МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра нанотехнологий и инженерной физики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______________ О.Г. Локтионова
«15» 12 2017 г.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Методические указания к выполнению практических работ для студентов направления подготовки
28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»

Курск 2017

УДК 53

Составители: С.В. Соболев

Рецензент
Д.ф.-м.н., профессор В.М. Полунин

Квантовая механика и статистическая физика: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления подготовки 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Соболев С.В. Курск, 2017. 33 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических работ, в которых рассматриваются задания по следующим темам квантовой механики и статистической физики: корпускулярно-волновой дуализм, математический аппарат и основные положения квантовой теории; уравнение Шрёдингера, одномерные квантово-механические задачи; движение в центрально-симметричном поле, водородоподобный атом; спин; периодическая система элементов Менделеева, молекулы; основные положения статистической физики; законы статистической термодинамики; идеальный газ, равновесие фаз и фазовые переходы; квантовая статистика систем, состоящих из одинаковых частиц.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и учебному плану направления подготовки 28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника, степень (квалификация) – бакалавр. Предназначены для студентов всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12. Формат 60 x 84 1/16.
Усл. печ. л. 2,06. Уч.-изд. л. 2,06. Тираж экз. Заказ 2769. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

I. ОСНОВЫ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1.

1. Корпускулярно-волновой дуализм
2. Основные понятия квантовой механики

Задачи

1.1. Покоящаяся частица с зарядом q и массой m прошла ускоряющую разность потенциалов U. Определить частоту ω и длину λ волны де Бройля частицы.

1.2. Найти длину волны де Бройля λ молекулы кислорода, движущейся со средней тепловой скоростью при температуре T = 300 K.

1.3. Используя функцию распределения Максвелла для частиц газа по модулям скоростей

$$f(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\vartheta^2 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}},$$

получить соответствующее распределение f (λ) по длинам волн де Бройля (m – масса частицы). Вычислить наиболее вероятную длину волны λнв молекулы водорода при температуре T = 300 K.

1.4. Доказать, что групповая скорость волны де Бройля совпадает со скоростью частицы.

1.5. Найти изменение длины волны де Бройля $\Delta\lambda$ электрона в атоме водорода при его переходе с первой боровской орбиты на третью. Первый боровский радиус r1 = 0,529·10–10 м.

1.6. Показать, что электроны не могут входить в состав атомного ядра. Характерный размер ядра ~ 5·10-15 м.

1.7. Нерелятивистская частица имеет относительную неопределенность кинетической энергии, равную $\frac{1}{\pi}\cdot 10^{-4}$. Оценить, во сколько а раз неопределённость координаты такой частицы больше длины её волны де Бройля.

1.8. Оценить отношение неопределенности скорости электрона Δvn в атоме водорода к скорости его движения vn по n-ой стационарной боровской орбите. При каких значениях n движение электрона можно считать классическим?

1.9. Исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга, оценить минимальную энергию Emin атома водорода и соответствующее расстояние rmin электрона от ядра. За неопределённости размера атома и импульса электрона принять, соответственно, радиус орбиты электрона и его импульс.

1.10. Исходя из соотношения неопределенностей Гейзенберга, оценить минимальную энергию Emin линейного гармонического осциллятора. Частота собственных классических колебаний осциллятора ω. За неопределённости координаты и импульса осциллятора принять сами значения этих величин.

2.1. Найти результат действия оператора $\hat{F}$ на функцию f в следующих случаях:

а) $\hat{F} = \left(\frac{d}{dx}x\right)^2$, f = sin x ; б) $\hat{F} = \left(x\frac{d}{dx}\right)^2$, f = cos 2x ; в) $\hat{F} = \frac{d^2}{dx^2}x^2,\ f = e^{3x}$.

2.2. Доказать, что

а) $\left(1+\frac{d}{dx}\right)^2 = 1 + 2\frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$; б) $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$; в) $x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1$.

2.3. Показать, что произведение двух линейных операторов есть также линейный оператор.

2.4. Оператор $\hat{A}$ коммутирует с операторами $\hat{B}$ и $\hat{C}$. Коммутируют ли между собой операторы $\hat{B}$ и $\hat{C}$?

2.5. При каком условии справедливы следующие операторные равенства?

а) $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^2 = \hat{A}^2 + 2\hat{A}\hat{B} + \hat{B}^2$; б) $\hat{A}^2 - \hat{B}^2 = \left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(\hat{A}-\hat{B}\right)$.

2.6. Является ли функция $f(x) = ch\,2x$ собственной функцией оператора

$\hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$?

2.7. Найти собственные функции f и спектр λ операторов:

а) $\hat{F} = -i\dfrac{d}{dx}$, *если* $f(x) = f(x + a)$; б) $\hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$ *при условии, что* $f(0) = f(a) = 0$.

2.8. Доказать эрмитовость следующих операторов:

а) $\hat{F} = -\dfrac{d^2}{dx^2}$; б) $\hat{F} = f$, f *−любая действительная функция*.

2.9. Доказать, что произведение двух коммутирующих эрмитовых операторов есть эрмитов оператор.

2.10. Доказать, что среднее значение физической величины действительно.

2.11. Доказать, что среднее значение квадрата физической величины является положительным.

2.12. Доказать следующие операторные равенства: а) $\hat{M}_x\hat{p}_y - \hat{p}_y\hat{M}_x = i\hbar\hat{p}_z$; б) $\hat{M}_x\hat{M}_y - \hat{M}_y\hat{M}_x = i\hbar\hat{M}_z$.

2.13. Доказать одновременную измеримость квадрата момента импульса частицы с его проекцией на любую декартову координату. Учесть результат предыдущей задачи, а также равенство: $\hat{M}^2 = \hat{M}_x^2 + \hat{M}_y^2 + \hat{M}_z^2$.

2.14. Образуют ли полный набор следующие физические величины:
а) x, p_y, p_z; б) x, p_y, M_z; в) p_y, p^2, M_y ?

Ответы

1.1. $$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\left[2mqU\left(1+\dfrac{qU}{2mc^2}\right)\right]^{1/2}}.$$

1.2. $\lambda \approx 2{,}8\cdot 10^{-11}\,м$.

1.3. $f(\lambda) = 32\pi^4\hbar^3(2\pi mkT)^{-\frac{3}{2}}\lambda^{-4}e^{-\frac{2\pi^2\hbar^2}{mkT\lambda^2}}$, $\quad \lambda_{нв} = \dfrac{\pi\hbar}{\sqrt{mkT}} \approx 9\cdot 10^{-11}(м)$.

