МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«10» 05 __________ 2023 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Математический анализ»
для направления подготовки 38.03.01 − Экономика

Курск 2023

УДК 51

Составители: Т.В. Шевцова, Ш.Г. Мирзаханян

Рецензент

Кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики
Бредихина О.А.

Математический анализ: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Математический анализ» для направления подготовки 38.03.01 – Экономика / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Т.В. Шевцова, Ш.Г. Мирзаханян – Курск, 2023. – 91 с.

Методические рекомендации по выполнению практических заданий содержат описание методов, применяемых при решении задач математического анализа, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 38.03.01 – Экономика. Материалы предназначены для студентов очной, очно-заочной и заочной форм обучения по направлениям подготовки 38.03.01 − Экономика, направленности (профили) «Финансы и кредит», «Экономика предприятий и организаций», «Экономика предприятий и организаций» (в строительстве), «Мировая экономика», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», «Внешнеэкономическая деятельность и международный бизнес».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 359. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями является высшей формой учебной деятельности студента, без нее невозможно успешное освоение дисциплины. Поэтому каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом, постоянно практикуясь при этом в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия.

Данная работа содержит методические указания по следующим разделам математического анализа: введение в математический анализ, дифференцирование функций, неопределенный интеграл, определенный интеграл, функции нескольких переменных, дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, методы и способы решения задач. Далее предложены индивидуальные задания, которые даны в объеме 20 вариантов. В конце представлен список контрольных вопросов.

Практическая работа №1-5.
Введение в математический анализ

Функции действительного переменного

Понятие функции

Определение. Если каждому значению переменной x, принадлежащему некоторой области, соответствует одно определённое значение другой переменной y, то y есть **функция** от x, или в символической записи, y = f(x). Переменная x наз. **независимой переменной** или **аргументом.**

Определение. Совокупность значений x, для которых определяются значения функции y в силу правила f(x), наз. **областью определения.**

Определение. Множество всех значений функции, которые она принимает в области определения, наз. **областью значений**.

Понятие предела функции

Определение. Число A называется *пределом функции f(x)* в точке a, если для любого ε>0 найдётся такое число δ>0, что из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Определение. Число A называется *правым (левым) пределом* функции f(x) в точке a, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое число $\delta>0$, что из неравенства $a<x<a+\delta$ $(a-\delta<x<a)$ следует неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Для обозначения правого (левого) предела функции f(x) в точке a используют следующую символику: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=B$ ($\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=B$).

Критерий существования предела. Для того, чтобы в точке $x=a$ существовал предел функции f(x), необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны между собой оба односторонних предела

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x).$$

Достаточно распространенными в курсе математики являются последовательности, то есть функции $y=f(n)$, заданные на множестве натуральных чисел N. Чтобы подчеркнуть, что аргумент такой функции принимает только значения из множества натуральных чисел, его обозначают не x, а n. Для последовательностей f(n) достаточно часто возникает необходимость найти ее предел при неограниченном возрастании аргумента n (при $n \to \infty$).

Определение. Число B называется *пределом последовательности* f(n), если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n > M$ выполняется неравенство $|f(n) - B| < \varepsilon$.

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x \to a(\infty)} [f(x)]^{\varphi(x)} = C$ следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = B$, то $C = A^B$;

2) если $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела C решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x \to a(\infty)} f(x) = 1$ и $\lim\limits_{x \to a(\infty)} \varphi(x) = \infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$, то используем 2-ой замечательный предел $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$ или $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3$ и $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x) = 1$,

следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin 3x}{x}\right)^{1+2x} = 3^1 = 3$.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2 + 2}{3x^2 + 1}\right)^{x^2}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x^2}}{3+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{1}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=+\infty$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{3x^2+1}\right)^{x^2}=\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{+\infty}\right]=0$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

Решение. Здесь $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x}}=1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)=\infty$, то есть имеем неопределённость вида $\left[1^{\infty}\right]$. В этом случае, прежде чем применить 2-ой замечательный предел, произведём следующие преобразования:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+3)-4}{x+3}\right]^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{\frac{-4}{x+3}\cdot(x+2)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4(x+2)}{x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4-\frac{8}{x}}{1+\frac{3}{x}}}=e^{-4}.$$

Можно найти предел проще, не прибегая к общему приёму, а именно

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x+2}}{\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{-x}\right)^{-x}\right]^{\frac{x+2}{-x}}}{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{\frac{3(x+2)}{x}}}=\frac{e^{-1}}{e^{3}}=e^{-4}.$$

Непрерывность функции

Функция f(x) называется ***непрерывной в точке а***, если:

1) эта функция определена в некоторой окрестности точки а;

2) существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3) этот предел равен значению функции в точке а, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области, то она называется непрерывной в этой области.

Те точки области определения функции, в которых функция не является непрерывной, называются точками разрыва функции.

Различают разрывы двух видов.

1. Если в точке а существуют односторонние пределы функции, но, по крайней мере, один из них не равен значению данной функции в точке *a*, то говорят, что функция f(x) в точке *a* имеет разрыв первого рода. При этом возможны следующие случаи:

$f(a-0)=f(a+0)\neq f(a)$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке а имеет устранимый разрыв);

$f(a-0)\neq f(a+0)$

(в этом случае говорят, что функция f(x) в точке а имеет разрыв с конечным скачком. При этом число $|f(a+0) - f(a-0)|$ называют скачком функции f(x) точке а).

2. Функция f(x) в точке а имеет разрыв второго рода, если в этой точке по крайней мере, один из односторонних пределов бесконечен или вовсе не существует.

Функция f(x) называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка, причём в точке а она непрерывна справа ($f(a+0)=f(a)$), а в точке в - слева ($f(b-0)=f(b)$).

Непрерывные на отрезке функции обладают рядом важных свойств. Приведём одно из них.

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда на интервале $(a;b)$ существует такая точка *c,* в которой данная функция равна нулю.

В задачах 1-5 определить, какого рода разрывы имеют следующие функции в точке *a*

Пример 1. $f(x) = 2^{1/(x-3)}, \quad a = 3$

Решение. Если x→3–0, то $\dfrac{1}{x-3} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3-0} 2^{1/(x-3)} = 0$. Если x→3+0, то $\dfrac{1}{x-3} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 3+0} 2^{1/(x-3)} = \infty$. Так как один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, *a*=3-точка разрыва 2-го рода.

Пример 2. $f(x) = \dfrac{2x+5}{x-1}$, a=1.

Решение. Выделим целую часть $f(x) = \dfrac{2(x-1)+7}{x-1} = 2 + \dfrac{7}{x-1}$.
Если $x \to 1-0$, то $\dfrac{7}{x-1} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2 + \dfrac{7}{x-1}\right) = -\infty$. Если x→1+0, то $\dfrac{7}{x-1} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0}\left(2 + \dfrac{7}{x-1}\right) = +\infty$.

Таким образом, функция при x→1 не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, x=1 является точкой разрыва 2-го рода.

Пример 3. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5}, \ a = -5.$

Решение. Если $x \to -5-0$, то $\dfrac{1}{x+5} \to -\infty$ и $\lim\limits_{x\to -5-0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5} = -\dfrac{\pi}{2}$. Если $x \to -5+0$, то $\dfrac{1}{x+5} \to +\infty$ и $\lim\limits_{x\to -5+0} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+5} = \dfrac{\pi}{2}$. Итак, при x→ –5 функция имеет левый и правый конечные пределы, причём эти пределы различны. Следовательно, x = –5 является точкой разрыва 1-го рода. Разность между правым и левым пределами (скачок) в точке разрыва равна $\dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \pi$

.

Пример 4. $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+1}$, $a=-1$.

Решение. $\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1-0}\dfrac{1}{x^2-x+1}=1$,

$\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{1}{x^2-x+1}=1$. Итак,

$f(-1-0)=f(-1+0)$, но не равны $f(-1)$, значит, a=1 является устранимой точкой разрыва.

Пример 5. $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{при} \quad x\le 1\\ \dfrac{1}{1-x} & \text{при} \quad x>1\end{cases}$, $a=1$.

Решение. Если x→1–0, то $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(2-x)=1$. Если x→1+0, то $\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{1}{1-x}=-\infty$. Один из односторонних пределов бесконечен, следовательно, $a=1$-точка разрыва 2-го рода.

Индивидуальные задания

Задание 1.

Найти образ множества *M* при функциональном отображении *f*, взяв задания из таблицы 1.

Таблица 1

№	Задание	№	Задание
1.	$M=[-2;3]$, $f: x\mapsto x^2+2x$	11.	$M=[-6;0]$, $f: x\mapsto -x^2-10x$
2.	$M=\left[\dfrac{\pi}{3};\pi\right]$, $f: x\mapsto -\cos x$	12.	$M=\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{9}\right]$, $f: x\mapsto \lvert x\rvert$
3.	$M=[2;4]$, $f: x\mapsto -x^2+6x-1$	13.	$M=[-2;4]$, $f: x\mapsto 2\lvert x\rvert-1$

4.	$M=\left[-\pi;\dfrac{\pi}{6}\right]$, $f: x \mapsto 2\sin x$	14.	$M=\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f: x \mapsto \cos x$
5.	$M=[1;3]$, $f: x \mapsto x^2-4x+3$	15.	$M=[-1;2]$, $f: x \mapsto -x^4+1$
6.	$M=[-5;-3]$, $f: x \mapsto x^2+8x+7$	16.	$M=[1;3]$, $f: x \mapsto x^2-4x+5$
7.	$M=[-1;1]$, $f: x \mapsto x^6-2$	17.	$M=[-1;1]$, $f: x \mapsto -3x^2+3$
8.	$M=[-5;-1]$, $f: x \mapsto -\lvert x+3\rvert$	18.	$M=[-2;1]$, $f: x \mapsto 2\lvert x+1\rvert$
9.	$M=[0;5]$, $f: x \mapsto x^2-8x+8$	19.	$M=[0;4]$, $f: x \mapsto -x^2+4x-3$
10.	$M=[-\pi;0]$, $f: x \mapsto -\sin x+2$	20.	$M=[1;3]$, $f: x \mapsto (x-2)^4$

Задание 2

Вычислить предел функции, числовой последовательности, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Задания взять из таблицы 2.

Таблица 2

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-x^3}{3x-2x^2+x^4}$	11	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)(n-2)(n-3)}{3n^3+2n^2+n}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$	12	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+n}{2n+3}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$	13	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$

4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$	14	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+3}$	15	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4+x^5}$	16	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$
7	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+3}{3x^3-5}$	17	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^5}+1}$
8	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{2x^3+3x^2}$	18	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{3x^3+1}$	19	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$
10	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+7x+1}{2x^5+3x^2}$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x^3-3x^2}$

Задание 3

Вычислить предел функции, раскрыв неопределенность типа $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Задания взять из таблицы 3

Таблица 3

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$	12	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
3	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$	13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$
4	$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

6	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$	16	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$
7	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$	17	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
8	$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3-x}{x^4+2x^2-3}$	18	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+x}{x}$
9	$\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$	19	$\lim\limits_{x\to -3/2} \dfrac{4x^2-9}{2x+3}$
10	$\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$	20	$\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$

Задание 4

Вычислить предел функции, используя I замечательный предел и его вариации. Задания взять из таблицы 4.

Таблица 4

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$	11	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$
2	$\lim\limits_{x\to -\pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\cdot \mathrm{ctg} 2x}{\sin 3x}$
3	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x}$	13	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{2x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$
5	$\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{\mathrm{tg}x-1}$	15	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{2x\,\mathrm{tg} 2x}$
6	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}-1}$	16	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x\cdot\cos x}{x}$	17	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x+\sin x}{x}$	18	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$

9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$	19	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{x^2}$
10	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi/2-x}$	20	$\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\mathrm{ctg}x}{x-\pi/2}$

Задание 5

Вычислить предел функции, используя II замечательный предел. Задания взять из таблицы 5.

Таблица 5

№	Задание	№	Задание
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$	11	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\frac{5x^3}{2x+1}}$
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{5x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$	13	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$
5	$\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$	15	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{2x^2-1}{x+1}}$
6	$\lim\limits_{x\to +\infty} (2x+1)[\ln(x+3)-\ln x]$	16	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}x}$
7	$\lim\limits_{x\to +\infty} (x-5)[\ln(x-3)-\ln x]$	17	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$
8	$\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{\sin x}{x^2}}$	18	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$
9	$\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$	19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{5x-1}\right)^{x^2}$

10	$\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$	20	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x+3}$

Задание 6

Исследовать функцию на непрерывность и построить график функции. Задания взять из таблицы 6.

Таблица 6

№	Задание	№	Задание
1	$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+2}; -2\le x\le 2\\ 4-x; \quad 2<x<4\\ x-3; \quad 4\le x\le 6\end{cases}$	6	$f(x)=\begin{cases}x^2-2x; & -1\le x<2\\ \sqrt{x}; & 2\le x\le 4\end{cases}$
2	$f(x)=\begin{cases}x^2; & -2\le x<1\\ \sqrt{x-1}; & 1\le x<5\\ 7-x; & 5\le x<7\end{cases}$	7	$f(x)=\begin{cases}\lvert x\rvert; & -2\le x\le 2\\ \sqrt{x-1}; & 2<x<5\\ 2; & x=5\end{cases}$
3	$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x<\pi/2\\ 1; & x=\pi/2\\ \cos x; & \pi/2<x\le 3\pi/2\end{cases}$	8	$f(x)=\begin{cases}x+2; & x<-1\\ x^2; & -1\le x<2\\ 5-x; & x\ge 2\end{cases}$
4	$f(x)=\begin{cases}-\frac{5}{x}; & x\le -1\\ -6x; & -1<x\le 0\\ 0; & x>0\end{cases}$	9	$f(x)=\begin{cases}2x^3; & x\le 1\\ 2(x-2)^2; & 1<x\le 3\\ 7-2x; & x>3\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases}3^x; & -1\le x<1\\ 5-3x; & 1\le x<3\\ 4; & x=3\end{cases}$	10	$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}; & x<0\\ \frac{2x+10}{3x+1}; & 0\le x<2\\ 3; & x\ge 2\end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Понятие функции.

