(12)

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ:
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г.Локтионова
«25» ___12___ 2018г.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Функциональный анализ»
для направления подготовки 02.03.03 − Математическое обеспечение и администрирование информационных систем

Курск 2018

УДК 517.9(075.8)

Составители: В.И.Дмитриев, Ю.А.Халин

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент
кафедры высшей математики *Н.А.Моргунова*

Функциональный анализ: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Функциональный анализ» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.И.Дмитриев, Ю.А.Халин. – Курск, 2018. – 56 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач по функциональному анализу, методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и учебного плана направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». Материал предназначен для бакалавров направления подготовки 02.03.03 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающим дисциплину «Функциональный анализ».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ_____. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Тема 1: Метрические пространства

Метрическое пространство. Метрика. Эквивалентные метрики. Произведение метрических пространств. Неравенства Гёльдера и Минковского. Сходимость. Множества: открытые, замкнутые; производное множество; замыкание множества. Плотность множеств.

1.1. Докажите, что аксиомы метрического пространства эквивалентны следующим двум аксиомам (**постулаты Линденбаума**):

а) $\rho(x,y)=0 \;\Leftrightarrow\; x=y$;

б) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

1.2. Докажите, что для любых четырех точек x,y,u,v метрического пространства (X,ρ) справедливы неравенства:

а) **обратное неравенство треугольника**

$$|\rho(x,y)-\rho(y,u)|\leqslant\rho(x,u)\qquad\forall\,x,y,u\in X,$$

б) **неравенство четырехугольника**

$$|\rho(x,y)-\rho(u,v)|\leqslant\rho(x,u)+\rho(y,v)\qquad\forall\,x,y,u,v\in X.$$

1.3. На множестве $X=\{a,b,c\}$ задана метрика ρ такая, что $\rho(a,b)=\rho(b,c)=1$. Какие значения может принимать $\rho(a,c)$?

1.4. Можно ли на числовой прямой $\mathbb{R}$ расстояние между любыми точками t и s задать с помощью формул:

$\rho(t,s)=|\operatorname{arctg}t-\operatorname{arctg}s|$; $\qquad\rho(t,s)=|e^t-e^s|$;

$\rho(t,s)=e^{|t-s|}-1$; $\qquad\rho(t,s)=\cos^2(t-s)$;

$\rho(t,s)=|t^3-s^3|$; $\qquad\rho(t,s)=(t^2+2s^2)|t-s|$;

$\rho(t,s)=|t+\operatorname{sign}t-s-\operatorname{sign}s|$?

1.5. Каким условиям должна удовлетворять определенная на $\mathbb{R}$ непрерывная функция $f(t)$, чтобы метрику на $\mathbb{R}$ можно было задавать с помощью формулы $\rho(t,s)=|f(t)-f(s)|$?

1.6. Пусть функция f с областью определения $\mathbb{R}_+$ такова, что

1) $f(0)=0$; 2) f возрастает на $\mathbb{R}_+$; 3) $f(t+s)\leqslant f(t)+f(s)$ (полуаддитивна) $\forall\,t,s\in\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$.

Докажите, что если ρ – метрика на множестве X, то функция $f(\rho(x,y))$ также является метрикой на X.

1.7. Пусть функция f определена и непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и обладает следующими свойствами:

1) $f(0)=0$; 2) f возрастает на $\mathbb{R}_+$; 3) f имеет на $(0,\infty)$ вторую производную, причем $f''(t)<0$ $\forall\, t\in(0,\infty)$.

Докажите, что функция $f(\rho(x,y))$ является метрикой.

1.8. Пусть $\rho(x,y)$ – метрика на множестве X. Докажите, что функции

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho_(x,y)}{1+\rho(x,y)};\qquad \rho_2(x,y)=\ln[1+\rho(x,y)];$$
$$\rho_3(x,y)=\min\{1;\rho(x,y)\};\quad \rho_4(x,y)=[\rho(x,y)]^\alpha,\ 0<\alpha<1;$$
$$\rho_5(x,y)=\operatorname{arctg}\rho(x,y)$$

являются метриками на X.

1.9. Две метрики ρ_1 и ρ_2 на множестве X называются **эквивалентными**, если найдутся положительные числа m и M такие, что

$$m\rho_1(x,y)\leqslant\rho_2(x,y)\leqslant M\rho_1(x,y)\qquad\forall\, x,y\in X.$$

Какие из метрик предыдущей задачи эквивалентны исходной метрике ρ?

1.10. Докажите, что если $\rho_1,\dots\rho_n$ – метрики на множестве X, то для любых положительных чисел $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ функция

$$\rho(x,y)=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\alpha_k\rho_k(x,y)$$

также является метрикой на X.

1.11. Пусть на множестве X задана последовательность метрик (ρ_n) и последовательность положительных чисел (α_n). Докажите, что если ряд

$$\sum_{n\geqslant1}\alpha_n\rho_n(x,y)$$

сходится для любой пары x, y элементов из X, то его сумма $\rho(x,y)$ является метрикой на X.

1.12. Пусть $X_1,X_2,\dots$ – последовательность метрических пространств с метриками $\rho_1,\rho_2,\dots$. Рассмотрим декартово произведение $X=X_1\times X_2\times\cdots$ и для любых $x=(x_1,x_2,\dots)$, $y=(y_1,y_2,\dots)$ из X положим

$$\rho(x,y)=\sum_{n\geqslant1}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\rho_n(x_n,y_n)}{1+\rho_n(x_n,y_n)}.$$

Докажите, что (X,ρ) – метрическое пространство (его называют **произведением пространств** $X_1,X_2,\dots$).

1.13. Докажите, что следующие множества с заданными на них функциями ρ являются метрическими пространствами:

1) множество $\mathbb{R}^n(\mathbb{C}^n)$ всех упорядоченных наборов $x=(x_1,\ldots,x_n)$ из n вещественных (комплексных) чисел с

$$\rho_p(x,y) = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p<\infty;$$
$$\rho_\infty(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k-y_k|;$$

2) множество l_p, $1\leqslant p<\infty$, числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k\geqslant 1} |x_k|^p < +\infty,$$

с

$$\rho_p(x,y) = \Big(\sum_{k\geqslant 1} |x_k-y_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}};$$

3) множества m, c, c_0 числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$ ограниченных, сходящихся и сходящихся к нулю соответственно с

$$\rho(x,y) = \sup_{k\geqslant 1} |x_k-y_k|;$$

4) множество s всех числовых последовательностей $x=(x_1,x_2,\ldots)$ с

$$\rho(x,y) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2^k}\cdot\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|};$$

5) множество $C[a,b]$ всех непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций с

$$\rho_C(x,y) = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)-y(t)|;$$
$$\rho_L(x,y) = \Big(\int_a^b |x(t)-y(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad 1\leqslant p<\infty$$

(в дальнейшем: $(C[a,b],\rho_C)\equiv C[a,b]$, $(C[a,b],\rho_L)\equiv \widetilde{L}_p[a,b]$);

6) множество $C^{(m)}[a,b]$ всех функций на отрезке $[a,b]$, имеющих непрерывные производные до порядка m включительно с

$$\rho_{(m)}(x,y) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \rho_C(x^{(k)},y^{(k)}) \equiv \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \max_{a\leqslant t\leqslant b}\Big|\frac{d^k x(t)}{dt^k} - \frac{d^k y(t)}{dt^k}\Big|;$$

7) множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел с

$$\rho(n,m) = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n+m}, & \text{если} \quad n\neq m,\\ 0, & \text{если} \quad n=m.\end{cases}$$

1.14. Является ли метрикой на множестве $\mathbb{N}$ функция $\rho(n,m) = |n-m|/(nm)$?

1.15. Докажите, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ становится метрическим пространством, если метрику ввести по правилу

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = y, \\ \dfrac{1}{3^k} & \text{при} \quad x \neq y, \end{cases}$$

где k – наибольшая степень числа 3, на которую нацело делится разность $x-y$ $(x,y \in \mathbb{Z})$.

1.16. Покажите, что множество полей шахматной доски образует метрическое пространство, если за расстояние от поля x до поля y взять наименьшее число ходов, необходимое королю для перехода с поля x на поле y. Приведите рассуждения, заменив короля ладьей или конем.

1.17. Докажите следующее **обобщение неравенства Гёльдера**: если положительные числа p, q и r связаны соотношением $1/p + 1/q = 1/r$, причем $p > r$, а $x \in l_p$, $y \in l_q$, то

$$\sqrt[r]{\sum_{k\geqslant 1} |x_k y_k|^r} \leqslant \sqrt[p]{\sum_{k\geqslant 1} |x_k|^p}\sqrt[q]{\sum_{k\geqslant 1} |y_k|^q}.$$

1.18. Найдите расстояние между функциями $x(t) = t^2$, $y(t)=2t+3$ в пространствах $C[0,7/2]$, $\widetilde{L}_1[0,7/2]$.

1.19. Найдите расстояние между последовательностями $x = (1, 1/2, \ldots, 1/2^{n-1}, \ldots)$ и $y = (1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n, \ldots)$ в пространствах l_1, l_2 и m.

1.20. При каких значениях параметра $\alpha > 0$ расстояние между функциями $x(t) = t^2$ и $y(t) = \alpha t + 4$ в пространстве $C[0,3]$ не меньше 6.25, а в пространстве $\widetilde{L}_1[0,2]$ не больше 22.3?

1.21. Пусть S_n – множество всевозможных n-буквенных слов, составленных из букв русского алфавита. Назовем расстоянием между словами a и b количество позиций, на которых у слов a и b стоят разные буквы. Докажите, что S_n – метрическое пространство (оно называется **пространством сообщений** и рассматривается в теории информации).

1.22. Докажите, что $l_p \subset c_0$ при любом $p \geqslant 1$, но элемент $x = \left(1, \frac{1}{\ln 2}, \ldots, \frac{1}{\ln n}, \ \ldots\right)$ не принадлежит l_p ни при каком $p \geqslant 1$.

1.23. Сходятся ли в пространстве $C[0,1]$ последовательности

$$x_n(t) = t^n - t^{n+1}, \qquad y_n(t) = t^n - t^{2n}\,?$$

1.24. Сходится ли последовательность $x_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} - \dfrac{t^{n+2}}{n+2}$ в пространстве а) $C[0,1]$; б) $C^1[0,1]$?

1.25. Сходится ли последовательность функций $x_n(t)$ к функции $x(t) \equiv 0$ в указанных пространствах, если

а) $x_n(t) = t/(1+n^2t^2)$ в $C[0,1]$, $\widetilde{L}_1[0,1]$;

б) $x_n(t) = te^{-nt}$ в $C[0,10]$, $\widetilde{L}_1[0,10]$;

в) $x_n(t) = \sqrt{2nt}\, n^{-\frac{1}{8}} e^{-\frac{1}{2}nt^2}$ в $C[0,1]$, $\widetilde{L}_1[0,1]$;

г) $x_n(t) = \sin nt/n$ в $C[-\pi,\pi]$, $\widetilde{L}_1[-\pi,\pi]$, $C^1[-\pi,\pi]$?

1.26. Сходится ли последовательность функций $(x_n) \subset X$ к элементу $x_0 \in X$, если

а) $x_n(t) = \dfrac{1}{n^2}\sqrt{n^4t^2+1}$, $X = C[-4,4]$, $x_0(t) = |t|$;

б) $x_n = \Big(\underbrace{\dfrac{n^2}{2^n}, \ldots, \dfrac{n^2}{2^n}}_{n}, 0, 0, \ldots\Big)$, $X = l_3$, $x_0 = (0,0,\ldots)$;

в) $x_n = \Big(\dfrac{\sin n}{n}, \ldots, \dfrac{\sin n}{n}, 0, 0, \ldots\Big)$, $X = l_2$, $x_0 = (0,0,\ldots)$;

г) $x_n(t) = \sqrt[n]{1+t^n}$, $X = C[0,1]$, $x_0(t) = t$;

д) $x_n(t) = \dfrac{nt^2+n^2t}{1+n^2t}$, $X = C[0,5]$, $x_0(t) = 1$.

1.27. Приведите пример последовательности $x_n = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots)$, $x_j^{(n)} \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, которая принадлежала бы каждому из рассматриваемой пары пространств и

а) сходилась в m, но не сходилась в l_1;

б) сходилась в m, но не сходилась в l_2;

в) сходилась в l_2, но не сходилась в l_1;

г) сходилась в c_0, но не сходилась в l_1;

д) сходилась в c_0, но не сходилась в l_2.

1.28. Покажите, что последовательность функций $x_n(t) = 2nte^{-nt^2}$ поточечно на отрезке $[0,1]$ сходится к функции $x(t) \equiv 0$; сходится ли $x_n(t)$ к $x(t)$ в пространстве $\widetilde{L}_1[0,1]$?

1.29. Докажите, что всякая последовательность, сходящаяся в пространстве $C[a,b]$, будет сходящейся и в пространстве $\widetilde{L}_2[a,b]$. Постройте пример последовательности, сходящейся в пространстве $\widetilde{L}_2[a,b]$, но не сходящейся в пространстве $C[a,b]$.

1.30. В каких из пространств l_p, m, s сходятся последовательности

а) $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}_{n}, 0, 0, \ldots\Big)$; б) $x_n = \Big(\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}, \ldots, \frac{1}{n^\alpha}}_{n}, 0, 0, \ldots\Big)$?

1.31. Найдите предел последовательности $(x_n) \subset l_1$ элементов вида $x_n = \Big(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \ldots\Big)$.

1.32. Докажите, что в произвольном метрическом пространстве любой открытый шар является открытым множеством, любой замкнутый шар – замкнутым множеством.

