) по формуле Бернулли или по локальной формуле Муавра-Лапласа.

Существует, к счастью, более рациональный путь, а именно, применение интегральной формулы Муавра-Лапласа.

$$P_n(m_1;m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (4.9)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad (4.10)$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (4.11)$$

Формула (4.9) применяется следующим образом.Для заданных n, m_1, m_2, p и q вычисляем значения x_1 и x_2 аргумента функции Ф(x) по формулам (4.11). Функция (4.10) называется *функцией Лапласа*. Она табулирована для значений $x \in [0;4]$. После вычисления x_1 и x_2 из таблицы находим $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$. Разность $\Phi(x_2)$-$\Phi(x_1)$ дает приближенное значение вероятности $P_n(m_1;m_2)$. Если нужно вычислить значение Ф(x) для x>4, то можно положить Ф(x)=0,5. Для отрицательных значений аргумента используем свойство нечетности, т.е.

$$\Phi(-x)=-\Phi(x).$$

Пусть в результате n независимых испытаний (экспериментов) вероятность появления события А изменяется от одного испытания к другому и принимает значения $p_1, p_2, ..., p_n$. Тогда вероятность того, что событие А произойдет m раз в этой серии будет равно коэффициенту при x^m многочлена

$$\varphi(x) = (q_1 + p_1 x) \cdot ... \cdot (q_n + p_n x), \qquad (4.12)$$

где $q_k = 1 - p_k$, k=1, 2, …, n.

Пусть в результате опыта, который повторяется n раз, может произойти одно из событий $A_1, A_2, ..., A_k$. Обозначим $p_1 = P(A_1),\ p_2 = P(A_2), ..., p_k = P(A_k)$. Очевидно,

$$p_1 + p_2 + ... + p_k = 1. \qquad (4.13)$$

Если обозначить через $P_n(m_1;m_2;...;m_k)$ - вероятность того, что в этих n испытаниях A_1 произойдет m_1 раз; A_2 произойдет m_2 раз; … A_k произойдет m_k раз, то

$$P_n(m_1;m_2;...;m_k) = \frac{n!}{m_1!...m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_k^{m_k}. \qquad (4.14)$$

В некоторых испытаниях вероятность появления A, т.е. P(A)=p мала, (близка к 0). Тогда, для больших n вероятность $P_n(m)$ может быть вычислена по формуле *Пуассона*:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad (4.15)$$

где $\lambda = np$.

Если m – число появлений события A в n независимых испытаниях, то отношение m/n называется *относительной частотой* события A.

Известно, что

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right), \qquad (4.16)$$

где $\varepsilon > 0$ заданное число, Ф(x) – функция Лапласа, p=P(A), $q = P(\overline{A}) = 1 - p$.

Решение типовых задач

Задача 4.1. Вероятность сдать один из 5 экзаменов сессии равна 0,7. Найти вероятности того, что:

а) будут сданы три экзамена;

б) будут сданы два экзамена;

в) будут сданы хотя бы два экзамена.

Решение. а) Испытание состоит в сдаче экзамена, т.е. n=0,7; p=0,7; q=1-p=0,3. Нужно вычислить $P_5(3)$. По формуле (4.1) будем иметь

$$P_5(3) = C_5^3 (0{,}7)^3 \cdot (0{,}3)^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}7)^3 \cdot (0{,}3)^2 = 10 \cdot (0{,}7)^3 \cdot (0{,}3)^2 \approx 0{,}31.$$

б) Необходимо вычислить $P_5(2)$. Применим опять (4.1):

$$P_5(2) = C_5^2 (0,7)^2 \cdot (0,3)^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0,49 \cdot 0,027 \approx 0,13.$$

в) $P_5(m \geq 2) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5).$

Задача, однако, может быть решена более рационально, переходом к противоположному событию.

Пусть A событие – «$m \geq 2$», тогда $\overline{A}$ - «m<2». Следовательно, $P(\overline{A}) = P_5(0) + P_5(1).$

$$P(\overline{A}) = C_5^0 (0,7)^0 \cdot (0,3)^5 + C_5^1 0,7 \cdot (0,3)^4 = (0,3)^5 + 5 \cdot 0,7 \cdot 0,0081 \approx 0,03.$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,03 = 0,97.$$

<u>Ответ.</u> $P_5(3) \approx 0,31;\ P_5(2) \approx 0,13;\ P(m \geq 2) \approx 0,97.$

<u>Задача 4.2.</u> По данным метеослужбы вероятность того, что 1-го июня в Курске пойдет дождь равна 4/17. Найти наивероятнейшее число дождевых дней 1-го июня в Курске на протяжении 50 лет.

<u>Решение.</u> Имеем: n=50; $p = \frac{4}{17}$; $q = \frac{13}{17}$;

$$np + p = 50 \cdot \frac{4}{17} + \frac{4}{17} = \frac{200}{17} + \frac{4}{17} = \frac{204}{17} = 12;$$

$$np - q = \frac{200}{17} - \frac{13}{17} = \frac{187}{17} = 11.$$

Поэтому, $11 \leq m_0 \leq 12$.

<u>Ответ.</u> $m_0 = 12; m_0 - 1 = 11.$

<u>Задача 4.3.</u> Стреляют 4 раза по цели. Вероятности попаданий соответственно равны 0,4; 0,3; 0,2; и 0,1. Найти вероятность того, что в результате стрельбы:

а) не попадут ни разу, попадут один, два, три раза;

б) попадут хотя бы раз;

в) попадут хотя бы два раза.

<u>Решение.</u> Число опытов n=4.

$$p_1 = 0,4;\quad p_2 = 0,3;\quad p_3 = 0,2 \text{ и } p_4 = 0,1.$$

Следовательно,

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}4 = 0{,}6;\quad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$$
$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;\quad q_4 = 1 - p_4 = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

а) Образуем функцию

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= (q_1 + p_1x)(q_2 + p_2x)(q_3 + p_3x)(q_4 + p_4x) = \\ &= (0{,}6 + 0{,}4x)(0{,}7 + 0{,}3x)(0{,}8 + 0{,}2x)(0{,}9 + 0{,}1x) = \\ &= 0{,}302 + 0{,}460x + 0{,}205x^2 + 0{,}031x^3 + 0{,}002x^4.\end{aligned}$$

Таким образом, получим следующий

Ответ.

а) $P_4(0) = 0{,}302;\ P_4(1) = 0{,}46;\ P_4(2) = 0{,}205;\ P_4(3) = 0{,}031;$
$P_4(4) = 0{,}002;$

б) $P_4(m \geq 1) = 1 - P_4(0) = 0 - 0{,}302 = 0{,}698;$

в) $P_4(m \geq 2) = 1 - [P_4(0) + P_4(1)] = 1 - 0{,}302 - 0{,}46 = 0{,}238.$

Задача 4.4. Цель разделена на три сектора. Вероятность попадания в эти сектора в результате одного выстрела соответственно равны 0,5; 0,3; и 0,2. Найти вероятность того, что в результате 6 выстрелов попадем 3 раза в первый сектор, 2 раза – во второй и один раз в третий сектор.

Решение. Имеем: n=6; $p_1 = 0{,}5;\ p_2 = 0{,}3;\ p_3 = 0{,}2.$

$$m_1 = 3;\ m_2 = 2;\ m_3 = 1.$$

По формуле (4.4) получим

$$P_6(3;2;1) = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}\cdot(0{,}5)^3\cdot(0{,}3)^2\cdot 0{,}2 \approx 0{,}135.$$

Ответ. $P_6(3;2;1) \approx 0{,}135.$

Задача 4.5. Найти вероятность того, что событие A произойдет 80 раз в результате повторения опыта 400 раз, если A происходит в одном опыте с вероятностью 0,2.

Решение. По данным задачи:

$$n=400;\ m=80;\ p=P(A)=0{,}2;\ q = p(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}8.$$

Так как n и m числа большие, то применим локальную формулу Муавра-Лапласа (4.4) для вычисления вероятности $P_{400}(80)$. Имеем:

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \varphi(x_{80,\,400}),$$

где

$$x_{80,\,400} = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{80 - 80}{8} = 0.$$

Следовательно,

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} \cdot \varphi(0) = \frac{0{,}3989}{8} \approx 0{,}05$$

Ответ. $P_{400}(80) \approx 0{,}05$.

Задача 4.6. В магазин поступает обувь некоторой фирмы. Вероятность того, что пара обуви качественная, равна 0,8. Найти вероятность того, что из 400 полученных пар некачественными будут не менее 70 и не более 100 пар.

Решение. Необходимо вычислить $P_{400}(70; 100)$. Для этого применим интегральную формулу Муавра-Лапласа.

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -\frac{10}{8} = -1{,}25;\ x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}82}} = \frac{20}{8} = 2{,}5.$$

Следовательно,

$$P_{400}(70; 100) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$
$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Ответ. $P_{400}(70; 100) \approx 0{,}89$.

Задача 4.7. в каждом из 500 независимых испытаний событие A происходит с вероятностью p=P(A)=0,4. Найти вероятность того, что число m появлений события A будет находится между 180 и 240.

<u>Решение.</u> Имеем: n=500; p=0,4; q=0,6. Нужно найти $P_{500}(180 \le m \le 240) = P_{500}(180; 240)$. Используем интегральную формулу Муавра-Лапласа (4.9).

$$\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{120} \approx 11.$$

$$x_1 = \frac{180 - 500 \cdot 0{,}4}{\sqrt{500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \approx -1{,}82;$$

$$x_2 = \frac{240 - 500 \cdot 0{,}4}{11} \approx 3{,}64.$$

Следовательно,

$$P_{500}(180; 240) \approx \Phi(3{,}64) - \Phi(-1{,}82) = \Phi(3{,}64) + \Phi(1{,}82) =$$
$$= 0{,}4999 + 0{,}4656 = 0{,}9655.$$

<u>Ответ.</u> $P_{500}(180; 240) \approx 0{,}96.$

<u>Задача 4.8.</u> На телефонной станции неправильные соединения случаются с вероятностью p=1/200. Найти вероятность того, что из 200 соединений неправильными будут:

а) одно соединение; б) более двух соединений.

<u>Решение.</u> а) Так как n велико, а p мало, то применим формулу Пуассона (4.15).

$$n = 200\,; p = \frac{1}{200}; m = 1; \lambda = np = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1.$$

Из таблицы находим $P_{500}(1) = e^{-1} \approx 0{,}3679.$

б) Дано $n = 200\,; p = \frac{1}{200}; m > 2; \lambda = 1.$ Имеем

$$P_{200}(m > 2) = 1 - P_{200}(m \le 2) = 1 - [P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2)] \approx$$
$$\approx 1 - [0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839] \approx 1 - 0{,}9197 \approx 0{,}0803.$$

Следовательно, $P_{200}(m > 2) \approx 0{,}0803.$

<u>Ответ.</u> $P_{200}(1) \approx 0{,}37; P_{200}(m > 2) \approx 0{,}08.$

<u>Задача 4.9.</u> вероятность появления события А в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найти вероятность того, что

относительная частота события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Решение. Воспользуемся формулой (4.16). Подставляя сюда данные задачи, будем иметь:

$$P\left(\left|\frac{m}{10000}-0{,}75\right|<0{,}001\right)\approx 2\Phi\left(0{,}001\cdot\sqrt{\frac{10000}{0{,}75\cdot 0{,}25}}\right)=$$

$$=2\Phi\left(0{,}001\cdot\sqrt{\frac{10000}{(3/4)\cdot(1/4)}}\right)=$$

$$=2\Phi(0{,}001\cdot 400\cdot 1/\sqrt{3}=2\Phi(0{,}4/\sqrt{3})=2\Phi(0{,}23)\approx 0{,}182.$$

Ответ. Вероятность отклонения равна 0,182.

Задачи для упражнений

1. Процент всхожести семян пшеницы составляет 80 из 100. Найти вероятность того, что из 6 семян взойдут:

а) три семени;

б) не менее трех семян;

в) четыре семени.

2. В семье четверо детей. Считая, что рождение мальчика или девочки равновозможное, найти вероятности событий:

а) в семье три мальчика;

б) в семье хотя бы три мальчика;

в) в семье два мальчика.

3. Торговая база обслуживает 6 магазинов. Вероятность получения заказа от магазина равна 0,6. Найти вероятности того, что:

а) база получит заказы от 5 магазинов;

б) база получит не менее пяти заказов;

в) база получит не менее четырех заказов.

4. Цель имеет форму квадрата со стороной а, в который вписан круг. По этой цели производится 4 выстрела. Найти вероятность того, что попадем 3 раза в круг.

5. Вероятность поражения цели равна 0,3. Каким должно быть наименьшее число выстрелов, чтобы наивероятнейшее число попаданий было бы равно 25?

6. По статистическим данным 20% населения имеет черный цвет волос, 30% - темный, 40% - светлый и 10% - рыжий. Случайно формируется группа из 6 человек. Найти вероятности того, что:

а) в группе будет хотя бы 3 светловолосых;

б) в группе будет хотя бы один рыжий;

в) в группе будет 2 светловолосых, 2 рыжих, один с темными волосами и один с черными.

7. Вероятность выигрыша по лотерейному билету равна 1/3. Найти вероятности того, что из 6 билетов выигрышными будут:

а) два билета; б) хотя бы два билета.

8. Производится пять независимых выстрелов по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Для уничтожения цели достаточно трех попаданий. Найти вероятность того, что цель будет уничтожена.

9. В поезд с 6 вагонами садятся 12 пассажиров, которые могут сесть в любой вагон. Найти вероятности того, что:

а) в каждый вагон сядет по 2 пассажира;

б) в один вагон не сядет ни один пассажир, в другой сядет один пассажир, в два вагона сядет по 2 пассажира, а в остальные сядут 3 и 4 пассажира.

10. Магазин получил 1000 бутылок с минеральной водой. Вероятность того, что при транспортировке одна бутылка будет разбита равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит:

а) две разбитые бутылки;

б) более двух разбитых бутылок.

11. Вероятность того, что пара сапог является высшего качества, равна 0,5. В магазин поступило 400 пар сапог. Найти вероятность того, что среди них будет не менее 194 и не более 208 пар высшего качества.

12. Вероятность появления события А в одном из 900 независимых испытаний равна 0,5. Найти вероятность того, что отклонение относительной частоты события от его вероятности, по модулю не превысит 0,02.

13. Вероятность появления события А в одном из 1000 независимых опытов равна 0,75. Найти $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}01\right)$.

14. Вероятность появления события А в результате одного опыта равна 0,5. Найти число необходимых опытов для того, чтобы с вероятностью 0,7698, можно было бы утверждать: относительная частота отклонится от вероятности события по модулю не более чем на 0,02.

15. Вероятность появления события А в каждом из 600независимых опытов равна 0,85. Вычислить $P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0{,}0055\right)$.

16. Вероятность того, что покупателю нужна обувь 40 размера, равна 0,2. Найти вероятность того, что из пяти покупателей обувь этого размера необходима: а) одному, б) по крайней мере одному покупателю.

17. Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Найти вероятность того, что среди 10 деталей окажется не более одной нестандартной.

18. Вероятность того, что пассажир опоздает к отплытию катера, равна 0,02. Найти наивероятнейшее число опоздавших, если общее число пассажиров равно 855.

19. Оптовая база обслуживает 12 магазинов. От каждого из них заявка на товары на следующий день может поступать с вероятностью 0,3. Найти наивероятнейшее число заявок и вероятность получения базой такого числа заявок.

20. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что из 320 выстрелов будет 100 попаданий.

21. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,4. Найти вероятность того, что цель будет поражена не менее 200 и не более 250 раз при 600 выстрелах.

22. На прядильной фабрике работница обслуживает 720 веретен. При вращении веретена пряжа рвется в случайные моменты времени с вероятностью 0,008. Найти вероятность того, что за некоторое время произойдет не более 10 обрывов.

23. При штамповке металлических клемм получается в среднем 90% годных. Найти вероятность того, что среди 900 клемм будет от 790 до 820 годных.

24. Всхожесть семян данного растения составляет 90%. Найти вероятность того, что из 800 посеянных семян взойдет не менее 700.

25. Найти вероятность того, что из 500 посеянных семян не взойдет 130, если всхожесть семян оценивается вероятностью p=0,75.

26. Вероятность появления события A в одном испытании равна 0,2. Найти вероятность того, что в 400 испытаниях событие A наступит 104 раза.

27. Мебельная фабрика выпускает столы. Вероятность того, что стол является высшего качества, равна 0,75. Найти наивероятнейшее число столов высшего качества среди 150 выпущенных фабрикой.

28. Сколько раз с вероятностью 0,048 можно ожидать появление

события А в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5 ?

29. Было посажено 400 деревьев. Вероятность того, что дерево приживется равна 0,8. Найти вероятность того, что число прижившихся деревьев будет больше 250.

30. Вероятность наступления события A в каждом испытании равна 0,8. Испытания независимы. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,95 можно было бы ожидать отклонение относительной частоты события от его вероятности не более чем на 0,04?

Практическая работа №5 «Дискретные случайные величины»

Краткие теоретические сведения

Случайной величиной называется величина, которая в результате эксперимента (опыта, испытания) принимает одно значение из множества возможных.

Примеры. Число выпавших очков при бросании игральной кости; число студентов группы, которые сдадут экзамен на 8; дальность полета снаряда при стрельбе; число дождливых дней в году; ошибка, допущенная при измерении.

Общей характеристикой любой случайной величины является ее *закон распределения*.