1.5. $\Delta\lambda = 4\pi r_1 \approx 6{,}64 \cdot 10^{-10}\,(м)$.

1.7. $a \sim 10^4$.

1.8. $\dfrac{\Delta\vartheta_n}{\vartheta_n} \sim \dfrac{1}{2n}$; $n \gg 1$.

1.9. $E_{\min} \approx -\dfrac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2} \approx -13{,}6(эВ)$, $r_{\min} \approx \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}5 \cdot 10^{-10}\,(м)$,

e и m]– заряд и масса электрона.

1.10. $E_{\min} \approx \hbar\omega$.

2.1. а) $\hat{F}f = 3x\cos x + (1 - x^2)\sin x$; б) $\hat{F}f = -2x(\sin 2x + 2x\cos 2x)$;

в) $\hat{F}f = (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$.

2.4. *В общем случае не коммутируют.*

2.5. $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$.

2.6. *Не является.*

2.7. а) $f_n = c_n e^{i\lambda_n x}$, $\lambda_n = \dfrac{2\pi}{\alpha} n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $c_n = const$;

б) $f_n = c_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,x$, $\lambda_n = \dfrac{\pi^2 n^2}{\alpha^2}$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, $c_n = const$.

2.14. *а) образуют; б) не образуют; в) образуют.*

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

3. Уравнение Шрёдингера

4. Одномерные квантово-механические задачи

Задачи

3.1. Используя общее уравнение Шрёдингера, доказать равенство $\frac{d}{dt}\int|\Psi|^2 dV = 0$, которое означает, что условие нормировки волновой функции

на единицу $\int|\Psi|^2 dV = 1$ сохраняется с течением времени.

3.2. Показать, что среднее значение импульса частицы в стационарном состоянии при дискретном спектре равно нулю.

3.3. Волновая функция свободной частицы массой *m*, движущейся в положительном направлении оси *x*, имеет вид: $\psi = Ae^{ikx}$, $A = const$. Вычислить плотность потока вероятности $\vec{J}$.

3.4. Идеальный нерелятивистский газ, масса молекулы которого *m*, имеет концентрацию *n* и находится при температуре *T*. При каком условии газ можно рассматривать как классическую механическую систему? Применимо ли такое рассмотрение для воздуха при нормальных условиях?

3.5. Используя формулу для производной оператора по времени, доказать следующее операторное равенство: $\frac{d}{dt}\left(\hat{A}\hat{B}\right) = \hat{A}\frac{d\hat{B}}{dt} + \frac{d\hat{A}}{dt}\hat{B}$.

3.6. Доказать, что для частицы массой *m*, движущейся в силовом поле $U = U(x)$, выполняются операторные равенства:

а) $\frac{d}{dt}(x^2) = \frac{1}{m}(x\hat{p}_x + \hat{p}_x x)$; б) $\frac{d}{dt}(x\hat{p}_x) = \frac{\hat{p}_x^2}{m} - x\frac{dU}{dx}$;

в) $\frac{d}{dt}\left(\hat{p}_x^2\right) = -\left(\hat{p}_x\frac{dU}{dx} + \frac{dU}{dx}\hat{p}_x\right)$.

3.7. Какие из физических величин (координаты, проекции импульса и момента импульса, энергия) сохраняются при движении частицы в силовом поле: а) $U = az,\ a = const$? б) $U = a(t)z$?

3.8. Доказать, что классическая теорема об изменении момента импульса частицы

$$\frac{d}{dt}\vec{M} = \vec{K}$$

($\vec{M}$ и $\vec{K}$ – момент импульса частицы и момент действующих на неё сил) в квантовой механике справедлива для средних значений этих физических величин.

4.1. Волновая функция свободной частицы массой m в момент времени $t = 0$ имеет вид: $\Psi(x,0) = Ae^{i\frac{p}{\hbar}x}$, где p – импульс частицы, $A = const$. Найти волновую функцию частицы $\Psi(x,t)$ в последующие моменты времени.

4.2. Частица находится в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме на третьем энергетическом уровне. Чему равна вероятность W обнаружения частицы в области, составляющей $1/4$ ширины ямы от её левого края?

4.3. Доказать, что для частицы, находящейся в одномерной бесконечно глубокой потенциальной яме шириной a на n-*ом* энергетическом уровне имеют место равенства:

$$\bar{x} = \frac{1}{2}a,\ \overline{(x-\bar{x})^2} = \frac{a^2}{12}\left(1 - \frac{6}{\pi^2 n^2}\right),\ \overline{(p_x - \bar{p}_x)^2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{a^2}n^2.$$

4.4. Частица массой m находится в двумерной потенциальной яме вида:

$$U(x,y) = \begin{cases} 0\ при\ \ 0 < x < a,\ 0 < y < a; \\ \infty\ при\ \ x \le 0,\ x \ge a,\ y \le 0,\ y \ge a. \end{cases}$$

Определить энергетический спектр $E_{n_1 n_2}$, волновые функции $\psi_{n_1 n_2}(x,y)$ и значения энергии E_j частицы для первых *4-х* уровней.

4.5. Частица налетает из области $x < 0$ на потенциальный барьер вида:

$$U = \begin{cases} 0 \quad \text{при x} \le 0; \\ \mathrm{U_0} \ \text{при x} > 0. \end{cases}$$

Энергия частицы $E > Uo$. Определить коэффициент прозрачности барьера D.

4.6. Частица налетает из области $x < 0$ на потенциальный барьер вида:

$$U = \begin{cases} 0 \quad \text{при x} \le 0; \\ -\mathrm{U_0} \ \text{при x} > 0. \end{cases}$$

Энергия частицы $E > 0$. Определить коэффициент отражения частицы от барьера R в случаях: а) $E << U_0$; б) $E >> U_0$.

4.7. Вычислить среднее $\bar{x}$ и среднеквадратичное $\sqrt{\overline{x^2}}$ отклонение одномерного квантового гармонического осциллятора массой m от положения равновесия в основном состоянии. Частота собственных классических колебаний осциллятора ω.

4.8. Найти наиболее вероятные значения $x_{нв}$ координаты одномерного квантового гармонического осциллятора массой m в состояниях с волновой функцией: а) $\psi_1(x)$; б) $\psi_2(x)$. Частота собственных классических колебаний осциллятора ω.