1.33. Докажите, что если в произвольном метрическом пространстве заданы два замкнутых непересекающихся множества F_1 и F_2, то найдутся два открытых множества G_1 и G_2 такие, что

$$G_1 \supset F_1, \quad G_2 \supset F_2 \qquad \text{и} \qquad G_1 \cap G_2 = \varnothing.$$

1.34. Постройте:

а) последовательность замкнутых множеств, объединение которых не является замкнутым множеством;

б) последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

1.35. В метрическом пространстве (X, ρ) даны две точки a и b. Открытым или замкнутым будет множество

$$A = \{x \in X : \ \rho(x, a) = \rho(x, b)\},$$

а также множество

$$B = \{x \in X : \ \alpha < \rho(x, a) + \rho(x, b) < \beta\},$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – фиксированные числа?

1.36. Докажите, что множество $A = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in l_2 : x_j > 0 \ \ \forall\, j \geqslant 1\}$ не является ни открытым, ни замкнутым.

1.37. Докажите, что множество $\{x \in C[0,1] : \ 1 < x(t) < 3\}$ является открытым в пространстве $C[0,1]$.

1.38. Докажите, что множество $M \subset C[0,1]$, состоящее из функций $x(t)$, удовлетворяющих условию $\sin t < x(t) < 1 + t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, открыто.

1.39. Докажите, что множества $G_\varepsilon = \{x \in C[0,1] : \varepsilon t < x(t) < \cos t + 1$, $\varepsilon \in (0,1]\}$ открыты.

1.40. Является ли множество всех полиномов в пространстве $C[a,b]$ а) открытым; б) замкнутым?

1.41. Является ли замкнутым в пространстве $C[a,b]$ множество полиномов степени: а) $\leqslant k$, б) $= k$?

1.42. Может ли в некотором метрическом пространстве шар радиуса 3 содержаться в шаре радиуса 2, не заполняя его целиком?

1.43. Может ли в некотором метрическом пространстве сфера радиуса $r > 0$ быть пустым множеством?

1.44. Докажите, что производное множество любого множества является замкнутым.

1.45. Докажите, что множество точек вида $\ln(1+r^2)$, где r пробегает множество всех рациональных чисел, является плотным на $\mathbb{R}_+$.

1.46. Докажите, что множество точек вида $\sin r$, где r пробегает множество всех рациональных чисел, является плотным на отрезке $[-1,1]$.

1.47. Постройте множество, для которого производное множество непусто, а второе производное множество пусто.

1.48. Пусть A – множество точек вида $0, 1/n, 1/n+1/m$, где n и m пробегают множество всех натуральных чисел. Является ли A замкнутым множеством? Каково его производное множество? Каковы его второе и третье производные множества?

1.49. Найдите замыкание множества всех точек вида p^2/q^2, где p и q – всевозможные целые числа, $q \neq 0$.

1.50. Найдите замыкание множества всех точек вида $2^{p/q}$, где p и q – всевозможные натуральные числа.

1.51. Докажите, что множество $P[a,b]$ всех полиномов всюду плотно в пространстве $C^{(m)}[a,b]$ с метрикой $\rho_{(m)}$ (см. задачу 1.13).

Решение. Докажем это утверждение с помощью метода математической индукции. Так как $C^{(0)}[a,b] \equiv C[a,b]$, то при $m=0$ справедливость утверждения следует из аппроксимационной теоремы Вейерштрасса.

Предположим, что $\overline{P[a,b]} = C^{(m-1)}[a,b]$. Для произвольной функции $x(t)$ из пространства $C^{(m)}[a,b]$

$$x'(t) \in C^{(m-1)}[a,b],$$

а потому, согласно предположению индукции, по произвольному $\varepsilon > 0$ для $x'(t)$ можно подобрать такой полином $p(t) \in P[a,b]$, что

$$\rho_{(m-1)}(x',p) < \frac{\varepsilon}{b-a+1}.$$

Построим новый полином

$$\widetilde{p}(t) = x(a) + \int\limits_a^t p(s)\,ds.$$

Тогда

$$\rho_{(m)}(x, \widetilde{\rho}) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \Big| x(t) - x(a) - \int\limits_a^t p(s)\,ds \Big| +$$

$$+ \max_{a \leqslant t \leqslant b} \big| x'(t) - p(t) \big| + \cdots + \max_{a \leqslant t \leqslant b} \big| x^{(m)}(t) - p^{(m-1)}(t) \big| =$$

$$= \max_{a \leqslant t \leqslant b} \Big| \int\limits_a^t \big(x'(s) - p(s)\big)\,ds \Big| + \rho_{(m-1)}(x', p) <$$

$$< (b-a)\rho_{C}(x', p) + \frac{\varepsilon}{b-a+1} < \frac{(b-a)\varepsilon}{b-a+1} + \frac{\varepsilon}{b-a+1} = \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

Тема 2: Полнота метрических пространств

Фундаментальная последовательность. Полное метрическое пространство. Принцип сжимающих отображений. Интегральные уравнения Фредгольма, Вольтерра, Урысона.

2.1. Докажите, что если ряд $\sum\limits_{n \geqslant 1} \rho(x_n, x_{n+1})$ сходится, то (x_n) – **фундаментальная последовательность**.

2.2. Является ли фундаментальной последовательность $x_n(t) = t^{n-1}$, $n \geqslant 1$ в пространстве а) $C[-0.5, 0.5]$; б) $C[0,1]$?

2.3. Докажите фундаментальность числовых последовательностей

$$t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}, \qquad s_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad (n \geqslant 1) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}.$$

2.4. Докажите, что ограниченная в пространстве $C[0, 2\pi]$ последовательность функций $x_n(t) = \sin 2^n \pi t$, $n \geqslant 1$ не является фундаментальной.

2.5. Докажите полноту пространств $\mathbb{R}^n, C[a,b], m, l_1, c_0$.

2.6. Является ли множество всех вещественных чисел $\mathbb{R}$ полным метрическим пространством относительно метрики $\rho(t,s) = |\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} s|$?

2.7. Докажите, что замкнутое множество полного метрического пространства является полным метрическим пространством.

2.8. Является ли полным метрическое пространство задачи 1.13, 7)?

2.9. Докажите, что пространство $\widetilde{L}_2[-1,1]$ не полно. *Указание*: рассмотрите последовательность непрерывных функций

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \ \ t \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right], \\ nt & \text{при} \ \ |t| \leqslant \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{при} \ \ t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

2.10. Докажите, что в метрическом пространстве задачи 1.13, 7) последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров $\overline{S}\left(n, 1 + \frac{1}{2^n}\right)$ имеет пустое пересечение.

2.11. Является ли полным метрическим пространством множество бесконечных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых

$$\sum_{k \geqslant 1} |x_k| < +\infty, \qquad (*)$$

если расстояние в нем определено следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sup_{k \geqslant 1} |x_k - y_k|?$$

Решение. Обозначим через A множество всех числовых последовательностей, удовлетворяющих условию $(*)$. Рассмотрим последовательность элементов следующего вида:

$$x_n = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right), \quad n \geqslant 1.$$

Каждый член этой последовательности удовлетворяет условию $(*)$, следовательно, $(x_n) \subset A$. Данная последовательность по введенной в A метрике является фундаментальной, поскольку

$$\rho(x_n, x_{n+m}) = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \ \ n \to \infty \ \ \text{и} \ \ \forall\, m \geqslant 1.$$

Более того, эта последовательность сходится к элементу $x_0 = (1, 1/2, \ldots, 1/n, 1/(n+1), \ldots)$, так как

$$\rho(x_n, x_0) = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \ \ n \to \infty.$$

Однако $x_0 \notin A$, следовательно, A не является полным метрическим пространством.

2.12. Докажите, что для вычисления квадратного корня из положительного числа a можно пользоваться следующей формулой последовательных приближений:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big),$$

начиная с любого $x_1 \geqslant \sqrt{a}$.

2.13. Докажите, что последовательность **цепных дробей**

$$2,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}},\ 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}},\ \ldots$$

имеет предел, и найдите его.

2.14. Докажите, что для любого $a \in [0, 1]$ последовательные приближения $x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - a)/2$ сходятся к $\sqrt{a}$.

2.15. Пусть $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ и для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|f'(t)| \leqslant \alpha < 1$. Докажите, что уравнение $f(t) = t$ имеет, и притом единственное, решение.

2.16. Пусть задано уравнение $F(t) = 0$, где F – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a, b]$ функция. Рассмотрим равносильное уравнение $t - \lambda F(t) = t$, где $\lambda \in \mathbb{R}$. Всегда ли значение параметра λ можно выбрать так, чтобы оператор $t \to t - \lambda F(t)$ был сжимающим на $[a, b]$?

2.17. Пусть $f \in C^{(1)}(\mathbb{R})$ и $f'(t) \geqslant \alpha > 1\ \ \forall\, t \in \mathbb{R}$. Что можно сказать о разрешимости уравнения $f(t) = t$?

2.18. Докажите, что следующие последовательности, заданные рекуррентными соотношениями, имеют пределы и найдите их:

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{2 + t_n},\quad t_1 = 1;$$

$$t_{n+1} = \frac{t_n}{3 - t_n},\quad t_1 = -5;$$

$$t_{n+1} = \frac{5 + t_n^2}{2t_n},\quad t_1 = 5.$$

2.19. При каких $\alpha > 0$ последовательность

$$\sqrt{\alpha},\ \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}},\ \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}},\ \ldots$$

имеет предел? Найдите его.

2.20. Является ли отображение

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + t - \operatorname{arctg} t$$

числовой прямой в себя сжимающим? Имеет ли оно неподвижные точки?

2.21. Является ли сжимающим отображение $f(t) = t + 1/t$ полупрямой $(0, \infty)$ в себя? Имеет ли оно неподвижную точку?

2.22. Докажите, что отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3$ является сжимающим на шаре $\overline{S}(0, r) = \{t \in \mathbb{R} : |t| \leqslant r\}$, где $r > 1/\sqrt{3}$, но не является сжимающим вблизи неподвижных точек $t = 1$ и $t = -1$.

2.23. Докажите, что уравнение $2te^t = 1$ имеет единственное решение на интервале $(0, 1)$. Приведите уравнение к виду, пригодному для составления итераций, и определите число итераций, необходимых для того, чтобы приближенное решение отличалось от точного не более чем на $\varepsilon = 10^{-2}$, если в качестве начального приближения взять $t = 0$.

2.24. Является ли сжимающим отображение

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0.7x_1 + 0.8x_2 \\ 0.2x_1 + 0.05x_2 \end{pmatrix}$$

плоскости в себя, если $\mathbb{R}^2$ рассматривать как пространство $(\mathbb{R}^2, \rho_2)$ или $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$?

2.25. Пусть дана система m линейных уравнений с m неизвестными

$$x_i = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_{ik} x_k + b_i, \qquad i = 1, \ldots, m.$$

Докажите, что если для этой системы выполняется хотя бы одно из условий

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_{ik}^2 &< 1, \\ \max_{1 \leqslant k \leqslant m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |a_{ik}| &< 1, \\ \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |a_{ik}| &< 1, \end{aligned}$$

то данная система имеет единственное решение, которое можно с любой степенью точности найти методом последовательных приближений

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} a_{ik} x_k^{(n)} + b_i, \qquad n \geqslant 1,$$

начиная с любого начального приближения $x_1 = (x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)})$.

2.26. Какой вид имеет условие сжатия для системы из задачи 2.25 в случае **весовой метрики** вида

$$\rho_{p,\alpha}(x,y) = \Big(\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \alpha_k |x_k - y_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

с фиксированными $\alpha_k > 0$?

2.27. Докажите, что система

$$\begin{cases} 13x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 32 \end{cases}$$

имеет единственное решение и найдите его с точностью до 0.01 методом последовательных приближений, выбрав за начальное приближение точку (0,0,0).

2.28. Пусть λ_k, $k = 1, \ldots, m$ – собственные значения матрицы $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Докажите, что последовательные приближения $x_{n+1} = Ax_n + b$ сходятся к решению системы линейных алгебраических уравнений $x - Ax = b$ при любом начальном приближении тогда и только тогда, когда $|\lambda_k| < 1$, $k = 1, \ldots, m$.

2.29. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^m$ систему линейных алгебраических уравнений

$$Cx = b,$$

где $x, b \in \mathbb{R}^m$, $C = (c_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$ – квадратная матрица. Для эквивалентной системы $x = (I + \lambda C)x - \lambda b$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, I – единичная матрица, положим $I + \lambda C \equiv A$ и составим итерации

$$x_{n+1} = Ax_n - \lambda b, \qquad n = 1, 2, \ldots, m.$$

Предположим, что

$$\Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} c_{ii} \Big)^2 > (m-1) \sum_{\substack{1 \leqslant i, j \leqslant m, \\ i \neq j}} c_{ij}^2.$$

Докажите, что существует $\lambda \in \mathbb{R}$, при котором итерационный процесс сходится к решению исходной системы.

2.30. Докажите следующие утверждения: бесконечная алгебраическая система

$$x_i = \sum_{k \geqslant 1} a_{ik} x_k + b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

имеет единственное решение:

а) в пространстве m для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in m$, если

$$\sup_{i \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} |a_{ik}| < 1;$$

б) в пространстве l_1 для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_1$, если

$$\sup_{k \geqslant 1} \sum_{i \geqslant 1} |a_{ik}| < 1;$$

в) в пространстве l_2 для любой последовательности $b = (b_1, b_2, \ldots) \in l_2$, если

$$\sum_{i,k \geqslant 1} |a_{ik}|^2 < 1.$$

2.31. При каких $\lambda \in \mathbb{R}$ примени́м принцип сжимающих отображений к следующим **интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода** в пространстве $C[0,1]$:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \lambda \int_0^1 t^2 s x(s) ds + t, \\
x(t) &= \lambda \int_0^1 t^m s^n x(s) ds + t, \\
x(t) &= \lambda \int_0^1 e^{t-s} x(s) ds + 1, \\
x(t) &= \lambda \int_0^1 \cos \pi(t-s) x(s) ds + 1?
\end{aligned}$$

Методом последовательных приближений найдите их точные решения.