Законом распределения случайной величины называется соотношение, устанавливающее связь между ее возможными значениями и соответствующими этим значениям вероятностями.

Хорошо известны два типа случайных величин: *дискретные* и *непрерывные*.

Случайная величина называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Примеры. Число выпавших гербов при десятикратном бросании монеты является дискретной случайной величиной с возможными значениями: $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

В магазин завезли партию из 100 костюмов. Среди них имеются костюмы с дефектами. Очевидно, что число костюмов с дефектами является дискретной случайной величиной с множеством возможных значений $\{0; 1; 2; ...; 100\}$.

Будем обозначать случайные величины греческими буквами: $\xi, \eta, \delta, \theta, \ldots$ (иногда употребляя индексы).

Закон распределения дискретной величины может иметь вид *ряда распределения* или *функции распределения*.

В дальнейшем будем рассматривать случайные величины с конечным множеством значений.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - возможные значения дискретной случайной величины ξ. Обозначим

$$p_i = P(\xi = x_i), \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (5.1)$$

Матрица

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & ..., & x_n \\ p_1, & p_2, & ..., & p_n \end{pmatrix} \qquad (5.2)$$

называется *рядом распределения* дискретной случайной величины ξ, $(x_1 < x_2 < ... < x_n)$.

Имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (5.3)$$

Пример. Для случайной величины ξ - числа выпавших очков при бросании игральной кости, закон распределения следующий:

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Функция распределения дискретной случайной величины имеет вид:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \sum_{i:\, x_i < x} P(\xi = x_i) = \sum_{i:\, x_i < x} p_i. \qquad (5.4)$$

Математическое ожидание дискретной величины вычисляется по формуле:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \qquad (5.5)$$

Дисперсия дискретной величины ξ:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 p_i. \qquad (5.6)$$

Среднее квадратичное отклонение

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi}. \qquad (5.7)$$

Используя понятие математического ожидания, можно определить моменты случайной величины.

Начальный момент порядка k, $k \in N$:

$$a_k = M\xi^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i. \tag{5.8}$$

Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения одной из них не зависит от того, какие значения приняли другая величина.

Математическое ожидание $M\xi$ обладает свойствами:

$$Mc = c, \quad c\text{ - константа.}$$
$$M(c\xi) = cM\xi.$$
$$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2.$$

Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то $M(\xi_1 \cdot \xi_2) = M\xi_1 \cdot M\xi_2$.

Дисперсия $D\xi$ имеет свойства:

$$Dc = 0.$$
$$D(c\xi) = c^2 D\xi, \quad c\text{ - вещественная константа.}$$
$$D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2, \quad \text{если } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ независимы.}$$

Центральный момент порядка k, $k \in N$.

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^k p_i. \tag{5.9}$$

Очевидно,

$$M\xi = \alpha_1, \quad D\xi = \mu_2. \tag{5.10}$$

Для вычисления дисперсии часто применяется формула:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \tag{5.11}$$

Решение типовых задач

<u>Задача 5.1.</u> Случайная величина ξ имеет закон распределения:

$$\xi : \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 11 \\ 0{,}14 & 0{,}20 & 0{,}49 & 0{,}17 \end{pmatrix}.$$

Найти функцию распределения $F_\xi(x)$, математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma\xi$.

<u>Решение.</u> Используя формулу (5.4), находим выражение для функции распределения:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0; & x \le 3 \\ 0{,}14; & 3 < x \le 5 \\ 0{,}34; & 5 < x \le 7 \\ 0{,}83; & 7 < x \le 11 \\ 1; & x > 11 \end{cases}. \tag{5.12}$$

График функции распределения $F_\xi(x)$ (рисунок 1).

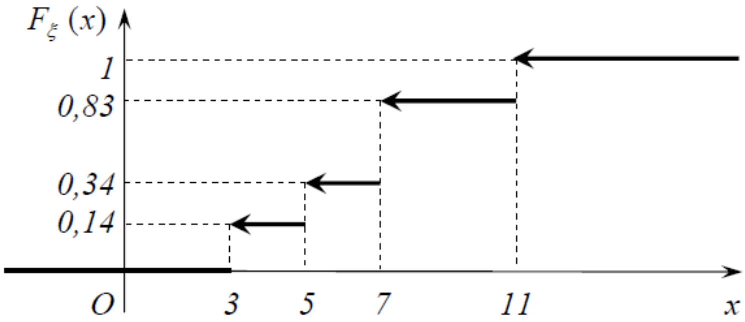


Рисунок 1 - График функции распределения $F_\xi(x)$

Вычислим математическое ожидание по формуле (5.5):

$$M\xi = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}20 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72.$$

Для дисперсии будем иметь:

$$D\xi=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M\xi)^2 p_i=(3-6{,}72)^2\cdot 0{,}14+(5-6{,}72)^2\cdot 0{,}2+$$
$$+(7-6{,}72)^2\cdot 0{,}49+(11-6{,}72)^2\cdot 0{,}17=$$
$$=(-3{,}72)^2\cdot 0{,}14+(-1{,}72)^2\cdot 0{,}2+(0{,}28)^2\cdot 0{,}49+(4{,}28)^2\cdot 0{,}17=$$
$$=1{,}94+0{,}59+0{,}04+3{,}11=5{,}68.$$
$$\sigma\xi=\sqrt{D\xi}=\sqrt{5{,}68}\approx 2{,}38.$$

Ответ. Функция распределения имеет вид (5.12). $M\xi=6{,}72$, $D\xi=5{,}68$, $\sigma\xi=2{,}38$.

Задача 5.2. Бросают 2 игральные кости. Пусть ξ - сумма выпавших очков на обеих костях. Написать закон распределения ξ и найти математическое ожидание $M\xi$.

Решение. Множество возможных значений ξ совпадает с множеством: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Для нахождения соответствующих вероятностей посмотрим, как получаются эти значения суммы. Для этого изобразим таблицу, где под каждым значением суммы напишем ее составляющие: первое слагаемое это число очков на первой кости, а второе слагаемое - очки, которые выпали на второй кости.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6

Каждой сумме из этой таблицы соответствует вероятность 1/36. Тем самым, приходим к распределению:

$$\xi:\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\ 1/36 & 2/36 & 3/36 & 4/36 & 5/36 & 6/36 & 5/36 & 4/36 & 3/36 & 2/36 & 1/36\end{pmatrix}.$$

После необходимых преобразований будем иметь:

$$\xi:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1/36 & 1/18 & 1/12 & 1/9 & 5/36 & 1/6 & 5/36 & 1/9 & 1/12 & 1/18 & 1/36 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Следовательно,

$$M\xi=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{1}{18}+4\cdot\frac{1}{12}+5\cdot\frac{1}{9}+6\cdot\frac{5}{36}+$$
$$+7\cdot\frac{1}{6}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{1}{9}+10\cdot\frac{1}{12}+$$
$$+11\cdot\frac{1}{18}+12\cdot\frac{1}{36}=\frac{126}{18}=7.$$

Ответ. Закон распределения задан матрице (5.13). $M\xi=7$.

Задача 5.3. Производят три выстрела по цели. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,3. Найти закон распределения случайной величины ξ - числа попаданий. Вычислить математическое ожидание, дисперсию. Найти также функцию распределения величины ξ.

Решение. Очевидно, что возможными значениями ξ будут 0, 1, 2, 3. Соответствующие этим значениям вероятности вычислим по формуле Бернулли (4.1): n=3; p=0,3; q=0,7. Поэтому,

$$P(\xi=0)=C_3^0(0;3)^0\cdot(0{,}7)^3=0{,}343.$$
$$P(\xi=1)=C_3^1(0;3)^1\cdot(0{,}7)^2=3\cdot0{,}3\cdot0{,}49=0{,}441.$$
$$P(\xi=2)=C_3^2(0;3)^2\cdot(0{,}7)^1=3\cdot0{,}009\cdot0{,}7=0{,}189.$$
$$P(\xi=3)=C_3^3(0;3)^3\cdot(0{,}7)^0=0{,}027.$$

Таким образом, случайная величина ξ имеет распределение:

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}343 & 0{,}441 & 0{,}189 & 0{,}027 \end{pmatrix} \qquad (5.14)$$

$$M\xi=0\cdot0{,}343+1\cdot0{,}441+2\cdot0{,}189+3\cdot0{,}027=0{,}441+0{,}378+0{,}081=0{,}9.$$

Для вычисления дисперсии случайной величины ξ воспользуемся формулой (5.11). Величина ξ^2 будет иметь распределение:

$$\xi:\begin{pmatrix} 0^2 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 0{,}343 & 0{,}441 & 0{,}189 & 0{,}027 \end{pmatrix}$$

$$M\xi^2 = 0\cdot 0{,}343 + 1\cdot 0{,}441 + 4\cdot 0{,}189 + 9\cdot 0{,}027 = 0{,}441 + 0{,}756 + 0{,}243 = 1{,}44.$$

$$D\xi = 1{,}44 - (0{,}9)^2 = 1{,}44 - 0{,}81 = 0{,}63.$$

Функция распределения величины ξ будет ступенчатой функцией:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0; & x \le 0 \\ 0{,}343; & 0 < x \le 1 \\ 0{,}784; & 1 < x \le 2. \\ 0{,}973; & 2 < x \le 3 \\ 1; & x > 3 \end{cases} \qquad (5.15)$$

Ответ. Закон распределения ξ задан матрицей (5.14). $M\xi = 0{,}9$. $D\xi = 0{,}63$. Функция распределения имеет вид (5.15).

Задача 5.4. В урне находятся 3 белых и 5 черных шаров. Из нее извлекают 3 шара. Найти закон распределения и математическое ожидание числа извлеченных черных шаров.

Решение. Пусть ξ - число извлеченных черных шаров. Возможными значениями ξ будут: 0, 1, 2, 3. Вычислим соответствующие вероятности. Имеем:

$$P(\xi = 0) = \frac{C_3^3}{C_8^3} = \frac{1}{56};\quad P(\xi = 1) = \frac{C_5^1\cdot C_3^2}{C_8^3} = \frac{15}{56};$$

$$P(\xi = 2) = \frac{C_5^2\cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{30}{56};\quad P(\xi = 3) = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{10}{56}.$$

Закон распределения величины ξ:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1/56 & 15/56 & 30/56 & 10/56 \end{pmatrix}. \qquad (5.16)$$

$$M\xi = 0 \cdot \frac{1}{56} + 1 \cdot \frac{15}{56} + 2 \cdot \frac{30}{56} + 3 \cdot \frac{10}{56} = \frac{105}{56} = 1{,}875.$$

Ответ. Закон распределения имеет вид (5.16). $M\xi = 1{,}875$.

Задача 5.5. Случайная величина ξ принимает значения: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $M\xi = 0{,}1$; $M\xi^2 = 0{,}9$. Найти вероятности p_1, p_2 и p_3.

Решение. Закон распределения величины ξ:

$$\xi : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Так как в законе распределения сумма вероятностей равна 1, получаем соотношение $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Второе и третье соотношения получим, использовав формулы для $M\xi$ и $M\xi^2$:

$$(-1) \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 1 \cdot p_3 = 0{,}1;$$
$$(-1)^2 \cdot p_1 + 0^2 \cdot p_2 + 1^2 \cdot p_3 = 0{,}9.$$

После этого приходим к системе уравнений для p_1, p_2 и p_3.

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -p_1 + p_3 = 0{,}1 \\ p_1 + p_3 = 0{,}9 \end{cases}$$

Решив эту систему, получим значения вероятностей.

Ответ. $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}1$; $p_3 = 0{,}5$.

Задачи для упражнений

1. Монета бросается 7 раз. Вычислить математическое ожидание и дисперсию числа выпавших гербов.

2. Два стрелка производят независимо друг от друга по два выстрела по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,5; а для второго - 0,6. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ - числа попаданий в цель.

3. В блоке из 50 пачек сигарет находятся 6 пачек с дефектом. Некто покупает 5 пачек. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ - числа купленных пачек с дефектом.

4. Даны дискретные случайные величины:

$$\xi_1 : \begin{pmatrix} -4 & 6 & 10 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}; \quad \xi_2 : \begin{pmatrix} 0{,}21 & 0{,}54 & 0{,}61 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти математические ожидания $M\xi_1$ и $M\xi_2$.

5. Производятся 4 выстрела по цели. Вероятности попадания в цель равны соответственно p_1=0,6; p_2=0,4; p_3=0,5; p_4=0,2. Найти закон распределения, вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа попаданий в цель.

6. Проверяется функционирование некоторого устройства. Вероятность того, что оно не функционирует, равна 0,2. Найти закон распределения числа испорченных устройств, если проверяется 10 устройств. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение этого числа.

7. Бросаются 2 игральные кости. Пусть ξ - произведение числа выпавших очков на обеих костях. Найти закон распределения, математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратное отклонение случайной величины ξ.

8. Куплено 10 лотерейных билетов. Вероятность выигрыша по одному билету равна 0,4. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа выигрышных билетов.

9. Случайная величина ξ принимает значения x_1 и x_2. $P(\xi = x_1) = 0{,}3; P(\xi = x_2) = 0{,}7$. Найти x_1 и x_2, еслиизвестно, что $M\xi$=2,7; $D\xi$=0,21.

10. Делаются попытки открыть замок, имея в распоряжение 8 ключей, которые берутся наудачу. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа попыток в случае когда:

а) Ключ, которым сделана неудачная попытка, исключается из дальнейшего выбора.

б) Ключ, которым сделана неудачная попытка, не исключается из дальнейшего выбора.

11. Из урны, содержащей 5 белых и 3 черных шара, извлекают последовательно по одному шару до появления белого. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа вынутых черных шаров, если вынутый шар обратно в урну не возвращается.

12. Из партии деталей берется последовательно для контроля по одной детали. Если взятая деталь имеет дефект, то контроль на этом завершается. Исходя из этих условий, были проверены не более 5 деталей. Вероятность того, что деталь имеет дефект, равна 0,1. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа проверенных деталей.

13. В партии содержатся 10 деталей, среди которых 3 имеют дефект. Случайно берут 3 детали. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию числа деталей, оказавшихся с дефектом среди выбранных.

14. Случайная величина ξ принимает два значения x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$). $P(\xi = x_1) = 0{,}6; M\xi = 0{,}4; D\xi = 0{,}24$. Найти закон распределения случайной величины ξ.

15. Автомобиль должен проехать по улице, на которой установлено три светофора, дающие независимо друг от друга зеленый сигнал в течение 1,5 минут, желтый в течение 0,3 минут и красный в течение 1,2 минут. Написать закон распределения ξ - числа остановок автомобиля на этой улице.

16. Из партии в 25 деталей, среди которых имеется 6 нестандартных, выбраны случайным образом 3 детали. Построить закон распределения случайного числа ξ нестандартных деталей, содержащихся в выборке.

17. Два баскетболиста по очереди забрасывают мяч в корзину с вероятностью попадания при каждом броске для первого 0,8, для второго - 0,7. Всего производится 5 бросков. Составить законы распределения числа попаданий для каждого игрока, если начинает бросать первый баскетболист.

18. Монету подбрасывают 6 раз. Составить ряд распределения и построить функцию распределения отношения числа появления герба к числу появления номинала монеты.

19. Стрелок производит шесть выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2. Найти функцию распределения ξ - числа попаданий в мишень. С ее помощью найти $P(1 \le \xi \le 5)$.

20. В некотором цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить закон распределения ξ - числа бракованных изделий из шести взятых наудачу. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

4 семестр

Практическая работа №1 «Непрерывные случайные величины»

1.1 Краткие сведения из теории

Определение. Случайная величина ξ называется непрерывной, если ее значения целиком заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный).

Функция

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) \tag{1.1}$$

называется функцией распределения случайной величины ξ.

Функция распределения $F_{\xi}(x)$ не убывает, непрерывна слева, также

$$F_{\xi}(-\infty) = 0 ; F_{\xi}(+\infty) = 1 \tag{1.2}$$

Для любого $x \in (-\infty;+\infty)$ имеем

$$0 \le F_{\xi}(x) \le 1 \tag{1.3}$$

Если задана функция распределения $F_{\xi}(x)$, то для любого отрезка $[a ; b]$ можно определить $P(\xi \in [a; b))$, а именно

$$P(a \le \xi < b) = F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a). \tag{1.4}$$

Плотностью распределения случайной величины ξ (плотностью вероятностей) называется функция

$$f_{\xi}(x) \frac{dF_{\xi}(x)}{dx}. \tag{1.5}$$

Плотность распределения обладает свойствами:

$$f_{\xi}(x) \ge 0, \tag{1.6}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = 1. \qquad (1.7)$$

Если известна плотность распределения случайной величины ξ то

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f_\xi(x)dx \qquad (1.8)$$

Замечание. Для непрерывной случайной величины ξ справедливы соотношения

$$P(a \le \xi \le b) = P(a \le \xi < b) = P(a < \xi \le b) = P(a < \xi < b).$$

Формула (1.5) определяет плотность распределения тогда, когда известна функция распределения. Обратно:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du. \qquad (1.9)$$

Эту формулу используют для нахождения функции распределения по заданной плотности.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины вычисляется по формуле:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \qquad (1.10)$$

Дисперсия определяется следующим равенством:

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx \qquad (1.11)$$

Если распределение случайной величины ξ сосредоточено на отрезке $[a\,;b]$, то несобственные интегралы из формул (1.10)и (1.11) переходят в интегралы с конечными пределами, т. е.

$$M\xi = \int_a^b x f_\xi(x)dx \tag{1.12}$$

$$D\xi = \int_a^b (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx \tag{1.13}$$

Замечание. При решении задач на вычисление дисперсии иногда лучше использовать формулу (1.11), которая справедлива для любых случайных величин (как дискретных, так и непрерывных).