4.9. Определить энергетический спектр E_n частицы массой m, совершающей одномерное движение в силовом поле вида:

$$U = \begin{cases} \infty \quad \text{при } x \le 0; \\ \dfrac{kx^2}{2} \ \text{при } x > 0, k = const. \end{cases}$$

4.10. Частица массой m движется в трёхмерном силовом поле

$$U(x) = (k/2)(x^2+y^2+z^2), \ k = const.$$

Найти энергетический спектр частицы E_n и число a_n различных квантовых состояний, отвечающих n-*му* энергетическому уровню.

Ответы

3.3. $\vec{J} = \vec{i}_0 \dfrac{\hbar k}{m} |A|^2$, $\vec{i}_0$ – *единичный орт оси* x.

3.4. $\frac{2\pi\hbar\sqrt[3]{n}}{\sqrt{kTm}} << 1$. *Применимо.*

3.7. а) $p_x, p_{y,}, M_z, E$; б) $p_x, p_{y,}, M_z$.

4.1. $\Psi(x,t) = Ae^{i\left(\frac{p}{\hbar}x - \frac{p^2}{2m\hbar}t\right)}$.

4.2. $W = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6\pi} \approx 17{,}5 \cdot 10^{-2}$.

4.4. $E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right)$, $\psi_{n_1 n_2} = \frac{2}{a}\sin\left(\frac{\pi n_1}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n_2}{a}x\right)$,

$n_1 = 1,2,3,\ldots, n_2 = 1,2,3,\ldots;\ E_j = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}j,\quad j = 2,5,8,10.$

4.5. $D = \frac{4\sqrt{E(E-U_0)}}{\left(\sqrt{E} + \sqrt{E-U_0}\right)^2}$.

4.6. а) $R \approx 1 - 4\sqrt{\frac{E}{U_0}}$; б) $R \approx \left(\frac{U_0}{4E}\right)^2$.

4.7. $\bar{x} = 0,\quad \sqrt{\overline{x^2}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$.

4.8. а) $x_{нв} = \pm\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$; б) $x_{1нв} = 0,\ x_{2нв} = \pm\sqrt{\frac{5\hbar}{4m\omega}}$.

4.9. $E_n = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(2n + \frac{3}{2}\right),\quad n = 0,1,2,\ldots.$.

4.10. $E_n = \hbar\sqrt{\frac{k}{m}}\left(n + \frac{3}{2}\right)$, $n = n_1 + n_2 + n_3;\ n_1, n_2, n_3 = 0,1,2,\ldots;\ a_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3.

5. Движение в центрально-симметричном поле
6. Приближенные методы квантовой механики

Задачи

5.1. Собственная функция оператора квадрата момента импульса $Y(\theta,\varphi) = \mathrm{A}\, sin 2\theta \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\mathrm{A} = \mathrm{const}$. Определить модуль момента импульса M и его проекцию M_z на ось z.

5.2. Вычислить среднее значение квадрата момента импульса $\overline{\mathrm{M}^2}$ в состоянии

$$\psi(\theta,\varphi) = \mathrm{A}\, sin\theta cos\varphi,\ \mathrm{A} = \mathrm{const}.$$

5.3. Определить возможные значения проекции момента импульса $\vec{\mathrm{M}}$ на ось z и вероятности W этих значений в состоянии с волновой функцией $\psi(\varphi) = A sin^2 \varphi,\ A = const.$

5.4. Показать, что в состоянии с определенным значением проекции момента импульса на ось z имеют место равенства: $\overline{M_x} = \overline{M_y} = 0$.

5.5. Определить волновые функции ψ_n и энергетический спектр E_n частицы массой m с нулевым орбитальным моментом импульса, находящейся в бесконечно глубокой сферически-симметричной потенциальной яме вида:

$$U(r) = \begin{cases} 0 \ \text{при}\, r < r_0; \\ \infty \ \text{при}\, r \geq r_0. \end{cases}$$

5.6. В условиях предыдущей задачи найти: а) наиболее вероятное $r_{нв}$ расстояние частицы от центра ямы в основном состоянии и вероятность W её нахождения в области $r < r_{нв}$; б) средние значения $\bar{r}_n$ и $\overline{r_n^2}$ в произвольном n-ом состоянии.

5.7. Исходя из уравнения Шрёдингера, найти волновую функцию ψ и энергию E основного состояния электрона водородоподобного атома. Указание: искать решение уравнения для радиальной части волновой функции в виде

$$R(r) = ce^{-\alpha r},\ c = const,\ \alpha = const.$$

5.8. Определить наиболее вероятное расстояние $r_{нв}$ электрона от ядра в атоме водорода в состояниях *1s, 2s, 2p*.

5.9. Вычислить средний диаметр $\bar{d}$ атома водорода в основном состоянии.

6.1. Частица массой *m* движется в бесконечно глубокой потенциальной яме

$$U = \begin{cases} U_0 \sin\dfrac{\pi}{a}x & \text{при } 0 < x < a; \\ \infty & \text{при } x \le 0 \text{ и } x \ge a. \end{cases}$$

Определить энергетический спектр частицы E_n в первом приближении теории возмущений. За оператор возмущения принять потенциальную энергию частицы внутри ямы.

6.2. Доказать, что правила отбора для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < a; \\ \infty & \text{при } x \le 0 \text{ и } x \ge a \end{cases}$$

состоят в том, что квантовое число *n* для разрешённых переходов должно меняться с чётного на нечётное и наоборот.

6.3. Используя правило квантования движения Бора–Зоммерфельда, определить энергетический спектр E_n частицы массой *m*, совершающей одномерное свободное движение между двумя идеально отражающими стенками. Расстояние между стенками *a*.

6.4. С помощью правила квантования Бора–Зоммерфельда, определить энергетические уровни E_n линейного гармонического осциллятора. Частота собственных колебаний осциллятора ω.

6.5. Найти уровни энергии E_n электрона, движущегося по разрешённым боровским орбитам в атоме водорода.

6.6. Частица массой *m* вертикально падает на неподвижную горизонтальную пластину и упруго отражается от неё. Проквантовать движение частицы, используя правило Бора–Зоммерфельда, определить допустимые максимальные высоты частицы H_n над пластиной и возможные значения энергии частицы E_n.

Ответы

5.1. $M = \hbar\sqrt{6}$, $M_z = \hbar$.