2. Классификация функций.
3. Простейшие элементарные функции и их графики.
4. Сформулируйте определения предела функции в точке, предела функции в бесконечности, предела последовательности.
5. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?
6. Какая функция называется бесконечно малой и каковы ее основные свойства?
7. Какая функция называется бесконечно большой и какова ее связь с бесконечно малой?
8. Сформулируйте основные теоремы о пределах функций.
9. Как раскрываются неопределенности видов $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0\,\infty]$.
10. Сформулируйте первый замечательный предел и его следствия.
11. Сформулируйте второй замечательный предел.
12. Сформулируйте определения непрерывности функции в точке и на отрезке. Какие точки называются точками разрыва функции?
13. Охарактеризуйте точки разрыва I рода, II рода.
14. Сформулируйте определение порядка одной бесконечно малой относительности другой бесконечно малой.
15. Чему эквивалентны при $x \to 0$ функции: $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\sin x$, $\arcsin x$, $\log_a(1+x)$, $a^x - 1$, $(1+x)^\alpha - 1$?

Практическая работа № 6-9. Дифференциальное исчисление

Дифференцирование функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначения: $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ или $f'\Big|_{x=x_0}$. Таким образом,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Вычисление производной называется дифференцированием функции.

Так как дифференцирование функций с использованием только таблицы производных элементарных функций и основных правил дифференцирования не вызывает особых затруднений, то мы остановимся лишь на приемах вычисления производных сложных функций.

Производная сложной функции

Рассмотрим некоторую сложную функцию $y = f[\varphi(x)]$.

В этой цепи функциональных зависимостей $y = f(z)$ и $z = \varphi(x)$ аргумент x является последним и поэтому его называют независимой переменной. Таким образом, понятие аргумента и независимой переменной следует различать. Например, пусть $y = \sqrt{z}$ и $z = \cos x$. Здесь z есть аргумент функции y, но z, не будет независимой переменой. В результате, производная сложной функции $y = f[\varphi(z)]$ равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x, т.е.

$$y'_x = y'_z \cdot y'_x.$$

Пример 1. Найти производную от функции $y = \ln^3 x$.

Решение. Полагаем $z = \ln x$, тогда $y = z^3$. Отсюда $y'_z = 3z^2 = 3 \cdot \ln^2 x$, $z'_x = \frac{1}{x}$. Следовательно, $y'_x = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

При достаточном навыке промежуточную переменную z не пишут, вводя ее лишь мысленно.

Пример 2. Найти производную от функции

$y = \sin(x^3 - 3x^2 + 5)$.

Решение.

$$y' = \cos(x^3 - 3x^2 + 5) \cdot (x^3 - 3x^2 + 5)' =$$

$$= (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2 + 5) = 3x(x-2)\cos(x^3 - 3x^2 + 5).$$

Пример 3. Найти производную от функции $y = e^{\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение.

$$y' = e^{\sqrt{x^2+x-1}} \cdot \left(\sqrt{x^2+x-1}\right)' = \frac{e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}} \cdot (x^2+x-1)' =$$

$$= \frac{(2x+1) \cdot e^{\sqrt{x^2+x-1}}}{2\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Производная функции, заданной в неявном виде

В некоторых случаях функция определяется уравнением, которое нельзя элементарными средствами разрешить относительно y, и приходится рассматривать y как неявную функцию от x. В таком варианте существует особый способ нахождения производной. Известно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей данного тождества и применяя правило дифференцирования сложной функции (полагая, что y – сложная функция, зависящая от x), получаем равенство, откуда и выражаем y'.

Пример 4. Найти производную от функции, определяемой уравнением $x^4 + y^4 - 4xy = 0$.

Решение. $(x^4 + y^4 - 4xy)' = 0'$,

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4(x'y + xy') = 0$$

$$4x^3 + 4y^3 \cdot y' - 4y - 4xy' = 0$$

$$4y^3 \cdot y' - 4xy' = 4y - 4x^3$$

$$y'(4y^3 - 4x) = 4y - 4x^3$$

$$y' = \frac{4y - 4x^3}{4y^3 - 4x} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y - x^3}{y^3 - x}.$$

Производная функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ определена параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда, если функции x(t) и y(t) имеют производные в точке t_0, причем $x'(t_0) \neq 0$, а функция $y = f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = x(t_0)$, то эта производная находится по формуле

$$y'(x_0) = \frac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пример 5. Найти $y'(x)$ для заданной параметрически функции $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$.

Решение.

$$x'_t = (t - \sin t)'_t = 1 - \cos t$$

$$y'_t = (1 - \cos t)'_t = \sin t$$

$$y'_t = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Логарифмическое дифференцирование

Если дана сложная функция, представляющая собой произведение или частное нескольких функций, причем числитель и знаменатель дроби в свою очередь содержат произведения, то следует обе части данного выражения сначала прологарифмировать по основанию y, применить соответствующие свойства логарифмов, а затем приступить к дифференцированию обеих частей. Этот прием носит название логарифмического дифференцирования. Его также используют, если функция содержит корни из дробей. К этому приему прибегают, если имеется показательно-степенная функция или функция вида $y=[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Пример 6. Найти производную функции $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}$.

Решение. Логарифмируем обе части равенства по основанию e

$$\ln y=\ln\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

Применяя свойства логарифмов, получаем

$$\ln y=\frac{1}{3}\ln(x^2+x-2)+\ln(x^2+1)-\frac{1}{5}\ln(x^4-1).$$

Дифференцируем обе части, считая y сложной функцией переменной x:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{x^4-1}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)}+\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{5(2x+1)(x+1)(x^2+1)+30x(x^2-1)(x+2)-12x^3(x+2)}{15(x-)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{10x^4+15x^3+15x^2+15x+5+30x^4+60x^3-30x^2-60x-12x^4-24x^3}{15(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}\cdot(x^2+1)}{\sqrt[5]{x^4-1}}\cdot\frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x^2+1)(x+2)}$$

$$y' = \frac{28x^4+51x^3-15x^2-45x+5}{15(x^2-1)(x+2)}\cdot\frac{\sqrt[3]{x^2+x-2}}{\sqrt[5]{x^4-1}}.$$

*Пример 7***.** Найти производную функции $y=(x^2-x+2)^{e^{x+1}}$**.**

Решение. Логарифмируем обе части по основанию е

$$\ln y = \ln(x^2-x+2)^{e^{x+1}}.$$

Используя свойство логарифма, получаем,

$$\ln y = e^{x+1}\ln(x^2-x+2).$$

Дифференцируем обе части, считая у сложной функцией переменной х

$$\frac{1}{y}\cdot y' = (e^{x+1})'\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot[\ln(x^2-x+2)]'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = e^{x+1}\ln(x^2-x+2)+e^{x+1}\cdot\frac{1}{x^2-x+2}\cdot(2x-1)$$

$$y' = (x^2-x+2)^{e^{x+1}}\cdot e^{x+1}\left[\ln(x^2-x+2)+\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right].$$

Замечание. При дифференцировании степенно-показательной функции можно пользоваться формулой

$$(f(x)^{\varphi(x)})' = \varphi(x)\cdot f(x)^{\varphi(x)-1}\cdot f'(x)+f(x)^{\varphi(x)}\cdot\ln f(x)\varphi'(x),$$

если f(x) и φ(x) – дифференцируемые функции.

Задание 1

Найти производную функции. Задания взять из таблицы 7.

Таблица 7

№	Задание	№	Задание
1	$y = x + \ln\dfrac{x-1}{x+1}$	11	$y = x^3 \ln x - x^2$
2	$y = 2\sqrt{x+1}\arcsin x + 4\sqrt{1-x}$	12	$y = \dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x}{\mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x}$
3	$y = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\mathrm{arctg}x$	13	$y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}-1}$
4	$y = x^2\sqrt{1+x^2} - \dfrac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$	14	$y = \dfrac{\sqrt{x^3+3x}}{x+1}$
5	$y = x\mathrm{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{arctg}\sqrt{x}$	15	$y = \dfrac{\cos x}{1+\ln\cos x}$
6	$y = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}$	16	$y = \dfrac{\sqrt{x^2-3}(2x^2+3)}{x^3}$
7	$y = \ln\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$	17	$y = (x^3+4)\ln(x^3+4)$
8	$y = \ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}$	18	$y = \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$
9	$y = \mathrm{arctg}(x-1) + \dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$	19	$y = \sqrt{3x+1}(\ln(3x+1)-3)$
10	$y = (3x^3 - 2x^2 + 3x)e^{-x}$	20	$y = \dfrac{4x-x^4}{1-3x^2}$

Задание 2

Найти производную функции. Задания взять из таблицы 8.

Таблица 8

№	Задание	№	Задание
1	$y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)$	11	$y=\ln(x\sin x)$
2	$y=\ln\sqrt[3]{\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^2}$	12	$y=\log_2\dfrac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$
3	$y=3\ln(2x^3-4x)^2$	13	$y=\ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x^3-1}}$
4	$y=\ln\dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$	14	$y=5^{x^3}\cdot\ln^2 x$
5	$y=\sqrt[3]{\dfrac{1-e^{4x}}{e^{4x}}}$	15	$y=\left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$
6	$y=(xe^{2x}+3)^5$	16	$y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$
7	$y=\sqrt{\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}}$	17	$y=\log_3(x^3-1)$
8	$y=x\ln(3x^2+\sqrt{9x^4+1})$	18	$y=\log_2[\log_3(x^2-3)]$
9	$y=\sin(x^2+2^x)$	19	$y=\ln\operatorname{arcctg}\sqrt{1+x^2}$
10	$y=\ln\dfrac{x^3-9}{x^3-1}$	20	$y=\sqrt[3]{\ln\cos\dfrac{x+2}{3}}$

Задание 3

Используя логарифмическое дифференцирование, найти производную функции. Задания взять из таблицы 9.

Таблица 9

№	Задание	№	Задание

1	$y=(x^2+2x)^{\sqrt{x}}$	16	$y=(\sqrt{x})^x$
2	$y=(\sqrt{x^2-1})^{x^3-3}$	17	$y=(x^2+5x)^{\frac{1}{x}}$
3	$y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$	18	$y=\left(\frac{x}{1-x}\right)^x$
4	$y=(\cos x)^{\sqrt{x}}$	19	$y=(x^2+1)^{\cos x}$
5	$y=(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$	20	$y=(\cos x)^{\sin x}$
6	$y=(\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x)^{\sqrt{x}}$	21	$y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{ctg}x}$
7	$y=(\sin x)^{\arcsin x}$	22	$y=(x+1)^{\ln x}$
8	$y=(\cos x)^{\arccos x}$	23	$y=(\ln x)^{x^2-2}$
9	$y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{arctg}x}$	24	$y=(\log_2 x)^{2^x}$
10	$y=(\mathrm{arcctg}x)^{1+x^2}$	25	$y=(3^x)^{\log_3 2}$
11	$y=(\ln x)^{\sqrt{x}}$	26	$y=(\cos 2x)^{\mathrm{ctg}2x}$
12	$y=(\sqrt{x^2-4})^{\ln x}$	27	$y=(\sqrt{x^2+1})^{\ln\sqrt{x^2+1}}$
13	$y=(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$	28	$y=(\mathrm{arctg}e^x)^{e^{-x}}$
14	$y=x^{\cos x}$	29	$y=(\sqrt{e^x})^{\ln x}$
15	$y=\left(\frac{1}{x}\right)^{x^3-3}$	30	$y=(\sqrt{1+\ln^2 x})^{e^x}$

Задание 4

Найти производную неявно заданной функции. Задания взять из таблицы 10.

Таблица 10

№	Задание	№	Задание

1	$y^2 + xy + x^2 = 1$	11	$x - \cos^2 y - \ln\cos x = 0$
2	$x^3 + 2xy - y^3 = 0$	12	$x - \sin y \cdot e^{\cos x} = 0$
3	$\sin\frac{x}{y} + \cos\frac{x}{y} = tg(x - y)$	13	$y = \ln\cos x - y^2$
4	$y\ln y - xe^y = 1$	14	$ctg\frac{x}{y} = \frac{x}{y}$
5	$x = 1 - ye^{xy}$	15	$y\cos x + x\sin y = x + y$
6	$y = x + arctgy$	16	$y\cos x + x\cos y = 0$
7	$y = \sin(x + y)$	17	$e^x - e^y = e^{x+y}$
8	$x + y = \arcsin x + \arccos y$	18	$x^2 y = e^{\frac{x}{y}}$
9	$3^x + 3^y = 3^{x+y}$	19	$x + y + e^y arcctgx = 0$
10	$x^3 + y^3 = xy$	20	$\ln x = arctg\frac{y}{x}$

Задание 5

Найти производную функции, заданной параметрически. Задания взять из таблицы 11.

Таблица 11

№№ nn	Задание	№№ nn	Задание
1	$\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$	11	$\begin{cases} x = 2^{-t} \\ y = 2^{2t} \end{cases}$
2	$\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x = \ln(t+1) \\ y = \frac{1}{t+1} \end{cases}$
3	$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t^3 \end{cases}$	13	$\begin{cases} x = 3t + 6t^2 \\ y = t^2 + 3t^3 \end{cases}$

4	$\begin{cases} x = \frac{1}{t} \\ y = t^3 + t^2 + t \end{cases}$	14	$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$
5	$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$	15	$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$
6	$\begin{cases} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$	16	$\begin{cases} x = \frac{1}{t-1} \\ y = \left(\frac{t}{t-1}\right)^2 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t\sin t \end{cases}$	17	$\begin{cases} x = \frac{\ln t}{t} \\ y = t\ln t \end{cases}$
8	$\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$	18	$\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$
9	$\begin{cases} x = \frac{1}{t} + 2 \\ y = t^3 + t + 4 \end{cases}$	19	$\begin{cases} x = 3^{-t} \\ y = 5^t \end{cases}$
10	$\begin{cases} x = -t - t^3 + 1 \\ y = t^4 + 3t^3 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x = 2\sin t - 2t\cos t \\ y = \cos t + \sin t \end{cases}$

Задание 6

Исследовать функции f(x) методами дифференциального исчисления и построить график функции. Задания взять из таблицы 12.

Таблица 12

N	f(x)	N	f(x)
1	$\frac{x^3+4}{x^2}$	11	$(2x+3)e^{-2(x+1)}$

2	$\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	12	$\dfrac{e^2(x+1)}{2(x+1)}$
3	$\dfrac{2}{x^2+2x}$	13	$3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$
4	$\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	14	$(3-x)e^{x-2}$
5	$\dfrac{12x}{9+x^2}$	15	$\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$
6	$\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$	16	$\ln\dfrac{x}{x-2}+1$
7	$\dfrac{4-x^3}{x^2}$	17	$(x-2)e^{3-x}$
8	$\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$	18	$\dfrac{e^2(x-1)}{2(x-1)}$
9	$\dfrac{2x^3+1}{x^2}$	19	$3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$
10	$\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$	20	$-(2x+1)e^{2(x+1)}$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной.
2. Физический и геометрический смысл производной.
3. Сформулируйте основные правила дифференцирования функций.
4. В чем заключается суть логарифмического дифференцирования и в каких случаях его целесообразно применять?
5. Каково правило дифференцирования функции, заданной неявно?
6. Как находится первая производная функция, заданной параметрически?