Начальный момент порядка определяется $k\,, k \in N$ соотношением

$$\alpha_k = M\xi^k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_\xi(x)dx \tag{1.14}$$

Центральный момент порядка $k\,, k \in N$

$$\mu_k = M(\xi - M\xi)^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^k f_\xi(x)dx \tag{1.15}$$

Если значения случайной величины сосредоточены на $[a\,;b]$, то интегралы в (1.14) и (1.15) заменяются на интегралы по этому отрезку, т.е.

$$\alpha_k = \int_a^b x^k f_\xi(x)dx\,, \tag{1.16}$$

$$\mu_k = \int_a^b (x - M\xi)^k f_\xi(x)dx\,. \tag{1.17}$$

Среднее квадратичное отклонение случайной величины ξ:

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} \tag{1.18}$$

1.2 Решение типовых задач

Задача 1.1. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a \sin x, x \in [0; \pi] \\ 0, x \notin [0, \pi] \end{cases}.$$

а) Найти параметр a.

б) Найти функцию распределения $f_\xi(x)$.

в) Вычислить $P(\xi) \in [0; \pi/4))$.

Решение. а) Для определения параметра a воспользуемся свойством (1.7) плотности, согласно которому

$$\int_0^\pi a \sin x dx = 1 \Leftrightarrow a \int_0^\pi \sin x dx = 1 \Rightarrow a = 1/2.$$

Таким образом, случайная величина ξ имеет плотность распределения:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x, x \in [0, \pi] \\ 0, x \notin [0, \pi] \end{cases}.$$

б) Находим функцию распределения, используя соотношение (1.9). Для этого выделим 3 случая:

б$_1$) $x \le 0 \Rightarrow f_\xi(x) = 0 \Rightarrow F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 du = 0$

б$_2$) $0 < x \le \pi$. Тогда:

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du=\int\limits_{-\infty}^{0} f_\xi(u)du+\int\limits_{0}^{x} f_\xi(u)du=$$

$$=\int\limits_{0}^{x} f_\xi(u)du=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{x}\sin u du=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^x=$$

$$=-\frac{1}{2}[\cos x-\cos 0]=\frac{1}{2}(1-\cos x)$$

б$_3$) $x>\pi$. Тогда:

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0} f_\xi(u)du+\int\limits_{0}^{\pi} f_\xi(u)du+\int\limits_{\pi}^{x} f_\xi(u)du=\int\limits_{0}^{\pi} f_\xi(u)du=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}\sin u du=-\frac{1}{2}\cos u\Big|_0^\pi=-\frac{1}{2}[\cos\pi-\cos 0]=1$$

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\le\pi \\ 1, & x>\pi \end{cases} \qquad (1.19)$$

в) Вычислим $P(\xi\in[0;\pi/4))$ по формуле (1.4):

$$P(\xi\in[0;\pi/4))=F_\xi(\pi/4)-F_\xi(0)=\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}(1-\cos 0)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\approx 0{,}147$$

Ответ. $a=1/2$. Функция распределения имеет вид (1.19).

$$P(\xi\in[0;\pi/4))\approx 0{,}147.$$

Задача 1.2. Задана функция распределения случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x/3, & 0 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$.

б) Математическое ожидание и дисперсию.

в) Графики функций $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$.

Решение. а) Используя формулу (1.5), придем к плотности:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/3, & x \in (0,3] \\ 0, & x \notin (0,3] \end{cases} \qquad (1.20)$$

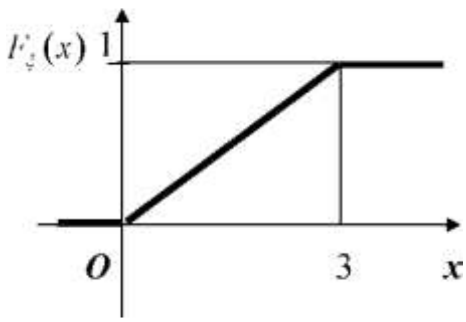
б) $$M\xi = \int_0^3 x f_\xi(x)dx = \int_0^3 \frac{x}{3}dx = \frac{1}{3}\int_0^3 xdx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Для вычисления $D\xi$ применим формулу (1.11). Вычислим сначала $M\xi^2$:

$$M\xi^2 = \int_0^3 x^2 f_\xi(x)dx = \frac{1}{3}\int_0^3 x^2dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^3}{3} = \frac{3^3}{3^2} = 3.$$

$$\Rightarrow D\xi = 3 - (3/2)^2 = 3/4.$$

в) Графики функций $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$ представлены на рисунке 1.1:



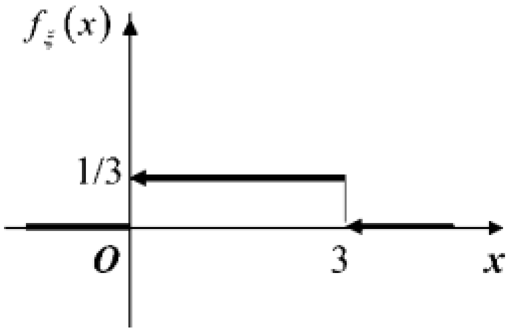


Рисунок 1.1 – Графики функций $f_{\xi}(x)$ и $F_{\xi}(x)$

Ответ. Плотность распределения задана формулой (1.20).

$$M\xi = 3/2; D\xi = 3/4.$$

Задача 1.3. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 1 \\ a/x^4, & 1 < x < +\infty \end{cases}.$$

Найти:

а) Значение параметра a.

б) Функцию распределения $F_{\xi}(x)$

в) Математическое ожидание и дисперсию.

г) $P(\xi \in [-2;2])$.

Решение. Для определения параметра a используем свойство (1.7) плотности распределения. Так как $f_{\xi}(x) = 0$ для $x \in (-\infty;1]$, то интегрирование будет по интервалу $(1;+\infty)$.

$$\int_{1}^{+\infty} f_{\xi}(x)dx = 1 \Leftrightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{a}{x^4}dx = 1$$

$$a\int_{1}^{+\infty} x^{-4}dx = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\int_{1}^{+\infty} x^{-4}dx} \Leftrightarrow a = 3.$$

Таким образом,

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 1 \\ 3/x^4, & 1 < x < +\infty \end{cases}$$

б) Найдем функцию распределения величины ξ, используя соотношение (1.9).

б$_1$) Если $x \in (-\infty;1]$, то $f_\xi(x)=0$. Поэтому $F_\xi(x)=0$.

б$_2$) Пусть $x \in (1;\infty)$. Тогда

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(u)du = \int_{-\infty}^{1} f_\xi(u)du + \int_{1}^{x} f_\xi(u)du = \int_{1}^{x} f_\xi(u)du =$$

$$=\int_{1}^{x} \frac{3}{u^4}du = 3\int_{1}^{x} u^{-4}du = 3\cdot\left.\frac{u^{-3}}{-3}\right|_1^x = -\left(x^{-3}-1\right) = 1-1/x^3$$

Следовательно,

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x \le 1 \\ 1-1/x^3, & 1 < x < +\infty \end{cases} \qquad (1.21)$$

в) Вычислим математическое ожидание и дисперсию.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x)dx = \int_{1}^{\infty} x\cdot\frac{3}{x^4}dx =$$

$$=3\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^3} = 3\int_{1}^{\infty} x^{-3}dx = -\frac{3}{2}\left.x^{-2}\right|_1^{\infty} = 3/2.$$

$$M\xi^2 = 3; D\xi = 3-\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4};$$

г) $P(\xi\in[-2;2]) = P(-2\le\xi\le 2) = F_\xi(2)-F_\xi(-2) = \frac{7}{8}$

Ответ. a=3. Функция распределения задана формулой (1.21). $M\xi = \frac{3}{2}$

; $D\xi = \frac{3}{4}$; $P(\xi \in [-2;2]) = \frac{7}{8}$.

Задача 1.4. Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 1 \\ \frac{1}{4}(x-1), & 1 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$.

б) $M\xi$ и $D\xi$.

в) $P(\xi \in (2;3))$.

Нарисовать графики функций $f_\xi(x)$. и $F_\xi(x)$.

Решение. а) По формуле (1.5) находим плотность:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, x \in (1;5] \\ 0, x \notin (1;5] \end{cases} \tag{1.22}$$

б) Вычислим моменты $M\xi$ и $D\xi$

$$M\xi = \int_1^5 x f_\xi(x) dx = \int_1^5 x \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}\int_1^5 x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_1^5 = \frac{1}{8}(25-1) = \frac{24}{8} = 3$$

$D\xi = M\xi - (M\xi)^2$ Вычислим сначала $M\xi^2$

$$M\xi^2 = \int_1^5 x^2 f_\xi(x) dx = \frac{1}{4}\int_1^5 x^2 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_1^5 = \frac{1}{4}\left(\frac{125}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{124}{3} = \frac{31}{3}.$$

$$D\xi = \frac{31}{3} - 3^2 = \frac{31}{3} - 9 = \frac{31-27}{4} = \frac{4}{3}.$$

в) $P(\xi \in (2;3)) = P(2 < \xi < 3) = F_\xi(3) - F_\xi(2) =$

$$= \left[\frac{1}{4}(3-1)\right] - \left[\frac{1}{4}(2-1)\right] = \frac{1}{4}(2-1) = 1/4.$$

Графики функций $f_\xi(x)$. и $F_\xi(x)$ представлен на рисунке 1.2:

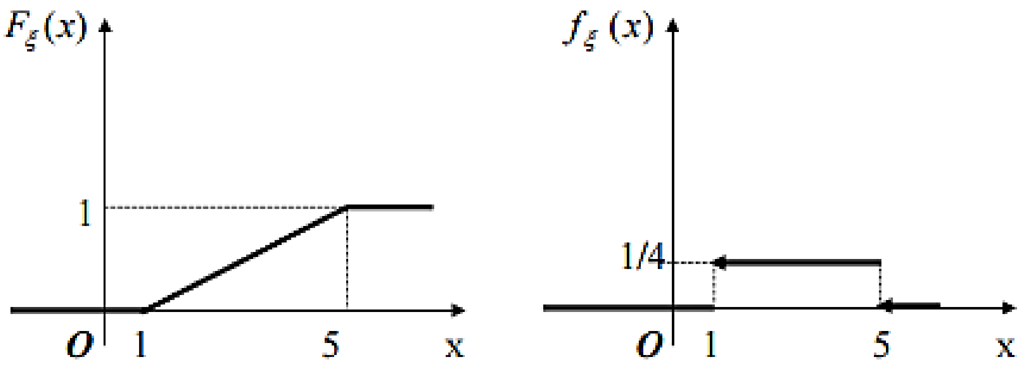


Рисунок 1.2 – Графики функций $f_\xi(x)$. и $F_\xi(x)$

Ответ. Плотность распределения задана формулой (1.22) $M\xi = 3$; $D\xi = \frac{4}{3}$; $P(\xi \in (2;3)) = \frac{1}{4}$ Графики представлены выше.

1.3 Задачи для упражнений

1.1 Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ \frac{1}{5}x, & 0 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$

б) Математическое ожидание, дисперсию и $M\xi^2$.

в) Вычислить вероятности: $P_1 = P(\xi \in (0;3))$; $P_2 = P(\xi \in (0;5))$; $P_3 = P(\xi \in (0;6))$; $P_4 = P(\xi \in (1;10))$. Построить графики функций $F_\xi(x)$ и $f_\xi(x)$.

1.2.Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x \le 0 \\ x^3 + ax, & 0 < x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Найти:

а) Значение параметра a.

б) Плотность распределения $f_\xi(x)$

в) Математическое ожидание и дисперсию.

г) $P(\xi \in (0{,}5;\, 2))$

Построить графики функций $F_\xi(x)$. и $f_\xi(x)$

1.3.Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ cx^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} & x > 0 \end{cases}$$

где c некоторая константа, $a > 0$ - параметр. Найти:

а) Значение константы c.

б) Математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

1.4 Задана функция распределения непрерывной случайной величины ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2 \\ 1, & x > \pi/2 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$

б) Математическое ожидание и дисперсию.

в) $P(\xi \in [\pi/4; 2\pi/3])$

1.5 Задана плотность распределения случайной величины ξ.

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0; \pi/2] \\ 0, & x \notin [0; \pi/2] \end{cases}$$

Найти:

а) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

в) $P(\xi \in [\pi/4; 2\pi/3])$

1.6 Случайная величина ξ задана плотностью распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} x - \dfrac{1}{2}, & x \in (1; 2] \\ 0, & x \notin (1; 2] \end{cases}$$

Найти:

а) Функцию распределения величины ξ.

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

в) $P(\xi \in (0; 2))$.

Построить графики функций $F_\xi(x)$. и $f_\xi(x)$

1.7 Случайная величина ξ имеет плотность распределения:

$$f_\xi(x) \frac{2c}{1 + x^2}$$

Найти:

а) Значение параметра с.

б) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

в) Математическое ожидание.

г) $P(\xi \in [0;1])$

Построить графики функций $F_\xi(x)$. и $f_\xi(x)$.

1.8 Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x)=\begin{cases} c\,\mathrm{arctg}x, & x \in [0;1] \\ 0, & x \notin [0;1] \end{cases}$$

Найти:

а) Значение параметра c.

б) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

в) Математическое ожидание и дисперсию.

г) $P(\xi \in [0,5;2,5])$

Построить графики функций $F_\xi(x)$. и $f_\xi(x)$.

1.9 Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}, & x \in (-c;c) \\ 0, & x \notin (-c;c) \end{cases}$$

Найти:

а) Математическое ожидание и дисперсию величины ξ

б) $P(\xi \in [0;c/2])$

1.10 Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{-|x|}$$

Найти:

а) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

б) Математическое ожидание и дисперсию.

в) $P(\xi \in [-1/2;1/2])$

1.11 Задана функция распределения случайной величины ξ

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ a+b\arcsin x, & -1<x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Найти:

а) Значения параметров a и b.

б) Плотность распределения $f_\xi(x)$

в) Математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$

1.12 Задана плотность распределения случайной величины ξ

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x^m}{m!}e^{-x}, & x>0\end{cases}$$

Найти:

а) Математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

б) Среднее квадратичное отклонение $\sigma\xi$

1.13 Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ x^2/16, & 0<x\le 2\\ x-7/4, & 2<x\le 11/4\\ 1, & x>11/4\end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$

б) Математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение величины ξ.

в) $P(\xi\in[1;3/2])$.

Построить графики функций $F_\xi(x)$ и $f_\xi(x)$.

1.14 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F_\xi(x) = a + b\,\mathrm{arctg}\,x.$$

Найти:

а) Параметры a и b.

б) Плотность распределения $f_\xi(x)$.

Построить графики функций $F_\xi(x)$. и $f_\xi(x)$.

1.15 Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ a/x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Найти:

а) Параметр a.

б) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

в) $P(\xi \in [3;4])$.

1.16 Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} -(3/4)x^2 + (9/2)x - 6, & x \in [2;4] \\ 0, & x \notin [2,4] \end{cases}$$

Найти:

а) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

б) Математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ.

1.17 Задана плотность распределения некоторой случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} -(3/4)x^2 + 6x - 45/4, & x \in [3;5] \\ 0, & x \notin [3;5] \end{cases}$$

Найти:

а) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

б) Математическое ожидание и дисперсию ξ

1.18 Случайная величина ξ задана функцией распределения

$$F_\xi(x). = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$.

б) $M\xi$, $D\xi$ и $\sigma\xi$.

в) $P_1 = P(\xi \in [1;2,5])$; $P_2 = P(\xi \in [2,5;3,5])$.

Построить графики функций $F_\xi(x).$ и $f_\xi(x)$.

1.19 Дана функция

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a \cdot (4x - x^3), & x \in (0;2] \\ 0, & x \notin (0;2] \end{cases}$$

При каком значении a $f_\xi(x)$может быть плотностью распределения случайной величины ξ? Определить это значение a. Найти математическое ожидание и дисперсиюслучайной величины a.

1.20 Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} a \cdot x(3-x), & x \in [0;3] \\ 0, & x \notin [0;3] \end{cases}$$

Найти:

а) Параметр a.

б) Функцию распределения $F_\xi(x).$

в) $P(\xi \in [1;2])$.

г) Математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Построить графики функций $F_\xi(x).$ и $f_\xi(x)$

1.21 Функция $f_\xi(x)=\dfrac{2a}{e^x+e^{-x}}$ является плотностью распределения случайной величины ξ. Найти:

а) Параметр a.

б) $P(\xi\in[0;2])$

в) $P(\xi<1)$

г) $P(\xi\ge 0)$

1.22 Случайная величина ξ подчинена закону распределения с плотностью

$$f_\xi(x)=\begin{cases} a\cdot\cos x, & x\in(0;\pi/2] \\ 0, & x\notin(0;\pi/2] \end{cases}$$

Найти:

а) Параметр a.

б) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

в) Математическое ожидание $M\xi$ дисперсию $D\xi$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma\xi$.

г) $P(\xi\in[0;\pi/4])$.

Построить графики функций $F_\xi(x)$. и $f_\xi(x)$.