5.2. $\overline{M^2} = 2\hbar^2 \quad \left(A = \sqrt{\dfrac{3}{4\pi}} \right).$

5.3. а) $M_z = 0,\ -2\hbar,\ 2\hbar,\ W = \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{6}.$

5.5. $\psi_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \cdot \dfrac{1}{r} \sin\dfrac{\pi n}{r_0} r,\ \ E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2} n^2,\ \ n = 1,2,3,\ldots.$

5.6. а) $r_{íâ} = \dfrac{r_0}{2},\ W = \dfrac{1}{2};$ б) $\bar{r}_n = \dfrac{r_0}{2},\ \ \overline{r_n^2} = \dfrac{r_0^2}{3}\left(1 - \dfrac{3}{2\pi^2 n^2}\right),\ n = 1,2,3,\ldots.$

5.7.

$$\psi = \frac{Z^{3/2}}{\sqrt{\pi r_1^3}} e^{-Z\frac{r}{r_1}},\quad E = -\frac{me^4 Z^2}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2},\quad r_1 - первый\ боровский\ радиус$$

5.8. $r_{нв} = r_1,\ \ 4r_1,\ \ 3r_1;\ \ r_1 - первый\ боровский\ радиус.$

5.9. $\bar{d} = 3r_1 \approx 1{,}587 \cdot 10^{-10}$ ì .

6.1. $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2 + \dfrac{8U_0 n^2}{\pi(4n^2 - 1)}, n = 0,1,2,\ldots .$

6.3. $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} n^2, n = 0,1,2,\ldots .$

6.4. $E_n = n\hbar\omega, n = 0,1,2,\ldots .$

6.5. $E_n = -\dfrac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}, n = 1,2,3,\ldots .$

6.6. $H_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\pi\hbar n}{m\sqrt{g}}\right)^{\frac{2}{3}}, E_n = \dfrac{1}{2}\left(3\pi\sqrt{m}g\hbar n\right)^{\frac{2}{3}}, n = 0,1,2,\ldots .$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4.

7. Спин

Задачи

7.1. Каковы возможные значения полного момента импульса электрона J, находящегося в состоянии $4f$?

7.2. Орбитальные квантовые числа двух электронов равны ℓ_1 и ℓ_2. Сколько различных значений k может принимать суммарный орбитальный момент импульса электронов?

7.3. Определить минимальный α_{min} и максимальный α_{max} угол между орбитальными моментами импульса двух электронов, у которых $\ell_1 = 2$, $\ell_2 = 3$.

7.4. Каким суммарным спином S может обладать система, состоящая из: а) трёх электронов? б) четырёх электронов?

7.5. Найти угол φ между спином и полным моментом импульса электронной конфигурации атома в состоянии ^3D с максимально возможным значением полного момента импульса.

7.6. Записать спектральный терм атома, для которого:

а) $s_a = 1/2$, $j_a = 5/2$, $g = 6/7$; б) $s_a = 1$, $l_a = 2$, $g = 4/3$. (g – множитель Ланде).

7.7. Найти момент импульса атома J в состоянии ^5F, если известно, что магнитный момент атома равен нулю.

7.8. Чему равен магнитный момент атома водорода $\mu_{\|a}$ в основном состоянии?

7.9. Атом находится в состоянии $^2D_{3/2}$. Определить магнитный момент атома $\mu_{\|a}$.

7.10. Построить схему возможных переходов атома из состояния: а) $^2P_{3/2}$ в состояние $^2S_{1/2}$, б) ($^2D_{5/2} \rightarrow {}^2P_{3/2}$) в слабом магнитном поле и вычислить частоты соответствующих спектральных линий. Индукция поля B, частота линии в отсутствии поля ω_o.

7.11. Интервал между крайними компонентами спектральной линии при нормальном эффекте Зеемана $\Delta\lambda$ = *0,035 нм.* Определить индукцию магнитного поля B, если длина волны несмещённой линии λ_0 = *612 нм.*

Ответы

7.1. $J_1 = \dfrac{\hbar}{2}\sqrt{35},\ J_2 = \dfrac{3\hbar}{2}\sqrt{7}.$

7.2. $k = 2min(l_1, l_2) + 1.$

7.3. $\alpha_{min} = 45^\circ$, $\alpha_{max} \approx 160{,}5^\circ$.

7.4. а) $S = \dfrac{\hbar}{2}\sqrt{15},\ \dfrac{\hbar}{2}\sqrt{3};$ б) $S = \hbar\sqrt{6},\ \hbar\sqrt{2},\ 0.$

7.5. $\varphi \approx 35{,}2^\circ$.

7.6. а) $^2F_{5/2}$, б) $^3D_3$.

7.7. $J = \hbar\sqrt{2}$.

7.8. $\mu_{||a} = \mu_Б\sqrt{3}$.

7.9. $\mu_{||a} = \dfrac{2\mu_Б}{5}\sqrt{15}$.

7.10. а) $\omega = \omega_0 \pm \left(\dfrac{5}{3}, 1, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)\dfrac{\mu_Б B}{\hbar}$; б)

$$\omega = \omega_0 \pm \left(\frac{1}{15}, \frac{1}{5}, 1, \frac{17}{15}, \frac{19}{15}, \frac{7}{5}\right)\frac{\mu_Б B}{\hbar}.$$

7.11. $B = \dfrac{2\pi c m \Delta\lambda}{e\lambda_0^2} \approx 1{,}0\,(Тл).$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5.

8. Системы тождественных частиц
9. Молекулы

Задачи

8.1. Чему равна кратность вырождения энергетического уровня электрона в атоме водорода с энергией $E = -\dfrac{me^4}{128\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$.

8.2. Найти максимальное число электронов в атоме, имеющих следующие одинаковые квантовые числа: а) n, ℓ, m ; б) n, ℓ; в) n.

8.3. Найти число электронов Z в атомах, у которых в нормальном состоянии заполнены:

а) K, L-слои, $3s$- и $3p$-оболочки;

б) K, L, M-слои и оболочки $4s, 4p, 4d, 5s$.

8.4. Записать электронные конфигурации атомов брома ($Z = 35$), европия ($Z = 63$) и урана ($Z = 92$).

8.5. Найти основной терм атома, единственная незаполненная оболочка которого содержит три d-электрона.

8.6. Определить основной терм атома, единственная незамкнутая оболочка которого заполнена ровно наполовину пятью электронами.

8.7. Найти число электронов в единственной незавершённой оболочке атома, если его основной терм $^6S_{5/2}$.

8.8. Определить возможные термы атома, единственная незамкнутая оболочка которого содержит два p-электрона.

9.1. Определить момент импульса M молекулы кислорода O_2 в состоянии с вращательной энергией $E_{вр} = 2,16 \cdot 10^{-3}$ эВ. Расстояние между ядрами молекулы $r_0 = 1,21 \cdot 10^{-10}$ м.