2.32. В множестве $C[a,b]$ введем метрику по формуле

$$\widetilde{\rho}(x,y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} e^{-pt} |x(t) - y(t)|,$$

где $p > 0$ фиксировано. Докажите, что при некотором p **интегральный оператор Вольтерра**

$$Ax(t) = \lambda \int_a^t K(t,s) x(s) ds$$

(ядро $K(t,s)$ – непрерывно) является сжимающим относительно метрики $\widetilde{\rho}$.

2.33. Докажите, что если функция $K(t,s,u)$:

1) определена и непрерывна в области $D = \{a \leqslant t, s \leqslant b, |u| \leqslant 1\}$,

2) имеет непрерывную частную производную по u, то при достаточно малом μ **интегральное уравнение Урысона**

$$x(t) - \mu \int\limits_0^1 K(t,s,x(s))ds = 0$$

имеет единственное непрерывное решение.

2.34. Пусть функция $f(t,x)$ определена и непрерывна в полосе $[0,a]\times\mathbb{R}$ и удовлетворяет в ней **условию Липшица** $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant \leqslant L|x_1-x_2|$, $L>0$. Докажите, что **задача Коши**

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

рассматриваемая на отрезке $[0,a]$, имеет единственное решение.

2.35. Докажите, что если функция $f(t,x)$ в прямоугольнике $[0,1]\times[-1,1]$ непрерывна и удовлетворяет по x условию Липшица $|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \leqslant L|x_1-x_2|$, $L>0$, то при достаточно малых ε краевая задача

$$\begin{cases} \ddot{x} + \varepsilon f(t,x) = 0 \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$$

однозначно разрешима.

2.36.* Докажите, что если непрерывная на отрезке $[0,1]$ функция $q(t)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^1 |q(t)|dt < \frac{1}{4}$, то задача Коши для **уравнения Риккати** $\dot{x} = x^2 + q(t)$, $x(0)=0$ имеет на $[0,1]$ единственное решение. Полученный результат обобщите на случай задачи $\dot{x} = x^n + q(t)$, $x(0)=0$.

2.37. Рассмотрим **двухточечную краевую задачу**

$$\begin{cases} y'' = f(t,y,y'), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \alpha_0 y(0) + \alpha_1 y'(0) = \alpha, \\ \beta_0 y(1) + \beta_1 y'(1) = \beta, \end{cases}$$

в которой функция f непрерывна в «тоннеле» $[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и удовлетворяет условию

$$|f(t,u,v) - f(t,w,z)| \leqslant \lambda_1|u-w| + \lambda_2|v-z| \quad \forall\, t\in[0,1].$$

Для разностной задачи

$$\begin{cases} x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = h^2 f(kh, x_k, (2h)^{-1}(x_{k+1} - x_k)), \quad k = 1, \ldots, n, \\ \alpha_0 x_0 + \alpha_1 (1/h)(x_1 - x_0) = \alpha, \\ \beta_0 y_0 + \beta_1 (1/h)(x_{n+1} - x_n) = \beta, \end{cases}$$

где $h = 1/(n+1)$, сформулируйте условия, позволяющие применить принцип сжимающих отображений.

Тема 3: Компактность

Множество предкомпактное, компактное; ε-сеть для множества. Семейство функций: равномерно ограниченное, равностепенно непрерывное.

3.1. Пусть A – компактное множество метрического пространства (X, ρ). Докажите, что для любого $b \in X$ в множестве A найдется такой элемент a, что $\rho(b, A) = \rho(b, a)$.

3.2. Расстоянием между двумя множествами A и B метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\rho(A, B) \equiv \underset{a \in A, b \in B}{\operatorname{infimum}} \ \rho(a, b).$$

Докажите, что если A и B компактны, то найдутся такие $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$, что $\rho(A, B) = \rho(a_0, b_0)$.

3.3. Докажите, что множество K элементов $x = (x_1, x_2, \ldots)$ из пространства c (или c_0) предкомпактно точно тогда, когда

1) оно ограничено,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует равномерно относительно $x \in K$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) : \forall n \geqslant n(\varepsilon) \quad |x - \lim_{n\to\infty} x_n| < \varepsilon \ \forall x \in K.$$

3.4. Функционал $f : \mathcal{D}(f) \subseteq X \to \mathbb{R}$ называется **равномерно непрерывным** на множестве $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \ : \ \forall x, y \in A, \rho(x, y) < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Докажите аналог известной из курса математического анализа **теоремы Кантора**: функционал f, определенный и непрерывный на компактном множестве $A \subseteq \mathcal{D}(f)$, равномерно непрерывен на нем.

3.5. Разрешима ли **вариационная задача**

$$f \to \operatorname{extr}, \quad x \in A,$$

в которой
$$f(x)=\int\limits_0^{1/2} x(t)\,dt-\int\limits_{1/2}^{1} x(t)\,dt,$$
$A=\overline{S}(\theta,1)$ – замкнутый единичный шар пространства $C[0,1]$ с центром в точке $\theta=\theta(t)\equiv 0\ \ \forall\, t\in[0,1]$?

3.6. Докажите, что множество
$$\Pi=\{x=(x_1,x_2,\dots)\in l_2\ :\quad |x_k|\leqslant\frac{1}{2^k},k\geqslant 1\}$$
является предкомпактным в пространстве l_2 (множество Π называют **основным параллелепипедом** пространства l_2).

3.7. Докажите, что каждое ограниченное множество функций, удовлетворяющих условию Липшица, предкомпактно в $C[a,b]$.

3.8. Докажите, что множество функций, имеющих на $[a,b]\subset\mathbb{R}$ равномерно ограниченное множество производных порядка n, предкомпактно в $C[a,b]$.

3.9. Докажите, что множество
$$A=\{x(t)\in C[0,2\pi]\ :\quad \max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)|\leqslant 1\}$$
не является предкомпактным в $C[0,2\pi]$.

3.10. Пусть функция $f(t,x)$ непрерывна и ограничена в полосе $\{(t,x):0\leqslant t\leqslant 1,\ \ x\in\mathbb{R}\}$. Докажите, что множество M решений дифференциального уравнения $x'=f(t,x)$ предкомпактно в $C[0,1]$ точно тогда, когда множество значений $x(0)$ (когда $x(t)$ пробегает M) ограничено.

3.11. Докажите, что всякое ограниченное множество пространства $C^{(1)}[a,b]$ предкомпактно в пространстве $C[a,b]$.

3.12. Докажите, что множество K непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций, для которых $|x'(t)|\leqslant 1,\ \ 0\leqslant t\leqslant 1$ и $x(0)=a$, предкомпактно в $C[0,1]$.

3.13. Докажите, что если множество M функций $x(t)$ из пространства $C[0,1]$ является ограниченным, то множество первообразных
$$F(t)=\int\limits_0^t x(s)\,ds,\quad x(t)\in M$$
предкомпактно.

3.14. Будет ли равномерно ограниченное множество многочленов степени n предкомпактным в $C[a,b]$?

3.15. При каком условии на последовательность $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ $(\lambda_n > 0$ $\forall\, n \geqslant 1)$ является предкомпактным множеством в пространстве l_2 :

а) **параллелепипед** $\{x \in l_2 \,:\, |x_n| \leqslant \lambda_n,\ x = (x_1, x_2, \ldots)\}$;

б) **эллипсоид** $\{x \in l_2 \,:\, \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x_n^2}{\lambda_n^2} \leqslant 1,\ x = (x_1, x_2, \ldots)\}$?

3.16. Пусть множество $K \subset C^{(1)}[a,b]$ таково, что

1) существует такое $c > 0$, что $|x'(t)| \leqslant c$ для всех $t \in [a,b]$ и $x(t) \in K$;

2) для любой $x(t) \in K$ уравнение $x(t) = 0$ имеет на $[a,b]$ хотя бы один корень.

Докажите, что K предкомпактно в $C[a,b]$.

3.17. Какие из следующих множеств предкомпактны в $C[0,1]$:

$x_n(t) = n\Big(1 - \cos\dfrac{t}{n}\Big), \quad n \in \mathbb{N};$

$x_\alpha(t) = \operatorname{arctg}(t + \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R};$

$x_n(t) = t^n, \quad n \in \mathbb{N};$

$x_n(t) = \sin nt, \quad n \in \mathbb{N};$

$x_n(t) = \sin(t + n), \quad n \in \mathbb{N};$

$x_\alpha(t) = \sin \alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

$x_\alpha(t) = \operatorname{arctg} \alpha t, \quad \alpha \in \mathbb{R};$

$x_\alpha(t) = e^{t-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+?$

3.18. Пусть K – замкнутое множество полного метрического пространства X. Докажите, что если по любому $\varepsilon > 0$ для K можно построить конечную ε-сеть, то множество K будет компактным.

3.19. Докажите, что при непрерывном отображении образ всякого компактного множества есть множество компактное.

Тема 4: Линейные нормированные пространства. Банаховы пространства

Линейное пространство. Размерность, базис. Изоморфизм линейных пространств. Линейное многообразие. Разложение пространства в прямую сумму линейных многообразий. Отрезок, прямая. Выпуклое множество. Нормированное пространство. Эквивалентные нормы. Подпространство. Задача о наилучшем приближении. Банахово пространство. Ряд: сходящийся, абсолютно сходящийся.

4.1. Докажите справедливость следствий из аксиом линейного пространства:

1) $0 \cdot x = \theta$;

2) $(-1) \cdot x = (-x)$;

3) $\lambda \cdot \theta = \theta$;

4) $(\lambda x = \mu x) \wedge (x \neq \theta) \ \Rightarrow \ \lambda = \mu$;

5) $(\lambda x = \lambda y) \wedge (\lambda \neq 0) \ \Rightarrow \ x = y$.

4.2. В множестве $X = (0, \infty)$ положительных чисел (элементов) введем операции: под «суммой» элементов $x, y \in X$ будем понимать их произведение, а под «произведением» элемента x на вещественное число λ будем понимать элемент x^λ. Покажите, что при таком определении операций X превращается в линейное пространство. Как выглядят в X «нулевой» и «противоположный» элементы?

4.3. Обозначим через 2^X множество всех подмножеств линейного пространства X. Если $A, B \in 2^X$, то положим

$$A + B = \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}; \qquad \lambda A = \{\lambda x;\ x \in A\};$$

$$(-A) = \{(-x);\ x \in A\} = (-1)A; \qquad A - B = A + (-1)B.$$

Какие из аксиом линейного пространства выполнены в 2^X?

4.4. Докажите, что в пространстве $C[a, b]$ множество всех функций, удовлетворяющих граничным условиям $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$, является линейным многообразием тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$.

4.5. Докажите, что при $k > l \geqslant 0$ $C^{(k)}[a, b]$ – линейное многообразие в $C^{(l)}[a, b]$.

4.6. Докажите, что в пространстве $C[0, \pi]$ функции $1, \cos t, \cos^2 t$ линейно независимы, а функции $1, \cos 2t, \cos^2 t$ линейно зависимы.

4.7. Докажите, что пространство $C^{(k)}[a, b]$ бесконечномерно.

4.8. Пусть $\mathbb{M}_{mn}(\mathbb{R})$ – линейное пространство прямоугольных матриц с вещественными элементами порядка $m \times n$. Докажите, что пространство $\mathbb{M}_{mn}$ является mn-мерным. Найдите базис этого пространства.

4.9. Докажите, что два конечномерных линейных пространства (оба вещественные или оба комплексные) изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

4.10. Пусть X и $\widetilde{X}$ – изоморфные конечномерные линейные пространства и функция $\widetilde{x} = J(x)$ осуществляет их **изоморфизм**. Докажите, что $J(e_1), \ldots, J(e_m)$ – базис в $\widetilde{X}$, если $e_1, \ldots, e_m$ – базис в X.

4.11. Докажите, что функция $J(x) = \ln x$ осуществляет изоморфизм пространств $X = (0, \infty)$ и $\widetilde{X} = \mathbb{R}$.

4.12. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – точки выпуклого множества W в линейном пространстве X, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – неотрицательные скаляры, такие что $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Докажите что

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in W.$$

4.13. В множестве 2^X всех подмножеств линейного пространства X определим алгебраические операции как в задаче 4.3. Докажите, что если множества A и B – выпуклы, то множества λA и $A \pm B$ также выпуклы.

4.14. Докажите, что в пространстве l_2 выпуклыми множествами являются:

а) параллелепипед $\{x \in l_2 : |x_k| < 2^{-k+1} \; \forall\, k \geqslant 1\}$,

б) эллипсоид $\{x \in l_2 : \sum\limits_{k \geqslant 1} k^2 x_k^2 < 1\}$.

4.15. Докажите, что в определении линейного нормированного пространства:

а) аксиому тождества можно заменить на следующую: из $\|x\| = 0$ следует $x = \theta$;

б) аксиому треугольника можно заменить условием выпуклости единичного шара.

4.16. Докажите, что в произвольном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$

$$\|x\| \leqslant \max\bigl\{\|x + y\|;\ \|x - y\|\bigr\} \quad \forall\, x, y \in X.$$

4.17. Можно ли в $\mathbb{R}^2$ норму вектора $x = (x_1, x_2)$ определить следующим образом:

а) $\|x\| = |x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$;

б) $\|x\| = \max\{|x_1 + 2x_2|;\ |x_1 - x_2|\}$;

в) $\|x\| = \max\{|x_1|;\ |x_2 - x_1|/h,\ h > 0\}$?