1.23 Случайная величина ξ имеет функцию распределения

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x\le-\dfrac{\pi}{4} \\ \dfrac{1}{2}(1+\sin 2x), & x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right] \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения $f_\xi(x)$.

б) Математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

в) $P(\xi\in[\pi/6;\pi/4])$

Практическая работа №2 «Классические распределения»

2.1 Краткие теоретические сведения

Пусть испытание, в результате которого появляется событие A или $\overline{A}$, повторяется n раз; $P(A)=p, p(\overline{A})=1-p=q$. Число появлений события A в результате n повторений испытания является случайной величиной ξ со значениями $0,1,2,\ldots,m,\ldots n$ Известно, что

$$P(\xi=m)=P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \tag{2.1}$$

Закон распределения этой величины:

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & m & \ldots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \ldots & C_n^m p^m q^{n-m} & \ldots & p^n \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Определение. Случайная величина ξ, которая имеет закон распределения (2.2), называется биномиальной.

Распределение (2.2) называется биномиальным, так как вероятность (2.1) представляет собой общий член в разложениибинома $(q+p)^n$:

$$1=(q+p)^n=q^n+npq^{n-1}+\ldots+C_n^m p^m q^{n-m}+\ldots+nqp^{n-1}+p^n. \tag{2.3}$$

Если n велико, а $p=P(A)$ достаточно мала $(p\le 0,1)$, то вычисление $P_n(m)$ производят по следующей формуле:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \tag{2.4}$$

где $np=\lambda$, $\lambda>0$ - параметр распределения.

Распределение вероятностей (2.4) обычно называется распределением Пуассона.

Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона, если ее закон распределения характеризуется матрицей:

$$\xi:\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m & \dots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \dots & \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} & \dots \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Легко проверить, что $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}=1$.

Пусть серия независимых испытаний прекращается с появлением события A.

Обозначим через ξ - число произведенных опытов до появления события A. Очевидно, ξ - случайная величина с возможными значениями $1,2,\dots,m,\dots,n,\dots$

$$P(\xi=m)=q^{m-1}p$$

Распределение величины ξ:

$$\xi:\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & \dots \\ p & qp & \dots & q^{m-1}p & \dots \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Вероятности из распределения (2.6) представляют собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем $q<1$. Следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty}q^{m-1}p=\frac{p}{1-q}=1.$$

Распределение, которое характеризуется матрицей (2.6), называется геометрическим распределением.

Определение. Говорят, что случайная величина ξ имеет равномерное распределение на $[a,b]$, если:

$$f_\xi(x)\begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b] \\ 0, & x\notin[a,b] \end{cases} \tag{2.7}$$

$$M\xi = \frac{a+b}{2}; D\xi = \frac{(b-a)^2}{2} \tag{2.8}$$

Говорят, что случайная величина ξ имеет нормальное распределение, если

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \tag{2.9}$$

В формуле (1.9) a и $\sigma > 0$являются параметрами распределения. $a = M\xi$ и $\sigma^2 = D\xi$

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) \tag{2.10}$$

где $\Phi(x)$ является функцией Лапласа.

Для любого $\delta > 0$ имеем:

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi(\delta/\sigma) = 2\Phi\left(\delta/\sqrt{D\xi}\right) \tag{2.11}$$

Формула (2.11) выражает отклонение случайной величины ξ от ее математического ожидания на значение δ .

Говорят, что случайная величина ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

где $\lambda > 0, \lambda$ - параметр распределения.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины ξ с плотностью (2.12) выражаются через параметр λ по формулам (2.13):

$$M\xi = \frac{1}{\lambda}; D\xi = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (2.13)$$

2.2 Решение типовых задач

Задача 2.1. В партии из 20 деталей 5 имеют дефект. Из нее берут наудачу 5 деталей. Число деталей с дефектом среди выбранных, является случайной величиной ξ.

Найти:

а) Закон распределения величины ξ.

б) Функцию распределения $F_\xi(x)$.

в) Математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

Решение. а) Очевидно, возможными значениями длявеличины ξ будут 0, 1, 2, 3, 4, 5. Соответствующие этим значениям вероятности находим по формуле Бернулли (2.1).

Событие А - « выбрали деталь с дефектом ».

$$p = P(A) = 5/20 = 0{,}25;$$
$$q = P(\overline{A}) = 1 - p = 0{,}75; n = 5.$$
$$P(\xi = 0) = C_5^0 (0{,}25)^0 \cdot (0{,}75)^5 = 1 \cdot (0{,}75)^5 = 0{,}237.$$
$$P(\xi = 1) = C_5^1 (0{,}25)^1 \cdot (0{,}75)^4 = 5 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}316 = 0{,}395.$$
$$P(\xi = 2) = C_5^2 (0{,}25)^2 \cdot (0{,}75)^3 = 10 \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}422 = 0{,}264.$$
$$P(\xi = 3) = C_5^3 (0{,}25)^3 \cdot (0{,}75)^2 = 0{,}1562 \cdot 0{,}562 = 0{,}088.$$
$$P(\xi = 4) = C_5^4 (0{,}25)^4 \cdot 0{,}75 = 5 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}75 = 0{,}015.$$
$$P(\xi = 5) = C_5^5 (0{,}25)^5 = 1 \cdot 0{,}001 = 0{,}001.$$

Следовательно, случайная величина ξ имеет биномиальное распределение:

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0{,}237 & 0{,}395 & 0{,}264 & 0{,}088 & 0{,}015 & 0{,}001 \end{pmatrix} \qquad (2.14)$$

б) Функцию распределения $F_\xi(x)$ найдем по формуле (2.4) используя закон распределения (2.14) величины ξ. Имеем

$$F_\xi(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0{,}237, & 0 < x \le 1 \\ 0{,}632, & 1 < x \le 2 \\ 0{,}896, & 2 < x \le 3 \\ 0{,}984, & 3 < x \le 4 \\ 0{,}999, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases} \qquad (2.15)$$

в) Математическое ожидание биномиальной случайной величины можно вычислить по формуле:

$$M\xi = np \qquad (2.16)$$

В нашем случае n=5; p=0,25, поэтому

$$M\xi = 5\cdot 0{,}25 = 1{,}25$$

Дисперсия биноминального распределения

$$D\xi = npq \qquad (2.17)$$

Следовательно,

$$D\xi = 5\cdot 0{,}25\cdot 0{,}75 \approx 0{,}94$$

Замечание. Такой же результат получится, если использовать формулы (2.5) и (2.6) для математического ожидания и дисперсии дискретной случайной величины.

Ответ. Закон распределения величины ξ имеет вид матрицы (2.14). Функция распределения является ступенчатой функцией и имеет вид (2.15). $M\xi = 1{,}25$, $D\xi \approx 0{,}94$.

Задача 2.2. В некотором радиоприемнике 1000 электроэлементов.

Вероятность выхода из строя элемента в течение года равна 0,001. Найти:

а) закон распределения случайной величины ξ - числа элементов выходящих из строя в течение года, математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$;

б) вероятность того что из строя выйдут два элемента.

в) вероятность выхода из строя по крайней мере двух элементов.

Решение. Очевидно, что мы имеем дело с распределением Пуассона. n=1000; $p = P(A) = 0{,}001$р, где A - событие «элементвыходит из строя ». ξ - число элементов, которые выходят из строя в течение года.

а) возможными значениями числа элементов ξ, вышедших из строя в течение года будут 0, 1, 2, ... , 1000. Соответствующие этим значениям вероятности находим по формуле Пуассона (2. 4),

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1;\ m = 0; 1; \ldots; 1000,$$

$$P(\xi = m) = P_{1000}(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = \frac{1}{m!} e^{-1}$$

Итак, случайная величина ξ имеет распределение Пуассона (2.5)

$$\xi : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & m & \ldots & 1000 \\ e^{-1} & e^{-1} & \frac{1}{2}e^{-1} & \ldots & \frac{1}{m!}e^{-1} & \ldots & \frac{1}{1000}e^{-1} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

По формулам (2.16) и (2.17) находим:
$M\xi = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1;$

$$D\xi = npq = 1000 \cdot 0{,}001 \cdot \frac{999}{1000} = 0{,}99.$$

б) $P(\xi = 2) = P_{1000}(2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$, где $\lambda = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$,т.е.
$$P(\xi = 2) = (1/2) \cdot e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}184.$$

в) $P(\xi \geq 2) = P(\xi = 2) + \ldots + P(\xi = 1000).$

$$P(\xi \geq 2) = 1 - P(\xi < 2) = 1 - [P(\xi = 0) + P(\xi = 1)] = 1/2e \approx 0{,}264.$$

Ответ. а) Закон распределения величины ξ имеет вид (2. 18), $M\xi = 1$, $D\xi = 0{,}99$; б) $P(\xi = 2) \approx 0{,}184$; в) $P(\xi \geq 2) \approx 0{,}264$.

Задача 2.3. Стрелок стреляет по цели до первого попадания. Найти: а) закон распределения величины ξ - числа выстрелов и б) вероятность того, что он попадет четвертый раз, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7.

Решение. А - « стрелок попадает в цель при одном выстреле ».

$$P(A) = p = 0{,}7,\ P(\overline{A}) = q = 1 - p = 0{,}3.$$

а) Очевидно, что число выстрелов ξ будет равняться $1, 2, \ldots, m, \ldots$, и $P(\xi = m) = q^{m-1}p = (0{,}3)^{m-1} \cdot 0{,}7$. Распределение величины ξ является геометрическим и задается матрицей (2.6), т.е.

$$\xi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m & \ldots \\ 0{,}7 & 0{,}3 \cdot 0{,}7 & \ldots & (0{,}3)^{m-1} \cdot 0{,}7 & \ldots \end{pmatrix} \qquad (2.19)$$

б) Пусть В - « стрелок попадет в цель четвертый раз ». Тогда:

$$B = \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap A.$$

$$P(B) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(A) = q^3 \cdot p =$$

$$= (0{,}3)^3 \cdot 0{,}7 = 0{,}027 \cdot 0{,}7 = 0{,}0189 \approx 0{,}019$$

Ответ. а) закон распределения величины имеет вид (2.19);

б) вероятность того, что стрелок попадет в цель четвертый раз, равна 0,019.

Задача 2.4. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины, равномерно распределенной на интервале [2; 8] .

Решение. Известно, что равномерное распределение на интервале [2; 8] согласно (2.7) будет иметь плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in [2;8] \\ 0, & x \notin [2;8] \end{cases}$$

Тогда, по формулам (2.8), имеем

$$M\xi = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5,$$

$$D\xi = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(8-2)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3,$$

$$\sigma\xi = \sqrt{D\xi} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$$

Ответ. $M\xi = 5$; $D\xi = 3$; $\sigma\xi \approx 1{,}73$.

Задача 2.5. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2, \sigma = 1$. Найти $P\,(0 < \xi < 3)$.

Решение. Применим формулу (2.10) для $x_1 = 0, x_2 = 3, a = 2, \sigma = 1$. Тогда получим:

$$P\,(0 < \xi < 3) = \Phi\left(\frac{3-2}{1}\right) - \Phi\left(\frac{0-2}{1}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2) = 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185$$

Ответ. $P\,(0 < \xi < 3) \approx 0{,}82$

2.3 Задачи для упражнений

2.1 Механизм состоит из трех элементов, которые функционируют независимо. Вероятность того, что элемент выйдет из строя, равна 0,1. Найти распределение случайной величины ξ - числа элементов, выходящих из строя.

2.2 В некоторой партии содержатся 10% бракованных деталей. Наудачу берут 4 детали. Найти закон распределения биномиальной случайной величины ξ - числа бракованных деталей, находящихся среди выбранных.

2.3 Охотник, который имеет 4 патрона, стреляет до поражения цели (или до полного расхода патронов). Найти математическое ожидание и дисперсию числа использованных патронов, если вероятность поражения цели при одном выстреле равна 0,25.

2.4 В цель стреляют до получения двух попаданий. Найти математическое ожидание числа выстрелов, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,2.

2.5 В течение часа на коммутатор поступает в среднем 60 вызовов. Найти вероятность того, что в течение 30 секунд, сколько отсутствовала телефонистка, не будет ни одного вызова.

2.6 Текст, расположенный на 100 страницах, содержит 500 ошибок. Найти вероятность того, что одна страница содержит не менее трех ошибок.

2.7 Случайная величина ξ имеет нормальное распределение со средним значением $M\xi$=40 и дисперсией $D\xi$=200. Найти P (30 < ξ < 80).

2.8 Рост взрослого человека является случайной величиной, имеющей нормальное распределение. Пусть средний рост равен 175 см, а среднее квадратичное отклонение - 6 см. Найти вероятность того, что хотя бы один из пяти человек, взятых наудачу, будет иметь рост между 170 см и 180 см.

2.9 Случайная величина ξ распределена нормально с плотностью $f_\xi(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-1)^2}{50}}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и P (3<ξ<8).

2.10 Математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение некоторой нормально распределенной случайной величины равны 10 и 2 соответственно. Найти вероятность того, что в результате опыта эта величина примет значения из интервала (12; 14).

2.11 Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $M\xi$=0 и $D\xi$=1. Найти вероятности: P (-0,5<ξ<-0,1) и P(1<ξ<2).

2.12 Ошибка, допущенная при измерении, является случайной величиной, которая распределена нормально. Найти $P(4\xi \in (-9;9))$, если a =0 и σ=3.

2.13 Найти число игральных костей, которые необходимо бросить для того, чтобы математическое ожидание числа костей, на которых выпало два очка, равнялось шести.

2.14 На стол высыпали 25 монет. Найти вероятность того, что число монет, упавших гербами вверх, заключено между 8 и 15, включая эти два крайних значения.

2.15 Непрерывная случайная величина ξ имеет показательное (экспоненциальное) распределение, а

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}1-e^{-0,6x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

Найти $P(\xi\in[2;5])$, $M\xi$ и $D\xi$.

2.16 Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины ξ, имеющей плотность распределения

$$f_{\xi}(x)=\begin{cases}10e^{-10x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

2.17 Результаты измерения расстояния между двумя населенными пунктами подчинены нормальному закону распределения с параметрами a=16 км, σ=100 м. Найти вероятности того, что расстояние между этими пунктами:

а) не менее 15,8 км; б) не более 16,25 км;

в)от 15,75 км до 16,3 км.

2.18 Рост взрослой женщины является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами a=164 см, σ=5,5 см. Найти плотность распределения и функцию распределения этой величины.

2.19 Рост взрослого мужчины является случайной величиной распределенной нормально. Пусть Mξ=170 см, Dξ=36 см. Вычислить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных четырех мужчин будет иметь рост от 168 см до 172 см.

2.20 Составить закон распределения случайной величины ξ — числа попаданий в мишень при четырех выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Вычислить математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

2.21 Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки взвешивания подчинены нормальному закону со среднем квадратичным отклонением σ=20 г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величины 10 г.

2.22 Выпущено 150 почтовых голубей. Каждый из них возвращается с вероятностью p=0,75. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вернувшихся голубей.

2.23 Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Найти:

а) математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma\xi$ случайной величины ξ

б) $p(\xi \in [1; 2])$.

Практическая работа №3«Двумерные случайные величины»

3.1 Краткие сведения из теории

Результаты некоторых испытаний могут быть описаны более чем одним числом

Пример. Место падения снаряда определяется двумя числами: абсциссой и ординатой точки на плоскости.

Так как эти координаты изменяются от одного испытания к другому, то они являются случайными (заранее неизвестно в какое место попадет снаряд).

Говорят в этом случае, что задана двумерная случайная величина. Любая двумерная величина имеет две компоненты. Обозначим их через ξ и η. Двумерную случайную величину будем обозначать через ζ. Таким образом, $\zeta = (\xi; \eta)$.

Множество возможных значений

$$\{x;\ y\} = \{(x;\ y) : \xi = x\ ; \eta = y\}$$

будет интерпретироваться как множество точек плоскости: x это абсцисса точки, а y ордината.

Также, как и для обычных случайных величин (одномерных), будем различать дискретные двумерные случайные величины и непрерывные двумерные случайные величины.

Законом распределения (распределением) дискретной двумерной случайной величины называется таблица, в которую занесены возможные значения:

$$\xi = x_i, i = 1,2,\ldots, m, \eta = y_j, j = 1,2,\ldots, n,$$

а также соответствующие этим значениям вероятности:

$$Pi_j = P\,(\xi = x_i,; \eta = y_j). \qquad (3.1)$$

Таким образом, распределение дискретной двумерной случайной величины можно изобразить в виде таблицы 3.1 с двойным входом:

Таблица 3.1 –Распределение двумерной случайной величины

η / ξ	y_1	y_2	$\dots$	y_j	$\dots$	y_n	$P(\xi = x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\dots$	p_{1j}	$\dots$	p_{1n}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\dots$	p_{2j}	$\dots$	p_{2n}	p_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\dots$	p_{ij}	$\dots$	p_{in}	p_i
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\dots$	p_{mj}	$\dots$	p_{mn}	p_m
$P(\eta = y_i)$	q_1	q_2	$\dots$	q_j	$\dots$	q_n	

В этой таблице $x_1 < x_2 < \dots < x_m$, а также $y_1 < y_2 < \dots < y_n$. Имеют место очевидные соотношения:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1. \tag{3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = P(\xi = x_i) = p_i, i = 1, \dots, m. \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} = P(\eta = y_j) = q_j, j = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Закон распределения непрерывной двумерной случайной величины обычно задается функцией распределения или плотностью распределения.