9.2. Найти энергию E, необходимую для возбуждения на первый вращательный уровень ($l = 1$) молекулы: а) водорода H_2; б) оксида азота

NO. Межъядерное расстояние r_0 в молекуле H_2 равно $0,74{\cdot}10^{-10}$ *м*, в молекуле NO – $1,15{\cdot}10^{-10}$ *м*.

9.3. Вычислить угловую скорость ω вращения молекул: а) водорода H_2; б) оксида азота NO в состоянии с вращательным квантовым числом $l = 1$. Для молекулы H_2 межъядерное расстояние r_0 равно $0,74{\cdot}10^{-10}$ *м*, для молекулы NO – $1,15{\cdot}10^{-10}$ *м*.

9.4. Для молекулы хлористого водорода HCl найти вращательные квантовые числа l_1 и l_2 двух соседних уровней, разность энергий которых $\Delta E = 7,86{\cdot}10^{-3}$ *эВ*. Межъядерное расстояние $r_0 = 1,28{\cdot}10^{-10}$ *м*.

9.5. Длины волн двух соседних линий вращательного спектра молекулы хлористого водорода HCl равны *117* и *156 мкм*. Определить вращательные квантовые числа l уровней, между которыми происходят соответствующие этим линиям переходы. Межъядерное расстояние $r_0 = 1,28{\cdot}10^{-10}$ *м*.

9.6. Молекула хлористой ртути $HgCl$ при вращательном переходе из состояния с $l = 1$ в состояние с $l = 0$ излучает фотон с длиной волны $\lambda = 0,44{\cdot}10^{-5}$ *м*. Определить момент инерции молекулы I.

9.7. Определить температуру T, при которой средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы хлора Cl_2 равна энергии, необходимой для её возбуждения из основного состояния на первый колебательный уровень. Частота собственных колебаний ω для молекулы Cl_2 равна $10,64\cdot 10^{13}$ c^{-1}.

9.8. Зная частоту собственных колебаний молекулы хлора Cl_2 $\omega = 10,64\cdot10^{13}$ c^{-1} и расстояние между ядрами $r_0 = 1,99\cdot10^{-10}$ *м*, рассчитать, до какого вращательного уровня l должна быть возбуждена молекула, чтобы её вращательная энергия оказалась равной колебательной на первом возбуждённом уровне.

9.9. Для молекулы фтористого водорода HF найти число $к$ вращательных уровней, расположенных между нулевым и первым возбуждённым колебательным уровнями. Частота собственных колебаний молекулы $\omega = 77,96 \cdot 10^{13} c^{-1}$, межъядерное расстояние $r_0 = 0,92 \cdot 10^{-10}$ *м*.

Ответы

8.1. $2n^2 = 8$.

8.2. а) 2; б) $2(2l + 1)$; в) $2n^2$.

8.3. а) $Z = 18$; б) $Z = 48$.

8.4. $Br\ (Z = 35): 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^5$;

$Eu\ (Z = 63): 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^7 5s^2 5p^6 6s^2$;

$U\ (Z = 92): 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14} 5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^3 6s^2 6p^6 6d 7s^2$.

8.5. $^4F_{3/2}$.

8.6. $^6S_{5/2}$.

8.7. *Пять d-элементов*.

8.8. ^1S, ^1D, ^3P.

9.1. $M = \sqrt{2E_{вр} m r_0^2} \approx 3{,}47\hbar;$ *m – приведенная масса молекулы.*

9.2. а) $\mathrm{E} = \dfrac{\hbar^2}{m r_0^2} \approx 15 \cdot 10^{-3}\,эВ;$ б) $\mathrm{E} = \dfrac{\hbar^2}{m r_0^2} \approx 0{,}42 \cdot 10^{-3}\,эВ.$

m – приведенная масса молекулы.

9.3. а) $\omega = \sqrt{2}\,\dfrac{\hbar}{m r_0^2} \approx 3{,}3 \cdot 10^{13} c^{-1};$ б) $\omega = \sqrt{2}\,\dfrac{\hbar}{m r_0^2} \approx 0{,}91 \cdot 10^{12} c^{-1}.$

9.4. $l_1 = \dfrac{\Delta E \cdot m r_0^2}{\hbar^2} - 1 = 2; \quad l_2 = l_1 + 1 = 3.$

9.5. $l = 4 \to l = 3;\ l = 3 \to l = 2.$

9.6. $I = \dfrac{\lambda \hbar}{2\pi c} \approx 2{,}48 \cdot 10^{-49} (кг \cdot м^2).$

9.7. $T = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{\hbar \omega}{k} \approx 542\,(K),$ *k – постоянная Больцмана*

9.8. $l = 59$.

9.9. $k = 13$.

II. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6.

1. Основные положения статистической физики

Задачи

1.1. Найти уравнение фазовой траектории *q(p)* частицы массой *m*, движущейся под действием постоянной силы $\vec{F}$. Начальные координата и скорость частицы равны нулю.

1.2. На частицу, движущуюся по инерции, действует сила сопротивления, пропорциональная: а) её скорости; б) квадрату скорости. Определить фазовую траекторию частицы. Начальные координата и импульс равны q_0 и p_0, коэффициент сопротивления μ, масса частицы *m*.

1.3. Тело массой *m* бросили вертикально вверх, сообщив ему импульс, равный p_0. Найти уравнение фазовой траектории тела. Силами сопротивления, обусловленными наличием окружающей среды, пренебречь.

1.4. Уравнение фазовой траектории частицы массой *m*, совершающей прямолинейное движение, имеет вид $p = \frac{a}{q}$, где $a = \text{const}$. Найти закон движения частицы. Начальная координата частицы q_0.

1.5. Значения координаты *x* на отрезке [*0, a*] являются: а) равновероятными; б) возрастают с увеличением *x* по линейному закону. Написать выражение для плотности вероятности $\rho(x)$ и вычислить $\overline{x}, \overline{(\Delta x)^2}$ и δ_x.

1.6. Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси *x* по закону $x = a\sin\omega t$. Определить вероятность *dW(x)* обнаружения точки на отрезке [*x, x +dx*].

1.7. Свободная классическая частица массой *m* заключена в области объёмом *V*. Вычислить объём фазового пространства *Г(E)*, соответствующий всем возможным состояниям частицы с энергиями, не превышающими *E*.

1.8. То же (см. 1.7) для релятивистской частицы. Рассмотреть случай, когда частица является фотоном.

1.9. Найти величину фазового объёма *Г(Е)* одномерного линейного гармонического осциллятора с собственной частотой колебаний ω, отвечающего интервалу значений энергии от *0* до E .