4.18. Можно ли в $\mathbb{R}^m$ ввести норму вектора, положив для

$x = (x_1, \dots, x_m)$

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \Big(\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p < 1,\ m \geqslant 2; \\
\|x\| &= \Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} x_k^2 \Big)^{\frac{1}{2}}; \\
\|x\| &= \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \Big(\Big| \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} x_k \Big| \Big)?
\end{aligned}$$

4.19. Пусть $A = (a_{ij}),\ 1 \leqslant i, j \leqslant n,$ – симметричная положительно определенная матрица. Покажите, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ норму вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ можно ввести по формуле

$$\|x\| = \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

4.20. Докажите следующие неравенства для норм вектора в $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}
\|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_1 \leqslant m\|x\|_\infty, \\
\frac{1}{\sqrt{m}}\|x\|_1 &\leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_1, \\
\|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{m}\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

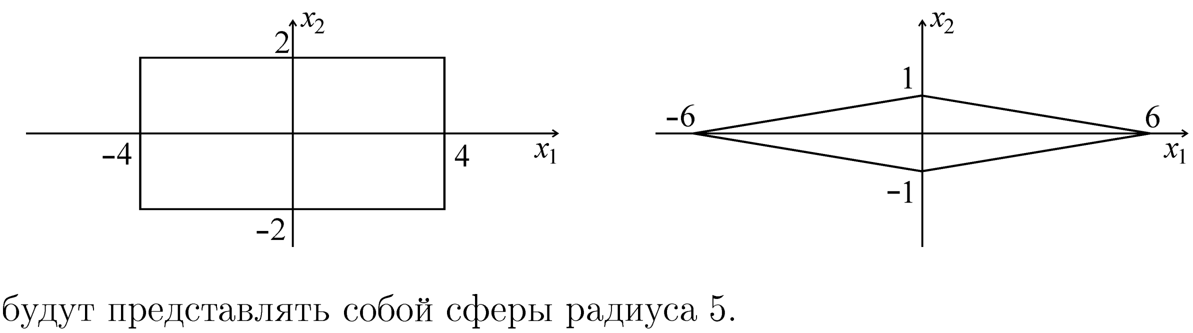
Убедитесь в точности этих неравенств.

4.21. Определяет ли функционал

$$\varphi(x) = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big\{ \max\big\{ \mathrm{Re}\,|x_k|;\ \mathrm{Jm}\,|x_k| \big\} \big\}$$

норму вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$?

4.22. Найдите пространства, в которых четырехугольники



будут представлять собой сферы радиуса 5.

4.23. Докажите, что в линейном нормированном пространстве никакая сфера $\sigma(x_0, r)$ не может быть пустым множеством (сравните с задачей 1.42).

4.24. Пусть $\overline{S}_1 = \overline{S}(a_1, r_1)$, $\overline{S}_2 = \overline{S}(a_2, r_2)$ – два замкнутых шара в линейном нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$. Докажите, что если $\overline{S}_1 \subset \overline{S}_2$, то $r_1 \leqslant r_2$.

4.25. Пусть $\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2$ – два замкнутых шара в линейном нормированном пространстве. Докажите, что расстояние между их центрами не превосходит разности длин радиусов.

4.26. Докажите, что в произвольном линейном нормированном пространстве пересечение любого числа выпуклых множеств является выпуклым множеством.

4.27. Будет ли выпуклым в пространстве $C[0,1]$ множество:

а) полиномов степени $= k$;

б) полиномов степени $\leqslant k$;

в) непрерывных функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 |x(t)|^p dt \leqslant 1, \qquad 1 \leqslant p < \infty;$$

г) непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)| \leqslant \sin 7?$$

4.28. Докажите, что функция $f(\alpha) = \ln \|x\|_\alpha$, где

$$\|x\|_\alpha = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k|^{\frac{1}{\alpha}}\Big)^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1,\ x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,$$

является выпуклой.

4.29. Из результата предыдущей задачи установите справедливость неравенства

$$\|x\|_\alpha \leqslant \|x\|_0^{1-\alpha} \|x\|_1^\alpha \qquad (\text{здесь } \|x\|_0 = \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x_k|).$$

4.30. В пространстве l_1 рассмотрим две нормы

$$\|x\|_1 = \sum_{k\geqslant 1} |x_k| \quad \text{и} \quad \|x\|_2 = \sup_{k\geqslant 1} |x_k|.$$

Докажите, что эти нормы не эквивалентны.

4.31. Можно ли в линейном пространстве $C^{(1)}[a,b]$ за норму функции $x(t)$ принять функционал:

а) $|x(b)-x(a)|+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$;

б) $|x(a)|+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$;

в) $\int\limits_a^b |x(t)|dt+\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|$?

4.32. Рассмотрим множество $C_\alpha[a,b]$, $\alpha\in(0,1]$, всех непрерывных на $[0,1]$ функций, для которых выполняется **условие Гёльдера**

$$K_\alpha(x)\equiv\sup_{t_1,t_2\in[a,b],\,t_1\neq t_2}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^\alpha}<+\infty.$$

Покажите, что $C_\alpha[a,b]$ будет нормированным пространством, если в нем норму задать так:

$$\|x\|_\alpha=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|+K_\alpha(x).$$

4.33. Являются ли в пространстве $C^{(1)}[0,1]$ эквивалентными следующие нормы:

а) $\|x\|_1=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$, $\quad\|x\|_2=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$;

б) $\|x\|_1=\int\limits_0^1|x(s)|ds+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$, $\|x\|_2=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|$?

4.34. Являются ли эквивалентными в пространстве $C[0,1]$ нормы

$$\|x\|_1=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,\quad \|x\|_2=\sqrt{\int\limits_0^1|x(t)|^2dt}\ ?$$

4.35. Являются ли эквивалентными в пространстве $C(\mathbb{R}_+)$ нормы

$$\|x\|_1=\sup_{0\leqslant t<\infty}|x(t)|,\quad \|x\|_2=\sup_{0\leqslant t<\infty}e^{-t}|x(t)|\ ?$$

4.36. Пусть $L=\{x\in l_2: x_1+\dots+x_n+\dots=0\}$. Докажите, что L – линейное многообразие в l_2. Является ли L подпространством?

4.37. Докажите, что множество

$$L=\left\{x=(x_1,x_2,\dots):\ \sum_{k=1}^\infty\frac{x_k}{2^k}=0\right\}$$

является подпространством в пространстве c_0.

4.38. Докажите, что всякое конечномерное линейное многообразие в линейном нормированном пространстве есть подпространство.

4.39. Докажите, что

а) пространство c_0 является подпространством в пространстве c;

б) пространство c является подпространством в пространстве m.

4.40. В пространстве $C[0,1]$ рассмотрим множество $L = \{x(t) : x(1) = 0\}$. Докажите, что

а) L – подпространство в $C[0,1]$;

б) существует такое одномерное подпространство M, что

$$C[0,1] = L \oplus M.$$

4.41. Пусть L – конечномерное подпространство линейного нормированного пространства X. Докажите, что для любого $x \in X$ существует (возможно, не единственный) такой элемент $u^* \in L$, что $\rho(x, L) = \|x - u^*\|$ (при этом элемент u^* называется **элементом наилучшего приближения**).

4.42. Покажите, что в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ множество элементов наилучшего приближения элемента $x_0 = (1,0)$ элементами подпространства $L = \{u = (0,\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$ имеет вид $u^* = (0,\alpha)$, где $\alpha \in [-1,1]$.

4.43. В пространстве $(\mathbb{R}^2; \|\cdot\|_1)$ вычислите расстояние $\rho(x_0, L)$ от элемента $x_0 = (-1,1)$ до подпространства $L = \{\alpha e;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ с базисным вектором $e = (1,1)$.

4.44. При каких значениях параметра β расстояние от элемента $x_0 = (\beta, 1)$ до подпространства $L = \{(0,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ в пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_3)$ не больше $\ln 3$?

4.45. В пространстве $C[0,1]$ задано подпространство $L = \{x(t) : x(0) = 0\}$. Покажите, что для элемента $x_0(t) \equiv 1$ существует не единственный элемент наилучшего приближения. Опишите множество таких элементов.

4.46. Пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется **строго нормированным**, если в нем равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ имеет место лишь при $x = \alpha y$, $\alpha > 0$. Какие из пространств $l_1, l_2, C[a,b], \widetilde{L}_2[a,b]$ являются строго нормированными?

4.47. Пусть $(x_n) \subset X$ и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|$$

сходится. Докажите, что (x_n) – фундаментальная последовательность. Верно ли обратное утверждение?

4.48. Пусть $(x_n), (y_n) \subset X$ – фундаментальные последовательности. Докажите, что последовательность $\lambda_n = \|x_n - y_n\|$ сходится.

4.49. На линейном нормированном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, и в одной из них X – банахово пространство. Докажите, что X является банаховым пространством и в другой норме.

4.50. Пусть X – банахово пространство и последовательность $(x_n) \subset X$ такова, что

$$\sum_{n \geqslant 1} \|x_n\| = M < +\infty.$$

Докажите, что существует $x \in X$ такой, что

$$x = \sum_{n \geqslant 1} x_n \qquad \text{и} \qquad \|x\| \leqslant M.$$

4.51. Будут ли сходиться в пространстве $C[0,1]$ ряды:

а) $\sum\limits_{k \geqslant 0} t^k$;

б) $\sum\limits_{k \geqslant 0} (1-t)t^k$;

в) $\sum\limits_{k \geqslant 0} e^{-k(t+1)}$?

4.52. Сходится ли в пространстве l_1 ряд $\sum\limits_{n \geqslant 1} x_n$, если

а) $x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, 1, 0, \ldots)$;

б) $x_n = \Big(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1}, \dfrac{1}{n^2}, 0, \ldots\Big)$;

в) $x_n = \Big(\dfrac{1}{n}, 0, \ldots, 0, \ldots\Big)$?

Какие из этих рядов сходятся в l_2?

Тема 5: Гильбертово пространство

Скалярное произведение. Равенство параллелограмма. Неравенство Шварца. Ортогональность. Аннулятор. Оператор проектирования. Ортогональные системы. Процесс ортогонализации. Полиномы Лежандра, Чебышёва – Лаггера.

5.1. Докажите, что если в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ для любых $x, y \in X$ справедливо **равенство параллелограмма**

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

то в X можно ввести скалярное произведение по **формуле поляризации**

$$(x, y) = \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big)$$

– в вещественном случае,

$$(x, y) = \frac{1}{4}\big[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\big)\big]$$

– в комплексном случае.

5.2. Докажите, что в пространстве $C[0,1]$ нельзя ввести скалярное произведение, согласующееся с нормой этого пространства, т. е. чтобы имело место равенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| = (x, x)^{\frac{1}{2}}.$$

То же для пространства l_1.

5.3. Докажите, что система элементов $x_1, \ldots, x_n$ гильбертова пространства H линейно независима тогда и только тогда, когда ее **определитель Грама**

$$\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

5.4. Докажите, что гильбертово пространство является строго нормированным.

5.5. Пусть в предгильбертовом пространстве H для $x_1, x_2 \in H$ выполняется равенство $\operatorname{Re}(x_1, x_2) = \|x_1\|^2 = \|x_2\|^2$. Докажите, что $x_1 = x_2$.

5.6. Докажите, что векторное пространство l_2 со скалярным произведением

$$(x, y) = \sum_{k\geqslant 1} x_k, y_k,$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_2$, является гильбертовым.

5.7. Пусть (x_k) – фиксированная последовательность элементов гильбертова пространства H, (λ_k) – фиксированная последовательность вещественных чисел. Докажите, что множество $M = \{x \in H : \operatorname{Re}(x, x_k) \leqslant \lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$ замкнуто и выпукло в H.

5.8. Докажите, что в комплексном предгильбертовом пространстве элементы x и y ортогональны тогда и только тогда, когда

$$\|\lambda x\|^2 + \|\mu y\|^2 = \|\lambda x + \mu y\|^2 \qquad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

или когда одновременно выполняются равенства

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \quad \|x+iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

5.9. Пусть (e_n), $n \geqslant 1$, – ортонормированная система элементов гильбертова пространства H, (λ_n) – последовательность вещественных чисел. Докажите, что ряд

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda_n e_n$$

сходится в H тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n\geqslant 1} |\lambda_n|^2 < +\infty$.

5.10. Пусть последовательности (x_n), (y_n) принадлежат замкнутому единичному шару $\overline{S}(\theta, 1)$ гильбертова пространства H. Докажите, что $\|x_n - y_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, если выполнено одно из условий:

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = 1 \qquad \text{или} \qquad \text{б)}\ \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| = 2.$$

5.11. Докажите: для того чтобы элемент x гильбертова пространства H был ортогонален подпространству $L \subset H$, необходимо и достаточно, чтобы для любого элемента $y \in L$ имело место неравенство

$$\|x\| \leqslant \|x - y\|.$$

5.12. Докажите, что для произвольного множества M в гильбертовом пространстве H его **аннулятор** $M^{\perp}$ является подпространством.