Определение. Функцией распределения двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$ называется функция, обозначаемая через $F_\zeta(x; y)$ и выражаемая равенством:

$$F_\zeta(x; y) = P(\xi < x; \eta < y). \tag{3.5}$$

Обозначим через $F_\xi(x)$ и $F_\eta(x)$ функции распределениякомпонент ξ и η:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x); \; F_{\eta}(y) = P(\eta < y) \tag{3.6}$$

Функции распределения (3.6) называются маргинальными функциями распределения. Известно, что

$$F_{\xi}(x) = F_{\zeta}(x; +\infty) \; F_{\eta}(y) = F_{\zeta}(+\infty; y) \tag{3.7}$$

Пусть $D = \{(x; y) : a \le x \le b; c \le y \le d\}$. Тогда:

$$P(\zeta \in D) = F_{\zeta}(b; d) - F_{\zeta}(a; d) - F_{\zeta}(b; c) + F_{\zeta}(a; c) \tag{3.8}$$

Плотностью распределения (плотностью вероятностей) случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$ называется функция:

$$f_{\zeta}(x; y) = \frac{\partial^2 F_{\zeta}(x; y)}{\partial x \partial y} \tag{3.9}$$

Для любой области $D \in R^2$ имеем

$$P(\zeta = (\xi; \eta) \in D) = \iint\limits_{D} f_{\zeta}(x; y) dxdy \tag{3.10}$$

Формула (3.9) выражает плотность распределения через функцию распределения двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$. Обратно,

$$F_{\zeta}(x; y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{\zeta}(u; v) dudv \tag{3.11}$$

Плотность распределения $f_{\zeta}(x; y)$ обладает свойствами:

$$f_{\zeta}(x; y) \ge 0; \; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\zeta}(x; y) dxdy = 1 \tag{3.12}$$

Замечание. Очевидно, функция распределения (3.5) существует для любых двумерных случайных величин, как непрерывных, так и дискретных. Плотность распределения существует только для дифференцируемых функций распределения.

Если $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ являются плотностями распределения компонент ξ и η, то:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x;y)dy \tag{3.13}$$

и

$$f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x;y)dx \tag{3.14}$$

Пусть $\zeta = (\xi;\eta)$ имеет дискретное распределение. Обозначим через $p(x_i/y_j)$ условную вероятность

$$P(\xi = x_i/\eta = y_j).$$

Распределение

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \\ p(x_1/y_j) & p(x_2/y_j) & \ldots & p(x_m/y_j) \end{pmatrix}, j = 1, \ldots, n \tag{3.15}$$

называется распределением дискретной величины ξ при условии, что $\eta = y_j$ (условным распределением ξ).

Аналогично, распределение

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ p(y_1/x_i) & p(y_2/x_i) & \ldots & p(y_n/x_i) \end{pmatrix}, j = 1, \ldots, m \tag{3.16}$$

является распределением дискретной величины η при условии, что $\xi = x_i$ (условным распределением η).

В силу теоремы умножения вероятностей, будем иметь:

$$p(y_j / x_i) = \frac{P(\xi = x_i; \eta = y_j)}{P(\xi = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}, i = 1, \ldots, m, \tag{3.17}$$

$$p(x_i / y_j) = \frac{P(\xi = x_i; \eta = y_j)}{P(\xi = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}, j = 1, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Аналогично, если обозначить через $\varphi(x/y)$ и $\psi(y/x)$ условные плотности распределения непрерывных случайных величин ξ и η соответственно, то

$$\varphi(x/y) = \frac{f_\zeta(x; y)}{f_\eta(y)} \tag{3.19}$$

$$\psi(y/x) = \frac{f_\zeta(x; y)}{f_\xi(x)} \tag{3.20}$$

Из формул (3.19) и (3.20) следует:

$$f_\zeta(x; y) = f_\xi(x) \cdot \psi(y / x) = f_\eta(y) \cdot \varphi(x / y). \tag{3.21}$$

Используя формулы (3.13) и (3.14), из формул (3.19) и (3.20) выводим:

$$\varphi(x; y) = \frac{f_\zeta(x; y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x; y) dx}, \tag{3.22}$$

$$\psi(y; x) = \frac{f_\zeta(x; y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x; y) dy} \tag{3.23}$$

Условные плотности распределения $\varphi(x; y)$ и $\psi(y; x)$ обладают основными свойствами плотности распределения (3.12).

Условным математическим ожиданиемдискретной случайной величины ξ при значении $\eta = y$называется число

$$M(\xi / \eta = y) = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i / y) \tag{3.24}$$

Аналогично определяется условное математическое ожидание дискретной величины η при значении $\xi = x$:

$$M(\eta / \xi = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j / x) \tag{3.25}$$

Для непрерывных распределений :

$$M(\xi / \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x / y)dx, \tag{3.26}$$

$$M(\eta / \xi = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\psi(y / x)dy. \tag{3.27}$$

Если x и y изменяются, то $M(\xi / \eta = y)$ и $M(\eta / \xi = x)$будут функциями от y и x, таким образом $M(\xi / \eta = y) = g(y)$; $M(\eta / \xi = x) = h(x)$. Функция $h(x)$ называется функцией регрессии величины n на величину ξ, а функция $g(y)$ представляет собой функцию регрессии ξ на η.

Говорят, что случайная величина ξ не зависит от случайной величины η, если

$$\varphi(x / y) = f_\xi(x). \tag{3.28}$$

Можно показать, что из (3.28) следует равенство

$$\psi(y / x) = f_\eta(x), \tag{3.29}$$

т. е. независимость случайных величин взаимна. Для двух независимых случайных величин имеем:

$$f_\zeta(x;y) = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y). \tag{3.30}$$

Независимость случайных величин может быть выражена также в терминах функций распределения. Величины ξ и η независимы тогда и только тогда, когда

$$F_\zeta(x;y) = F_\xi(x)\cdot F_\eta(y). \tag{3.31}$$

Двумерной случайной величине $\zeta = (\xi;\eta)$ можно сопоставить вектор математических ожиданий

$$(M\xi; M\eta) \tag{3.32}$$

и корреляционную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} K_{\xi\xi} & K_{\xi\eta} \\ K_{\eta\xi} & K_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

где

$$K_{\xi\eta} = M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)] \tag{3.34}$$

является моментом корреляции величин ξ и η. Очевидно, что

$$K_{\xi\xi} = D\xi, K_{\eta\eta} = D\eta, K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi}$$

Для момента корреляции справедлива формула:

$$K_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - M\xi)(y_i - M\eta)p_{ij}, \tag{3.35}$$

когда величины дискретны и формула

$$K_{\xi\eta} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)(y - M\eta)f_{\zeta}(x; y)dxdy, \qquad (3.36)$$

если случайные величины ξ и η непрерывны. При вычислении момента корреляции часто используется формула

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi \cdot M\eta, \qquad (3.37)$$

которая следует из (3.34) после некоторых преобразований и использования свойств математического ожидания.

Определение. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число

$$k_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}}. \qquad (3.38)$$

Для любых случайных величин ξ и η имеем

$$\left|k_{\xi\eta} \le 1\right|. \qquad (3.39)$$

Случайные величины ξ и η называются некоррелированными, если $k_{\xi\eta} = 0$.

Любые независимые величины также некоррелированы. Обратное утверждение неверно.

Проиллюстрируем применение формул (3.1) - (3.39) при решении типовых задач.

3.2 Решение типовых задач

Задача 3.1. Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет распределение представленное в таблице 3.2:

Таблица 3.2 – Распределение двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$

ξ \ η	2,3	2,7
26	0,05	0,09
30	0,12	0,30
41	0,08	0,11
50	0,04	0,21

а) Найти законы распределения величин ξ и η.

б) Вычислить $M\xi$ и $M\eta$.

Решение. Случайная величина ξ принимает 4 значения:

$$x_1 = 26;\ x_2 = 30;\ x_3 = 41;\ x_4 = 50.$$

Вычислим по формулам (3.3) соответствующие им вероятности:

$$P(\xi = 26) = 0{,}05 + 0{,}09 = 0{,}14,$$
$$P(\xi = 30) = 0{,}12 + 0{,}30 = 0{,}42,$$
$$P(\xi = 41) = 0{,}08 + 0{,}11 = 0{,}19,$$
$$P(\xi = 50) = 0{,}04 + 0{,}21 = 0{,}25.$$

Таким образом, величина ξ имеет распределение

$$\xi : \begin{pmatrix} 26 & 30 & 41 & 50 \\ 0{,}14 & 0{,}42 & 0{,}19 & 0{,}25 \end{pmatrix} \qquad (3.40)$$

$$M\xi = 26 \cdot 0{,}14 + 30 \cdot 0{,}42 + 41 \cdot 0{,}19 + 50 \cdot 0{,}25 =$$
$$= 3{,}64 + 12{,}6 + 7{,}79 + 12{,}5 = 36{,}53$$

Случайная величина η принимает два значения: $y_1=2{,}3$ и $y_2=2{,}7$. Вычислим вероятности по формулам (3.4):

$$P(\eta = 2{,}3) = 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}08 + 0{,}04 = 0{,}29,$$
$$P(\eta = 2{,}7) = 0{,}09 + 0{,}30 + 0{,}11 + 0{,}21 = 0{,}71.$$

Следовательно, случайная величина η имеет закон распределения:

$$\eta:\begin{pmatrix} 2,3 & 2,7 \\ 0,29 & 0,71 \end{pmatrix} \qquad (3.41)$$

$$M\eta = 2,3\cdot 0,29 + 2,7\cdot 0,71 = 0,667 + 1,917 \approx 2,58 \; .$$

Ответ. Законы распределения величин ξ и η представлены матрицами (3.40) и (3.41); $M\xi = 36{,}53$; $M\eta \approx 2{,}58$.

Задача 8.2. Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi;\eta)$ имеет распределение, заданное в таблице 3.3:

Таблица 3.3 – Распределение двумерной случайной величины $\zeta = (\xi;\eta)$

ξ \ η	10	14	18
3	0,25	0,15	0,32
6	0,10	0,05	0,13

Найти:

а) Закон распределенияслучайной величины ξ, обусловленный значением $\eta = 10$.

б) Закон распределенияслучайной величины η, обусловленный значением $\xi = 6$.

Решение. а) Случайнаявеличина ξ принимает два значения: $x_1 = 3$ и $x_2 = 6$. Находим условные вероятности по формулам (3. 18):

$$p(\xi = 3/\eta = 10) = \frac{P(\xi = 3; \eta = 10)}{P(\eta = 10)} = \frac{0,25}{0,25 + 0,10} = \frac{0,25}{0,35} = \frac{5}{7},$$

$$p(\xi = 6/\eta = 10) = \frac{P(\xi = 6; \eta = 10)}{P(\eta = 10)} = \frac{0,10}{0,35} = \frac{2}{7}$$

Условный закон распределения ξ, при значении $\eta = 10$ (формулы (3.15)) будет выглядеть так:

$$\xi/\eta=10:\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix} \qquad (3.42)$$

б) Случайная величина η принимает три значения: $y_1=10$; $y_2=14$ и $y_3=18$. По формулам (3.17) находим условные вероятности:

$$p(\eta=10/\xi=6)=\frac{P(\eta=10/\xi=6)}{P(\xi=6)}=\frac{0{,}1}{0{,}1+0{,}05+0{,}13}=\frac{10}{28},$$

$$p(\eta=14/\xi=6)=\frac{P(\eta=14/\xi=6)}{P(\xi=6)}=\frac{0{,}05}{0{,}1+0{,}05+0{,}13}=\frac{5}{28},$$

$$p(\eta=18/\xi=6)=\frac{P(\eta=18/\xi=6)}{P(\xi=6)}=\frac{0{,}13}{0{,}1+0{,}05+0{,}13}=\frac{13}{28}.$$

Условный закон распределения величины η, при значении $\xi=6$ (формулы (3.16)), будет выглядеть так:

$$\eta/\xi=6:\begin{pmatrix} 10 & 14 & 18 \\ 10/28 & 5/28 & 13/28 \end{pmatrix} \qquad (3.43)$$

Ответ. Условные законы распределения случайных величин ξ и η представлены матрицами (3.42) и (3.43).

Задача 8.3. Двумерная случайная величина $\zeta=(\xi;\eta)$ имеет плотность распределения:

$$f_\zeta(x;y)=\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}$$

Найти:

а) Значение параметра a.

б) Функцию распределения $F_\zeta(x;y)$.

в) Вероятность того, что величина ζ попадет в прямоугольник с вершинами в точках: O (0;0), A (0; 1),B ($\sqrt{3}$;1) и C ($\sqrt{3}$;0).

г) Показать, что случайные величины ξ и η независимы.
Решение. а) Для определения параметра a воспользуемсясвойством (3.12)

плотности (второе соотношение). Имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2+x^2y^2+y^2}dxdy=1$$

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dxdy}{\left(1+x^2\right)^2\left(1+y^2\right)^2}=a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}=$$

$$=a\cdot \operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{\infty}\cdot \operatorname{arctg}xy\Big|_{-\infty}^{\infty}=a\pi^2=1\Rightarrow a=\frac{1}{\pi^2}$$

Следовательно, двумерная случайная величина $\zeta=(\xi;\eta)$ имеет плотность

$$f_\zeta(x;y)=\frac{1}{\pi^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)}$$

б) Находим функцию распределения по формуле (3.11):

$$F_\zeta(x;y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{dudv}{\pi^2\left(1+u^2\right)\left(1+v^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\operatorname{arctg}u\Big|_{-\infty}^{x}\cdot \operatorname{arctg}v\Big|_{-\infty}^{y}=\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}y+\frac{1}{2}\right) \quad (3.44)$$

в)Вычислим $P(\zeta\in D)$ по формулам (3.10), где D прямоугольник с заданными вершинами(рисунок 3.1)

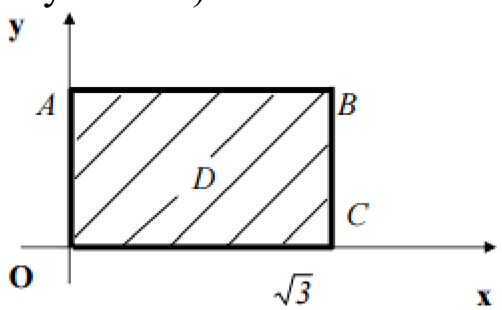


Рисунок 3.1 – Графическое изображение функции $P(\zeta\in D)$

Имеем

$$P(\zeta \in D) = P\left((\xi;\eta) \in D\right) = \iint\limits_D f_\zeta(x;y) =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{dxdy}{\pi^2\left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\,\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} \cdot \mathrm{arctg}y\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{12}$$

г) Плотность распределения $f_\zeta(x;y)$ может быть представлена так:

$$f_\zeta(x;y) = \frac{1}{\pi^2\left(1+x^2+x^2y^2+y^2\right)} =$$
$$= \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\cdot\frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)} = f_\xi(x)\cdot f_\eta(y), \tag{3.45}$$

где

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}, f_\eta(y) = \frac{1}{\pi\left(1+y^2\right)},$$

откуда следует (формула (3.30)), что случайные величины ξ и η независимы.

Ответ. $a = 1/\pi^2$. Функция распределения задана формулой (3.44). $P(\zeta \in D) = 1/12$. Независимость следует из (3.45).

Задача 8.4. Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi;\eta)$ распределена равномерно в круге радиуса r:

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2 \le r^2 \\ 0, & x^2+y^2 > r^2 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотности распределения одномерных величин ξ и η.

б) Условные плотности распределения.

Решение. а) Вычислим $f_\xi(x)$ по формуле (3.13).

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x;y)dy=\int\limits_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{dy}{\pi r^2}=\frac{2}{\pi r^2}\int\limits_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=\frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$$

Очевидно, $|x|\le r$. Поэтому:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}, & |x|\le r\\ 0, & |x|>r\end{cases}$$

Аналогично находим $f_\xi(y)$, используя формулу (3.14):

$$f_\xi(y)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}, & |y|\le r\\ 0, & |y|>r\end{cases}$$

б) Для определения условной плотности распределения $\varphi(x/y)$ используем формулу (3.19).

$$|x|<\sqrt{r^2-y^2}$$
$$\varphi(x/y)\ |x|>\sqrt{r^2-y^2},\ |y|<r$$

Аналогично,

$$\psi(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & |y|<\sqrt{r^2-y^2}\\ 0, & |x|>\sqrt{r^2-y^2},\ |x|<r\end{cases}$$

Задача 8.5. Двумерная случайная величина $\zeta=(\xi;\eta)$ имеет плотность распределения:

$$f_\zeta(x;y)=\begin{cases} a\sin(x+y), & 0\le x\le\pi/2; 0\le y<\pi/2 \\ 0, & \text{вне}\cdot\text{квадрата}\end{cases}$$

а) Значение параметра a.

б) Математические ожидания и дисперсии случайных величин ξ и η.

в) Момент корреляции $K_{\xi\eta}$.

Решение. а) Используем второе из соотношений (3.12) для определения значения параметра a.