1.10. Получить выражение классического канонического распределения Гиббса по энергиям *ρ(Е)* для одномерного линейного гармонического осциллятора и вычислить среднее значение его энергии $\bar{E}$ при температуре *Т*.

1.11. Показать, что для частицы в центральном поле в квазиклассическом приближении разрешёнными замкнутыми орбитами являются лишь те, для которых момент импульса частицы кратен постоянной Планка $\hbar$.

1.12. Показать, что для частицы, совершающей одномерное свободное движение между двумя вертикальными, идеально отражающими стенками, в квазиклассическом приближении на каждое квантовое состояние в фазовом пространстве приходится ячейка размером $2\pi\hbar$.

1.13. Энергия системы может принимать два одинаковых по модулю, но противоположных по знаку значения. Вероятность положительного значения энергии равна W. Вычислить относительную флуктуацию δ_E энергии системы.

1.14. Атом водорода в основном состоянии имеет магнитный момент $\mu = \mu_б \sqrt{3}$, $\mu_б = \dfrac{e\hbar}{2m}$ (магнетон Бора) и находится во внешнем магнитном поле с индукцией B. Вычислить среднюю энергию взаимодействия $\bar{E}_{вз}$ атома с полем при температуре *Т*. Рассмотреть предельные случаи $T \to 0$ и $T \to \infty$.

1.15. Вычислить статинтеграл *I* и среднюю энергию $\bar{E}$ молекулы одноатомного идеального газа. Масса молекулы *m*, объём газа *V*, температура *Т*.

1.16. Вычислить статсумму Z и среднюю энергию $\bar{E}$ квантового осциллятора с собственной частотой классических колебаний ω при температуре T. К чему стремится $\bar{E}$ при $T \to 0$.

Ответы

1.1. $q(p) = \dfrac{p^2}{2mF}$.

1.2. а) $p(q) = \mu(q_0 - q) + p_0$; б) $p(q) = p_0 \exp\left[\dfrac{\mu}{m}(q_0 - q)\right]$.

1.3. $q(p) = \dfrac{1}{2m^2 g}\left(p_0^2 - p^2\right)$.

1.4. $q(t) = \sqrt{q_0^2 + \dfrac{2a}{m} t}$.

1.5. а) $\rho = \dfrac{1}{a}$, $\bar{x} = \dfrac{a}{2}$, $\overline{(\Delta x)^2} = \dfrac{a^2}{12}$, $\delta_x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\rho(x) = \dfrac{2}{a^2} x$, $\bar{x} = \dfrac{2}{3} a$, $\overline{(\Delta x)^2} = \dfrac{a^2}{18}$, $\delta_x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

1.6. $dW(x) = \dfrac{dx}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$.

1.7. $\Gamma(E) = \dfrac{4}{3}\pi V (2mE)^{3/2}$.

1.8. $\Gamma(E) = \dfrac{4}{3}\pi V \left(\dfrac{E^2}{c^2} - m^2 c^2\right)^{3/2}$, c – скорость света в вакууме; для фотона $\Gamma(E) = \dfrac{4}{3}\pi V \dfrac{E^3}{c^3}$.

1.9. $\Gamma(E) = \dfrac{2\pi}{\omega} E$.

1.10. $\rho(E) = \dfrac{1}{kT} exp\left(-\dfrac{E}{kT}\right)$, $\bar{E} = kT$.

1.13. $\delta_E = \dfrac{2\sqrt{W(1-W)}}{2W - 1}$.

1.14. $\bar{E}_{вз} = -\mu_Б B th\left(\dfrac{\mu_Б B}{kT}\right)$. При $T \to 0$ $\bar{E}_{вз} \to -\mu_Б B$; при $T \to \infty$ $\bar{E}_{вз} \to 0$.

1.15. $I = V\left(2\pi mkT\right)^{3/2}$, $\overline{E} = \frac{3}{2}kT$.

1.16. $Z = \frac{1}{2sh\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}$, $\overline{E} = \frac{\hbar\omega}{2}cth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$. При $T \to 0$ $\overline{E} \to \frac{\hbar\omega}{2}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7.

2. Законы статистической термодинамики

Задачи

2.1. Показать, что у простой системы при $a = V$ и $\Lambda = p$ между изобарным коэффициентом теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, изотермическим коэффициентом сжимаемости $\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ и термическим коэффициентом изменения давления при постоянном объёме $k = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ имеет место соотношение: $\alpha = \beta k p$.

2.2. На примере простой системы ($a = V$, $\Lambda = p$) показать, что количество теплоты δQ не является полным дифференциалом.

2.3. Доказать, что у простой системы ($a = V, \Lambda = p$) между теплоёмкостями при постоянном давлении c_p и объёме c_V имеет место соотношение: $c_p - c_V = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right] \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Чему равна эта разность для одного моля идеального газа?

2.4. Получить уравнение политропного процесса ($c = \text{const}$) для простой системы ($a = V, \Lambda = p$) в переменных (T, V) и (p, V). В качестве частного случая рассмотреть адиабатный процесс. Применить полученные результаты к системе в виде одноатомного идеального газа.

2.5. Получить уравнение политропного процесса в переменных (T, S). Теплоёмкость системы c известна.

2.6. Вычислить изменение энтропии ΔS *1 кг* воды при нагревании от 10^0C до 100^0C и превращении её в пар при этой же температуре. Удельная теплоёмкость воды $4{,}18\cdot10^3\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$, удельная теплота парообразования $2{,}25\cdot10^6\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}}$.

2.7. Вычислить изменение энтропии *ΔS* замкнутой системы, состоящей из *3 кг* воды при 20^0C и *5 кг* воды при 80^0C в процессе её смешивания. Удельная
теплоемкость воды $4{,}18\cdot10^3\,\dfrac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot\text{К}}$.

2.8. Исходя из закона возрастания энтропии, показать, что в процессе теплообмена тепло переходит от тела с большей к телу с меньшей температурой.

2.9. Показать, что для простой системы при $a = V, \Lambda = p$ справедливо равенство: $\left(\dfrac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\cdot\left(\dfrac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$.

2.10. Используя термодинамическое определение энтропии, показать, что энтропия одноатомного идеального газа равна: $S = \nu\cdot R\left(\dfrac{3}{2}\ln T + \ln V\right) + \text{const.}$

2.12. Два тела с температурами *27°C* и *28°C* приведены в соприкосновение. За некоторое время от тела с большей к телу с меньшей температурой перешло количество теплоты, равное 10^{-7} *Дж*. Во сколько *a* раз вследствие этого процесса изменится вероятность состояния системы данных тел?