Практическая работа № 10-14.
Неопределенный интеграл

Первообразная

Определение. Первообразной для функции y=f(x) на данном интервале (a,b) называется функция y=F(x) такая, что для всех $x\in$(a,b) выполняется условие:

$$F'(x)=f(x).$$

Пример. Функция F(x)= x^3/ 3 является первообразной для функции f(x)=x^2 на интервале (-∞,∞), так как выполняется условие ((x^3/ 3)′=x^2).

Понятие неопределенного интеграла. Таблица интегралов

Определение. Если функции F(x) первообразная для функции f(x) на некотором интервале [a,b], то функция F(x)+C, где C=const называется неопределенным интегралом для функции f(x) на интервале [a,b]. Обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C.$$

Пример.

$$\int x^2 dx=\frac{x^3}{3}+C.$$

Интегрирование представляет собой операцию обратную дифференцированию, поэтому каждой формуле дифференцирования соответствует формула интегрирования. Это дает возможность написать таблицу основных интегралов.

Таблица основных интегралов

1. $\int dx=x+C;$

2. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1);$

9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg}x+C;$

10. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a}+C$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5. $\int e^x dx = e^x + C;$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C;$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C;$

14. $\int \mathrm{sh} x\, dx = \mathrm{ch} x + C;$

15. $\int \mathrm{ch} x\, dx = \mathrm{sh} x + C;$

16. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C;$

17. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C;$

18. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \mathrm{ctg} x\right| + C;$

19. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\mathrm{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right| + C.$

Методы интегрирования

Укажем ряд приемов, позволяющих во многих случаях сводить заданные интегралы к табличным.

Пример 1. Найти интегралы (используя метод разложения), результаты проверить дифференцированием:

а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - 8}{\sqrt{x} - 2} dx;$ б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx;$

в) $\int \frac{4 - \sqrt{9 - x^2}}{9 - x^2} dx;$ г) $\int \frac{5^x \cdot e^x - 3^x}{2^x} dx.$

Решение. Нахождение каждого из интегралов начинается с преобразования подынтегральной функции. В задаче а) воспользуемся формулой сокращенного умножения и затем почленным делением числителя на знаменатель (как и в примерах б), в), г)).

а) $\int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x})^3-2^3}{\sqrt{x}-2}dx = \int \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2}dx =$

$= \int (x+2\sqrt{x}+4)\,dx = \int x dx + 2\int x^{1/2}dx + 4\int dx =$

$= \frac{1}{2}x^2 + 2\cdot\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4\cdot x + C = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\cdot\sqrt{x^3} + 4x + C.$

(см. табличные интегралы 1 и 2). Обращаем внимание на то, что в конце решения записываем одну общую постоянную C, не записывая постоянные от интегрирования отдельных слагаемых.

б) $\int \frac{2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}dx = \int\left(\frac{2\cos^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x} + \frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}\right)dx =$

$= \int\left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{3}{\cos^2 x}\right)dx = 2\int\frac{dx}{\sin^2 x} + 3\int\frac{dx}{\cos^2 x} =$

$= 2\cdot(-\mathrm{ctg}x) + 3\cdot\mathrm{tg}x + C = 3\cdot\mathrm{tg}x - 2\cdot\mathrm{ctg}x + C.$

(см. табличные интегралы 8 и 9).

в) $\int \frac{4-\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}dx = \int\left(\frac{4}{9-x^2} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{9-x^2}\right)dx =$

$= -4\int\frac{dx}{x^2-9} - \int\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = -4\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C =$

$= -\frac{2}{3}\cdot\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \arcsin\frac{x}{3} + C.$

(см. табличные интегралы 11 и 12).

г) $\int\frac{5^x\cdot e^x - 3^x}{2^x}dx = \int\left(\frac{5^x\cdot e^x}{2^x} - \frac{3^x}{2^x}\right)dx = \int\frac{5^x\cdot e^x}{2^x}dx - \int\frac{3^x}{2^x}dx =$

$= \int\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x dx - \int\left(\frac{3}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{5\cdot e}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} + C =$

$$=\frac{\dfrac{5^x\cdot e^x}{2^x}}{\ln 5+\ln e-\ln 2}-\frac{\dfrac{3^x}{2^x}}{\ln 3-\ln 2}+C=$$

$$=\frac{5^x\cdot e^x}{2^x\cdot(\ln 5+1-\ln 2)}-\frac{3^x}{2^x\cdot(\ln 3-\ln 2)}+C$$

(см. табличный интеграл 4).

Замечание. Проверку полученных результатов дифференцированием предлагаем студентам выполнить самостоятельно.

Одним из основных методов интегрирования является метод замены переменной (или метод подстановки), описываемый следующей формулой:

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt,$$

где $x=\varphi(t)$ – функция, дифференцируемая на рассматриваемом промежутке. Данная формула показывает, что переходя к новой переменной, достаточно выполнить замену в подынтегральном выражении. Удачная замена позволяет упростить исходный интеграл, а в простейших случаях свести его к табличному (табличным).

Отметим два частных случая замены переменных:

1. Введение под дифференциал постоянного слагаемого.

Для любой постоянной величины a справедливо равенство:

$$d(x+a)=dx,$$

поэтому $\int f(x)dx=\int f(x)d(x+a)$.

2. Введение под дифференциал постоянного множителя.

Так как $d(a\cdot x)=a\cdot dx$, то имеет место равенство

$$dx=\frac{1}{a}\cdot d(a\cdot x),\qquad (a\neq 0)$$

поэтому $$\int f(x)dx=\frac{1}{a}\cdot\int f(x)d(a\cdot x).$$

Пример 2. Найти интегралы:

а) $\int\sin(7x+2)dx$; б) $\int\sqrt[3]{3-x}\,dx$;

в) $\int\frac{dx}{4x+3}$; г) $\int e^{-2x+7}dx$;

д) $\int 5^{7x-3}dx$; е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)}$.

Решение. Данные интегралы могут быть найдены путем применения формул введения под знак дифференциала постоянного множителя и слагаемого к одному из табличных интегралов.

а) $\int \sin(7x+2)dx = \frac{1}{7}\cdot\int \sin(7x+2)d(7x+2) = -\frac{1}{7}\cdot\cos(7x+2)+C$

(см. табличный интеграл 7).

Заметим, что при $k \neq 0$ имеют место формулы

$$\int \sin(kx+b)dx = -\frac{1}{k}\cdot\cos(kx+b)+C$$

$$\int \cos(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot\sin(kx+b)+C$$

б) $\int \sqrt[3]{3-x}\,dx = -\int (3-x)^{1/3}d(3-x) = -\frac{(3-x)^{4/3}}{4/3}+C =$

$= -\frac{3}{4}\cdot(3-x)^{4/3}+C$

(см. табличный интеграл 2).

Следует заметить, что в общем случае

$$\int (kx+b)^n dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{(kx+b)^{n+1}}{n+1}+C, \quad (n \neq -1, k \neq 0) \qquad (1.7)$$

(см. табличный интеграл 3).

в) $\int \frac{dx}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{d(4x+3)}{4x+3} = \frac{1}{4}\cdot\ln|4x+3|+C.$

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int \frac{dx}{kx+b} = \frac{1}{k}\cdot\ln|kx+b|+C. \qquad (1.8)$$

г) $\int e^{-2x+7}dx = -\frac{1}{2}\int e^{-2x+7}d(-2x+7) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+7}+C$

(см. табличный интеграл 5).

Отметим, что при $k \neq 0$

$$\int e^{kx+b}dx = \frac{1}{k}\cdot e^{kx+b}+C.$$

д) $\int 5^{7x-3}dx = \frac{1}{7}\int 5^{7x-3}d(7x-3) = \frac{1}{7}\cdot\frac{5^{7x-3}}{\ln 5}+C$

(см. табличный интеграл 4).

е) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot\int \frac{d\left(4-\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(4-\frac{x}{3}\right)} = -3\cdot \mathrm{tg}\left(4-\frac{x}{3}\right)+C$

(см. табличный интеграл 8).

Пример 3. Найти интегралы

а) $\int x\cdot e^{-x^2}dx$; б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x+2}}dx$;

в) $\int x^3(2+x^4)^5dx$; г) $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

д) $\int \frac{3^x}{4+3^x}dx$; е) $\int (x+3)\cdot\cos(x^2+6x)dx$.

Решение.

а) сделаем замену переменной полагая $t=-x^2$. Найдем дифференциал от левой и правой части формулы $t=-x^2$:

$$dt = d(-x^2) \quad \text{или} \quad dt = (-x^2)'dx.$$

Окончательно,

$$dt = -2xdx \quad \text{и} \quad xdx = -\frac{1}{2}dt.$$

Тогда

$$\int xe^{-x^2dx} = \int e^{-x^2}\cdot xdx = \int e^t\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt = -\frac{1}{2}\int e^t dt =$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$

(см. табличный интеграл 5).

б) Заметим, что $\cos xdx = d(\sin x) = d(\sin x+2)$, тогда обозначим $t=\sin x+2$ и применим формулу 2 из таблицы интегралов:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x + 2}} d(\sin x + 2) = \int \frac{1}{\sqrt[3]{t}} dt = \int t^{-1/3} dt =$$

$$= \frac{t^{2/3}}{2/3} + C = \frac{3}{2} \cdot t^{2/3} + C = \frac{3}{2} (\sin x + 2)^{2/3} + C.$$

в) Для решения примера воспользуемся заменой $t = 2 + x^4$.

Тогда $dt = d(2 + x^4) = (2 + x^4)' dx = 4x^3 dx$, т.е. $dt = 4x^3 dx$, откуда $x^3 dx = \frac{1}{4} \cdot dt$.

Итак,

$$\int x^3 (2 + x^4)^5 dx = \int (2 + x^4)^5 \cdot x^3 dx = \int t^5 \cdot \frac{1}{4} dt = \frac{1}{4} \int t^5 dt =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{24} \cdot t^6 + C = \frac{1}{24} \cdot (2 + x^4)^5 + C.$$

г) Для решения данного примера воспользуемся равенством $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = d(\arcsin x)$ и заменой $t = \arcsin x$. Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат:

$$\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int (\arcsin x)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \int (\arcsin x)^3 d(\arcsin x) =$$

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} \cdot \arcsin^4 x + C.$$

д) Воспользуемся заменой, существенно упрощающей решение данного примера: $t = 4 + 3^x$. Тогда $dt = (4 + 3^x)' dx = 3^x \cdot \ln 3 dx$, откуда $3^x dx = \frac{1}{\ln 3} dt$. Используя указанную замену и табличное интегрирование получим результат

$$\int \frac{3^x}{4 + 3^x} dx = \int \frac{1}{4 + 3^x} \cdot 3^x dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\ln 3} dt = \frac{1}{\ln 3} \cdot \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln |t| + C = \frac{1}{\ln 3} \cdot \ln |4 + 3^x| + C = \log_3 (4 + 3^x) + C.$$

е) Для решения примера воспользуемся заменой $t = x^2 + 6x$. Тогда $dt = d(x^2 + 6x) = (x^2 + 6x)' dx = (2x + 6)dx = 2(x + 3)dx$, т.е. $dt = 2(x + 3)dx$ и $(x + 3)dx = \frac{1}{2} dt$.

Используя указанную замену и табличное интегрирование, получим результат

$$\int (x + 3) \cdot \cos(x^2 + 6x)dx = \int \cos(x^2 + 6x) \cdot (x + 3)dx =$$

$$= \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 6x) + C.$$

Задание 1.

Найти интегралы из таблицы 13, результат проверить дифференцированием.

Таблица 13

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{3dx}{\sqrt{4 - x^2}}$	11	$\int \frac{5x^8 + 3}{x^3} dx$
2	$\int \left(\frac{1}{1 + x^2} + \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} \right) dx$	12	$\int \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} dx$
3	$\int \frac{2^x - 3^x}{4^x} dx$	13	$\int \frac{2dx}{x^2 - 9}$
4	$\int \frac{\sqrt{x^3} + 1}{\sqrt{x} + 1} dx$	14	$\int \frac{3 - \sqrt{1 + x^2}}{1 + x^2} dx$
5	$\int \frac{2^x \cdot e^x - 1}{2^x} dx$	15	$\int \left(\frac{1 - x}{x} \right)^2 dx$
6	$\int \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} dx$	16	$\int \frac{\sqrt{x^2 - 1} + 3}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$
7	$\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} dx$	17	$\int \frac{1 + 2\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} dx$

8	$\int \frac{7\,dx}{\sqrt{8-x^2}}$	18	$\int \frac{2x\sin^2 x+3}{\sin^2 x}\,dx$
9	$\int \left(\sin x+\frac{e^x}{2}+\sqrt[6]{x}\right)dx$	19	$\int \frac{1-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$
10	$\int \frac{3^x+4^x}{2^x}\,dx$	20	$\int \frac{x^3+27}{x^2-3x+9}\,dx$

Задание 2.

Найти интегралы из таблицы 14, результат проверить дифференцированием.

Таблица 14

N	Задание	N	Задание	N	Задание
1	$\int \sin\left(1-\frac{2x}{3}\right)dx$	8	$\int \frac{1}{\sin^2(5x+1)}\,dx$	15	$\int \frac{1}{5-3x}\,dx$
2	$\int (1-5x)^{1/5}\,dx$	9	$\int \sqrt[3]{3-7x}\,dx$	16	$\int 2^{1-7x}\,dx$
3	$\int \cos\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$	10	$\int \left(1-\frac{x}{2}\right)^4 dx$	17	$\int 2^{\frac{x+1}{2}}\,dx$
4	$\int \frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\,dx$	11	$\int \frac{1}{(1-3x)^{1/5}}\,dx$	18	$\int \frac{1}{\cos^2\frac{x}{5}}\,dx$
5	$\int \frac{1}{(2x-1)^{1/2}}\,dx$	12	$\int \frac{1}{3-5x}\,dx$	19	$\int \frac{1}{1-7x}\,dx$
6	$\int \frac{1}{3^{2-4x}}\,dx$	13	$\int \sin\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$	20	$\int \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$
7	$\int \frac{1}{4x-1}\,dx$	14	$\int \left(1-\frac{x}{4}\right)^5 dx$	21	$\int \cos\left(1-\frac{x}{7}\right)dx$

Задание 3.

Найти интегралы из таблицы 15, результат проверить дифференцированием.