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} a\sin(x+y)dxdy=1\Leftrightarrow a=1/2.$$

б) Определим, по формулам (3.13) и (3.14), $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$:

$$f_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_\zeta(x;y)dy=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin(x+y)dy=-\frac{1}{2}\cos(x+y)\Big|_0^{\pi/2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

Аналогично находим $f_\eta(y)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(y+\frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно,

$$M\xi=\int_0^{\pi/2} xf_\xi(x)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx$$

Берем этот интеграл по частям:

$$\left.\begin{array}{c} x=u \\ dv=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right| \begin{array}{c} dx=du \\ v=-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\end{array}$$

Далее, для $M\xi$ получим:

$$M\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[-\frac{\pi}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Аналогично, вычисляем $M\eta = \frac{\pi}{4}$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2} x^2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2$$

в) Для вычисления момента корреляции $K_{\xi\eta}$ применим формулу (3.37), таким образом

$$K_{\xi\eta} = M(\xi\eta) - M\xi\cdot M\eta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy\sin(x+y)dxdy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} xy(\sin x\cos y + \cos x\sin y)dxdy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\sin x dx \int_0^{\pi/2} y\cos y dy + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} x\cos x dx \int_0^{\pi/2} y\sin y dy - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} x\sin x dx \int_0^{\pi/2} y\cos y dy - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{16} - 1$$

Ответ.

а) a=1/2;

б) $M\eta = M\xi = \frac{\pi}{4}; D\eta = D\xi = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2;$

в) $K_{\xi\eta}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{16}-1$

3.3Задачи для упражнений

3.1 Случайная величина $\zeta=(\xi;\eta)$распределена равномерно в треугольнике, образованном прямыми $y=x$, $y=0$ и $x=2$. Найти коэффициент корреляции между величинами ξиη.

3.2 По цели стреляют два раза. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равнаp. Введем случайные величины: ξ - число попаданий; η - число промахов. Найти:

а) Закон распределения двумерной случайной величины$\zeta=(\xi;\eta)$

б) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$; дисперсии $D\xi$ и $D\eta$; момент корреляции $K_{\xi\eta}$.

3.3 Случайные величины ξ и η.независимы и распределены равномерно на отрезках [-1; 1] и [0; 2] соответственно. Найти плотность распределения и функцию распределения двумерной случайной величины $\zeta=(\xi;\eta)$.

3.4 Двумерная случайная величина $\zeta=(\xi;\eta)$ имеет плотность распределения

$$f_{\zeta}(x;y)=\begin{cases}\cos x\cos y, 0\le x\le\frac{\pi}{2}; 0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, \text{вне}\cdot\text{квадрата}\end{cases}$$

Найти:

а) Функцию распределения $F_{\zeta}(x;y)$ величины $\zeta=(\xi;\eta)$.

б) Коэффициент корреляции $k_{\xi\eta}$.

3.5 Двумерная случайная величина задана таблицей 3.4:

Таблица 3.4 – Двумерная случайная величина

η / ξ	-1	0	1
0	0,01	0,04	0,05
1	0,06	0,24	0,10

2	0,05	0,15	0,10
3	0,04	0,07	0,09

Найти:

а) Законы распределения величин ξ и η

б) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

в) Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

г) Коэффициент корреляции $k_{\xi\eta}$.

3.6 Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет плотность распределения

$$f_\zeta(x; y) = \begin{cases} a\cos(x - y), 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, \text{вне} \cdot \text{квадрата} \end{cases}$$

Найти:

а) Значение параметра a.

б) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

в) Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

г) Момент $K_{\xi\eta}$ и коэффициент $k_{\xi\eta}$ корреляции.

3.7 Задана двумерная плотность распределения

$$f_\zeta(x; y) = \frac{a}{1 + \left(x^2 + y^2\right)^2}$$

Найти:

а) Значение параметра a.

б) Радиус круга с центром в начале координат, вероятность попасть в который, равна 0,5.

3.8 Плотность распределения двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$ задана функцией:

$$f_\zeta(x; y) = ae^{-(x+1)^2 - |y|}$$

Найти:

а) Значение параметра а.

б) Плотности распределения величин ξ и η.

в) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$. Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

г) Зависимы или нет величины ξ и η

3.9 Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ распределена равномерно в круге радиуса r=2:

$$f_\zeta(x;y) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}, & x^2 + y^2 \le 4 \\ 0, & x^2 + y^2 > 4 \end{cases}$$

Найти:

а) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

б) Зависимы или нет величины ξ и η.

3.10 Монета бросается два раза. Пусть ξ - число появлений герба, а η - число появлений цифры. Найти закон распределения величины $\zeta = (\xi; \eta)$. Вычислить $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$ и $K_{\xi\eta}$.

3.11 Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет плотность распределения

$$f_\zeta(x;y) = ae^{-\frac{(x+3)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{2}}.$$

Найти:

а) Значение параметра а.

б) $P(\xi < -3; \eta < 4)$.

3.12 Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет независимые компоненты ξ и η с плотностями распределения.

$$f_\xi(x;y) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_\eta(x;y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y \ge 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Найти:

а) Плотность распределения величины $\zeta = (\xi; \eta)$.

б) Функцию распределения величины $\zeta = (\xi; \eta)$.

в) Математические ожидания $M\xi$, $M\eta$. Дисперсии $D\xi$, $D\eta$.

г) Момент и коэффициент корреляции величин ξ и η.

3.13 Задана плотность распределения двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$:

$$f_{\zeta}(x; y) = \begin{cases} 4xye^{-x^2-y^2}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0 \cdot \text{или} \cdot y < 0 \end{cases}$$

Найти:

а) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

б) Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

в) Момент и коэффициент корреляции междувеличинами ξ и η.

3.14 Двумерная дискретная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет распределение представленное в таблице 3.5.

Таблица 3.5 - Двумерная дискретная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$

η / ξ	-2	0	4
0	0,03	0,04	0,15
1	0,08	0,24	0,02
3	0,05	0,1	0,1
5	0,04	0,06	0,09

Найти:

а) Одномерные законы распределения величин ξ и η

б) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$, дисперсии $D\xi$, $D\eta$ и коэффициент корреляции.

3.15 Случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ задана таблицей 3.6.

Таблица 3.6 - Случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$

η	20	40	60

ξ			
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Найти:

а) Параметр λ;

б) $M\xi$ и $M\eta$;

в) $D\xi$ и $D\eta$;

г) $k_{\xi\eta}$

3.16 Дискретная двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет распределение представленное в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Дискретная двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$

η / ξ	2	4	5	9
0,5	0,02	0,12	0,14	0,19
0,7	0,11	0,05	0,24	0,13

Найти:

а) Законы распределения случайных величин ξ и η.

б) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

в) Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

г) Условный закон распределения величины ξ при η=5.

д) Условный закон распределения величины η при ξ=0,7.

3.17 Задана дискретная двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ (таблица 3.8).

Таблица 3.8 - Дискретная двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$

η / ξ	0,4	0,8
2	0,15	0,05
5	0,30	0,12
8	0,35	0,03

Найти:

а) Законы распределения случайных величин ξ и η.

б) Условный закон распределения случайной величины ξ, если η =0,4.

в) Условный закон распределения η, если $\xi = 5$.

3.18 Двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ задана таблицей 3.9.

Таблица 3.9 - Дискретная двумерная случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$

η / ξ	1	2	3
2,5	0,12	0,15	0,2
3,5	0,15	0,21	0,19

Найти условные законы распределения случайной величины η.

3.19 Заданы законы распределения независимых случайных величин ξ и η.

$$\xi : \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0{,}15 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}35 \end{pmatrix}; \eta : \begin{pmatrix} 13 & 17 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Найти:

а) Математические ожидания $M\xi$ и $M\eta$.

б) Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

в) Закон распределения случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$

3.20 Плотность двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$ задана функцией

$$f_\zeta(x; y) = \begin{cases} x + y, 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1 \\ 0, \quad \text{вне} \cdot \text{квадрата} \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

3.21 Задана двумерная дискретная случайная величина в таблице 3.10.

Таблица 3.9 - Дискретная двумерная случайная величина

η	-4	0	2	5

ξ				
10	0,05	0,15	0,17	0,13
20	0,12	0,08	0,24	0,06

Найти:

а) Дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

б) Коэффициент корреляции $k_{\xi\eta}$.

3.22 Случайная величина $\zeta = (\xi; \eta)$ имеет плотность распределения

$$f_\zeta(x; y) = ae^{-x^2 - 2xy - 4y^2}$$

Найти:

а) Параметр а

б) Плотности распределения $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$.

в) Условные плотности распределения $\varphi(x, y)$ и $\psi(y, x)$.

3.23 Задана плотность распределения двумерной случайной величины $\zeta = (\xi; \eta)$

$$f_\zeta(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\sin x \sin y, & 0 \le x \le \pi; 0 \le y \le \pi \\ 0, & \text{вне} \cdot \text{квадрата} \end{cases}$$

Найти:

а) Математические ожидания $M\xi$, $M\eta$, а также дисперсии $D\xi$ и $D\eta$.

б) Момент корреляции $K_{\xi\eta}$

Практическая работа №4 «Элементы математической статистики»

4.1 Краткие сведения из теории

К основным задачам математической статистики относятся: указание или создание методов сбора и обработки статистических данных.

Статистической или генеральнойсовокупностью называется совокупность объектов, которую необходимо изучить.

Примеры. Множество людей некоторого города, множество студентов, множество электроламп, множество телевизоров, множество фирм, экономических агентов и т. д.

Число объектов генеральной совокупности называется объемом генеральной совокупности.

Обозначим это число через N .

Для изучения объектов генеральной совокупности производится выборка.

Выборочной совокупностью или просто выборкой называется совокупность (множество) случайно отобранных объектов.

Число объектов выборочной совокупности называется объемом выборки.

Обозначим это число через n. Обычно генеральную совокупность изучают относительно некоторого признака.

Признаком называется общее свойство, характерное для всех объектов совокупности.

Признаки бывают качественными и количественными.

Пример. Исследуется группа людей. Качественный признак: цвет волос, цвет глаз. Количественный признак: рост, возраст.

Пусть произвели выборку объема $n<N$. Исследуем ее объекты относительно некоторого количественного признака ξ, который принял значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$; причем значение x_1принял n_1 раз, значение x_2 - n_2 раза, ... , x_m принял n_m раз. Эти результаты заносятся в таблицу, состоящую из двух строк. В первую строку заносятся возможные значения признака ξ, записанные в возрастающем порядке $x_1, x_2, \ldots, x_m$; а во вторую строку заносятся числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$.

x_1	x_2		x_m
n_1	n_2		n_m

(4.1)

Абсолютной частотой значения x_i называется число n_i.Относительной частотой значения x_iназывается отношение

$$f(x_i) = n_i/n\,. \tag{4.2}$$

Иногда во вторую строку таблицы заносятся относительные частоты (4.3):

x_1	x_2		x_m
n_1/n	n_2/n		n_m/n

(4.3)

Замечание. Чаще всего результаты выборки записываются в порядке их получения. Затем они представляются в виде (4.1), либо (4.3). Если результатов много, то они группируются по интервалам (см. задачу 4.1.).

Очевидно,

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n\,. \tag{4.4}$$

Следовательно, с учетом (4.4),

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_m) = n_1/n + n_2/n + \ldots n_m/n = 1$$

Признак или величина ξ может быть рассмотрена как случайная величина, чьими возможными значениями являются $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а частоты $f(x_i)$ могут быть интерпретированы как вероятности $p_i = P(\xi = x_i)$. Таким образом, (4.3) называетсяеще статистическим законом распределения или статистическим распределением признака (величины)

Функция распределения некоторого статистического распределения называется статистической функцией распределения или эмпирической функцией распределения.

Обозначим через $F_s(x)$ статистическую функцию распределения. Тогда

$$F_s(x) = \sum_{x_i < x} n_i / n \quad . \tag{4.5}$$

Из (4.5) следует:

$$F_s(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ n_1 / n, & x_1 < x \le x_2 \\ (n_1 + n_2)/n, & x_2 < x \le x_3 \\ \\ \sum_{i=1}^{m-1} n_i / n, & x_{m-1} < x \le x_m \\ 1, & x > x_m \end{cases} \tag{4.6}$$

График статистической функции распределения (4.6) - это график некоторой ступенчатой функции(рисунок 4.1), т.е.

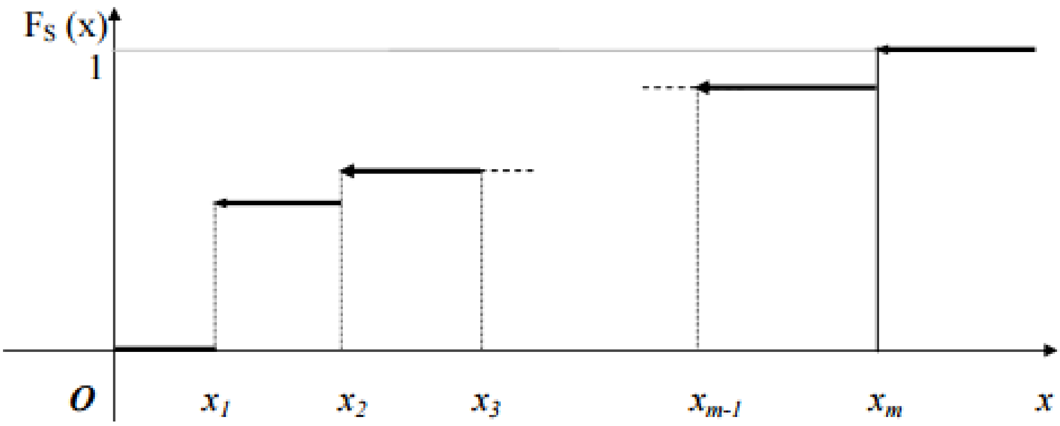


Рисунок 4.1 – График ступенчатой функции

Статистическое распределение (4.3) может быть представлено графически. В декартовой системе координат изображаемточки: $(x_1; n_1/n)$, $(x_2; n_2/n)$, …, $(x_m; n_m/n)$, которые затемсоединяем между собой. Полученная линия называется полигоном частот (рисунок 4.2).

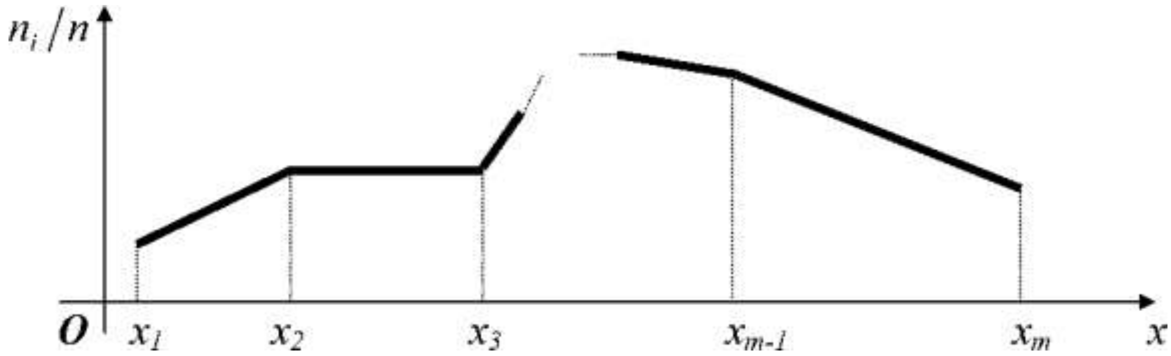


Рисунок 4.2 – Полигон частот

Зачастую накапливается много статистических данных и таблица значений получается громоздкой. Тогда эти данные группируются по интервалам и в таблицу переносят интервалы и частоты.

Пример. Для группы студентов измерили их рост. Полученные результаты занесены в таблицу 4.1:

Таблица 4.1 – Выборка «Рост студентов»

Рост	Число студентов
160 - 165	10
165 - 170	15
170 - 175	12
175 - 180	29
180 - 185	11
185 - 190	3

В этой таблице представлено интервальное распределение. Графически это распределение может быть изображено в виде гистограммы (рисунок 4.3): по оси абсцисс откладывают интервалы длины hи на них строят прямоугольники с высотами равными n_i/h.

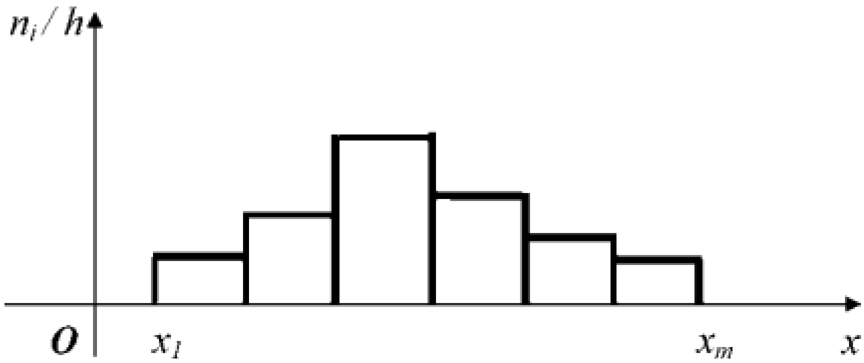


Рисунок 4.3 – Гистограмма

Выборочной средней распределения (4.3) называется число

$$M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i \quad . \tag{4.7}$$

Вычисления выборочной средней по формуле (4.7) довольно громоздки (особенно, если нет калькулятора), поэтому полезно знать следующую формулу:

$$M_s = \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k} \cdot n_i + c \tag{4.8}$$

где k и c - две специально подобранные константы, которые облегчают вычисления. Например, в формуле (4.8) в качестве c можно выбрать значение x_i, которому соответствует наибольшая частота n_i, а за k можно принять h.