2.17. Доказать, что для простой системы при $a = V$, $\Lambda = p$ имеют место следующие уравнения : а) $U = F - T\left(\dfrac{\partial F}{\partial T}\right)_V$; б) $H = \Phi - T\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p$; в) $F = H - S\left(\dfrac{\partial H}{\partial S}\right)_p$.

2.18. Известно, что давление в простой ($a = V$, $\Lambda = p$) системе является линейной функцией температуры. Показать, что теплоемкость c_v такой системы в изотермическом процессе не зависит от объёма.

2.19. Доказать, что у простой системы ($a = V$, $\Lambda = p$), объём которой линейно зависит от температуры, теплоемкость c_p в изотермическом процессе не зависит от давления.

2.20. Доказать, что у любой системы при $T \to 0$ термический коэффициент изменения давления при постоянном объёме $k = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ также стремится к нулю.

2.21. Показать, что при $T \to 0$ изобарный коэффициент теплового расширения $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ любой системы также стремится к нулю.

Ответы

2.4. $(c_V - c)dT + (c_p - c_V)\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0$ – переменные (T,V);

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \frac{c_p - c}{c_V - c}\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0$ – переменные (p,V).

2.5. $S - c\,ln(T) = const$.

2.6. $\Delta S \approx 7{,}18 \cdot 10^3 \frac{Дж}{К}$.

2.7. $\Delta S = 13{,}38 \frac{Дж}{К}$.

2.12. $a = exp\left(\frac{10^{-11}}{9k}\right) \approx exp\left(\frac{10^{12}}{12{,}4}\right) >> 1$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 8.

3. Идеальный газ

4. Равновесие фаз и фазовые переходы

Задачи

3.1. Вычислить работу *A* одноатомного идеального газа в политропном процессе при изменении температуры газа на $\Delta T\,K$. Масса газа *m*, молярная масса *M*, показатель политропы *n*. Как частные случаи рассмотреть изохорный, изобарный и адиабатный процессы.

3.2. Какую работу *A* совершает один моль идеального газа при изотермическом изменении давления в *a* раз? Температура газа T.

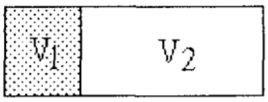
3.3. Вычислить теплоемкость *c* одного моля одноатомного идеального газа в процессе, для которого давление газа пропорционально *m-й* степени его объёма.

3.4. Найти изменение молярной энтропии *ΔS* одноатомного идеального газа при увеличении его температуры в *n* раз и одновременном уменьшении давления в *m* раз.

3.5. Определить изменение энтропии *ΔS* одного моля одноатомного идеального газа в политропном процессе. Показатель политропы *n*, конечная температура
газа в *m* раз больше начальной.

3.6. Один моль одноатомного идеального газа совершает процесс, при котором $S = \frac{a}{T}$, $a = \mathrm{const}$. Найти работу газа *A*, если его температура изменилась от T_1 до T_2.

3.7. В сосуде с перегородкой и теплонепроницаемыми стенками находится один
моль идеального газа. Отношение $\frac{V_2}{V_1} = 2$ (см. рисунок). На какую величину *ΔS* изменится энтропия газа, если перегородку убрать?



3.8. В сосуде находится равновесный идеальный газ. Показать, что в -й части объёма сосуда в среднем находится *n*-я часть его частиц.

3.9. Считая, что у молекул N-атомного идеального газа возбуждены все степени свободы, найти молярные теплоемкости c_V и c_p такого газа, а также показатель адиабаты γ.

3.10. Найти число атомов N в молекуле идеального газа, если известно, что при "замораживании" колебательных степеней свободы показатель адиабаты увеличился в *1,2* раза.

3.11. Идеальный газ из N-атомных молекул, у которых возбуждены: а) все степени свободы; б) поступательные и вращательные степени свободы, испытывает изобарное расширение. Какая часть a теплоты, сообщаемой газу, расходуется на работу расширения?

4.1. Показать, что для равновесной двухфазной системы одного вещества равенство химических потенциалов фаз означает неизменность среднего числа частиц каждой из них.

4.2. Некоторую массу вещества, взятого в состоянии насыщенного пара, изотермически сжали по объёму в n раз. Какую часть x конечного объёма занимает жидкая фаза, если удельные объёмы насыщенного пара и жидкости отличаются в a раз ($a > n$)?

4.3. В закрытом сосуде при температуре T находится насыщенный пар в равновесии со своей жидкостью. Масса пара m ,молярная теплота парообразования q. На какую величину Δm увеличится масса пара при увеличении температуры на ΔT? Пар считать идеальным газом, а $\Delta T \ll T$.

4.4. Вычислить молярную теплоту испарения воды q при $0^0\mathrm{C}$, если давление насыщенного пара при этой температуре *0,610 кПа*, а при $1^0\mathrm{C}$ – *0,656 кПа.*

4.5. Определить температуру кипения воды t при пониженном атмосферном давлении р = 86,47 кПа. Удельная теплота парообразования воды $q_{уд} = 2{,}26$ $\frac{МДж}{кг}$. Давление насыщенного пара p_0 при $t_0 = 100^0\mathrm{C}$ равно *103,36 кПа.*

4.6. Оценить сдвиг температуры плавления ΔT льда вблизи 0^0C, если удельная
теплота перехода $q_{уд} = 334{,}4\ \frac{кДж}{кг}$, плотность льда $\rho = 920\ \frac{кг}{м^3}$, а изменение давления $\Delta p = 100$ *кПа*.

4.7. Давление p насыщенного пара ртути зависит от температуры T по закону $\ln p = -\frac{a}{T} - b\cdot\ln T + c$, где a, b и c − постоянные. Найти температурную зави-
симость $q(T)$ молярной теплоты испарения ртути.

4.8. Используя уравнение Клапейрона – Клаузиуса, объяснить, почему касательная к линии равновесия «твёрдая фаза − пар» вблизи тройной точки имеет больший угол наклона к температурной оси, чем касательная к линии равновесия «жидкость − пар».

Ответы

3.1. $A = \frac{m}{M}\frac{R}{1-n}\Delta T$; $n=\infty$ при $V=const$, $n=0$ при $p=const$, $n=\frac{5}{3}$ при $Q=0$.

3.2. $A = -RT\,ln(a)$.

3.3. $c = R\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m+1}\right)$.

3.4. $\Delta S = R\left[\frac{5}{2}ln(n) + ln(m)\right]$.