Таблица 15

N	Задание	N	Задание
1	$\int x\cos x^2\ dx$	11	$\int x\cdot e^{1-x^2}\ dx$
2	$\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$	12	$\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
3	$\int \frac{tg^5 x}{\cos^2 x}\,dx$	13	$\int \frac{\cos x}{\sin^{3/5} x}\,dx$
4	$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$	14	$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$
5	$\int \frac{e^x}{2+e^x}\,dx$	15	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}\,dx$
6	$\int 2^{x^2}\cdot x\,dx$	16	$\int e^x\cos(e^x)\,dx$
7	$\int x\cdot e^{4-x^2}\ dx$	17	$\int e^{x^3}\cdot x^2\ dx$
8	$\int \frac{2^x}{2^x+3}\,dx$	18	$\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
9	$\int x^2(2+x^3)^4\ dx$	19	$\int (x^3-4x)^{10}(3x^2-4)\,dx$
10	$\int \frac{x}{1+4x^4}\,dx$	20	$\int \frac{e^{ctgx}}{\sin^2 x}\,dx$

Задание 4

Найти интегралы из таблицы 16, применив метод интегрирования по частям. Результат проверить дифференцированием.

Таблица 16

N	Задание	N	Задание
1	$\int (x+1)\cdot e^{3x}dx$	11	$\int (2x-1)\sin 2x\,dx$
2	$\int arctg2x\ dx$	12	$\int \ln x\,dx$

3	$\int \arcsin(x+1)\,dx$	13	$\int (1-3x)\cdot 2^{x}dx$
4	$\int (4-3x)\cdot e^{-x}dx$	14	$\int \ln(1-x)\,dx$
5	$\int (2x-1)\cos x\,dx$	15	$\int x\ln 2x dx$
6	$\int (2x+1)\cdot e^{2x}dx$	16	$\int x\cdot 2^{-x}dx$
7	$\int (x+1)\mathrm{arctg}x\,dx$	17	$\int \arcsin(x+2)\,dx$
8	$\int (1-x)\ln x\,dx$	18	$\int \ln(1-3x)\,dx$
9	$\int (2x-3)\cos 3x\,dx$	19	$\int (x+1)\cdot\sin 5x\,dx$
10	$\int x\cdot e^{1-x}dx$	20	$\int \ln\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$

Задание 5.

Найти интегралы из таблицы 17, содержащих квадратный трехчлен.

Таблица 17

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{2x-3}{x^2-6x+25}dx$	11	$\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$
2	$\int \frac{x+1}{x^2-4x+8}dx$	12	$\int \frac{x+1}{x^2+2x+10}dx$
3	$\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$	13	$\int \frac{3x-3}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$
4	$\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx$	14	$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-6x+13}}dx$
5	$\int \frac{4x+1}{2x^2+4x+10}dx$	15	$\int \frac{2x+2}{2x^2+x+1}dx$
6	$\int \frac{x+1}{x^2-10x+26}dx$	16	$\int \frac{5x-1}{x^2+6x+18}dx$

7	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,dx$	17	$\int \frac{4x-1}{4x^2+2x+3}\,dx$
8	$\int \frac{2x-1}{4x^2+4x+5}\,dx$	18	$\int \frac{x+1}{\sqrt{4x^2-4x+5}}\,dx$
9	$\int \frac{x}{2x^2-4x+10}\,dx$	19	$\int \frac{2x}{6x-10-x^2}\,dx$
10	$\int \frac{x+1}{x^2-6x+15}\,dx$	20	$\int \frac{2x+1}{15x-7-3x^2}\,dx$

Задание 6

Найти интегралы из таблицы 18 от рациональной дроби, предварительно разложив ее на сумму простейших дробей.

Таблица 18

N	Задание	N	Задание
1	$\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(x^2+4x+4)}dx$	11	$\int \frac{x-7}{x^3-4x^2+4x}dx$
2	$\int \frac{x+3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx$	12	$\int \frac{x+3}{(x+1)(x^2+4)}\,dx$
3	$\int \frac{x^2+4}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$	13	$\int \frac{x+7}{x^3-2x^2+2x}\,dx$
4	$\int \frac{x^2+4x+8}{(x-1)(x^2+1)}\,dx$	14	$\int \frac{x^3+x}{x^4-4x^2+4}\,dx$
5	$\int \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)}\,dx$	15	$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+2x+1)(x^2+9)}\,dx$
6	$\int \frac{x+3}{(x^2+2)(x^2-2x+1)}\,dx$	16	$\int \frac{x^2+2x+5}{(x^2+4x+4)(x^2+4)}\,dx$
7	$\int \frac{x^2-3x+1}{(x-4)(x^2-5x+6)}\,dx$	17	$\int \frac{x^2+x-3}{(x^2+x+1)(x-1)}\,dx$

8	$\int \frac{x^2+x+1}{x^4-81}dx$	18	$\int \frac{x+1}{x^4-4x^3+4x^2}dx$
9	$\int \frac{x^2-x+5}{x^3+x^2}dx$	19	$\int \frac{2x-1}{x^3+x^2+4x+4}dx$
10	$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+1)(x-1)}dx$	20	$\int \frac{x^2-4x+7}{x^3-4x}dx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Дайте определение операции интегрирования. Как проверить результат интегрирования?
4. Сформируйте основные свойства неопределенного интеграла.
5. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.
6. Объясните суть непосредственного интегрирования.
7. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.
8. Найдите интеграл $\int (5x-1)^2 dx$ двумя способами.
9. Напишите формулу замены переменной в неопределенном интеграле.
10. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

19. Методы нахождения интегралов вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$.

20. Методы нахождения интегралов вида $\int tg^m x dx, \quad \int ctg^n x dx$.

21. Методы нахождения интегралов вида $\int stc^{2m} x dx, \quad \int \cos ec^{2n} x dx$.

Практическая работа №15-18.
Определенный интеграл

Вычисление определенного интеграла

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замена переменной под знаком определенного интеграла

Теорема. Пусть функция F(x) первообразная для функции f(x) на некотором интервале [a,b]. И пусть x=φ(t) дифференцируемая монотонная функция на интервале [α,β], причем φ(α)=a; φ(β)=b. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример 1. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{15} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение. Пусть $\sqrt{1+x} = t$, тогда $t^2 = 1 + x$, $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Найдём новые пределы интегрирования: при $x = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $t = 1$; при $x = 15$, $15 = t^2 - 1$; $t^2 = 16$, $t = 4$.

Получим

$$\int_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{t} = \int_1^4 (2t^2 - 2)dt = \left(\frac{2t^3}{3} - 2t\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3}\cdot 4^3 - 2\cdot 4 - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = 36.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

Решение. Пусть $\ln x = t$, тогда $d\ln x = dt$, $\frac{1}{x}dx = dt$. При $x = 1$, $\ln 1 = t$, $t = 0$; при $x = e$, $\ln e = t$, $t = 1$. Получим $\int_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}$.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$, используя формулу интегрирования по частям.

Решение.

$$\int\limits_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array} \right| = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - \int 2x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u_1 = x \\ du_1 = dx \\ dv_1 = \sin x dx \\ v_1 = -\cos x \end{array} \right| = 4\pi^2 \sin 2\pi - 0 - 2x \cdot (-\cos x) \Big|_0^{2\pi} - 2\int\limits_0^{2\pi} \cos x dx =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \cos 2\pi - 0 - 2 \sin x \Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

Пример 4.

Вычислить несобственные интегралы, если они сходится.

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5}$; б) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$.

Решение.

а)

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 7x + 14.5} = \lim_{a \to \infty} \int\limits_1^a \frac{dx}{x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2} x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 14.5}$$

$$= \lim_{a \to \infty} \int\limits_1^a \frac{d(x + 3.5)}{(x + 3.5)^2 + \frac{9}{4}} = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x + 3.5}{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^a =$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x+7}{3}\Bigg|_1^a=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2a+7}{3}-\operatorname{arctg}3\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}3\right).$$

б)

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 x^{-1/4}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x^{3/4}}{3/4}\Bigg|_{0+\varepsilon}^1=\frac{4}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}x^{3/4}\Big|_{0+\varepsilon}^1=\frac{4}{3}(1-0)=\frac{4}{3}.$$

Вычисление площадей плоских фигур

Если на интервале [a,b] задана непрерывная функция y=f(x), причем f(x)≥0 и a<b, то из геометрической иллюстрации видим, что

$$\int_a^b f(x)dx=S.$$

где S площадь криволинейной трапеции, ограниченной снизу осью Ox, с боков прямыми x=a и x=b и сверху графиком функции y=f(x) (см. рис. 1)

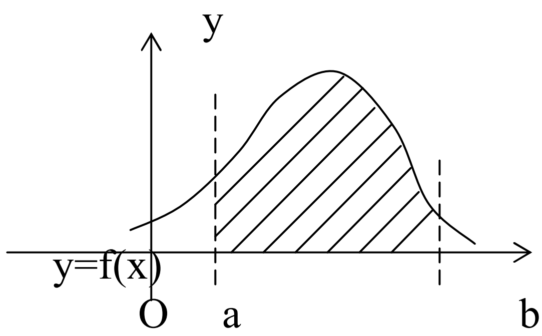
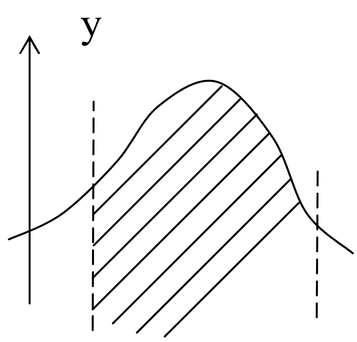


Рис. 1. Вычисление площади криволинейной трапеции

Если условие f(x)≥0 не выполняется, то нужно разбить интервал [a,b] на части корнями уравнения f(x)=0, выделить интервалы знакопостоянства функции, вычислить интегралы на каждом из интервалов и просуммировать по модулю полученные значения. Получим площадь фигуры, ограниченной осью Ox и графиком функции y=f(x), с боков прямыми x=a и x=b.



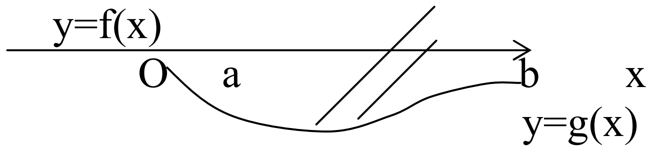


Рис. 2. Вычисление площади криволинейной фигуры

Пусть на интервале [a,b] заданы непрерывные функции y=f(x) и y=g(x), причем f(x)≥ g(x) для x∈[a,b]. Если нужно найти площадь фигуры, ограниченной с боков прямыми x=a и x=b и графиками функций y=f(x) и y=g(x), то (см. рис.2) площадь равна

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Пример

Вычислить площадь (рис. 3), заключенную внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение:

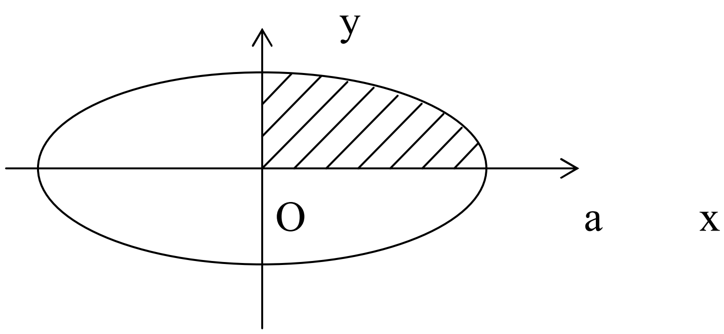


Рис. 3. Площадь эллипса

Уравнение части эллипса, удовлетворяющей условию x≥0, y≥0 можно записать в виде

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь четверти эллипса равна

$$S = \int_a^b f(x)dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{b}{a}\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{b}{a}\frac{a^2}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi ab}{4}.$$

Полная площадь эллипса равна S=πab.

Задание 1.

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, задания взять из таблицы 19.

Таблица 19

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_1^2 \left(\frac{x^2+1}{x}+\cos x\right)dx$	2	$\int_1^3 \left(\frac{(x+2)^2}{x^3}+\sin x\right)dx$
3	$\int_1^4 \left(\frac{x^3+x-5}{x}-e^{2x}\right)dx$	4	$\int_1^2 \left(5^{2x}+\frac{x^4+2}{x}\right)dx$
5	$\int_0^1 \left(\frac{3}{4+x^2}+\cos 3x\right)dx$	6	$\int_2^4 \left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{x^3-2}{x}\right)dx$
7	$\int_2^5 \left(\frac{4}{\sin^2 x}-\frac{x^3-1}{x-1}\right)dx$	8	$\int_0^1 \left(4\sin x+e^{3x+2}+6\right)dx$
9	$\int_1^2 \frac{\left(3\sqrt[3]{x}+2\right)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$	10	$\int_1^2 \left(\frac{x^6-3}{x}+4^{2x+1}\right)dx$
11	$\int_{-2}^{-1} \left(2\cos(3x-1)+e^{5x}+\frac{1}{2x}\right)dx$	12	$\int_1^2 \left(7^{6x}+\frac{x^4-x+5}{x^2}\right)dx$
13	$\int_1^2 \left(\frac{x^3+1}{x^2+x}-e^{4x}\right)dx$	14	$\int_1^3 \frac{2x^4+x^3+3x^2+x+1}{x\left(x^2+1\right)}dx$
15	$\int_0^1 \left(\left(2x^2+1\right)\left(2-x^3\right)+\cos 3x\right)dx$	16	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$
17	$\int_2^3 \left(\frac{x^3-x+2}{x^2-1}+\sin 4x\right)dx$	18	$\int_1^2 \left(\frac{2x^3+x+5}{x}-\sin x\right)dx$

19	$\int_1^2 \left(\frac{5}{x} - e^{2x+1} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$	20	$\int_1^9 \left(\frac{x^{3/2} + x + 5}{x} + \cos 2x \right) dx$

Задание 2.

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Задания взять из таблицы 20.