Выборочной дисперсией называется число

$$D_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 n_i - (M_s)^2 n_i \tag{4.9}$$

После некоторых преобразований из (4.9) можно получить вычислительную формулу (4.10)

$$D_s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} (x_i^2 n_i - (M_s)^2 \tag{4.10}$$

Как и для выборочной средней здесь рекомендуется формула

$$D_s = \frac{k^2}{n}\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 \cdot n_i - (M_s - c)^2 \tag{4.11}$$

которая, как правило, облегчает вычисления.

Средним квадратичным отклонением выборки называется число

(4.12)

$$\sigma_s = \sqrt{D_s} \tag{4.12}$$

Из некоторой генеральной совокупности делают выборку для того чтобы сделать определенные выводы относительно ее характеристик. Полученные результаты распространяются на все представители генеральной совокупности.

Выборочная средняя M_s, дисперсия D_s и среднее квадратичное отклонение σ_s могут быть вычислены по результатам выборки. Эти результаты позволяют делать некоторые выводы относительно всей совокупности, более точно, относительно некоторых ее характеристик.

Пусть M, D и σ - средняя, дисперсия и среднее квадратичное отклонение генеральной совокупности. Обычно эти параметры неизвестны. Их необходимо найти и оценить используя M_s, D_s и σ_s. Эти числа будут меняться от выборки к выборке, поэтому можно считать, что они случайны.

Из вышеизложенного следуют еще две задачи математической статистики:

1. Оценка параметров (получение некоторых приближенных значений параметров генеральной совокупности).
2. Проверка гипотез.

Пусть необходимо оценить параметр а закона распределения (например, нормальный закон содержит 2 параметра: а и σ. Для этого мы располагаем результатами выборки $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Так как они изменяются от одной выборки к другой, то их можно считать случайными величинами.

Статистической оценкой $\tilde{a}$ неизвестного параметра а называется функция

$$\tilde{a} = f(x_1, x_2, \cdots, x_m) \tag{4.13}$$

Говорят, что оценка $\tilde{a}$ несмещенная или без систематической ошибки, если

$$M\tilde{a} = a. \tag{4.14}$$

Оценка $\tilde{a}$ называется эффективной, если

$$\lim_{n\to\infty} P(|\tilde{a} - a| < \varepsilon) = 1 \tag{4.15}$$

где s> 0 произвольное, сколь угодно малое число.

Например, оценкой (4.13) генеральной средней статистической совокупности является выборочная средняя M_s. Эта оценка несмещенная и эффективная, т.е. для нее выполняются соотношения (4.14) и (4.15).

Несмещенной оценкой для генеральной дисперсии является исправленная выборочная дисперсия (4.16)

$$D_s^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - M_s)^2 \cdot n_i \tag{4.16}$$

Любая оценка вычисляется с некоторой точностью. Очевидно, что получим разные оценки для разных выборок. Таким образом, оценку $\tilde{a}$ параметра а можно рассматривать как случайную величину. Пусть Δ - точность оценки. Она достигается с некоторой вероятностью

$$P(|a - \tilde{a}|) \le \Delta = \gamma\,. \tag{4.17}$$

Соотношение (4.17) может быть записано в виде (4.18)

$$P(\tilde{a} - \Delta \le a \le \tilde{a} + \Delta) = \gamma \tag{4.18}$$

Интервал $[\tilde{a} - \Delta; \tilde{a} + \Delta]$называется доверительным интервалом, а γ - доверительной вероятностью (надежностью). Значения $\tilde{a} - \Delta$и $\tilde{a} + \Delta$ называются доверительными границами.

Доверительный интервал для нормального распределения с параметрами а и σ задается соотношением:

$$P\left(M_s - U_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le a \le M_s + U_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \gamma \tag{4.19}$$

где

$$U_\gamma = \frac{\Delta}{\sigma}\sqrt{n},$$

$$\Phi(U_y) = \frac{\gamma}{2} \qquad (4.20)$$

С помощью (4.20), из таблиц находим аргумент U_γ. Соотношения (4.19) и (4.20) дают возможность найти доверительный интервал для а, когда параметр σ известен. Если σ не задано, то воспользуемся соотношением (4.21)

$$P\left(M_s - t_\gamma\sqrt{\frac{D_s^*}{n}} \le a \le M_s + t_\gamma\sqrt{\frac{D_s^*}{n}} \right) = \gamma \qquad (4.21)$$

для определения интервала $\Delta = t_\gamma\sqrt{D_s^*/n}$ параметра а.

Доверительный интервал для среднего квадратичного отклонения σ нормального распределения выражается неравенством

$$\sqrt{\frac{D_s^*}{U_2}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{D_s^*}{U_1}} \qquad (4.22)$$

где U_1 и U_2 находятся из таблиц распределения χ^2 (распределения Пирсона).

Иногда требуется установить и оценить зависимость между двумя или несколькими случайными величинами. Наиболее часто встречающаяся зависимость это линейная зависимость между выборочными средними.

Уравнение линии регрессии величины η на величину ξ имеет вид:

$$y_x - M_s\eta = k_{\xi\eta}^s \frac{\sigma_s\eta}{\sigma_s\xi}(x - M_s\xi)\text{)}, \qquad (4.23)$$

где y_x является условным средним величины η (для $\xi = x$). $M_s\xi$ и $M_s\eta$ -

выборочные средние характеристик ξ и η соответственно; $\sigma_s\xi$ и $\sigma_s\eta$ - средние квадратичные отклонения; а $k^s_{\xi\eta}$ - выборочный коэффициент корреляции (4.24)

$$k^s_{\xi\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M_s\xi)(y_j-M_s\eta)\cdot n_{ij}}{n\cdot\sigma_s\xi\cdot\sigma_s\eta} \qquad (4.24)$$

Для облегчения процедуры счета, используется формула

$$k^s_{\xi\eta}=\frac{\frac{kl}{n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{x_i-c_1}{k}\right)\left(\frac{y_j-c_2}{l}\right)n_{ij}-(M_s\xi-c_1)(M_s\eta-c_2)}{\sigma_s\xi\cdot\sigma_s\eta}, \qquad (4.25)$$

где $M_s\xi$ и $M_s\eta$ вычисляются по формуле (4.8), а $D_s\xi$ и $D_s\eta$ - по формуле (4.11), где с=с$_1$ для ξ и с=с$_2$ для η.

Если между величинами ξ и η существует почти линейная зависимость, то линия регрессии величины ξ на величину η будет иметь уравнение:

$$x_y-M_s\xi=k^s_{\xi\eta}\frac{\sigma_s\xi}{\sigma_s\eta}(y-M_s\eta) \qquad (4.26)$$

4.2 Решение типовых задач

Задача 9.1. Заданы результаты выборки:

135133124132104152134130129120122124117123123129
121 122 125 131 147 124 137 112 126 128 111 129115147 131 132
137 119 125 120 129 125 123 127 132 118133132 132 134 131 120
135 132 125 132 108 114 121 133133135 131 125 114 115 122 131
125 132 120 126 115 117 118118 132 134 127 127 124135 128 127
115 144 129 120 137127 125 116 132 120 117 127 118 109127 122
120 135 116118 133 136 125 126 119 126 129 127129 124 127 132

126131 127 130 126 134 135 127 124 123 123 130 132 143 122 129
120 134 108 132 121 111 123 140 137 120 125 131 118120 120 136
129 127 116 138 128 133 122 131 128 140138134 120 126 109 137
111 115 117 130 113 126 115 124 125118 115 128 123 129 128 120
115 134 118 135 134 123 117 120 124

Объем выборки n=185.

а) Найти относительные частоты.

б) Построить гистограмму и полигон заданного распределения.

в) Найти эмпирическую функцию распределения.

г) Вычислить: выборочную среднюю M_s, выборочнуюдисперсию D_s, среднее квадратичное отклонение σ_s выборки.

Решение. а) Используем статистические данные задачи для построения распределения выборки вида (4.1). Так как объем выборки n велик (185), то введем в рассмотрение интервалы длины n=5:

$$(100 - 105]; (105 - 110]; \ldots; (150 - 155].$$

После группировки данных по интервалам, приходим к следующему распределению выборки (таблица 4.2):

Таблица 4.2 – Распределение выборки

Интервал	105-110	105-110	110-115	115-120	120-125	125-130	130-135	135-140	140-145	145-150	150-155
n_i	1	4	15	31	35	40	42	12	2	2	1

Дальше построим таблицу вида (4.3), беря в качестве x_iсередину каждого интервала. Приходим к таблице (4.3):

Таблица 4.3 –Результаты выборки

Xi	102,5	107,5	112,5	117,5	122,5	127,5	132,5	137,5	142,5	147,5	152,5
$\frac{n_1}{n}$	$\frac{1}{185}$	$\frac{4}{185}$	$\frac{15}{185}$	$\frac{31}{185}$	$\frac{35}{185}$	$\frac{40}{185}$	$\frac{42}{185}$	$\frac{12}{185}$	$\frac{2}{185}$	$\frac{2}{185}$	$\frac{1}{185}$

б) Для получения полигона распределения отложим по оси абсцисс значения x_i, а по оси ординат - частоты x_i.

Изобразим точки (x_i; x_i) (рисунок 4.4) и соединим их ломаной линией.

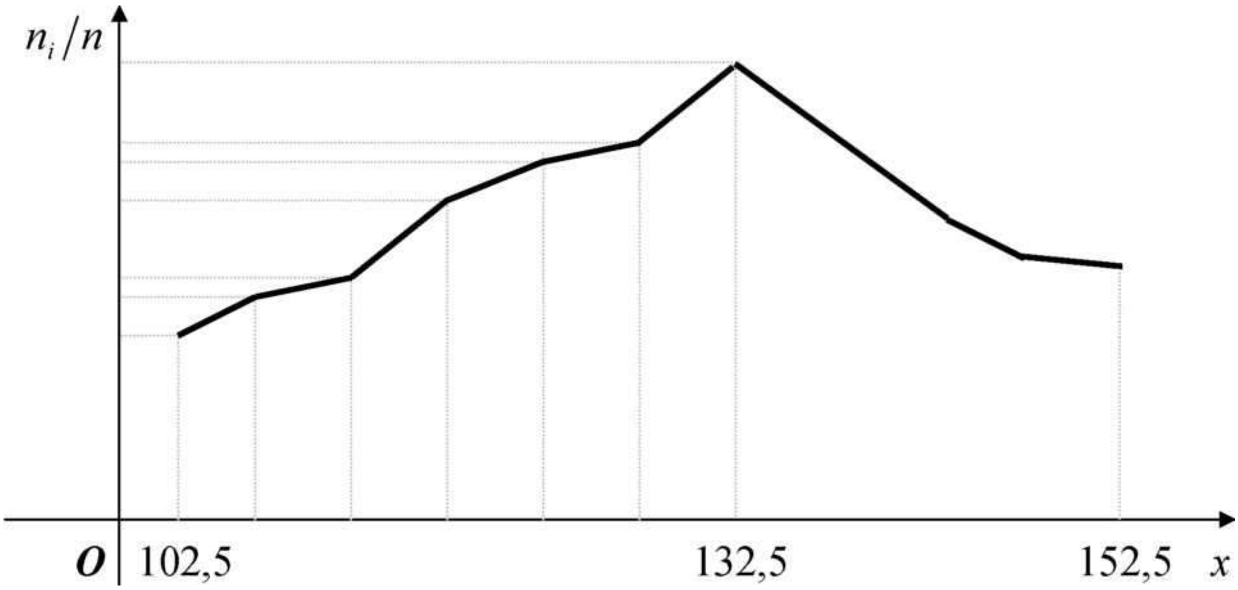


Рисунок 4.4 –График по координатам(x_i; x_i)

Построим теперь гистограмму (рисунок 4.5). По оси абсцисс отложим точки $100, 105, \ldots, 155$. На каждом интервале $[100; 105]$, $[105; 110], \ldots, [150; 155]$ построим прямоугольники, у которых одна сторона совпадает с интервалом, а другая равна n_i/h, гдеh длина интервала. В нашем случае h=5.

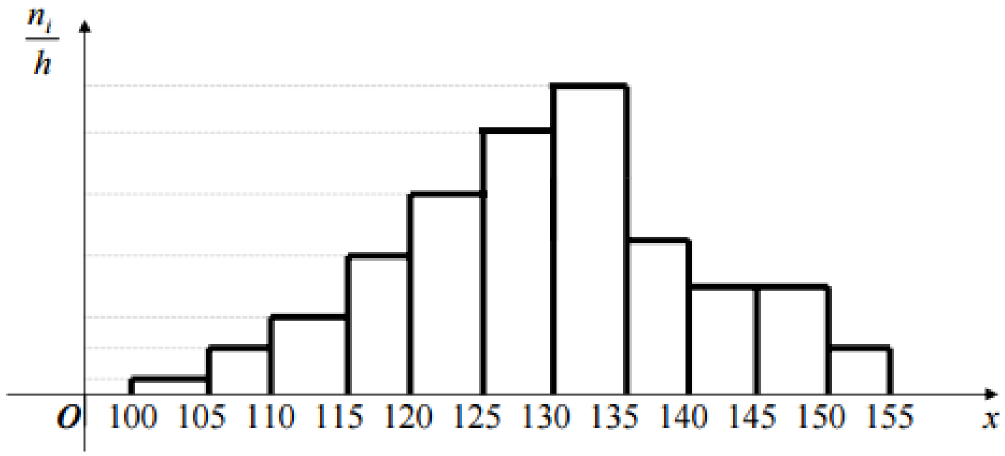


Рисунок 4.5 - Гистограмма

в) Для нахождения эмпирической функции распределения воспользуемся формулой (4.6). В качестве значений x_i выберемсередины интервалов. Следовательно,

$$F_s(x)=\begin{cases}0, & x\le 102.5\\ 1/185, & 102{,}5<x\le 107{,}5\\ 5/185, & 107{,}5<x\le 112{,}5\\ 20/185, & 112{,}5<x\le 117{,}5\\ 51/185, & 117{,}5<x\le 122{,}5\\ 86/185, & 122{,}5<x\le 127{,}5\\ 126/185, & 127{,}5<x\le 132{,}5\\ 168/185, & 132{,}5<x\le 137{,}5\\ 180/185, & 137{,}5<x\le 142{,}5\\ 182/185, & 142{,}5<x\le 147{,}5\\ 184/185, & 147{,}5<x\le 152{,}5\\ 1, & x>125{,}5\end{cases}$$

г) Вычислим M_s, D_s и σ_s. Для облегчения вычисленийиспользуем формулы (4.8), (4.11) и (4.12). Оформим данные в таблице 4.4. Последний столбец является контрольным.

Таблица 4.4 – Полученные данные

$c=127{,}5;\ k=5$

Серед. интер.	n_i	$x_i - c$	$\frac{x_i-c}{k}$	$\frac{x_i-c}{k}n_i$	$\frac{x_i-c}{k}+1$	$\left(\frac{x_i-c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i-c}{k}\right)^2 n_i$	$\left(\frac{x_i-c}{k}+1\right)^2 n$
102,5	1	-25	-5	-5	-4	25	25	16
107,5	4	-20	-4	-16	-3	16	64	36
112,5	15	-15	-3	-45	-2	9	135	60
117,5	31	-10	-2	-62	-1	4	124	31
122,5	35	-5	-1	-35	0	1	35	0
127,5	40	0	0	0	1	0	0	40
132,5	42	5	1	42	2	1	42	168
137,5	12	10	2	24	3	4	48	108
142,5	2	15	3	6	4	9	18	32
147,5	2	20	4	8	5	16	32	50
152,5	1	25	5	5	6	25	25	36
Σ	185			-78			548	577

Для проверки правильности счета используем равенство:

$$\sum n_i(u_i+1)^2=\sum n_i\cdot u_i^2+2\sum n_iu_i+n \qquad (4.27)$$

где $u_i=\dfrac{x_i-c}{k}$ Так как $577=548-2\cdot 78+185$, то делаем вывод, что вычисления в таблице сделаны правильно. Теперь вычислим M_s и D_s, используя данные таблицы.

$$M_s=\frac{-78}{185}\cdot 5+127{,}5=-2{,}1+127{,}5=125{,}4$$

$$D_s=\frac{1}{185}\cdot 548\cdot 5^2-(125{,}4-127{,}5)^2\approx$$

$$\approx 2{,}96\cdot 25-(-2{,}1)^2\approx 74-4{,}41\approx 69{,}9$$

$$\sigma_s=\sqrt{D_s}\approx\sqrt{69{,}9}\approx 8{,}34$$

Задача 9.2. Случайная величина ξ распределена нормально со средним квадратичным отклонением $\sigma=3$. Найти доверительный интервал для математического ожидания $M\xi$, если выборочная средняя $M_s=4{,}1$; объем выборки n=36. Доверительная вероятность $\gamma=0{,}95$.

Решение. Составим уравнение (4.20).

$$\Phi(U_\gamma)=\gamma/2\Leftrightarrow\Phi(U_\gamma)=0{,}95/2=0{,}475.$$

Из таблицы находим $U_\gamma\approx 1{,}96$. Следовательно,

$$\Delta=\frac{U_\gamma\cdot\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0{,}98\Rightarrow\Delta=0{,}98$$

Таким образом, доверительный интервал для $M\xi$ будет

$$M_s-0{,}98<M\xi<M_s+0{,}98 \text{ или}$$

$$4{,}1-0{,}98<M\xi<4{,}1+0{,}98.$$

$$3{,}12<M\xi<5{,}08.$$

Итак, с вероятностью 0,95 можно утверждать, что неизвестный параметр $M\xi$ нормального распределения ($\sigma = 3$) будет принадлежать интервалу $(3{,}12;\ 5{,}08)$.