3.5. $\Delta S = \frac{3n-5}{2(n-1)}R\,ln(m)$.

3.6. $A = a\,ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right) + \frac{3}{2}R(T_1 - T_2)$.

3.7. $\Delta S = R\,ln3$.

3.9. а) Линейные молекулы: $c_V = \left(3N - \frac{5}{2}\right)R$, $c_p = \left(3N - \frac{3}{2}\right)R$, $\gamma = \frac{6N-3}{6N-5}$;

б) нелинейные молекулы: $c_V = 3(N-1)R$, $c_p = (3N-2)R$, $\gamma = \frac{3N-2}{3(N-1)}$.

3.10. $N = 4$, молекулы нелинейные.

3.11. а) $x = \frac{2}{3(2N-1)}$ (линейные формулы) $x = \frac{1}{3N-2}$ (нелинейные молекулы);

б) $x = \frac{2}{7}$ (линейные молекулы), $x = \frac{1}{4}$ (нелинейные молекулы).

4.2. $x = \frac{n-1}{a-1}$.

4.3. $\Delta m = m\left(\frac{q}{RT} - 1\right)\frac{\Delta T}{T}$.

4.4. $q \approx 45{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{Дж}{моль}$.

4.5. $T = \frac{T_0}{1 + \frac{RT_0}{q_{УД} M} ln\left(\frac{p_0}{p}\right)}$, $t \approx 95^\circ C$; M – молярная масса воды.

4.6. $\Delta T = \frac{T(\rho - \rho_в)}{q_{УД}\rho\rho_в}\Delta p \approx -0{,}0071(K)$; $\rho_в$ – плотность воды.

4.7. $q(T) = R(a - bT)$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 9.

5. Квантовая статистика систем, состоящих из одинаковых микрочастиц

Задачи

5.1. Показать, что химический потенциал идеального Ферми-газа равен полусумме энергий тех состояний фермионов, сумма вероятностей заполнения которых равна единице.

5.2. Вычислить максимальную скорость v_{max} свободных электронов лития при $T = 0К$. Плотность лития $\rho = 530 \frac{кг}{м^3}$ молярная масса $M = 0{,}007 \frac{кг}{моль}$.

5.3. Найти долю a свободных электронов в металле при абсолютном нуле температуры, кинетическая энергия которых больше половины максимальной.

5.4. Показать, что при $T = 0К$ давление p электронного газа в металле связано с его внутренней энергией U и объемом V соотношением: $p = \frac{2U}{3V}$.

5.5. Определить зависимость от температуры *S(T)* молярной энтропии газа свободных электронов металла в условиях вырождения. Энергию Ферми E_F считать заданной.

5.6. Вычислить концентрацию n равновесного фотонного газа при температуре $T = 300\ K$.

5.7. Вычислить давление p электромагнитного излучения в центре взрыва атомной бомбы, считая его равновесным. Температуру излучения принять равной $T = 10^8 К$.

5.8. Найти связь между давлением p объёмом V и внутренней энергией U равновесного электромагнитного излучения.

5.9. Получить уравнение адиабаты в переменных (p, V) для равновесного электромагнитного излучения.

5.10. Найти зависимость полного числа фононов $N_{фон}$ от температуры в кристалле, состоящем из N атомов. Характеристическая дебаевская температура равна θ. Рассмотреть случаи: 1) $T \gg \theta$; 2) $T \ll \theta$.

5.11. Концентрация свободных электронов серебра $n = 6 \cdot 10^{28} м^{-3}$, энергия Ферми $E_F = 9 \cdot 10^{-19}$ Дж, характеристическая дебаевская температура $\Theta = 210К$. Определить: отношение a теплоёмкостей электронного газа и кристаллической решетки при $T = 300К$; температуру T_0, при которой теплоёмкость электронного газа станет равной теплоёмкости решетки.

Ответы

5.2. $\vartheta_{max} = \dfrac{\hbar}{m}\left(3\pi^2 \rho \dfrac{N_A}{M}\right)^{1/3} \approx 1{,}28 \cdot 10^6 \left(\dfrac{м}{с}\right)$.

5.3. $a = 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{4} \approx 0{,}65.$

5.5. $S(T) = \dfrac{\pi^2}{2} R \dfrac{kT}{E_F}$.

5.6. $n \approx \dfrac{2{,}405}{\pi^2} \cdot \left(\dfrac{kT}{\hbar c}\right)^3 \approx 5{,}5 \cdot 10^{14} \left(м^{-3}\right)$.

5.7. $p \approx 2{,}52 \cdot 10^{16}$ *Па*.

5.8. $pV = \dfrac{1}{3} U$.

5.9. $pV^{4/3} = const$.

5.10. $N_{фон} = 9N\left(\dfrac{T}{\theta}\right)^3 \displaystyle\int_0^{\theta/T} \dfrac{x^2 dx}{e^x - 1}$. При $T >> \theta$ $N_{фон} \approx \dfrac{9}{2} N \dfrac{T}{\theta} >> N$; при $T << \theta$ $N_{фон} \approx 21{,}645 N \left(\dfrac{T}{\theta}\right)^3 << N$.

5.11. $a = \dfrac{\pi^2}{6} \cdot \dfrac{kT}{E_F} \approx 7{,}6 \cdot 10^{-3}, T_0 = \sqrt{\dfrac{5k\theta^3}{24\pi^2 E_F}} \approx 1{,}7(K)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Балашов В.В., Долинов В.К. Курс квантовой механики. – М., 1982.
2. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. – СПб., 2004.
3. Бом Д. Квантовая теория. – М., 1965.
4. Гольдин Л.Л., Новикова Г.И. Введение в атомную физику. – М., 1969.

5. Иродов И.Е. Задачи по квантовой физике. – М., 2001.
6. Компанеец А.С. Теоретическая физика. – М., 1957.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. III: Квантовая механи-ка. – М., 2004.
8. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Т. 2. – М., 1971.
9. Матвеев А.Н. Квантовая механика и строение атома. – М., 1965.
10. Паршаков А.Н. Введение в квантовую физику. – СПб., 2010.
11. Серова Ф.Г., Янкина А.А. Сборник задач по теоретической физике. Кванто-вая механика, статистическая физика. – М., 1979.
12. Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч. Квантовая механика. – М., 1979.
13. Соколов А.А., Тернов И.М. Квантовая механика и атомная физика. – М., 1970.
14. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т. I: Введение в атомную физику. – СПб., 2010.
15. Шпольский Э.В. Атомная физика. Т. II: Основы квантовой механики. – СПб., 2010.