Таблица 20

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^8 \frac{dx}{1+\sqrt{6x+1}}$	2	$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{5x+1}}$
3	$\int_2^3 \frac{xdx}{1-\sqrt{4x+1}}$	4	$\int_1^2 \frac{dx}{5+\sqrt{3x-1}}$
5	$\int_2^3 \frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}$	6	$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{x+1}}$
7	$\int_6^7 \frac{2x^2dx}{\sqrt{x-5}}$	8	$\int_{-1}^1 \frac{3xdx}{\sqrt{x+4}}$
9	$\int_2^3 \frac{2dx}{\sqrt[6]{x^5} - \sqrt[4]{x^3}}$	10	$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1+7x}-6}$
11	$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{6\sqrt{x}+4}dx$	12	$\int_0^4 \frac{dx}{2+\sqrt{6x+1}}$
13	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{3x+1}}$	14	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{7x+1}}$
15	$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	16	$\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt{5x+1}}$

17	$\int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{8x+1}}$	18	$\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$
19	$\int_1^3 \frac{dx}{1+\sqrt{2x-1}}$	20	$\int_1^2 \frac{xdx}{1-\sqrt{6x+1}}$

Задание 3.

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Задания взять из таблицы 21.

Таблица 21

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4}$	2	$\int_0^1 (3x+7)^{10}dx$
3	$\int_1^2 \frac{\ln^3 x}{x}dx$	4	$\int_0^1 \frac{\mathrm{arctg}^4 x dx}{1+x^2}$
5	$\int_0^1 \frac{\mathrm{tg}^8 x}{\cos^2 x}dx$	6	$\int_1^2 \frac{3x^2dx}{x^3+5}$
7	$\int_0^{1/2} \frac{\arccos^3 x-2}{\sqrt{1-x^2}}dx$	8	$\int_1^2 \frac{2+\ln x}{x}dx$
9	$\int_0^1 \frac{xdx}{x^4+1}$	10	$\int_0^1 \frac{(x^2+1)dx}{(x^3+3x+1)}$
11	$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{arctg}^2 x+x}{1+x^2}dx$	12	$\int_1^3 \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
13	$\int_2^3 \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$	14	$\int_0^1 xe^{x^2+1}dx$
15	$\int_{2,5}^3 (2x-5)^{17}dx$	16	$\int_1^2 \frac{\mathrm{ctg}^{10} x}{\sin^2 x}dx$

17	$\int_{1}^{2} x^2 5^{x^3-1}dx$	18	$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x}dx$
19	$\int_{0}^{1/2} \frac{8x-\mathrm{arctg}2x}{1+4x^2}dx$	20	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$

Задание 4.

Вычислить интеграл, используя формулу интегрирования по частям. Задания взять из таблицы 22.

Таблица 22

№	$\int_{a}^{b} f(x)dx$	№	$\int_{a}^{b} f(x)dx$
1	$\int_{-2}^{0} (x^2+5x+6)\cos 2xdx$	2	$\int_{-3}^{0} (x+3)\sin 4xdx$
3	$\int_{1}^{2} xe^x dx$	4	$\int_{-1}^{0} (x^2+2x+1)\sin 3xdx$
5	$\int_{1}^{2} (4-3x)e^{-3x}dx$	6	$\int_{0}^{1} (4x+3)\cos 2xdx$
7	$\int_{1}^{2} \mathrm{arctg}\sqrt{4x-1}dx$	8	$\int_{0}^{1} (3x+4)e^{3x}dx$
9	$\int_{1}^{2} \mathrm{arctg}\sqrt{2x-1}dx$	10	$\int_{1}^{3} \ln(2x+3)dx$
11	$\int_{0}^{\pi} (6x-10)\sin 2xdx$	12	$\int_{0}^{1} (x+1)\ln(x+1)dx$
13	$\int_{-1}^{0} \arcsin(x+1)dx$	14	$\int_{0}^{1} \ln(x^2+4)dx$
15	$\int_{0}^{2} (1-6x)\cos xdx$	16	$\int_{0}^{\frac{1}{9}} \arccos(9x-1)dx$

17	$\int_1^2 \frac{xdx}{\cos^2 x}$	18	$\int_1^2 \frac{xdx}{\sin^2 x}$
19	$\int_2^4 x\sin^2 xdx$	20	$\int_1^3 \mathrm{arcctg}2xdx$

Задание 5.

Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся.

Задания взять из таблицы 23.

Таблица 23

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_{-1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+2}$	2	$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$
3	$\int_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$	4	$\int_1^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$
5	$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg}2x}{\pi(1+4x^2)}dx$	6	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+3x+6}$
7	$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$	8	$\int_{5/8}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2-5x+4}$
9	$\int_{-2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-4x+10}$	10	$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+x-6}$
11	$\int_{-0.2}^{+\infty} \frac{dx}{5x^2+2x+7}$	12	$\int_4^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$
13	$\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$	14	$\int_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$

15	$\int_{11/4}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2-11x+2}$	16	$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+x+2}$
17	$\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{3x^2-12x+3}$	18	$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\left(6x^2-5x+1\right)\ln\frac{3}{4}}$
19	$\int_{4}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-5x+6}$	20	$\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{2x^2+3x}$

Задание 6.

Вычислить несобственные интегралы, если они сходятся. Задания взять из таблицы 24.

Таблица 24

№	$\int_a^b f(x)dx$	№	$\int_a^b f(x)dx$
1	$\int_0^1\frac{dx}{(x-1)^2}$	2	$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$
3	$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$	4	$\int_1^3\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^4}}$
5	$\int_{-1/3}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$	6	$\int_{3/4}^{1}\frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$
7	$\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$	8	$\int_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$
9	$\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$	10	$\int_{0}^{1/4}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$
11	$\int_{0}^{1/2}\frac{dx}{(2x-1)^2}$	12	$\int_0^2\frac{dx}{(x-2)^3}$

13	$\int_0^{1/3}\frac{dx}{(1-3x)^2}$	14	$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
15	$\int_{-1}^0\frac{dx}{(x+1)^2}$	16	$\int_{-1/5}^0\frac{dx}{(1+5x)^2}$
17	$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$	18	$\int_2^4\frac{2dx}{(2-x)^2}$
19	$\int_0^3\frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$	20	$\int_{3/2}^4\frac{dx}{(2x-3)^2}$

Задание 7.

Построить фигуру, ограниченную линиями, найти ее площадь. Задания взять из таблицы 25.

Таблица 25

№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$	№	$y=f_1(x)$ $y=f_2(x)$
1	$y=x^2-4x+3$ $y=x+3$	2	$y=x^2-8x+7$ $y=-5x+5$
3	$y=x^2+4x$ $y=x+4$	4	$y=9x^2+6x+1$ $y=-x+1$
5	$y=(x-2)^2$ $y=4x-8$	6	$y=-(x+3)(x-2)$ $y=x-2$
7	$y=3x-x^2$ $y=-x$	8	$y=2x^2-4x+1$ $y=2x-3$
9	$y=-x^2-8x+1$ $y=-x-2$	10	$y=x^2-2x$ $y=\frac{1}{2}x+5$
11	$y=(x+1)(x-4)$ $y=5x-4$	12	$y=x^2+6x+1$ $y=2x+1$

13	$y = 2x^2 + 8x + 1$ $y = 6x + 1$	14	$y = (x-1)^2$ $y = x + 1$
15	$y = -x^2 + x + 5$ $y = -2x + 7$	16	$y = x^2 + 3x + 1$ $y = 4x + 1$
17	$y = -2x^2 + 5x - 3$ $y = -3x - 3$	18	$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ $y = 4x + 1$
19	$y = (x+5)(x-1)$ $y = 3.5x - 3.5$	20	$y = x^2 + x + 6$ $y = 4x + 6$

Задание 8.

Вычислить длины дуг кривых. Задания взять из таблицы 26.

Таблица 26

№	Уравнение кривой	№	Уравнение кривой
1	$y = 2e^{\frac{x}{2}}$, $\ln 3 \le x \le \ln 8$	11	$y = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$
2	$\begin{cases} x = \frac{1}{6}t^6 \\ y = 2 - \frac{t^4}{4} \end{cases}$ Между точками пересечения с осями Ox,Oy	12	$2y - x^2 + 3 = 0$ Между точками пересечения с осями Ox
3	$y = e^x$, $0 \le x \le 1$	13	$y = e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$
4	$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$	14	$y = \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, $0 \le x \le 9$
5	$y = \frac{x^2}{4}$, $0 \le x \le 2$	15	$y = 4 - \frac{x^2}{2}$, $y \ge 0$

6	$y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, $0 \le x \le 5$	16	$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t}dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$
7	$y = \int_0^x \sqrt{\sin 2t}dt$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$	17	$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
8	$\begin{cases} x = a\cos^5 t \\ y = a\sin^5 t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$	18	$x = a\cos t$ $y = -2a\ln\sin t$, от т. А (0,0) до т. В (x_0, y)
9	$\rho = 7(1-\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$	19	$\rho = 2\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$
10	$\begin{cases} x = 3(t-\sin t) \\ y = 3(1-\cos t) \end{cases}$, $\pi \le t \le 2\pi$	20	$\begin{cases} x = 5(t-\sin t) \\ y = 5(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$

Практическая работа №19-20.
Функции нескольких переменных

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определённая и непрерывная в некоторой области D. Полагая, например, $y = const$, получим производную $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной x. Она также может обозначаться $f'_x(x, y)$.

Аналогично, полагая $x = const$, получим производную $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$, которая называется частной производной первого порядка функции z по переменной y. Она также может обозначаться $f'_y(x, y)$.

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xx}(x, y); \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{yy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y); \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ или } f''_{xy}(x, y).$$

Имеет место теорема о равенстве смешанных производных.

Теорема Шварца. Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой. В частности, для $z = f(x, y)$ имеем: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Пример. Для функции $z = \cos(3x - 4y)$ найти частные производные второго порядка.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = [y = const] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$
$$= -\sin(3x - 4y) \cdot (3 \cdot x' - 0) = -3\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [x = const] = (\cos(3x - 4y))' = -\sin(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$
$$= -\sin(3x - 4y) \cdot (0 - 4 \cdot y') = 4\sin(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = [y = const] = (-3\sin(3x - 4y))' = -3\cos(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$
$$= -3\cos(3x - 4y) \cdot (3 \cdot x' - 0) = -9\cos(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = [x = const] = (-3\sin(3x - 4y))' = -3\cos(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$
$$= -3\cos(3x - 4y) \cdot (0 - 4 \cdot y') = 12\cos(3x - 4y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = [x = const] = (4\sin(3x - 4y))' = 4\cos(3x - 4y) \cdot (3x - 4y)' =$$
$$= 4\cos(3x - 4y) \cdot (0 - 4 \cdot y') = -16\cos(3x - 4y).$$

Для решения следующих заданий воспользоваться таблицей 27.

Задание 1 Для функции z = f(x,y) найти частные производные

$\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 2 Найти вторые частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

Задание 3 Найти полный дифференциал функции $z = f(x,y)$.

Задание 4 Найти градиент функции $z = f(x,y)$ в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 5 Найти производную функции $z = f(x,y)$ в точке $x = x_0$, $y = y_0$ по направлению вектора (1, 2).

Задание 6 Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Задание 7 Разложить функцию $z = f(x,y)$ по формуле Тейлора (при $n = 2$) в точке $x = x_0$, $y = y_0$.

Таблица 27

№	f(x,y)	x_0	y_0	a	b	c	d
1	$\frac{x^2}{y^2} \cdot \sin(x-y)$	0.1	1.2	-4	1	1	2
2	$\frac{x}{y^2} \cdot \cos(x+y)$	-0.2	1.8	-2	2	1	2
3	$\frac{x}{y^2} \cdot \ln(x^2+y)$	-1	1.8	-2	3	1	3
4	$\frac{y-4}{\sqrt{y+2x^2}} \cdot (3+x+y)$	-2	4.5	-3	3	1	5
5	$\frac{\sin(y+x^2)}{\sqrt{y+2x^2}}$	-2	4.5	-3	2	0	5
6	$\frac{\cos(y^2 x)}{y+2x^2}$	-2	1	-3	1	0.5	2

7	$\sin(x+2y)\cdot\cos(x^2)$	-0.2	1	-1	1	0.5	1.5
8	$\dfrac{\sin(x-y)}{2+\cos(xy)}$	-0.6	1.2	-2	0	0	1.5
9	$\dfrac{e^{x-y}}{1.25-\cos(xy)}$	-0.5	1	-0.7	0	0.5	1.3
10	$\dfrac{\mathrm{arctg}(x+y)}{\cos(x^2+y^2)}$	-0.6	1.6	-0.7	0	1.4	1.9
11	$\dfrac{\mathrm{arctg}(x^2y)-1}{\sin(y-x)}$	0.6	0	0.5	0.7	-0.1	0.1
12	$\arcsin(0.1\cdot xy)\cdot\sin y$	0.1	3	-1	2	2	4
13	$\ln(x+0.2y)\cdot\sin(y-x)$	0	3	-0.2	1	2	4
14	$\sqrt{x+y}\cdot\sin(2y+x)$	1	1	-0.3	1.4	0.4	2
15	$\sqrt{x+y^2}\cdot\cos(2y+x)$	1	1	-0.5	1.5	0.8	2
16	$\mathrm{tg}(xy)\cdot\cos(x+y)$	0.4	0.3	-0.6	0.9	0.1	0.8
17	$\mathrm{tg}(2x+y^2)\cdot\cos(x^2y)$	0.4	0.3	0.3	0.5	0.1	0.6
18	$\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt[5]{x-y}$	1	2	0	1.2	-0.1	2.3
19	$\sqrt[3]{\sin(x^2+y)}\cdot x$	-1	1	-2	-0.5	-2	2
20	$\sqrt[5]{\sin(x-y)}\cdot y^2$	-1.5	1	-1.5	-0.5	0.8	2

Контрольные вопросы

1. Записать формулы для вычисления площади плоской фигуры, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
2. Записать формулы для вычисления длины дуги плоской кривой, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.
3. Записать формулы для вычисления объёма и площади боковой

поверхности тела, полученного вращением дуги кривой вокруг оси ОХ и вокруг оси ОУ, заданной в декартовой системе координат, в полярной системе координат, параметрически.

4. Что такое частная производная?
5. Как формулируется теорема о смешанных производных?
6. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?
7. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл?
8. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.
9. В чём заключается геометрический смысл градиента?
10. Что такое производная по направлению?
11. Что такое локальный экстремум? Глобальный экстремум? Сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума функции двух переменных.
12. Как проходят линии уровня функции двух переменных в окрестности точки локального экстремума?

Практическая работа №21-23. Дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения 1-го порядка

Понятие дифференциального уравнения

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее функцию y(x), аргумент x и производные функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

В общем случае дифференциальное уравнение можно записать в виде $F(x, y', y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Так как искомая функция $y=y(x)$, фигурирующая в уравнении, есть функция одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют в этом случае *обыкновенным дифференциальным уравнением.*

Дифференциальные уравнения, разрешенные относительно производной

Уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид: $y' = f(x, y)$ или $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$

Задача Коши: Среди всех решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ найти такое решение $y = y(x)$, которое при заданном значении $x = x_0$ аргумента принимает заданное значение y_0: $y(x_0) = y_0$

Равенство $\Phi(x, y, C) = 0$, неявно задающее общее решение, называется общим интегралом дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида $f_2(y)dy = f_1(x)dx$ называется уравнением с разделяющимися переменными.