Ответ. $P(M\xi \in (3{,}12; 5{,}08)) = 0{,}95$.

Задача 9.3. Найти уравнения линий регрессии ξ на η и η на ξ по данным корреляционной таблицы 4.5:

Таблица 4.5 – Корреляционная таблица

η / ξ	100	120	140	160	180	n_ξ
5	2	3				5
10	1	4				5
15		3	5			8
20			10	1		11
25			8			8
30				6		6
35				1	4	5
40				1	1	2
n_η	3	10	23	9	5	n=50

Решение. Из таблицы следует, что случайная величина ξ принимает значения:

$$x_1 = 5;\ x_2 = 10;\ x_3 = 15;\ x_4 = 20;$$
$$x_5 = 25;\ x_6 = 30;\ x_7 = 35;\ x_8 = 40$$

а величина η принимает значения:

$$y_1 = 100;\ y_2 = 120;\ y_3 = 140;\ y_4 = 160;\ y_5 = 180.$$

Возьмем в качестве c_1 значение 20, а в качестве c_2 значение 140. $c_1 = 20;\ c_2 = 140;\ k = 5;\ l = 10$.

Переходим к значениям:

$$u_i = \frac{x_i - c_1}{k} = \frac{x_i - 20}{5} \quad \nu_j = \frac{y_j - c_2}{l} = \frac{y_j - 140}{10}$$

i = 1,2,3,4,5,6,7,8; j = 1,2,3,4,5, которые заносим в таблицу 4.6.

Таблица 4.6 – Полученные значения

v_j \ u_i	-4	-2	0	2	4	n_ξ
-3	2	3				5
-2	1	4				5
-1		3	5			8
0			10	1		11
1			8			8
2				6		6
3				1	4	5
4				1	1	2
n_η	3	10	23	9	5	n= 50

Далее вычислим $M_s\xi$ и $D_s\xi$. Для этого используем таблицу 4.7:

Таблица 4.7 – Рассчитанные значения

u_i	n_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i + 1$	u_i^2	$u_i^2 \cdot n_i$	$(u_i + 1)^2$	$(u_i + 1)^2 \cdot n_i$
-3	5	-15	-2	9	45	4	20
-2	5	-10	-1	4	20	1	5
-1	8	-8	0	1	8	0	0
0	11	0	1	0	0	1	11
1	8	8	2	1	8	4	32
2	6	12	3	4	24	9	54
3	5	15	4	9	45	16	80
4	2	8	5	16	32	25	50
Σ	50	10			182		252

Проверим вычисления с помощью соотношения (4.27).

$$252 = 182 + 2\cdot 10 + 50 \Leftrightarrow 252 = 252.$$

Из (4.8) получим

$$M_s\xi = \frac{10\cdot 5}{50} + 20 = 1 + 20 = 21 \Rightarrow M_s\xi = 21$$

Формула (4.10) даёт

$$D_s\xi = \frac{25}{50}\cdot 182 - (21-20)^2 = \frac{182}{2} - 1^2 = 91 - 1 = 90$$

Следовательно, из (4.12)

$$\sigma_s\xi = \sqrt{D_s\xi} = \sqrt{90} \approx 9{,}49$$

Запишем полученные значения в таблицу 4.8.

Таблица 4.8 – Полученные значения

v_j	n_j	$v_j\cdot n_j$	v_j+1	v_j^2	$v_j^2\cdot n_j$	$(v_j+1)^2$	$(v_j+1)^2$
-4	3	-12	-3	16	48	9	27
-2	10	-20	-1	4	40	1	10
0	23	0	1	0	0	1	23
2	9	18	3	4	36	9	81
4	5	20	5	16	80	25	125
Σ	50	6			204		266

Проверяем вычисления по (4.27):

$$266 = 204 + 2\cdot 6 + 50 \Leftrightarrow 266 = 266.$$

По формулам (4.8) и (4.11), где $c = c_2 = 140$ получим,

$$M_s\eta = \frac{1}{50}\cdot 6\cdot 10 + 140 = \frac{6}{5} + 140 = 1{,}2 + 140 = 141{,}2$$

$$D_s\eta = \frac{100}{50}\cdot 204-(141{,}2-140)^2 = 2\cdot 204+(1{,}2)^2 =$$
$$= 408-1{,}44 \approx 406{,}56$$

$$\sigma_s\eta = \sqrt{D_s\eta} = \sqrt{406{,}56} \approx 20{,}16.$$

Теперь перейдем к вычислению выборочного коэффициента корреляции $k^s_{\xi\eta}$. Для этого составим новую корреляционную таблицу 4.9, аналогичную заданной в начале. В нее впишем значения u_i и v_j:

Таблица 4.9 – Корреляционная таблица

$u_i \backslash v_j$	-4	-2	0	2	4	$v=\sum n_{ij}v_j$	$u_i v$
-3	${}_{-6}2^{-8}$	${}_{-9}3^{-6}$				-14	42
-2	${}_{-2}1^{-4}$	${}_{-8}4^{-8}$				-12	24
-1		${}_{-3}4^{-6}$	${}_{-5}5^{0}$			-6	6
0			10	1^{2}		2	0
1			${}_{8}8^{0}$			0	0
2				${}_{12}6^{12}$		12	24
3				${}_{3}1^{2}$	${}_{12}4^{16}$	18	54
4				${}_{4}1^{2}$	${}_{4}1^{4}$	6	24
$u=\sum n_{ij}u_j$	-8	-20	3	19	16		
uv_j	32	40	0	38	64		$\Sigma = 174$

В каждую клетку этой таблицы вписаны: в центре n_{ij}; в правом верхнем углу $n_{ij}v_j$; а в левом нижнем $n_{ij}u_i$. Вычислим по формуле (4.25), используя данные последней таблицы. Имеем:

$$k^s_{\xi\eta} = \frac{\frac{5\cdot 10}{50}\cdot 174 - (21-20)(141{,}2-140)}{9{,}49\cdot 20{,}16} =$$

$$= \frac{174 - 1\cdot 1{,}2}{191{,}32} = \frac{172{,}8}{191{,}32} \approx 0{,}9 \Rightarrow k^s_{\xi\eta} \approx 0{,}9$$

Коэффициент корреляции близок к 1,следовательно, линиями регрессии будут прямые, заданные уравнениями (4.23) и (4.26). Для (4.23) находим:

$$y_x - 141{,}2 = 0{,}9\cdot\frac{20{,}16}{9{,}49}(x-21)$$

или

$$y_x = 141{,}2 = 1{,}91(x-21) \Leftrightarrow y_x - 141{,}2 = 1{,}91x - 40{,}1.$$

Таким образом, линия регрессии η на величину ξ будет иметь уравнение $y_x = 1{,}91x + 101{,}1$.

Для определения регрессии ξ на η используем уравнение (4.26). Подставляя сюда данные, будем иметь:

$$x_y - 21 = 0{,}9\cdot\frac{9{,}49}{20{,}16}(y-141{,}2)$$

$$x_y - 21 = 0{,}42y - 59{,}8$$

$$x_y = 0{,}42y - 38{,}8$$

4.3 Задачи для упражнений

4.1 Построить полигон частот по данному распределению выборки ξ:

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

4.2 Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
n_i/n	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

4.3 В таблице представлены результаты некоторой выборки:

56 76 65 66 76 62 89 48 62 50 47 80 67 87 78 55 67 51 73 75
61 88 46 57 65 60 72 28 75 51 69 68 65 34 77 63 57 61 42 85
49 41 62 63 80 62 65 75 56 66 92 60 43 52 80 68 70 76 62 55
42 87 81 67 65 81 90 38 58 60 79 79 50 64 70 58 77 73 54 58
77 86 52 61 42 70 93 54 65 51 53 64 65 76 88 59 62 67 62 90
88 69 61 81 65 72 58 68 94 54 58 58 81 57 70 71 78 52 93 89
57 68 70 58 72 57 62 63 87 61 91 57 57 66 68 40 63 86 48 75
66 83 64 55 75 65 67 54 70 44 51 86 67 58 73 71 46 86 68 79
50 58 66 69 61 64 78 78 60 46 71 71 74 79 65 61 62 84 53 67 83
43 64 67 50 60 83 61 83 67 67 58 46 73 58 47 76 81 72 66 83
73 71 70 60 68 52 51 63 63 75 61 80 51 63 62 46 48 53 59

Объем выборки равен 220.

а) Сгруппировать данные по интервалам длины h = 5.

б) Расписать распределение выборки по интервалам.

в) Построить гистограмму распределения.

г) Составить эмпирическую функцию распределения.

д) Вычислить выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4.4. В таблице приведены результаты измерения роста 100 студентов:

Рост	154-158	158-162	162-166	166-170	170-174	174-178	178-182
Число студентов	10	14	22	27	17	7	3

Вычислить выборочную среднюю и дисперсию.

4.5 Найти дисперсию выборки:

x_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

4.6 В таблице приведены результаты некоторого опроса:

71 62 43 80 70 44 42 25 48 55 58 44 14 55 56
49 54 63 60 57 70 52 74 65 61 60 72 69 68 47
30 62 81 56 55 38 68 55 74 50 29 35 55 52 27
58 50 62 80 49 68 68 81 66 64 41 45 48 68 79
56 82 76 84 47 44 72 58 58 80 61 55 66 36 69
44 88 88 73 39 70 70 35 51 69 50 59 35 43 71
54 65 85 63 59 52 88 64 60 61 31 64 48 49 50
41 62 42 76 81 76 70 76 75 53 66 87 74 61 68
13 44 61 53 46 69 71 58 63 73 56 65 53 77 39
83 45 55 77 61 42 72 49 52 67 62 68 72 46 76
67 53 70 76 56 62 38 59 53 50 76 52 73 34 51
60 61 58 72 49

Объем выборки n=170.

а) Сгруппировать данные по интервалам длины h=5.

б) Построить гистограмму распределения абсолютных и относительных частот.

в) Найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

г) Вычислить выборочную среднюю, дисперсию и среднее квадратичное отклонение.

4.7 Найти доверительный интервал для неизвестного параметра а нормального распределения, если известен второй параметр σ, выборочная средняя M_s и $\gamma = 0{,}99$:

а) $\sigma = 4; M_s = 10{,}2; n = 16$.

б) $\sigma = 5; M_s = 16{,}8; n = 25$.

4.8 Найти уравнения линий регрессии признака ξ на η и η на ξ по данным, представленным в таблице:

η / ξ	14-19	19-24	24-29	29-34	34-39	n_ξ
16,5-18,5	2	2				4
18,5-20,5	3	4				7
20,5-22,5		15	6	2		23
22,5-24,5		11	22	14	2	49
24,5-26,5			18	29	10	57
26,5-28,5				3	7	10
n_η	5	32	46	48	19	n=150

4.9. Найти уравнения линий регрессии по данным выборки:

η / ξ	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	n_ξ
16 - 18	2	3					5
18 - 20	3	5	1				9
20 - 22		9	25	3			37
22 - 24			13	4	5	2	24
24 - 26					3	2	5
n_η	5	17	39	7	8	4	n=80

4.10. Найти уравнения линий регрессии по данным таблицы:

η / ξ	125	150	175	200	225	250	n_ξ
18		1					1
23	1	2	3				6
28		5	2	1			8
33			12	8			20
38				7	3		10
43					3	1	4
48						1	1
n_η	1	8	17	16	6	2	n=50

4.11. Найти уравнения линий регрессии по данным таблицы:

η / ξ	16-21	21-26	26-31	31-36	36-41	41-46	n_ξ
150	3	7	2				12
200		2	8	6			16
250		3	50	4			57
300			2	6			8
350				2	1	1	4
400					2	1	3
n_η	3	12	62	18	3	2	n=100

4.12. Найти уравнения линий регрессии по данным таблицы:

η / ξ	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	n_ξ
14 - 20	3						3
20 - 26	7	2	3				12
26 - 32	2	8	50				60
32 - 38		6	4	2	2		14
38 - 44				6	3	1	10
44 - 50					4	2	6
n_η	12	16	57	8	9	3	n=105

4.13 Найти выборочные уравнения прямых линий регрессии η на ξ и ξ на η по данным, приведенным в корреляционной таблице

η / ξ	20	30	40	50	60	n_ξ
15	7	5				12
25	20	23				43
35		30	47	2		79
45		10	11	20	6	47
55			9	7	3	19
n_η	27	68	67	29	9	200

4.14 Найти уравнения прямых линий регрессии по данным таблицы

ξ \ η	15	20	25	30	35	n_ξ
40	5	7				12
50		4	16	23		43
60		8	20	32	27	87
70			11	29	2	42
80				9	7	16
n_η	5	19	47	93	36	200

4.15 По данным таблицы составить уравнения прямых линий регрессии

ξ \ η	3	9	15	21	27	33	n_ξ
25				1		1	2
35			1	5	4	5	15
45			2	18	10	2	32
55		6	14	2	2		24
65		6	3				9
75	4	8					12
85	6						6
n_η	10	20	20	26	16	8	100

Таблица 4.10 - Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3947	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203

Продолжение таблицы 4.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001
4,0	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001	0001

Таблица 4.11 - Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141

Продолжение таблицы 4.11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2,3	4893	4996	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2,9	4981	4982	4983	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3,0	4987	4987	4987	4988	4988	4989	4989	4989	4990	4990
3,1	4990	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3,2	4993	4993	4994	4994	4994	4994	4994	4995	4995	4995
3,3	4995	4995	4995	4996	4996	4996	4996	4996	4996	4997
3,4	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4997	4998
3,5	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998	4998
3,6	4998	4998	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,7	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,8	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999	4999
3,9	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000
4,0	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000	5000

Таблица 4.12 - Таблица значений функции $P(m)=\dfrac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

λ	m						
	0	1	2	3	4	5	6
0,1	0,9048	0,0905	0,0045	0,0002			
0,2	0,8187	0,1637	0,0164	0,0011	0,0001		
0,3	0,7408	0,2222	0,0333	0,0033	0,0002		
0,4	0,6703	0,2681	0,0536	0,0072	0,0007	0,0001	
0,5	0,6065	0,3033	0,0758	0,0126	0,0016	0,0002	
0,6	0,5488	0,3293	0,0988	0,0198	0,0030	0,0004	
0,7	0,4966	0,3476	0,1217	0,0284	0,0050	0,0007	0,0001
0,8	0,4493	0,3595	0,1438	0,0383	0,0077	0,0012	0,0002
0,9	0,4066	0,3659	0,1647	0,0494	0,0111	0,0020	0,0003
1,0	0,3679	0,3679	0,1839	0,0613	0,0153	0,0031	0,0005
1,1	0,3329	0,3662	0,2014	0,0738	0,0203	0,0045	0,0008
1,2	0,3012	0,3614	0,2169	0,0867	0,0260	0,0062	0,0012
1,3	0,2725	0,3543	0,2303	0,0998	0,0324	0,0084	0,0018
1,4	0,2466	0,03452	0,2417	0,1128	0,0395	0,0111	0,0026
1,5	0,2231	0,3347	0,2510	0,1255	0,0471	0,0141	0,0035
1,6	0,2019	0,3230	0,2584	0,1378	0,0551	0,0176	0,0047
1,7	0,1827	0,3106	0,2640	0,1496	0,0636	0,0216	0,0061
1,8	0,1653	0,2975	0,2678	0,1607	0,0723	0,0260	0,0078
1,9	0,1496	0,2842	0,2700	0,1710	0,0812	0,0309	0,0098
2,0	0,1353	0,2707	0,2707	0,1804	0,0902	0,0361	0,0120
3,0	0,0498	0,1494	0,2240	0,2240	0,1680	0,1008	0,0504
4,0	0,0183	0,0733	0,1465	0,1954	0,1954	0,1563	0,1042
5,0	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462
6,0	0,0025	0,0149	0,0446	0,0892	0,1338	0,1606	0,1606
7,0	0,0009	0,00064	0,0223	0,0521	0,0912	0,1277	0,1490
8,0	0,0003	0,0027	0,0107	0,0286	0,0572	0,0916	0,1221
9,0	0,0001	0,0011	0,0050	0,0150	0,0337	0,0607	0,0911
10,0	0,0000	0,0004	0,0023	0,0076	0,0189	0,0378	0,0631

Литература

1. Апальков, Владимир Васильевич Основы моделирования цифровой обработки сигналов в среде MATLAB [Текст] : учебное пособие / В. В. Апальков, Р. А. Томакова, Н. Н. Епишев ; Юго-Зап. гос. ун-т. - Курск : ЮЗГУ, 2015. - 136 с.
2. Барботько, А.И. Статистические алгоритмыобработкирезультатов экспериментальных исследований в машиностроении: [учебное пособие для студентов высших учебных заведений по направлению "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств"] / А. И. Барботько. - Старый Оскол : ТНТ,2014. - 404 с.
3. Микулик, Г.Н. Решение технических задач по теории вероятностей и математической статистике: справ. пособие / Г. Н. Микулик, Г. Н. Рейзина. - Минск : Высшая школа, 1991. - 164 с.
4. Статистика: учебник для бакалавров / В. С. Мхитарян [и др.] ; под ред. проф. В. С. Мхитаряна. - Москва : Юрайт, 2015. - 590 с.
5. Рангайян, Р.М. Анализ биомедицинских сигналов. Практический подход [Текст] : учебное пособие / Р. М. Рангайян. - М. : Физматлит, 2007. - 440 с.