5.13. Установите в произвольном вещественном предгильбертовом пространстве H справедливость **неравенства Ричарда**

$$\big|2(x,a)(x,b) - (a,b)\|x\|^2\big| \leqslant \|a\|\,\|b\|\,\|x\|^2 \qquad \forall\, x, a, b \in H.$$

5.14. В гильбертовом пространстве H рассмотрим замкнутое выпуклое множество $C = \overline{S}(x_0, r)$. Пусть $x \in H$. Докажите, что элемент $z \in C$ такой, что $\rho(x, C) = \|x - z\|$, имеет вид

$$z = \begin{cases} x_0 + \dfrac{r}{\|x - x_0\|}(x - x_0) & \text{при} \quad \|x - x_0\| \geqslant r, \\ x & \text{при} \quad \|x - x_0\| < r. \end{cases}$$

5.15. Вычислите проекцию элемента $x(t) = 10 \sin \pi t$ на шар

$$\overline{S}(x_0, 3) \subset L_2(0,1), \quad \text{где} \quad x_0(t) = t.$$

5.16. Докажите, что в произвольном гильбертовом пространстве H оператор проектирования $P_C : H \to C$ на замкнутое выпуклое множество $C \subset H$ является **нерастягивающим**:

$$\|P_C\, x - P_C\, y\| \leqslant \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in H.$$

5.17. Пусть L – линейное многообразие в предгильбертовом пространстве H, а x – точка, отстоящая от L на расстоянии d, т. е.

$$d = \rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|.$$

Докажите, что для любых $u_1, u_2 \in L$ справедливо **неравенство Леви**

$$\|u_1 - u_2\| \leqslant \sqrt{\|x - u_1\|^2 - d^2} + \sqrt{\|x - u_2\|^2 - d^2}.$$

5.18. Пусть L – одномерное пространство в гильбертовом пространстве H, $a \in L$, $a \neq \theta$. Покажите, что для любого $x \in H$

$$\rho(x, L^{\perp}) = \frac{|(x, a)|}{\|a\|}.$$

5.19. Установите ортогональность системы элементов (x_n) в гильбертовом пространстве H, если

а) $H = L_2(\mathbb{R}_+)$, $\quad x_n(t) = e^{\frac{t}{2}} \dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}),\ n \geqslant 0$;

б) $H = L_2(0, 2\pi)$, $\quad x_n(t) : 1, \cos t, \sin t, \ldots, \cos nt, \sin nt \ldots$;

в) $H = L_2(0, 1)$, $\quad x_n(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin \mu_n} \sin \mu_n t$,

где (μ_n) – положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu = \mu$.

5.20. Докажите, что система **полиномов Лежандра**

$$p_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}\big[(t^2 - 1)^n\big], \quad c_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ортогональна в пространстве $L_2(-1, 1)$.

5.21. В линейном пространстве непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $x(t)$ таких, что

$$\int_0^\infty |x(t)|^2 e^{-t} dt < +\infty,$$

положим

$$(x, y) = \int_0^\infty x(t) y(t) e^{-t} dt;$$

1) проверьте выполнение аксиом скалярного произведения;

2) рассмотрев независимую систему $1, t, t^2, \ldots$ и получив в результате ее ортогонализации ортогональную систему полиномов **Чебышёва – Лаггера**, найдите три ее первых полинома.

5.22. Проведите ортогонализацию элементов $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$, $x_4(t) = t^3$ в пространстве $L_2(0,1)$ (постройте четыре первых элемента ортогональной системы).

5.23. В пространстве $L_2(0,1)$ найдите проекцию элемента $x(t)=t^3$ на подпространство полиномов степени $m \leqslant n$, если $n = 0, 1, 2$.

5.24. Для функции $x(t) = e^t$ найдите полиномы $p_n(t)$ степени $n = 0, 1, 2$ такие, что норма $\|x(t) - p_n(t)\|$ минимальна в пространстве $L_2(-1,1)$.

5.25. В пространстве $C[0,1]$ найдите расстояние:

а) от элемента $x(t) = t$ до подпространства полиномов нулевой степени;

б) от элемента $y(t) = t^2$ до подпространства полиномов степени $\leqslant 1$.

5.26. Найдите наилучшее приближение функции $t^2 e^{-t}$ в $L_2(-1,1)$ с помощью полиномов третьей степени.

5.27. Найдите расстояние от функции:

а) $x(t) = |t|$;

б) $x(t) = \cos 2t + \sin 4t$

до подпространства, натянутого на функции

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2t, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 3t.$$

5.28. Докажите, что функции $\varphi_n(t) = \sqrt{2/\pi}\sin nt$, $n \geqslant 1$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, а в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$ образуют лишь ортогональную систему, не являющуюся базисом.

5.29. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ – фиксированная последовательность положительных чисел. Обозначим через $l_{2,\alpha}$ множество всех последовательностей $x = (x_1, x_2, \ldots)$, для которых

$$\sum_{n \geqslant 1} \alpha_n |x_n|^2 < +\infty.$$

Докажите, что $l_{2,\alpha}$ со скалярным произведением

$$(x,y) = \sum_{n \geqslant 1} \alpha_n x_n y_n, \qquad (y = (y_1, y_2, \ldots) \in l_{2,\alpha})$$

является сепарабельным гильбертовым пространством.

Решение. Заметим, что скалярное произведение определено корректно, т. к. из очевидного неравенства

$$\alpha_n|x_n y_n| \leqslant \frac{\alpha_n}{2}\big(|x_n|^2+|y_n|^2\big)$$

следует абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n x_n y_n.$$

Проверка справедливости аксиом скалярного произведения не вызывает затруднений.

Докажем полноту полученного предгильбертова (пока!) пространства $l_{2,\alpha}$. С этой целью возьмем произвольную фундаментальную последовательность $x_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots)$ в $l_{2,\alpha}$. Фундаментальность (x_k), $k\geqslant 1$, означает, что

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,k_0:\;\forall\,m,l>k_0\;\;\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n|x_n^{(m)}-x_n^{(l)}|^2<\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что для каждого $r\in\mathbb{N}$ гарантированно

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant r}\alpha_n|x_n^{(m)}-x_n^{(l)}|^2<\varepsilon^2. \tag{$*$}$$

В свою очередь, из неравенства (*) следует сходимость последовательности $x_n^{(k)}$, $k\geqslant 1$, при каждом фиксированном $n\in\mathbb{N}$ к некоторому пределу $x_n^{(\infty)}$:

$$x_n^{(\infty)}=\lim_{k\to\infty}x_n^{(k)}.$$

Устремляя в неравенстве (*) l к бесконечности и фиксируя m, получим

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant r}\alpha_n|x_n^{(m)}-x_n^{(\infty)}|^2\leqslant\varepsilon^2\quad\forall\,m>k_0.$$

Поскольку последнее неравенство верно для произвольного r, то

$$\|x_m-x_\infty\|_{2,\alpha}\equiv\sqrt{\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n|x_n^{(m)}-x_n^{(\infty)}|^2}<\varepsilon\quad\forall\,m>k_0. \tag{$**$}$$

Наконец, из сходимости рядов

$$\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n|x_n^{(m)}|^2,\qquad\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n|x_n^{(m)}-x_n^{(\infty)}|^2$$

следует сходимость ряда

$$\sum_{n\geqslant 1}\alpha_n|x_n^{(\infty)}|^2$$

(в силу очевидного неравенства $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)$). Но это означает, что $x_\infty=(x_1^{(\infty)},x_2^{(\infty)},\ldots)\in l_{2,\alpha}$ и вместе с (**) завершает доказательство полноты $l_{2,\alpha}$. Таким образом, $l_{2,\alpha}$ – гильбертово пространство.

Для доказательства сепарабельности $l_{2,\alpha}$ в качестве счетного всюду плотного множества следует рассмотреть множество последовательностей с конечным (своим для каждой последовательности) числом рациональных компонент, отличных от нуля.

5.30. В пространстве $l_{2,\alpha}$ (см. задачу 5.29) постройте ортонормированный базис, если а) $\alpha_n=n$, б) $\alpha_n=n^2$, в) $\alpha_n=e^{-n}$ $(n\geqslant 1)$.

Тема 6: Линейные операторы и функционалы

Линейный оператор, функционал: непрерывность, ограниченность, норма. График оператора. Ядро оператора. Сопряженное пространство. Пространство линейных ограниченных операторов. Принцип равномерной ограниченности.

Задачи общего характера

6.1. Пусть X, Y – линейные пространства, $A:\mathcal{D}(A)\subseteq X\to R(A)\subseteq Y$ – линейный оператор. Докажите, что если система элементов $x_1,x_2,\ldots,$ $x_n\in\mathcal{D}(A)$ линейно зависима, то система $Ax_1,Ax_2,\ldots,$ Ax_n также линейно зависима. Что можно сказать о системе $Ax_1,Ax_2,\ldots,$ Ax_n в случае линейной независимости элементов $x_1,x_2,\ldots,x_n$?

6.2. Докажите, что для линейного оператора $A:\mathcal{D}(A)\subseteq X\to R(A)\subseteq Y$ образ $A(M)$ всякого выпуклого множества M из $\mathcal{D}(A)$ является выпуклым множеством. Верно ли обратное?

6.3. Подмножество

$$G_A=\{(x,Ax),x\in\mathcal{D}(A)\}$$

декартова произведения $X\times Y$ называют **графиком оператора** $A:\mathcal{D}(A)\subseteq X\to R(A)\subseteq Y$. Докажите, что если A – линейный оператор, то G_A – линейное многообразие в $X\times Y$.

6.4. Если на линейном пространстве X заданы две эквивалентные нормы, то линейный оператор $A:X\to Y$ в обеих нормах будет одновременно ограниченным или неограниченным. Докажите.

6.5. Докажите, что функционал $\varphi:\mathcal{L}(X,Y)\to\mathbb{R}$, определяемый формулой $\varphi(A)=\|A\|$, непрерывен.

6.6. Докажите, что линейный функционал f в линейном нормированном пространстве X непрерывен точно тогда, когда его ядро $\ker f$ замкнуто в X.

6.7. Пусть X – линейное нормированное пространство, $f\colon X \to \mathbb{R}$ – линейный функционал, причем для любой последовательности $(x_n)\subset X$, $n \geqslant 1$, такой, что $x_n \to \Theta$, $n \to \infty$, множество чисел $\big(f(x_n)\big)$ ограничено. Докажите, что $f \in X^*$.

Операторы и функционалы в конечномерных пространствах

6.8. Покажите, что оператор $A : \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\big) \to \big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\big)$, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} y_1 = ax_1 + ax_2, \\ y_2 = -bx_1 - bx_2, \end{cases}$$

линеен, и найдите его норму.

Решение. Оценим сначала величину $\|Ax\|_2$:

$$\|Ax\|_2 = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{2(a^2 + b^2)} \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}\|x\|_2,$$

откуда следует, что $\|A\| \leqslant \sqrt{2(a^2 + b^2)}$. Но поскольку для вектора $x_0 = (1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ с $\|x_0\|_2 = 1$

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 \geqslant \|Ax_0\|_2 = \sqrt{2(a^2 + b^2)},$$

то окончательно получаем, что $\|A\| = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.

6.9. Норма линейного функционала, действующего в $\big(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2\big)$, равна $\sqrt{13}$, а его значение в точке (1,1) равно – 1. Найдите значение этого функционала в точке (0,1).

6.10. Докажите, что норма линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемого соотношениями

$$(Ax)_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

индуцированная:

а) векторной нормой $\|\cdot\|_\infty$;

б) векторной нормой $\|\cdot\|_1$,

вычисляется соответственно по формуле:

а) $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |a_{ij}|;$

б) $\|A\|_1 = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |a_{ij}|.$

6.11. Установите формулы для вычисления нормы линейного оператора задачи 6.10, индуцированной следующими векторными нормами:

$$\text{а) } \|x\| = \max_{1\leqslant k\leqslant n} s_k|x_k|; \qquad \text{б) } \|x\| = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} s_k|x_k|,$$

где $s_1, \ldots, s_n$ – фиксированный набор положительных чисел.

6.12.* Докажите, что для произвольного линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\|A\|_p \leqslant \|A\|_\infty^{1-\frac{1}{p}} \|A\|_1^{\frac{1}{p}},$$

где $\|A\|_p$ – норма оператора A, индуцированная **гёльдеровой векторной нормой**

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

а $\|A\|_\infty$ индуцирована векторной нормой $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

6.13. Вычислите норму линейного оператора $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, индуцированную следующей нормой вектора:

а) $\|x\| = \max\{|x_1|;\ |x_2 - x_1|/h\}$, где $h > 0$ фиксировано;

б) $\|x\| = |x_1 + x_2| + |3x_1 - x_2|$.

Операторы и функционалы в пространствах последовательностей

6.14. Оператор A, действующий в l_2, определен формулой:

а) $Ax = \Big(x_1, \dfrac{1}{2}x_2, \dfrac{1}{3}x_3, \ldots\Big);$

б) $Ax = \Big(\dfrac{1}{2}x_1, \dfrac{2}{3}x_2, \ldots, \dfrac{n}{n+1}x_n, \ldots\Big);$

в) $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$

для $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$. Найдите норму A.

6.15. Докажите, что оператор $Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$ принадлежит $\mathcal{L}(l_p)$, $1 \leqslant p < \infty$ точно тогда, когда $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in m$.

Определение. Линейный оператор A, действующий из пространства последовательностей X в пространство последовательностей Y, называется ***матричным***, если он задается формулой

$$y = Ax,$$

где $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $x = (x_1, x_2, \ldots) \in X$, $y = (y_1, y_2, \ldots) \in Y$. В этом случае говорят, что A порождается матрицей (a_{ij}), $i, j = 1, 2, \ldots$.