Его решение имеет вид: $\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + C,$

Пример. Решить дифференциальное уравнение $xdx + ydy = 0$.

Решение: Перенесем второе слагаемое в правую часть уравнения $xdx = -ydy$ и проинтегрируем обе части уравнения $\int xdx = -\int ydy$, получим $x^2/2=-y^2/2+C$ или $x^2/2+y^2/2=C$.

Дифференциальное уравнение вида

$$M_2(x)N_2(y)dy = M_1(x)N_1(x)dx$$

также называется уравнением с разделяющимися переменными, так как оно может быть сведено к уравнению с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения первого порядка, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменного могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными. К числу таких уравнений относятся уравнения вида

$$y' = f(ax + by),$$

где a, b – *const.*

Сделаем замену переменной $z=ax+by$, тогда $z' = a + by'$, но $y' = f(z)$, следовательно, $z' = a + b \cdot f(z)$, а это уравнение с разделяющимися переменными $\dfrac{dz}{a + b \cdot f(z)} = dx$.

Интегрируя его, получим $x = \displaystyle\int \frac{dz}{a + b \cdot f(z)} + C.$

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Функция $f(x,y)$ называется однородной функцией n-го измерения относительно x и y, если при любом λ справедливо равенство: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$.

Уравнение вида

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно x и y, называется *однородным дифференциальным уравнением первого порядка* .

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка сводятся к уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой $t=y/x$ или $y=t\cdot x$.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Оно имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x)$, $Q(x)$ - непрерывные функции в *области интегрирования данного уравнения.*

Если $Q(x)\neq 0$, то уравнение называется линейным неоднородным уравнением. Для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения можно предложить следующие методы:

Первый метод:

Будем искать решение уравнения в виде:

$$y=u(x)\cdot v(x),$$

где одну из функций можно выбрать произвольно, тогда другая выбирается на основании исходного уравнения. Подставим данную замену в уравнение, получим $u'\cdot v+v'\cdot u+P(x)\cdot u\cdot v=Q(x)$ или $u'\cdot v+[v'+P(x)\cdot v]\cdot u=Q(x)$

Выберем функцию v так, чтобы $v'+P(x)\cdot v=0$ - линейное относительно v и v' $(v(x)=0)$. Тогда решение $\nu = C\cdot e^{-\int P(x)dx}$. Не нарушая общности рассуждений, положим C=1. Получим $\nu = e^{-\int P(x)dx}$ и подставим найденное значение $v(x)$ в уравнение, получим $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{Q(x)}{v(x)}$ или $u=\int\dfrac{Q(x)}{v(x)}dx+C_1$. Следовательно, общее решение будет записано в виде:

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}dx+C\right).$$

Рассмотренный метод называется *методом Бернулли.*

Второй метод:

Общее решение неоднородного линейного уравнения можно найти и с помощью так называемого *метода вариации произвольной постоянной* (иначе *метода Лагранжа*).

Идея данного метода заключается в следующем:

Отыскивается общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения: $y=C\cdot e^{-\int P(x)dx}$. Затем общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения отыскивается в виде: $y=C(x)\cdot e^{-\int P(x)dx}$, то есть по существу производится замена переменных, здесь $C(x)$ − новая функция от x, подлежащая определению с помощью исходного уравнения .

Рассмотрим метод вариации произвольной постоянной на примере.

Уравнение Бернулли

Уравнение Бернулли имеет вид:

$$y'+P(x)\cdot y=Q(x)\cdot v^n \quad ,$$

где $n\neq 0,\ n\neq 1$, так как при $n=0$ и $n=1$ это уравнение является линейным уравнением. $P(x)$ и $Q(x)$ - непрерывные функции.

Решается уравнение Бернулли подстановкой $y=u(x)\cdot v(x)$, т.е. с помощью метода Бернулли.

Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ называется уравнением в полных дифференциалах, если левая часть представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т. е. $\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy=P(x,y)\cdot dx+Q(x,y)\cdot dy$.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах в некоторой области D, является условие:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \quad \text{для} \quad \forall (x,y)\in D,$$

тогда $du=0$, $u(x,y)=C$ - общий интеграл.

Общий интеграл такого уравнения имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy=C$$

Пример. Решить уравнение $(x^3+y)dx+(x-y)dy=0$

Решение: $P(x,y)=x^3+y$, $Q(x,y)=x-y$, тогда

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=1,\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=1,\ \text{т е.}\ \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Тогда $\int_0^{x}\left(x^3+y\right)dx+\int_0^{y}\left(0-y\right)dy=C$, интегрируя, получим

$$\left.\left(\frac{x^4}{4}+xy\right)\right|_0^x+\left.\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right|_0^y=\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C\cdot$$

Итак, общий интеграл найден: $\frac{x^4}{4}+xy-\frac{y^2}{2}=C$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

Понятие дифференциального уравнения n-го порядка

Дифференциальным уравнением n-го порядка называется соотношение вида

$$F(x,y',y',y'',\ldots,y^{(n)})=0\ ,$$

где производная n - го порядка входит явно.

Уравнения вида $\boldsymbol{y^{(n)}=f(x,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})}$, т. е. уравнения явно не содержащие искомой функции. Рассмотрим решение таких уравнений на примере уравнения второго порядка

$$y''=f(x,y')$$

Подстановка $y'=p(x)$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу $p'=f(x,p)$. Его общее решение $p(x)=\varphi(x,C)$, но $p=y'$. Следовательно, $y'=\varphi(x,C)$, а это уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнения вида $\boldsymbol{y^{(n)}=f(y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})}$, т. е. уравнения, явно не содержащие независимого переменного x. Рассмотрим решение таких уравнений на примере уравнения второго порядка

$$y''=f(y,y')$$

Подстановка $y'=p(y)$ позволяет понизить порядок уравнения на единицу. При этом p рассматривается как новая неизвестная функция от y, т. е. $p=p(y)$. Тогда $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot p$, а уравнение примет вид

$$p\cdot\frac{dp}{dy}=f(y,p).$$

Его общее решение $p=\varphi(y,C)$, но $p=y'$. Следовательно, $y'=\varphi(y,C)$, а это уравнение с разделяющимися переменными.

Уравнение, не содержащее в явном виде y и y′

Рассмотрим уравнение

$$y''=f(x)$$

или

$$\frac{d}{dx}\frac{dy}{dx}=f(x)$$

Откуда получаем

$$\frac{dy}{dx}=\int f(x)dx+C_1.$$

и $y=\int(\int f(x)dx)dx+C_1x+C_2$.

Пример.

Найти общее решение уравнения, которое описывает свободное падение тела

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g,$$

где g – ускорение свободного падения тела.

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1,$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные C_1, C_2 описывают влияние начальных условий. Если задать начальные условия в виде

$$y(0)=h;\ y'(0)=v_0,$$

где h и v_0 - положение и скорость тела в начальный момент, то решение имеет вид

$$y = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Уравнение, не содержащее в явном виде y

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(x, y')$$

Введем замену

$$y' = p(x).$$

$$y'' = p'(x) = \frac{dp}{dx}.$$

Уравнение получает вид

$$\frac{dp}{dx} = f(x, p).$$

Это уравнение первого порядка. Найдем, если это удастся, его решение

$$p = p(x, C_1).$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = p(x, C_1).$$

Проинтегрируем

$$y = \int p(x, C_1)dx + C_2.$$

Уравнение, не содержащее в явном виде x

Рассмотрим уравнение

$$y'' = f(y, y')$$

Введем замену

$$y' = p(y).$$

$$y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p.$$

Уравнение принимает вид

$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p).$$

Это уравнение первого порядка. Найдем, если это удастся, его решение

$$p = p(y, C_1).$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = p(y, C_1).$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим их

$$\frac{dy}{p(y, C_1)} = dx.$$

Проинтегрируем

$$\int \frac{dy}{p(y, C_1)} = x + C_2.$$

Пример. Найти общее решение уравнения

$$2yy'' - y'^2 + y = 0.$$

Решение:

Это уравнение, не содержащее в явном виде x. Введем замену

$$y' = p(y).$$

$$y'' = \frac{dp}{dy}p.$$

Подставим в уравнение

$$2yp\frac{dp}{dy} - p^2 + y = 0.$$

Это уравнение Бернулли. Его общее решение рассмотрено выше

$$p = \sqrt{\frac{y}{2} + \frac{C_1}{y}}.$$

Тогда придем к уравнению

$$\sqrt{\frac{2y}{y^2 + C_1}}dy = dx.$$

Проинтегрируем

$$\int \sqrt{\frac{2y}{y^2 + C_1}}dy = x + C_2.$$

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано линейное однородное уравнение второго порядка

$$y''+py'+qy=0,$$

где p и q – постоянные действительные числа.

Будем искать частное решение в виде $y=e^{kx}$, $k-const$, тогда $y'=ke^{kx}$; $y''=k^2e^{kx}$. Подставим полученные выражения в уравнение, получим $e^{kx}(k^2+pk+q)=0$. Так как $e^{kx}\neq 0$, то значит

$$k^2+pk+q=0.$$

Это уравнение называется характеристическим. Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня. Обозначим их через k_1 и k_2. Возможны следующие случаи:

1) k_1 и k_2 - действительные и неравные, т. е. $k_1\neq k_2$.

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$$y=C_1\cdot e^{k_1x}+C_2\cdot e^{k_2x}.$$

Линейные неоднородные уравнения второго порядка

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x)$$

Структура общего решения такого уравнения представляется как сумма какого-нибудь частного решения y^* этого уравнения и общего решения $y_{о.о}$ соответствующего однородного уравнения, т.е. $y_{о.н}=y_{о.о}+y^*$

Неоднородные линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=f(x),$$

где p и q − действительные числа.

Рассмотрим некоторые случаи нахождения частных решений.

I. Пусть правая часть уравнения представляет собой произведение показательной функции на многочлен степени n, т. е.

$$f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x},$$

тогда возможны следующие случаи:

а) Число α не является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$.

В этом случае частное решение можно искать в виде:

$$y^*=(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_0)e^{\alpha x}=Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

б) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$.

В рассматриваемом случае частное решение нужно брать в виде $y^*=x(A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_0)e^{\alpha x}=xQ_n(x)e^{\alpha x}$.

в) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения $k^2+pk+q=0$. Тогда частное решение следует искать в виде $y^*=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}$.

II. Пусть правая часть уравнения имеет вид

$$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены.

Форма частного решения в этом случае определяется так:

а) Если число $\alpha+i\beta$ не является корнем характеристического уравнения $k^2+pk+q=0,$ то частное решение уравнения следует искать в виде:

$$y^*(x)=U_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V_s(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $U_s(x)$ и $V_s(x)$ - многочлены, степень которых $s=\max\{n,m\},$ т. е. наивысшей степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

б) Если число $\alpha+i\beta$ есть корень характеристического уравнения $k^2+pk+q=0,$ то частное решение уравнения следует искать в виде

$$y^*(x)=x[U_s(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+V_s(x)e^{\alpha x}\sin\beta x],$$

где $U_s(x)$ и $V_s(x)$ - многочлены, степень которых $s=\max\{n,m\},$ т.е. наивысшей степени многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$.

При этом отметим, что указанные формы частных решений сохраняются и в том случае, когда в правой части уравнения один из многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ тождественно равен нулю, т. е. когда правая часть имеет вид: $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ или $Q_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Приведем сводную таблицу 28 видов частных решений различных видов правых частей.

Таблица 28

№	Правая часть: $f(x)$	Корни характеристического уравнения	Вид частного решения y^*
I	$e^{\alpha x}P_n(x),$ n - любое	Число α не является корнем характеристического уравнения.	$e^{\alpha x}P^*_n(x)$
		Число α является корнем характеристического уравнения кратности r.	$x^r e^{\alpha x}P^*_n(x)$
II	$e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x],$ n, m - любые	Число $\alpha\pm i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$e^{\alpha x}[U_s(x)\cos\beta x+V_s(x)\sin\beta x\ e^{\alpha x}],$ $s=max(n,m)$
		Число $\alpha\pm i\beta$ является корнем характеристического урав-	$xe^{\alpha x}[U_s(x)\cos\beta x+V_s(x)\sin\beta x\ e^{\alpha x}],$

		нения	*s=max(n,m)*

Замечание: Коэффициенты многочленов $P^*_n(x)$, $U_s(x)$, $V_s(x)$ определяются с помощью метода неопределенных коэффициентов, используя исходное уравнение.