6.16.* Докажите, что матричный оператор A принадлежит пространству $\mathcal{L}(l_p, m)$ точно тогда, когда

$$\sup_{i\geqslant 1} \sum_{j\geqslant 1} |a_{ij}|^q < +\infty, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{$*$}$$

Решение. Достаточность. Пусть выполнено условие $(*)$. Введем следующее обозначение

$$\alpha \equiv \sup_{i\geqslant 1} \left(\sum_{j\geqslant 1} |a_{ij}|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как в силу неравенства Гёльдера для $(x_1, x_2, \ldots) \in l_p$

$$\left| \sum_{j\geqslant 1} a_{ij}x_j \right| \leqslant \alpha \|x\|_p \quad \forall\, i \geqslant 1,$$

то формула

$$(Ax)_i = \sum_{j\geqslant 1} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots$$

определяет линейный ограниченный (матричный) оператор, действующий из l_p в m, причем

$$\|A\| \leqslant \alpha.$$

Докажем, что $\|A\| = \alpha$. С этой целью опишем предварительно один прием, который вытекает непосредственно из определения нормы линейного ограниченного оператора. Поскольку в бесконечномерных пространствах единичная сфера не обладает свойством компактности, то непрерывный функционал $\|Ax\|$ может не достигать на ней, в частности, своего наибольшего значения. Поэтому, замечая, что определение нормы линейного оператора равносильно выполнению условий

1) $\|Ax\| \leqslant \alpha \;\; \forall\, x \in \sigma(\theta, 1)$,

2) $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, x_\varepsilon \in \sigma(\theta, 1) : \; \|Ax_\varepsilon\| > \alpha - \varepsilon$,

сначала устанавливают неравенство 1), а затем подбирают на единичной сфере элемент со свойством 2) или, что то же, строят последовательность $(x_n) \subset \sigma(\theta, 1)$, для которой $\|Ax_n\| \to \alpha$ при $n \to \infty$.

Итак, условие 1) нами доказано. Установим условие 2). Согласно $(*)$ для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер i_0 такой, что

$$\left(\sum_{j\geqslant 1} |a_{i_0 j}|^q\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha - \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность

$$x_0 = \frac{1}{\left(\sum\limits_{k\geqslant 1} |a_{i_0 k}|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \big(|a_{i_0 1}|^{q-1} \operatorname{sign} a_{i_0 1}, \ldots, |a_{i_0 j}|^{q-1} \operatorname{sign} a_{i_0 j}, \ldots\big).$$

Очевидно, что $x_0 \in l_p$ и $\|x_0\|_p = 1$. А так как

$$\|Ax_0\|_m = \sup_{i\geqslant 1} \left|\sum_{j\geqslant 1} a_{ij} x_j^{(0)}\right| \geqslant \left|\sum_{j\geqslant 1} a_{i_0 j} x_j^{(0)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\left(\sum\limits_{k\geqslant 1} |a_{i_0 k}|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \left|\sum_{j\geqslant 1} a_{i_0 j} |a_{i_0 j}|^{q-1} \operatorname{sign} a_{i_0 j}\right| =$$

$$= \left(\sum_{j\geqslant 1} |a_{i_0 j}|^q\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha - \varepsilon,$$

то выполнено и условие 2).

Необходимость. Пусть оператор A действует из l_p в m. Это означает, что для каждого $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$

$$\sup_{i\geqslant 1} \left|\sum_{j\geqslant 1} a_{ij} x_j\right| < +\infty. \qquad (**)$$

Если ввести в рассмотрение линейные функционалы

$$f_i(x) = \sum_{j\geqslant 1} a_{ij} x_j,$$

то условие $(**)$ примет вид

$$|f_i(x)| \leqslant K(x) \qquad \forall\, i \geqslant 1, \qquad (***)$$

где $K(x)$ – положительная константа, зависящая от x.

Заметим, что поскольку

$$f_i(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{1\leqslant j\leqslant m} a_{ij}x_j$$

и функционалы

$$f_i^{(m)}(x) = \sum_{1\leqslant j\leqslant m} a_{ij}x_j$$

являются линейными ограниченными, то для каждого $i \geqslant 1$ последовательность $(f_i^{(m)})$ поточечно сходится к f_i. Так как пространство l_p является банаховым, то, как известно, **сопряженное** пространство l_p^* будет банаховым в смысле поточечной сходимости. Отсюда следует, что при каждом $i \geqslant 1$ функционал f_i является ограниченным. Но тогда из $(***)$ и **принципа равномерной ограниченности** получаем, что последовательность норм $(\|f_i\|)$ ограничена:

$$\sup_{i\geqslant 1} \|f_i\| < +\infty. \qquad (****)$$

По **теореме Рисса** об общем виде линейного функционала в l_p $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots) \in l_q$ при каждом i и

$$\|f_i\| = \left(\sum_{j\geqslant 1} |a_{ij}|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

что вместе с $(****)$ дает $(*)$.

6.17. Найдите необходимые и достаточные условия для того, чтобы матричный оператор A принадлежал: а) $\mathfrak{L}(l_p, c)$, $1 < p < \infty$; б) $\mathfrak{L}(l_1, m)$; в) $\mathfrak{L}(c_0, m)$.

6.18. Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_1$. Докажите, что формула

$$f(x) = \sum_{k\geqslant 1} \alpha_k x_k,$$

где $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in m$, определяет линейный функционал. Докажите, что $f \in l_1^*$ и вычислите $\|f\|$.

6.19. Докажите, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найдите их нормы:

а) $f(x) = x_1 + x_2$ в l_2; в m;

б) $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{x_k}{k}$ в l_2; в l_1;

в) $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{2^n}\left(x_{2n-1} - x_{2n}\right)$ в l_2;

г) $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} \Big(1 - \dfrac{1}{k}\Big) x_k$ в l_1;

д) $f(x) = \sum\limits_{k\geqslant 1} 2^{-k+1} x_k$ в c_0;

е) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ в c;

$x = (x_1, x_2, \ldots)$.

Операторы и функционалы в пространствах функций

6.20. Являются ли в пространстве $C[0,1]$ операторы

$$Ax(t) = x(t)\cdot \operatorname{sign} x\Big(\frac{1}{2}\Big), \quad Bx(t) = \max_{0\leqslant s\leqslant t} x(s)$$

а) линейными; б) ограниченными?

6.21. В пространстве $C[-1,1]$ рассмотрим операторы

$$Ax(t) = \frac{1}{2}\big[x(t) + x(-t)\big]; \qquad Bx(t) = \frac{1}{2}\big[x(t) - x(-t)\big].$$

Докажите, что A и B – ограниченные линейные операторы и найдите их нормы. Являются ли A и B проекторами?

(Если X – банахово пространство, то оператор $A \in \mathcal{L}(X)$, удовлетворяющий условию $A^2 = A$, называется **проектором**).

6.22. Вычислите нормы интегральных операторов в пространстве $C[0,1]$:

а) $Ax(t) = \int\limits_0^1 t^n s^m x(s)\,ds$.

Решение. Оценим сначала величину $\|Ax\|_C$:

$$|Ax(t)| \leqslant t^n \int\limits_0^1 s^m ds \cdot \|x\|_C = \frac{1}{m+1} t^n \|x\|_C \leqslant \frac{1}{m+1}\|x\|_C.$$

Следовательно, $\|Ax\|_C \leqslant \dfrac{1}{m+1}\|x\|_C$, откуда $\|A\| \leqslant \dfrac{1}{m+1}$. Легко увидеть, что $\|Ax_0\|_C = \dfrac{1}{m+1}\|x_0\|_C$ для функции $x_0(t) \equiv 1$, а значит, $\|A\| = \dfrac{1}{m+1}$.

б) $Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\,ds$;

в) $Ax(t) = \int\limits_0^1 \sin\pi(t-s)x(s)\,ds.$

Значения норм интегральных операторов задачи 6.21 могут быть получены и с помощью следующего общего утверждения.

6.23. Пусть функция $K(t,s)$ определена и непрерывна в квадрате $a\leqslant t,\ s\leqslant b$. Покажите, что норма оператора A, действующего в $C[a,b]$ по формуле

$$\big(Ax\big)(t) = \int\limits_a^b K(t,s)x(s)\,ds,$$

равна $\|A\| = \max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}\int\limits_a^b |K(t,s)|ds.$

6.24. Докажите, что следующие операторы являются линейными ограниченными и найдите их нормы:

а) $Ax(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds,$ $\quad A: C[0,1]\to C[0,1];$

б) $Ax(t) = x(t),$ $\quad A: C[-1,1]\to C[0,1];$

в) $Ax(t) = t^2x(0),$ $\quad A: C[0,1]\to C[0,1];$

г) $Ax(t) = x(t^2)$ $\quad A: C[0,1]\to C[0,1];$

д) $Ax(t) = x(t),$ $\quad A: C^{(1)}[0,1]\to C[0,1];$

е) $Ax(t) = \dfrac{d}{dt}x(t),$ $\quad A: C^{(1)}[a,b]\to C[0,1];$

ж) $Ax(t) = t\int\limits_0^1 x(s)\,ds,$ $\quad A: L_2(0,1)\to L_2(0,1);$

з) $Ax(t) = \begin{cases} x(t), & 0<t\leqslant\lambda<1,\\ 0, & 0<\lambda\leqslant t<1,\end{cases}$ $\quad A: L_2(0,1)\to L_2(0,1).$

6.25. Убедитесь в том, что для операторов

$$\big(Ax\big)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds, \qquad \big(Bx\big)(t) = tx(t),$$

действующих в пространстве $C[0,1]$, имеет место строгое неравенство

$$\|AB\| < \|A\|\,\|B\|.$$

6.26. Пусть $\alpha\geqslant 0$ фиксировано, C_α – банахово пространство непрерывных на $\mathbb{R}_+$ функций $x(t)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} e^{\alpha t}|x(t)| < +\infty$$

с нормой

$$\|x\|_\alpha = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} e^{\alpha t} |x(t)|.$$

Докажите, что

а) функция $x(t) = t^\sigma e^{-\gamma t} \in C_\alpha$ при $\gamma > \alpha$, $\sigma \geqslant 0$ и

$$\|x\|_\alpha = e^{-\sigma} \Big(\frac{\sigma}{\gamma - \alpha} \Big)^\sigma;$$

б) непрерывная функция $x(t)$ принадлежит пространству C_α тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $M > 0$, что

$$|x(t)| \leqslant M e^{-\alpha t};$$

в) оператор B умножения: $Bx(t) = b(t)x(t)$, где $b(t) \in C_\beta$, $\beta \geqslant 0$, является непрерывным линейным оператором, действующим из пространства C_α в пространство $C_{\alpha+\beta}$, причем $\|B\| = \|b\|_\beta$;

г) интегральный оператор Вольтерра вида

$$Ax(t) = \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)} x(s)\, ds$$

является при $\beta > \alpha \geqslant \gamma$ непрерывным линейным оператором, действующим из пространства C_α в пространство C_γ, причем

$$\|A\| = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \gamma = \alpha, \\[2ex] \Big[\dfrac{(\alpha - \gamma)^{\alpha - \gamma}}{(\beta - \gamma)^{\beta - \alpha}} \Big] \dfrac{1}{\beta - \alpha}, & \gamma < \alpha. \end{cases}$$

Решение. В предположении, что $\gamma < \alpha$, установим, прежде всего, существование положительной константы c, для которой неравенство $\|Ax\|_\gamma \leqslant c\|x\|_\alpha$ выполняется при всех $x(t) \in C_\alpha$.

Для любого $t \geqslant 0$ и любой функции $x(t) \in C_\alpha$

$$e^{\gamma t}|Ax(t)| = e^{\gamma t} \Big| \int\limits_0^t e^{-\beta(t-s)} x(s\, ds) \Big| \leqslant e^{(\gamma - \beta)t} \int\limits_0^t e^{(\beta - \alpha)s} ds \|x\|_\alpha =$$

$$= \frac{1}{\beta - \alpha} \Big(e^{-(\alpha - \gamma)t} - e^{-(\beta - \gamma)t} \Big) \|x\|_\alpha \leqslant \frac{1}{\beta - \alpha} \sup_{t \geqslant 0} \Big(e^{-(\alpha - \gamma)t} - e^{-(\beta - \gamma)t} \Big) \|x\|_\alpha,$$

откуда с учетом определения нормы в C_γ получаем

$$\|Ax\|_\gamma \leqslant \sup_{t \geqslant 0} \frac{e^{-(\alpha-\gamma)t} - e^{-(\beta - \gamma)t}}{\beta - \alpha} \|x\|_\alpha \equiv \sup_{t \geqslant 0} \varphi(t) \cdot \|x\|_\alpha.$$

Таким образом, в качестве искомой константы c может быть взято наибольшее значение функции $\varphi(t)$. Стандартными рассуждениями получаем, что

$$\sup_{t\geqslant 0}\varphi(t)=\varphi\Big(\frac{1}{\beta-\alpha}\ln\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\Big)=\frac{1}{\beta-\alpha}\Big[\Big(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\Big)^{-\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}}-\Big(\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}\Big)^{-\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}\Big]=$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\Big(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\alpha}}\Big(1-\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big)=\Big(\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}\Big)^{\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\alpha}}\cdot\frac{1}{\beta-\gamma}=\Big[\frac{(\alpha-\gamma)^{\alpha-\gamma}}{(\beta-\gamma)^{\beta-\gamma}}\Big]^{\frac{1}{\beta-\alpha}}\equiv c,$$

а значит, $\|A\|\leqslant c$.

Наконец заметим, что для функции $x_0(t)=e^{-\alpha t}$, $\|x_0\|_\alpha=1$:

$$\|Ax_0\|_\gamma=c\|x_0\|_\alpha,$$

а потому $\|A\|=c$.

6.27. Будет ли ограниченным оператор $Ax(t)=x'(t)$ с областью определения $\mathcal{D}(A)$ – линейным многообразием непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ функций?

6.28. Является ли ограниченным дифференциальный оператор $A:C^{(l)}[0,1]\to C[0,1]$, определяемый выражением

$$Ax(t)=a_0(t)x(t)+a_1(t)x'(t)+\dots+a_l(t)x^{(l)}(t),$$

в котором $a_k(t)\in C[0,1]$, $k=0,1,\dots,l$?

6.29. На линейном многообразии пространства $C[-1,1]$, состоящем из дифференцируемых в точке 0 функций, задан функционал $f(x)=x'(0)$. Является ли этот функционал непрерывным?

6.30. Пусть A – оператор, действующий в пространстве $C[0,1]$ и определенный формулой

$$Ax(t)=\int\limits_0^t x(s)\,ds.$$

Докажите, что

$$A^n x(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^t (t-s)^{n-1}x(s)\,ds.$$

6.31. В пространстве $C[a,b]$ задан функционал

$$f(x)=\sum_{1\leqslant k\leqslant n}x(t_k),$$

где $t_1, \ldots, t_n$ – фиксированные точки отрезка $[0,1]$. Покажите, что этот функционал линеен, и найдите его норму.

6.32. Докажите, что для любого конечного множества точек $t_1, \ldots, t_n$ из $[a,b]$ и любых чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ функционал

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x(t_k)$$

в $C[a,b]$ линеен, и найдите его норму.

6.33. Будут ли линейными ограниченными в пространстве $C[0,1]$ функционалы:

а) $f(x) = \int\limits_0^1 x(\sqrt{t})dt$,

б) $f(x) = \int\limits_0^1 x(t^2)dt$,

в) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 x(t^n)dt$?

6.34. Вычислите нормы функционалов:

а) $f(x) = \int\limits_a^b x(t)dt$ в $C[a,b]$;

б) $f(x) = \int\limits_0^1 (1-t^2)x(t)dt$ в $C[0,1]$;

в) $f(x) = \int\limits_{-1}^1 \left(\frac{1}{4} - t^2\right)x(t)dt$ в $C[-1,1]$;

г) $f(x) = \int\limits_0^{1/2} x(t)dt - \int\limits_{1/2}^1 x(t)dt$ в $C[0,1]$;

д) $f(x) = \int\limits_0^{3.5} (t^2 - 2t - 3)x(t)dt$ в $C[0,3.5]$.

Решение д). Предварительно заметим, что для функционала вида

$$f(x) = \int_a^b \mu(t)x(t)dt$$

с неотрицательной на $[a,b]$ функцией $\mu(t)$ норма вычисляется по формуле (покажите это!)

$$\|f\| = \int_a^b \mu(t)dt.$$

Для заданного функционала функция $\mu(t) = t^2 - 2t - 3$ знакопеременна на отрезке $[0, 3.5]$, поэтому воспользуемся следующим приемом: установив оценку $|f(x)| \leqslant \alpha\|x\|$, построим последовательность элементов $(x_n) \subset \sigma(\theta, 1)$, таких что $|f(x_n)| \to \alpha$ при $n \to \infty$. Последнее будет означать, что $\|f\| = \alpha$.

Итак, оценим сначала величину $|f(x)|$:

$$|f(x)| \leqslant \int\limits_0^{3.5} |t^2 - 2t - 3|\,|x(t)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_0^3 (3 + 2t - t^2)dt + \int\limits_3^{3.5} (t^2 - 2t - 3)dt \right\} \|x\|_C = \frac{229}{24}\|x\|_C,$$

так что функционал f ограничен и $\|f\| \leqslant 229/24$. Покажем, что $\|f\| = 229/24$. Для этого построим «срезывающую» последовательность непрерывных функций $x_n(t) \in C[0, 3.5]$ следующего вида (выполните чертеж):

$$x_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad t \in [0, 3 - \frac{1}{n}], \\ nt - 3n & \text{при} \quad |t - 3| \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 1 & \text{при} \quad t \in [3 + \frac{1}{n}, 3.5]. \end{cases}$$

Осталось вычислить предел последовательности $\big(|f(x_n)|\big)$:

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_0^{3-\frac{1}{n}} (3 + 2t - t^2)dt + n \int\limits_{|t-3|\leqslant\frac{1}{n}} (t^2 - 2t - 3)(t - 3)dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{3+\frac{1}{n}}^{3.5} (t^2 - 2t - 3)dt \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{229}{24} - \frac{4}{n^2} + n \int\limits_{|t-3|\leqslant\frac{1}{n}} (t^3 - 5t^2 + 3t + 9)dt \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{229}{24} - \frac{4}{3n^2} \right| = \frac{229}{24},$$

откуда следует, что $\|f\| = 229/24$.

6.35. Пусть ряд $\sum\limits_{k\geqslant1} \lambda_k$ абсолютно сходится, а (t_k) – произвольная последовательность точек из отрезка $[a, b]$. Докажите, что функционал

$$f(x) = \sum_{k\geqslant1} \lambda_k x(t_k)$$

линеен, а его норма в $C[a,b]$ равна

$$\|f\| = \sum_{k\geqslant 1} |\lambda_k|.$$

6.36. Докажите, что норма функционала

$$f(x) = \int\limits_a^b \mu(t)x(t)dt$$

в пространстве $C[a,b]$, где $\mu(t) \in C[a,b]$, равна

$$\|f\| = \int\limits_a^b |\mu(t)|dt$$

(ср. с задачей 6.33, а) – в), д)).

6.37. Докажите, что следующие функционалы в пространстве $C[-1,1]$ являются линейными непрерывными и найдите их нормы:

а) $f(x) = \frac{1}{3}[x(-1) + x(1)]$;

б) $f(x) = 7[x(\ln\sqrt{2}) - x(0)]$;

в) $f(x) = \frac{1}{2\varepsilon}[x(\varepsilon) + x(-\varepsilon) - 2x(0)], \quad \varepsilon \in [-1,1]$;

г) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt - x(0)$;

д) $f(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)dt - \frac{1}{2n+1} \sum\limits_{-n\leqslant k\leqslant n} x\left(\frac{k}{n}\right)$.

6.38. Докажите ограниченность **интегрального оператора** $A: C[a,b] \to C[a,b]$ **со слабо сингулярным ядром**, задаваемого формулой

$$\big(Ax\big)(t) = \int\limits_a^b \frac{k(t,s)}{|t-s|^\alpha} x(s)\, ds, \qquad t \in [a,b],$$

в которой $k(t,s) \in C\big([a,b]\times[a,b]\big)$, $\alpha \in (0,1)$.

Тема 7: Основные принципы линейного анализа

Равномерная сходимость последовательности линейных ограниченных операторов, поточечная сходимость. Принцип равномерной ограниченности. Обратимый оператор, обратный оператор, односторонняя обратимость. Теорема Банаха об обратном операторе. Непрерывно обратимый оператор. Продолжение линейного оператора (функционала). Теорема Банаха – Хана.

7.1. Каков характер сходимости последовательности операторов $A_n : l_2 \to l_2$ вида

$$A_n x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots), \quad n \geqslant 1, \;\; x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_2$$

к тождественному оператору?

7.2. Исследуйте сходимость последовательности операторов (A_n) предыдущей задачи, рассмотрев вместо l_2 пространства l_1, m.

7.3. Докажите, что последовательность операторов

$$\big(A_n x\big)(t) = x(t^{1+\frac{1}{n}}), \quad n \geqslant 1,$$

определенных на $C[0,1]$, поточечно сходится к тождественному оператору, но не равномерно.

7.4. Исследуйте характер сходимости последовательности операторов $(A_n) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ к оператору $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, если

а) $A_n x = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$ $\quad A = \theta, \;\; X = Y = l_2;$

б) $\big(A_n x\big)(t) = \big(t^n - t^{2n}\big)x(t),$ $\quad A = \theta, \;\; X = C^{(1)}[0,1], \; Y = C[0,1];$

в) $\big(A_n x\big)(t) = \big(1 - t^n\big)x(t),$ $\quad A = I, \;\; X = L_2(0,1), \; Y = L_1(0,1).$

7.5. Воспользуйтесь принципом равномерной ограниченности для доказательства следующего утверждения: если (x_n), $n \geqslant 1$ – ортогональная система элементов гильбертова пространства H, то условия

а) ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ сходится;

б) ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} (x_n, y)$ сходится при каждом $y \in H$

равносильны.

7.6. Докажите, что обратимость линейного оператора $A : X \to X$ (X – банахово) следует из обратимости оператора A^n при некотором $n \geqslant 1$.

7.7. Докажите, что если для некоторой пары операторов $A, B : X \to X$ выполняется равенство $BA = I$, то оно не гарантирует обратимости A (соответственно B).

7.8. Являются ли обратимыми операторы
$Ax = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$,
$Bx = \Big(\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \ldots, \frac{n}{n+1}x_n, \ldots\Big)$,
$Cx = (x_1 - x_2, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$,
$Dx = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$
в пространстве l_2?

7.9. Докажите непрерывную обратимость следующих операторов:

а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$,
$\big(Ax\big)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (1 - ts)x(s)\,ds$;

б) $A : C[0,1] \to C[0,1]$,
$\big(Ax\big)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 (s\cos\pi t - \frac{1}{2})x(s)\,ds$;

в) $A : C^{(2)}[0,1] \to C^{(2)}[0,1]$,
$\big(Ax\big)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 tsx(s)\,ds$.

7.10. Исследуйте обратимость операторов:

а) $A : C[0,1] \to C[0,1]$,
$\big(Ax\big)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$;

б) $A : l_2 \to l_3$,
$Ax = (0, 2x_1, 3x_2, \ldots, nx_{n-1}, \ldots)$;

в) $A : l_2 \to l_2$,
$Ax = (x_2 - x_1, x_2 + x_3, 2x_2 - x_1, x_4, x_5, \ldots)$.

Решение а). Покажем, что оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, действующий по правилу

$$\big(Ax\big)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds,$$

не имеет ограниченного обратного. Прежде всего, заметим, что $\mathcal{D}(A)=C[0,1]$ и $\|A\|=1$. Более того, $\ker A=\{\theta(t)\}$, $\theta(t)\equiv 0 \ \ \forall\, t\in[0,1]$; область же значений $\mathcal{R}(A)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условию $y(0) = 0$. А так как ядро оператора A содержит только нулевой элемент пространства $C[0,1]$, то этот оператор отображает $C[0,1]$ на $\mathcal{R}(A)$ взаимнооднозначно и, следовательно, обладает обратным $A^{-1} : \mathcal{R}(A) \to C[0,1]$.

Обратный оператор допускает представление

$$\big(A^{-1}y\big)(t) = \frac{d}{dt}y(t), \qquad y(t) \in \mathcal{R}(A), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

поскольку для произвольных функций $y(t) \in C[0,1]$ и $x(t) \in C[0,1]$

$$A\big(A^{-1}y(t)\big) = \int\limits_0^t y'(s)ds = y(t) \qquad (\text{т. к. } y(0) = 0\,),$$

$$A^{-1}\big(Ax(t)\big) = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_0^t x(s)\,ds\Big) = x(t).$$

Однако обратный оператор A^{-1} не является ограниченным на линейном многообразии $\mathcal{R}(A)$: если взять последовательность элементов $\big(y_n(t)\big) \subset \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A)$ вида $y_n(t) = \sin nt$, $n \geqslant 1$, то $\|y_n\|_C \leqslant 1$ и $\|A^{-1}y_n\|_C = n \to +\infty$ при $n \to \infty$, т. е. A^{-1} неограничен.

7.11. Пусть $L = \{x(t) \in C^{(2)}[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$ – подпространство пространства $C^{(2)}[0,1]$. Определим оператор $A : L \to C[0,1]$ равенством:

а) $\big(Ax\big)(t) = x''(t)$;

б) $\big(Ax\big)(t) = x''(t) + x(t)$;

в) $\big(Ax\big)(t) = x''(t) + \lambda x(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

г) $\big(Ax\big)(t) = x''(t) + x'(t)$;

д) $\big(Ax\big)(t) = x''(t) - 2x'(t) + x(t)$.

Обратим ли оператор A? Найдите A^{-1} в случае обратимости.

7.12. Пусть $L = C[0,1]$ – линейное многообразие трижды непрерывно дифференцируемых на промежутке $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условиям: $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$. Докажите, что оператор $\big(Ax\big)(t) = x'''(t) + x''(t)$, действующий из $\mathcal{D}(A) \equiv L$ в $C[0,1]$, является непрерывно обратимым.

Решение. Воспользуемся следующим известным утверждением: линейный оператор $A : X \to Y$ (X, Y – нормированные пространства) непрерывно обратим тогда и только тогда, когда $R(A) = Y$ и для некоторой константы $m > 0$ и всех $x \in \mathcal{D}(A)$ имеет место неравенство $\|Ax\|_Y \geqslant m\|x\|_X$.

Взяв произвольную функцию $y(t) \in C[0,1]$, рассмотрим уравнение $Ax = y$, т. е. уравнение

$$x'''(t) + x''(t) = y(t) \qquad (*)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x'(0) = x''(0) = 0. \qquad (**)$$

Так как корнями соответствующего $(*)$ характеристического уравнения $\lambda^3 + \lambda^2 = 0$ являются числа $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_3 = -1$, то фундаментальную систему решений уравнения $x'''(t) + x''(t) = 0$ образуют функции $e^{-t}, t, 1$. Общее решение уравнения найдем методом вариации произвольных постоянных в виде $x(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)t + c_3(t)$, где функции $c_1(t)$, $c_2(t)$, $c_3(t)$ являются решениями системы

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t)t + c_3'(t) = 0, \\ -c_1'(t)e^{-t} + c_2'(t) = 0, \\ c_1'(t)e^{-t} = y(t), \end{cases}$$

откуда

$$c_1(t) = \int_0^t e^s y(s)\,ds + d_1; \qquad c_2(t) = \int_0^t y(s)ds + d_2;$$
$$c_3(t) = -\int_0^t (s+1)y(s)ds + d_3,$$

здесь d_1, d_2, d_3 – произвольные постоянные. Таким образом, общее решение уравнения $(*)$ принимает вид

$$x(t) = d_1 e^{-t} + d_2 t + \int_0^t (e^{s-t} + t - s - 1)y(s)ds. \qquad (***)$$

Из множества функций, описываемых формулой $(***)$, выделим ту, которая удовлетворяет начальным условиям $(**)$:

$$x(t) = \int_0^t (e^{s-t} + t - s - 1)y(s)\,ds.$$

Это решение (в силу общей теоремы существования и единственности решения задачи Коши) является единственным в задаче $(*)$–$(**)$.