Задание 1

Проверьте, что указанная функция $y = y(x)$ является решением уравнения, задания взять из таблицы 29

Таблица 29

№	Функция $y = y(x)$	Уравнение
1	$y = \dfrac{C\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}-Cx}$	$y'\sqrt{1-x^2} = 1+y^2$
2	$y = -\ln(C-e^x)$	$y' = e^{x+y}$
3	$y = C\cdot e^{\sqrt{1-x^2}}$	$y' = \dfrac{-xy}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$y = C\sqrt{1+e^{2x}}$	$y'(1+e^{2x}) = ye^{2x}$
5	$y^3+y-x^2+C=0$	$y'(3y^2+1) = 2x$
6	$y = \sqrt{Cx^2-1}$	$yx\cdot y' = 1+y^2$
7	$y = \dfrac{C+x}{1-Cx}$	$y'(1+x^2) = 1+y^2$
8	$y = 1+\dfrac{Cx}{1+x}$	$y-1 = (x^2+x)\,y'$
9	$y = \sqrt{C(1-x^2)-1}$	$y'y(x^2-1) = x(y^2+1)$
10	$y = \dfrac{C}{2(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}$	$y'(1+x^2)+(2y+1)\,x = 0$
11	$y = \sqrt{C-1-\dfrac{C}{x^2+1}}$	$xy(1+x^2)\,y' = 1+y^2$
12	$y = \ln(C(1+x^2)-1)$	$e^y(1+x^2)\,y' = 2x(1+e^y)$

13	$y=(x+C)e^{x}$	$y'-y=e^{x}$
14	$y=Ce^{x}-x-1$	$y'=x+y$
15	$y=1+C\cdot e^{-x^{3}/3}$	$y'+x^{2}y=x^{2}$
16	$y=e^{C\cdot \operatorname{tg}(x/2)}$	$y'\cdot\sin x=y\cdot\ln y$
17	$y-x=C(1+xy)$	$1+y^{2}=(1+x^{2})\,y'$
18	$x^{2}(1+y^{2})=C$	$1+y^{2}+xy\cdot y'=0$
19	$y=\operatorname{tg}\ln Cx$	$1+y^{2}=xy'$
20	$\sqrt{1+x^{2}}+\sqrt{1+y^{2}}=C$	$x\sqrt{1+y^{2}}+yy'\sqrt{1+x^{2}}=0$

Задание 2

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения, задания взять из таблицы 30

Таблица 30

№	Уравнение
1.	$4xdx-3ydy=3x^{2}ydy-2xy^{2}dx$
2.	$x\sqrt{1+y^{2}}+yy'\sqrt{1+x^{2}}=0$
3.	$\sqrt{4+y^{2}}\,dx-ydy=x^{2}ydy$
4.	$\sqrt{3+y^{2}}\,dx-ydy=x^{2}ydy$
5.	$6xdx-6ydy=2x^{2}ydy-3xy^{2}dx$
6.	$(e^{2x}+5)dy+ye^{2x}dx=0$
7.	$x\sqrt{3+y^{2}}\,dx+y\sqrt{2+x^{2}}\,dy=0$
8.	$y'y\sqrt{\dfrac{1-x^{2}}{1-y^{2}}}+1=0$
9.	$6xdx-6ydy=3x^{2}ydy-2xy^{2}dx$
10.	$x\sqrt{5+y^{2}}\,dx+y\sqrt{4+x^{2}}\,dy=0$

11.	$y(4+e^{x})dy-e^{x}dx=0$
12.	$\sqrt{4-x^{2}}\,y'+xy^{2}+x=0$
13.	$2xdx-2ydy=x^{2}ydy-2xy^{2}dx$
14.	$x\sqrt{4+y^{2}}\,dx+y\sqrt{1+x^{2}}\,dy=0$
15.	$(e^{x}+8)dy-ye^{x}dx=0$
16.	$\sqrt{5+y^{2}}+y'y\sqrt{1-x^{2}}=0$
17.	$6xdx-ydy=yx^{2}dy-3xy^{2}dx$
18.	$y\ln y+xy'=0$
19.	$(1+e^{x})\,y'=ye^{x}$
20.	$\sqrt{1-x^{2}}\,y'+xy^{2}+x=0$

Задание 3

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения, задания взять из таблицы 31

Таблица 31

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$y'=\frac{y^{2}}{x^{2}}+4\frac{y}{x}+2$	11	$xy'=\frac{3y^{3}+2yx^{2}}{2y^{2}+x^{2}}$
2	$y'=\frac{x+y}{x-y}$	12	$xy'=\sqrt{x^{2}+y^{2}}+y$
3	$2y'=\frac{y^{2}}{x^{2}}+6\frac{y}{x}+3$	13	$xy'=\frac{3y^{3}+4yx^{2}}{2y^{2}+2x^{2}}$
4	$y'=\frac{x+2y}{2x-y}$	14	$xy'=2\sqrt{x^{2}+y^{2}}+y$
5	$3y'=\frac{y^{2}}{x^{2}}+8\frac{y}{x}+4$	15	$xy'=\frac{3y^{3}+6yx^{2}}{2y^{2}+3x^{2}}$

6	$y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$	16	$xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y$
7	$y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 6$	17	$xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$
8	$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$	18	$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$
9	$2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 8$	19	$xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$
10	$y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$	20	$xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

Задание 4

Найдите решение задачи Коши, задания взять из таблицы 32

Таблица 32

№	Уравнение
1.	$y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$
2.	$y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
3.	$y' + y\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0$
4.	$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
5.	$y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}$
6.	$y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1$
7.	$y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

8.	$y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$
9.	$y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1$
10.	$y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}$
11.	$y' - \dfrac{2x-5}{x^2} y = 5, \quad y(2) = 4$
12.	$y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x} e^x, \quad y(1) = e$
13.	$y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$
14.	$y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{-12}{x^3}, \quad y(1) = 4$
15.	$y' + \dfrac{2}{x} y = x^3, \quad y(1) = \dfrac{-5}{6}$
16.	$y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1$
17.	$y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$
18.	$y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1$
19.	$y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1$
20.	$y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}$

Задание 5

Найдите общий интеграл дифференциального уравнения, задания взять из таблицы 33.

Таблица 33

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$y''' x \ln x = y''$	11	$xy''' + y'' = 1$

2	$2xy''' = y''$	12	$xy''' + y'' = x + 1$
3	$\operatorname{tg}x \cdot y'' - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$	13	$x^2 y'' + xy' = 1$
4	$y'''\operatorname{ctg}2x + 2y'' = 0$	14	$x^3 y''' + x^2 y'' = 1$
5	$\operatorname{tg}x \cdot y''' = 2y''$	15	$y'''\operatorname{cth}2x = 2y''$
6	$x^4 y'' + x^3 y' = 1$	16	$xy''' + 2y'' = 0$
7	$(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$	17	$x^5 y''' + x^4 y'' = 1$
8	$xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$	18	$xy''' + y'' + x = 0$
9	$\operatorname{th}x \cdot y^{(4)} = y'''$	19	$xy''' + y'' = \sqrt{x}$
10	$y'''\operatorname{tg}x = y'' + 1$	20	$y'''\operatorname{tg}5x = 5y''$

Задание 6

Найдите общее решение дифференциального уравнения, задания взять из таблицы 34.

Таблица 34

№	Уравнение	№	Уравнение
1	$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$	11	$y'' + 3y' - 4y = (10x + 7)e^{x}$
2	$y'' - 3y' - 4y = (-10x - 3)e^{-x}$	12	$y'' - 2y' + y = 2e^{x}$
3	$y'' + 4y' + 4y = 4e^{-2x}$	13	$y'' + 5y' + 4y = (6x - 1)e^{-x}$
4	$y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$	14	$y'' - 5y' + 4y = (-6x - 1)e^{x}$
5	$y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3x}$	15	$y'' + 5y' + 6y = (2x + 1)e^{-2x}$
6	$y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$	16	$y'' - 5y' + 6y = (3 - 2x)e^{2x}$
7	$y'' + 8y' + 16y = 2e^{-4x}$	17	$y'' + 5y' - 6y = (14x - 5)e^{x}$
8	$y'' - 8y' + 16y = 2e^{4x}$	18	$y'' - 5y' - 6y = (9 - 14x)e^{-x}$
9	$y'' + 10y' + 25y = 2e^{-5x}$	19	$y'' + 2y' + y = 4x \cdot e^{x}$

10	$y'' - 10y' + 25y = 2e^{5x}$	20	$y'' - 2y' + y = (x+1)e^{2x}$

Контрольные вопросы

1. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения. Понятие дифференциального уравнения. Решение дифференциального уравнения. Общее, частное решения, задача Коши.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
3. Линейные дифференциальные уравнения. Решение линейных дифференциальных уравнений методом вариации постоянной или методом подстановки $y=u\cdot v$.
4. Дифференциальные уравнения высших порядков. Типы уравнений, допускающих понижения порядка.
5. Дифференциальные уравнения второго порядка. Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Применение дифференциальных уравнений в различных областях естествознания.

Практическая работа №24-25.
Числовые ряды

Числовые ряды

Понятие числового ряда

Выражение вида: $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

называется *рядом*. Ряд − это сумма бесконечного числа слагаемых.

Сумма конечного числа слагаемого $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ называется частичной суммой ряда.

Если существует и конечен предел последовательности частичных сумм, то говорят, что ряд сходится, а предел называется суммой ряда, т. е. $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Пример: Исследовать на сходимость ряд: $1+q^2+q^3+...+q^n+...$

Решение: а) пусть $|q|\neq 1$. Составим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, т.к. члены ряда являются членами геометрической прогрессии, то $S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}\right] = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{если } |q|<1 \\ -\infty, & \text{если } |q|>1 \end{cases}$$

Итак, при $|q|<1$ ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{1-q}$.

б) пусть $q=1$, то ряд примет вид: $1+1+…+1+…$ Нетрудно заметить, что этот ряд расходится.

в) пусть $q=-1$, то ряд примет вид: $1-1+1+…+(-1)^{n-1}+$ как мы установили (см. пример выше) расходится.

Необходимый признак сходимости рядов

Если ряд $a_1+a_2+...+a_n+....$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Следствие: *(достаточный признак расходимости ряда).*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

Первый признак сравнения

Пусть даны два ряда: $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$ (1.1)

$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots$ (1.2)

где $a_n>0$, $b_n>0$. Если начиная с некоторого члена (скажем для $n>N$) выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то

1) если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1);
2) если расходится ряд (1), то расходится и ряд (2)

Второй признак сравнения

Пусть даны ряды (1.1) и (1.2) с положительными членами, т.е. $a_n>0$ и $b_n>0$ и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$, тогда если

1) $k=\infty$, то из сходимости ряда (1.1) вытекает сходимость ряда (1.2), а из расходимости ряда (1.2) вытекает расходимость ряда (1.1);

2) $k\neq 0$ и является конечным числом, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно;

3) $k=0$, то из сходимости ряда (1.2) вытекает сходимость ряда (1.1), а из расходимости ряда (1.1) вытекает расходимость ряда (1.2).

Применяя данные признаки, следует сравнивать исходный ряд с разными стандартными рядами или рядами эталонами, заведомо сходящимися или расходящимися. Часто в качестве ряда эталона используется гармонический ряд, ряд Дирихле и ряды, членами которых являются члены бесконечной геометрической прогрессии и т. д.

Признак Даламбера: Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n>0$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, если

1) $l<1$, то ряд сходится,
2) $l>1$, то ряд расходится.

Замечание: Если $l=1$, то вопрос о сходимости или расходимости признак Даламбера не решает.

<u>Пример.</u> Пользуясь признаком Даламбера, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}$.

Решение: Так как $a_n=\frac{2^n}{n},\ \ a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+1}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2^n\cdot n}{(n+1)\cdot 2^n}=2>1,\quad \text{значит, ряд расходится.}$$

Радикальный признак Коши: Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, где $a_n>0$. Пусть, кроме того, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$, если

1) $l<1$, то ряд сходится,
2) $l>1$, то ряд расходится.

Замечание: Если $l=1$, то вопрос о сходимости или расходимости радикальный признак Коши не решает.

<u>Пример:</u> Пользуясь радикальным признаком Коши, исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$.

Решение: Так как $a_n=\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+1}=\frac{2}{3}<1$$ значит ряд сходится.

Интегральный признак Коши: Пусть дан ряд $a_1+a_2+\ldots+a_{n+\ldots}$, где $a_n>0$, и пусть $f(x)$ непрерывная, монотонно убывающая на $[1,\infty)$ функция и такая, что $f(1)=a_1,\ f(2)=a_2,\ \ldots,\ f(n)=a_n,\ \ldots$ тогда данный ряд сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ и расходится, если расходится несобственный интеграл.

Пример: Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, который называется рядом Дирихле или обобщенным гармоническим рядом, при $\alpha=1$ это гармонический ряд. Исследуем данный ряд на сходимость, используя интегральный признак Коши.

Составим функцию $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ и найдем несобственный интеграл:

a) пусть $\alpha\neq 1$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\infty, & \text{если } \alpha<1 \text{ интеграл расходится}\\ \dfrac{1}{1\text{-}\alpha}, & \text{если } \alpha>1 \text{ интеграл сходится}\end{cases}$$

b) пусть $\alpha=1$

$$\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x}=\lim_{b\to\infty}\ln|x|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|b|-\ln 1\right)=\infty$$

интеграл, а, следовательно, и ряд расходятся.

Итак, $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=\begin{cases}\text{сходится, если } \alpha>1\\ \text{расходится, если } \alpha\le 1\end{cases}$$

Знакочередующиеся ряды

Ряд $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots$ называется *знакочередующимся рядом.*

Признак Лейбница:

Если члены знакочередующегося ряда монотонно убывают по абсолютной величине $a_n > a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3,\ldots$) и стремятся к нулю при возрастании n ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд сходится. Сумма такого ряда положительна и не превосходит первого члена, т.е. $0 < S \leq a_1$.

<u>Пример:</u> Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение: Проверим условия признака Лейбница:

1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots$ выполняется,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ выполняется, следовательно, ряд сходится.

Замечание *(об оценке частичных сумм):* Так как $0 < S < a_1$, то во всех случаях остаток знакочередующегося ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине.

<u>Опр:</u> Пусть члены ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.3)$$

являются действительными числами любого знака, тогда (1.3) называется *знакопеременным* рядом.

Составим ряд из абсолютных величин ряда (1.3)

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + \ldots + |a_n| + \ldots \qquad (1.4)$$

Определение. Будем называть ряд (1.3) абсолютно сходящимся, если сходится и ряд (1.4).

Теорема: Из сходимости ряда (1.4) вытекает сходимость ряда (1.3).

Определение. Пусть ряд (1.4) расходится, а ряд (1.3) сходится, то говорят, что ряд (1.3) сходится *условно.*

Пример: Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Решение: Данный знакочередующийся ряд сходится (см. пример выше) Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – это гармонический ряд, он расходится. Следовательно, исходный ряд сходится условно.

Задание 1

Записать ряд в развернутой форме $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, если задан общий член a_n ряда. Выражение для общего члена взять в таблице 35.