Далее, так как согласно последней формуле

$$\|x\|_C \leqslant \frac{2e+3}{2}\|y\|_C,$$

т. е.
$$\|Ax\|_C \geqslant \frac{2}{2e+3}\|x\|_C \quad \forall\, x \in L,$$
то A непрерывно обратим и
$$\begin{aligned}&\big(A^{-1}y\big)(t) = \int\limits_0^t (e^{s-t}+t-s-1)y(s)\,ds \quad \forall\, y(t) \in C[0,1],\\ &\|A^{-1}\| \leqslant \frac{2e+3}{2}.\end{aligned}$$

7.13. Постройте продолжения указанных ниже функционалов с подпространства $L \subset X$ на все пространство X:

а) $f(x) = x_1 - x_2;\;\; L = \{x{=}(x_1,x_2,x_3){\in}\mathbb{R}^3 : x_1{+}x_2{+}x_3{=}0\},\;\; X{=}\mathbb{R}^3;$

б) $f(x) = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k;\;\; L = \Big\{x{\in}l_2 : \sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{x_k}{k} = 0\Big\},\;\; X{=}l_2.$

7.14. Постройте линейный непрерывный функционал f на пространстве $C[0,1]$ такой, что $f(x) = 0$ для любого $x = x(t)$ из подпространства $L = \{x(t) \in C[0,1] : x(0) = x(1) = 0\}$ и $f(x_0) = 2,\; f(x_1) = 2,$ где $x_0 = x_0(t) \equiv 1,\; x_1 = x_1(t) = t.$

7.15. Докажите, что линейное многообразие L всюду плотно в нормированном пространстве X, если всякий функционал $f \in X^*$, равный нулю на L, тождественно равен нулю.

Решение. Предположим обратное: $\overline{L} \neq X$. Тогда для произвольного $x_0 \in X \setminus \overline{L}$ справедливо соотношение
$$\rho(x_0, \overline{L}) = \inf_{u\in\overline{L}} \|x_0 - u\| > 0.$$
Согласно следствию из **теоремы Банаха – Хана** в этом случае будет существовать линейный непрерывный функционал f такой, что $\mathcal{D}(f) = X,\; f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in \overline{L}$ и $f(x_0) = 1$, т. е. $f(x) \not\equiv 0$. Полученное противоречие и доказывает требуемое равенство $\overline{L} = X$.

Тема 8: Спектр линейного оператора

Спектральный радиус линейного ограниченного оператора. Формула Гельфанда – Бёрлинга. Квазинильпотентный оператор. Регулярное значение, резольвентное множество, резольвента. Спектр точечный, непрерывный, остаточный.

8.1. Докажите, что если λ является регулярным значением линейного оператора A, т. е. $\lambda \in \rho(A)$, то $\lambda \in \rho(A+B)$ при условии, что нормы резольвенты $\mathcal{R}(\lambda; A)$ оператора A и «возмущения» B связаны неравенством
$$\|B\| < \|\mathcal{R}(\lambda; A)\|^{-1}.$$

8.2. Верно ли, что если комплексное число λ таково, что $\|A^n\| < |\lambda|^n$ для некоторого $n \geqslant 1$, то $\lambda \in \rho(A)$?

8.3. Пользуясь **формулой Гельфанда – Бёрлинга** для спектрального радиуса

$$\operatorname{spr} A = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A\|^n}, \qquad A \in \mathcal{L}(X),$$

вычислите спектральные радиусы следующих операторов, действующих в пространстве $X = C[0,1]$:

а) $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds, \quad t \in [0,1];$

б) $(Bx)(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\,ds;$

в) $(Cx)(t) = a(t)x(t), \quad a(t) \in C[0,1].$
Опишите спектры этих операторов.

8.4. Пусть $A, B \in \mathcal{L}(X)$, X – банахово пространство. Докажите, что

а) $\operatorname{spr}(\alpha A) = |\alpha| \operatorname{spr} A \qquad \forall\, \alpha \in K;$

б) $\operatorname{spr}(A+B) \leqslant \operatorname{spr} A + \operatorname{spr} B$ и $\operatorname{spr}(AB) \leqslant \operatorname{spr}(A) \cdot \operatorname{spr}(B)$, если операторы A и B коммутируют.

8.5. Покажите, что оператор Вольтерра

$$(Ax)(t) = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)\,ds, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

с непрерывным ядром $K(t,s)$ является **квазинильпотентным** в пространстве $C[a,b]$, т. е. $\operatorname{spr} A = 0$.

8.6. Убедитесь в квазинильпотентности оператора $(Ax)(t){=}tx(t^2)$ в пространстве $C[0,1/2]$.

8.7. Найдите $\operatorname{spec} A$ и $\operatorname{spr} A$ для оператора $A : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 \ln(ts)x(s)\,ds.$$

8.8. Найдите спектры и постройте резольвенты следующих интегральных операторов в пространствах $C[a,b]$ и $L_2(a,b)$:

а) $(Ax)(t) = \int\limits_0^{\pi/2} (\sin t + t\cos s)x(s)\,ds;$

б) $(Bx)(t) = \int\limits_{-1}^{1} \dfrac{1+ts}{1+s^2} x(s)\, ds.$

8.9. Вычислите спектральный радиус оператора $Ax(t) = x(0) + tx(1)$, действующего в пространстве $C[0,1]$.

8.10. Докажите, что в общем случае последовательность $\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ не является монотонно убывающей.
(*Указание:* рассмотрите в $\mathbb{R}^2$ оператор A, задаваемый матрицей $\begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}$, $a > 0$, $b > 0$).

8.11. Найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры в пространстве m следующих операторов:

а) $Ax = (0, 0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}, \ldots)$;

б) $Bx = \left(\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots, \frac{1}{n}x_n, \ldots\right)$;

в) $Cx = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots, \alpha_n x_n, \ldots)$,

где $\alpha_{2n} = 2 + \dfrac{1}{n}$, $\alpha_{2n-1} = 3 - \dfrac{1}{n^2}$.

8.12. Для операторов задачи 8.11 найдите точечный, непрерывный и остаточный спектры, заменив пространство m на а) c_0; б) l_2.

8.13. Исследуйте структуру спектра оператора $Ax = (x_2, x_3, \ldots)$ в пространстве l_p, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.

Решение. Оператор A является линейным, непрерывным и его норма равна 1, а потому $\operatorname{spec} A$ расположен в круге $\overline{S}(\theta, 1) \subset \mathbb{C}$.

Уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевые решения, причем каждое такое решение имеет вид $x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_1, \ldots)$. При $|\lambda| < 1$ этот вектор принадлежит пространству l_p при всех $p \in [1, +\infty)$. Если же $|\lambda| = 1$, то $x \in m$ $(= l_\infty)$, но $x \notin l_p$ при $1 \leqslant p < +\infty$. Таким образом, при $p = +\infty$ круг $\overline{S}(\theta, 1)$ целиком заполнен точечным спектром оператора A. Если же $p \in [1, +\infty)$, то точечный спектр заполняет внутренность круга $\overline{S}(\theta, 1)$. А поскольку спектр является множеством замкнутым, то весь круг $\overline{S}(\theta, 1)$ является спектром исходного оператора.

Тема 9: Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

Производная и дифференциал Гато. Производная Фреше.

9.1. Докажите, что производная Гато нелинейного оператора $F : X \to Y$ определяется однозначно (X, Y – нормированные пространства).

9.2. Покажите, что для функционала $f(x)=\operatorname{sign} x_2 \cdot \min\{|x_1|, |x_2|\}$, $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ существует дифференциал Гато по любому направлению $h\in\mathbb{R}^2$, но $f(x)$ не имеет производной Гато в точке $x_0=\theta$.

9.3. Покажите, что для отображения $F;\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ вида

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x_2(x_1^2+x_2^2)^{\frac{3}{2}}}{(x_1^2+x_2^2)^2+x_2^2} & \text{при} \quad x\neq\theta, \\ \theta & \text{при} \quad x=\theta \end{cases}$$

в точке $x_0=\theta$ существует производная Гато, но не существует производная Фреше.

9.4.* **Тензорным произведением квадратных** $n\times n$**-матриц** $A,B\in M_{nn}(\mathbb{R})$ называется квадратная $n^2\times n^2$-матрица, обозначаемая через $A\otimes B$ и имеющая следующий вид:

$$A\otimes B=\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix},$$

где $A=(a_{ij})$, $1\leqslant i,j\leqslant n$.

Докажите, что если отображения $F,G:M_{nn}(\mathbb{R})\to M_{nn}(\mathbb{R})$ дифференцируемы по Фреше в каждой «точке» $X\in M_{nn}(\mathbb{R})$, то производная Фреше $\Phi'(X)$ отображения $\Phi(X)=F(X)G(X)$ вычисляется по формуле

$$\Phi'(X)=(F(X)\otimes I)G'(X)+(I\otimes G^T(X))F'(X) \quad \forall\, X\in M_{nn}(\mathbb{R}).$$

9.5. Исследуйте на дифференцируемость по Фреше следующие отображения:

а) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $F(x)=Ax$, где $A\in M_{mn}(\mathbb{R})$,

б) $F:X\to Y$, X,Y – нормированные пространства, $F(x)=Ax$, где $A\in\mathcal{L}(X,Y)$;

в) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $F(x)=\|x\|_2^2$.

9.6. В каких точках пространства $\mathbb{R}^n$ функционалы

а) $F(x)=\|x\|_2$;

б) $F(x)=\|x\|_\infty$;

в) $F(x)=\|x\|_1$

не дифференцируемы по Фреше?

9.7. Найдите производные Фреше следующих отображений а) $F : L_2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt,$ где $y(t) \in L_2(0,1)$;

б) $F : L_2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int\limits_0^1 x^3(t)\,dt$;

в) $F : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = x(0)x(1)$;

г) $F : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1], \quad (Fx)(t) = \sqrt{1 + (x'(t))^2}$;

д) $F : C^{(1)}[t_0,t_1] \to \mathbb{R}, \quad F(x) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(s, x(s), x'(s))\,ds,$

$f(s,x,y) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$.

Решение г). В соответствии с определением производной Фреше составим разность

$$F(x+h)(t) - Fx(t) = \sqrt{1 + \big(x'(t) + h'(t)\big)^2}$$

для таких функций $h(t) \in C^{(1)}[0,1]$, норма которых

$$\|h\|_{(1)} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t)| + \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |x'(t)|$$

мала. Тогда, используя разложение функции $\sqrt{1+x}$ для малых x, будем иметь

$$F(x+h)(t) - Fx(t) = \sqrt{1 + \big(x'(t)\big)^2}\left(\left(1 + \frac{2x'(t)h'(t) + (h'(t))^2}{1 + (x'(t))^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1\right) =$$

$$= \sqrt{1 + \big(x'(t)\big)^2}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{2x'(t)h'(t) + (h'(t))^2}{1 + (x'(t))^2} + o(h'(t)) - 1\right) =$$

$$= \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + \big(x'(t)\big)^2}} h'(t) + o(h'(t)).$$

Поскольку $o(h'(t))/\|h\|_{(1)} \to 0$ при $\|h\|_{(1)} \to 0$, то

$$F'(x(t))h(t) = \frac{x'(t)}{\sqrt{1 + \big(x'(t)\big)^2}} h'(t).$$

9.8. Вычислите производную Фреше оператора $F : C[0,1] \to C[0,1]$, если

а) $(Fx)(t) = \int\limits_0^1 x(s)ds + x^2(t), \quad x_0(t) = -1$;

б) $(Fx)(t) = t^2 e^{x(t)}, \quad x_0(t) = t$.

в) $(Fx)(t)=\int\limits_0^1 \cos(ts)\sin x(s)\,ds,\;\; x_0(t)=\sin t;$

г) $(Fx)(t)=x(0)+\int\limits_0^t tse^{x(s)}\,ds\;\; x_0(t)=0.$

9.9. Найдите $F'(x)$ для $F: L_2(0,1)\to\mathbb{R}$, если

а) $F(x)=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \sin(t-s)x(s)x(t)dsdt;$

б) $F(x)=\int\limits_0^1\int\limits_0^t tsx(s)x(t)dsdt;$

в) $F(x)=\int\limits_0^1 \big(x(s)-\sin s\big)x(s)ds.$

9.10. Вычислите производную Фреше:

а) оператора $F: c\to c, \quad F(x)=(0,x_1^3,x_2^3,\ldots);$

б) функционала $F: l_2\to\mathbb{R}, \quad F(x)=x_2^2+\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x_n}{n};$

в) функционала $F: l_2\to\mathbb{R}, \quad F(x)=\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{x_n^3}{n^3}-\sum\limits_{n\geqslant 1}x_n^4.$

Рекомендуемая литература

1. Данилин А.Р. Функциональный анализ [электронный ресурс]: учебное пособие / А.Р.Данилин. − Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2012. − 200 с. // Университетская библиотека online – http.: /biblioclub.ru/

2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа [Текст]: учебник / А.Н.Колмогоров. − 7-е изд. – М.: Физматлит, 2012. − 572с. Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.

3. Садовничий В.А. Теория операторов [Текст]: учебник / В.А.Садовничий. − 4-е изд. – М,: Дрофа, 2001. − 384с . Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.

4. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ. [Текст]: учебник / Б.З.Вулих. − 2-е изд.− М.: Наука, 1967. − 415с.

5. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа [Текст]: учебник / Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. − М.: Высшая школа, 1982. − 271с.

6. Шамин Р.В. Функциональный анализ от нуля до единицы [Текст]: учебник / Р.В.Шамин . − М.: Ленанд. 2016. − 272с.