Таблица 35

№	a_n	№	a_n
1.	$\frac{n\cdot 2^n}{n!}$	2.	$\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot ...\cdot(3n-2)}{2\cdot 7\cdot 12\cdot ...\cdot(5n-3)}$
3.	$\frac{n^2}{(n+2)!}$	4.	$(-1)^n\cdot\frac{1+2^n}{n^3}$
5.	$\frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n+1)^2}$	6.	$\frac{1}{n^2}\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}$
7.	$\frac{n^2}{n!}$	8.	$\frac{-1+2\cdot(-1)^{n+1}}{n!}$
9.	$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$	10.	$\frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+1}}$

Задание 2

Найти сумму ряда, взяв задание из таблицы 36

Таблица 36

№	a_n	№	a_n
1.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+4)}$	2.	$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{2}{(n-2)(n-4)}$
3.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+5^{n-1}}{6^{n+1}}$	4.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5^n+1)^2}{3^{3n-1}}$
5.	$\sum_{n=7}^{\infty}\frac{2}{(n-4)(n-6)}$	6.	$\sum_{n=8}^{\infty}\frac{3}{(n-4)(n-7)}$

7.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n)^2}{4^n}$	8.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}+3^n}{7^{n+1}}$
9.	$\sum\limits_{n=4}^{\infty} \frac{3}{n(n-3)}$	10	$\sum\limits_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-4)(n-5)}$

Задание 3

Исследовать сходимость ряда, применяя признак Даламбера, Коши (с радикалом) и интегральный признак Коши, взяв задание из таблицы 37

Таблица 37

№	a_n	a_n	a_n
1	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n(n-1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1)}\right)^{-n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$
2	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$
3	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2}\right)^n$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$
4	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n(2n)!}{2n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3}$
5	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+2}{(3n+5)\cdot 2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5}\right)^n$	$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n}$
6	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot e^{-n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^3}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\cdot \ln^2(n+}$
7	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n\cdot n!}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-3}{5n+1}\right)^n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\cdot \ln(n+3)}$

8	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5n}$
9	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{(n^2+2)\cdot 2^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6+4}$
10	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}\cdot\frac{1}{5^n}$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\cdot\ln 2n}$

Контрольные вопросы

1. Понятие числового ряда, суммы ряда. Необходимое условие сходимости.
2. Свойства сходящихся рядов.
3. Ряды с неотрицательными членами. Необходимое и достаточное условие сходимости.
4. Ряды с неотрицательными членами. Признаки сравнений.
5. Ряды с неотрицательными числами. Интегральный признак сходности. Ряд Дирихле.
6. Ряды с неотрицательными членами. Признаки Даламбера, Коши.
7. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница для знакочередующихся рядов.
8. Абсолютная и условная сходимость ряда. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

Практическая работа № 26-27. Функциональные ряды

Понятие функционального и степенного ряда. Область сходимости функционального ряда

Понятие функционального ряда

Определение. Если членами ряда являются функции, то ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ называется ***функциональным рядом.***

Совокупность значений x, при которых ряд сходится, называется ***областью сходимости*** данного ряда.

Понятие степенного ряда. Сходимость степенного ряда

Определение. Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots, \quad ,$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа называемые коэффициентами, если x_0=0, то $a_0+a_1x+ a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$.

Число R называется ***радиусом сходимости*** степенного ряда и вычисляется по формулам: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ или $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Интервалом сходимости степенного ряда называется интервал (-R, R), такой, что во всех точках внутри его ряд сходится, а во всех точках вне его ряд расходится.

На концах интервала (−R, R), т. е. при $x = -R$ и $x = R$ вопрос о сходимости или расходимости решается для каждого конкретного ряда особо.

У некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку (R=0), у других охватывает всю числовую ось (R=∞).

Пример: Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n}x^n$.

Решение: Найдем $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)\cdot 3^{n+1}}{n\cdot 3^n}\right|=3$, т.е. ряд сходится при $|x|<3$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

Пусть $x=-3$, тогда получим числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, он сходится на основании признака Лейбница, так как 1) $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots$ и 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Пусть теперь x=3, тогда получим числовой знакоположительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, который является гармоническим рядом и расходится. Следовательно, исходный ряд сходится на полуинтервале [−3;3).

Ряды Тейлора и Маклорена

Определение. Степенной ряд вида

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

называется рядом Тейлора для функции *f(x)*.

Коэффициенты $c_0=f(x_0),\ c_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ldots,\ c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ldots$ - называются коэффициентами Тейлора.

Определение. Если в ряде Тейлора x_0=0, то получится ряд:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

который называется рядом Маклорена.

Разложение элементарных функций в степенные ряды

I. *Ряд Маклорена для функции* $y=e^x$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad \text{для } \forall x\in(-\infty;\infty).$$

II. *Ряд Маклорена для функции* $y=sinx$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{\kappa-1}\frac{x^{2\kappa-1}}{(2\kappa-1)!}+\ldots \text{ для } \forall x\in(-\infty;\infty).$$

III. *Ряд Маклорена для функции* $y=cosx$.

$$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^{\kappa}\frac{x^{2\kappa}}{2\kappa!}+\ldots \quad \text{для } \forall x\in(-\infty;\infty).$$

IV. *Ряд Маклорена для функции* $y=(1+x)^m$.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n+\ldots$$

для $\forall x\in(-1;1)$. Это так называемый биномиальный ряд и при $x=\pm1$ поведение этого ряда зависит от m.

V. *Ряд Маклорена для функции* $y=ln(1+x)$.

$$ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots \quad \text{для } \forall x\in(-1;1).$$

Эти разложения часто называют основными разложениями.

Пример: Пользуясь основными разложениями и свойствами степенных рядов, разложить по степеням x функцию $y=\dfrac{x}{9+x^2}$ и указать интервал сходимости.

Решение: Представим функцию в виде:

$$y=\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x}{9}\cdot\left[1+\left(\frac{x}{3}\right)^2\right]^{-1}$$

и воспользуемся разложением IV:

$$(1+z)^{-1}=1+\frac{-1}{1!}z+\frac{-1(-1-1)}{2!}z^2+...+\frac{-1(-1-1)...[-1-(n-1)]}{n!}z^n+...=$$

$$=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^n z^n+...$$

для $-1<z<1$, так как в нашем случае $z=\left(\frac{x}{3}\right)^2$, то

$$\frac{x}{9+x^2}=\frac{x}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}=\frac{x}{9}\cdot\left[1-\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^4+...+(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n+...\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left[\frac{x}{3}-\left(\frac{x}{3}\right)^3+\left(\frac{x}{3}\right)^5-...+(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}+...\right] \quad \text{для} \quad \left(\frac{x}{3}\right)^2<1$$

или $-3<x<3$. Окончательно имеем $\frac{x}{9+x^2}=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^{2n+1}$ для $-3<x<3$.

Некоторые применения степенных рядов

Приближенное вычисление значений функций

Значение функции $y=f(x)$ в любой точке может быть вычислено по ряду Тейлора, тогда значение функции будет равно сумме ряда, а приближенное значение частичной сумме этого ряда. Возникающую при этом ошибку можно оценить либо с помощью остаточного члена в форме Лагранжа или Коши, либо непосредственно оценивая остаток ряда.

Пример: Вычислить e с точностью до 0,01.

Решение: Так как $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$ для всех $x \in (-\infty;\infty)$, то $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + r_5$, где $r_5 = e^{\theta}/6!$ при $0 < \theta < 1$.

Оценим погрешность вычислений $r_5 = \frac{e^{\theta}}{6!} < \frac{e}{720} < \frac{3}{720} = \frac{1}{240} \approx 0{,}004$.

Тогда $e \cong 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \cong 2 + 0{,}5 + 0{,}167 + 0{,}042 + 0{,}008 = 2{,}717$.

Интегрирование функций

Пример: Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью до 0,001.

Решение: Так как $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + ...$

и при x=0 положим, что $\frac{\sin x}{x} = 1$, то

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - ... + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{(2k-1)!} + ... \right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - ... + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1) \cdot (2k-1)!} + ... \right]_0^1 \approx$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} \approx 1 - 0{,}055 = 0{,}945$$

Оценим погрешность вычислений, так как получили знакочередующийся ряд, то $|r_3| < 1/600 < 0{,}0017$.

Интегрирование дифференциальных уравнений

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y'' = xyy'$, если $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

Решение: Будем считать, что $y=y(x)$ − решение данной задачи Коши и функция $y(x)$ разложена в ряд Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...$$

Нам необходимо найти $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$,…, $y^{(n)}(0)$,… Это возможно исходя из самого уравнения и начальных условий. Действительно, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $y''(0)=xyy'|_{x=0}=0$, $y'''(0)=yy'+xy'^2+xyy''|_{x=0}=1$, $y^{IV}(0)=2y'^2+2yy''+3xy'y''+xyy'''|_{x=0}=2$,…Следовательно,

$$y(x)=1+x+\frac{1}{3!}x^3+\frac{2}{4!}x^4+\frac{3}{5!}x^5+...+\frac{(n-2)}{n!}x^n+...$$

Применяя признак Даламбера, нетрудно убедиться, что ряд сходится при $x\in(-\infty;\infty)$. Следовательно, этот ряд является решением данной задачи.

Ряды Фурье

Тригонометрический ряд

Функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+...+a_n\cos nx+b_n\sin nx+...,$$

где a_0, a_i, b_i − постоянные числа, называется тригонометрическим рядом.

Если ряд сходится к функции $f(x)$, то $f(x)$ есть периодическая функция с периодом 2π, так как $\cos nx$ и $\sin nx$ − являются периодическими функциями с периодом 2π.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right).$$

Коэффициенты a_0, a_k, b_k, определяемые по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\qquad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx,\qquad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx$$

называются коэффициентами Фурье.

Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $y=\varphi(x)$ четная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, т.е. $\varphi(-x)=\varphi(x)$, тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\tilde{o})dx=\int_{-\pi}^{0}\varphi(x)dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx=\int_{0}^{\pi}\varphi(-x)dx+\int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx=2\int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx.$$

Так как $y=\varphi(x)$ четная функция, то $\varphi(x)\cos kx$ тоже четная функция, а $\varphi(x)\sin kx$ нечетная функция, тогда имеем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(x)dx,\quad a_k=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kxdx,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin kxdx=0.$$

Ряд Фурье для четной функции содержит только косинусы

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx\right).$$

Пример: Разложить в ряд Фурье функцию $y=|x|$ на отрезке $[-\pi;\pi]$ с периодом 2π.

Решение: Так как $y=|x|$ − четная функция, то $b_k=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\left(\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{\pi}\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{2}=\pi,$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx=\begin{vmatrix}u=x, & du=dx\\ dv=\cos kxdx, & v=\dfrac{\sin kx}{k}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\left.x\frac{\sin kx}{k}\right|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_{0}^{\pi}\sin kxdx\right]=\frac{2}{\pi k^2}\left.\cos kx\right|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi k^2}\left(\cos\pi k-1\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi k^2}\left[\left(-1\right)^1-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi\cdot\left(2n-1\right)^2}, & \text{если}\quad k=2n-1\\ 0, & \text{если}\quad k=2n\end{cases}$$

Следовательно, $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}\cos\left(2n-1\right)x$ для $x\in(-\infty;\infty)$.

Пусть $y=\varphi(x)$ нечетная функция на отрезке $[-\pi;\pi]$, т.е. $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=\int\limits_{-\pi}^{0}\varphi(x)dx+\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)dx=\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(-x)dx+\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)dx=$$

$$=-\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)dx+\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)dx=0$$

Так как $y=\varphi(x)$ нечетная функция, то $\varphi(x)\cos kx$ тоже нечетная функция, а $\varphi(x)\sin kx$ четная функция, тогда имеем:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx=0,\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos kxdx=0,\quad b_k=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\varphi(x)\sin kxdx$$

Ряд Фурье для нечетной функции содержит только синусы

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin nx\right).$$

Задание 1

Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, взяв задание из таблицы 38

Таблица 38

№	$f_n(x)$	№	$f_n(x)$
1	$\dfrac{(x+5)^{2n+1}}{4^n(n+2)^6}$	2	$\dfrac{(x-2)^n}{n\cdot 8^n}$
3	$\dfrac{n^4}{(n+1)!}\cdot(x+1)^{2n}$	4	$\dfrac{(x-2)^n\cdot 2^n}{n^{n+1}}$
5	$\dfrac{(x+3)^n}{2^n\cdot n^2}$	6	$\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot\ln(n+1)\cdot(x-3)^n}$
7	$\dfrac{(-1)^n}{n^n}(x+1)^n$	8	$\dfrac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\cdot 9^n}$
9	$\dfrac{n(n+1)}{n-3}(x-1)^n$	10	$\dfrac{3n+8}{n^2+4}(x-2)^n$

Задание 2.

Разложить функцию f(x) в ряд по степеням $x-x_0$, взяв задание из таблицы 39

Таблица 39

№	f(x)	x_0	№	f(x)	x_0
1	Sin(x+3)	0	2	$\frac{-3}{x^2+x-2}$	0
3	Ln(10x-3)	1	4	$\sqrt{2x+7}$	1
5	$\frac{1}{x^2-3x+2}$	0	6	Ln(3x + 2)	1
7	$\frac{2}{x^2-4x+3}$	0	8	x^2Cos(x + 1)	0
9	Cos(x-2)	0	10	$\frac{2x+2}{3x^2-2x-1}$	0

Задание 3

Вычислить с заданной точностью до 0,001, взяв задание из таблицы 40.

Таблица 40

№	$f(x_0)$	$\int_0^b f(x)\,dx$
1	$\sqrt[3]{7}$	$\cos x^3$
2	Sin 0,21	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
3	$\sqrt[3]{9}$	$\frac{\sin x}{x}-1$
4	Cos 0,22	$\frac{\sin 2x}{2}-x$
5	$1/\sqrt{e}$	$\frac{\ln(1+x^2)}{x}$
6	Ln 1,1	e^{-2x^2}
7	Cos 0,4	$\frac{\operatorname{Sh} x}{x}-\operatorname{Ch} x$
8	$\sqrt[3]{10}$	$\cos\sqrt{x}$
9	Ln 1,2	$\cos(10x^2)$

10	Sin 9°	e^{-7x^2}

Контрольные вопросы

1. Понятие функционального ряда. Область сходимости функционального ряда.
2. Понятие степенного ряда как функционального. Теорема Абеля, следствия из нее. Радиус, интервал и область сходности степенного ряда.
3. Понятие степенного ряда. Свойства степенных рядов.
4. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряды Тейлора и Маклорена.
5. Ряды Тейлора и Маклорена. Условия сходимости ряда Тейлора (Маклорена) функции $f(x)$ к $f(x)$.
6. Разложение в степенной ряд показательной функции, логарифмической функций, функций $\sin x$, $\cos x$, функции $arctgx$.
7. Понятие и свойства тригонометрических рядов.
8. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Понятие ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье.
9. Ряды Фурье для четных и нечетных функций. Ряд Фурье для $2l$-периодических.

Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2011. – 608 с.
2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. –Ч. 2. – 432 с.
3. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. –М. : Физматлит, 2009. – Ч. 3. – 544 с.
4. Протасов, Ю.М. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.М. Протасов. − М.: Флинта, 2012. − 165с. – Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.

Дополнительная учебная литература

5. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. - 464 с.
6. Туганбаев, А.А. Математический анализ. Ряды. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А.Туганбаев. – 3-е изд., доп. − М.: Флинта, 2012. − 48с. // Режим доступа − http: //biblioclub.ru/.
7. Тютюнов, Д. Н. Неопределённый интеграл. Техника интегрирования [Текст]: [учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и производств"] / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина. - Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 115 с.
8. Тютюнов, Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина, Е.В.Скрипкина. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – 158 с.