Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 16.06.2023 13:46:30
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра информационных систем и технологий

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
«15» _________ 2018 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Методические указания для выполнения практических занятий
для студентов направления подготовки
02.04.03 Математическое обеспечение и администрирование
информационных систем
Профиль «Информационные системы и базы данных»

Курск 2018

УДК 621.(076.1)

Составитель: В.П. Добрица, Е.А. Кулешова

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент И.В. Калуцкий

Дополнительные главы дискретной математики: методические указания для выполнения практических заданий для студентов направления подготовки 02.04.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем / Курск. Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, Е.А. Кулешова. – Курск, 2018. – 44 с.: табл. 1. – Библиогр.: с. 43.

В методических указаниях представлены тематика и планы практических занятий по дисциплине «Дополнительные главы дискретной математики» в соответствии с учебным планом направления подготовки 02.04.03 – «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем». Изложены требования и даны рекомендации по выполнениюпрактических заданий.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 02.04.03– «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.02.18 Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,3. Тираж 100 экз. Заказ 1437 Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Методические рекомендации для обучающихся по освоению дисциплины

Основными видами аудиторной работы студента при изучении дисциплины «Дополнительные главы дискретной математики» являются лекции и практические занятия. Студент не имеет права пропускать занятия без уважительных причин.

На лекциях излагаются и разъясняются основные понятия темы, связанные с ней теоретические и практические проблемы, даются рекомендации для самостоятельной работы. В ходе лекции студент должен внимательно слушать и конспектировать материал.

Изучение наиболее важных тем или разделов дисциплины завершают практические занятия, которые обеспечивают: контроль подготовленности студента; закрепление учебного материала; приобретение опыта ведения дискуссии, в том числе аргументации и защиты выдвигаемых положений и тезисов.

Практическому занятию предшествует самостоятельная работа студента, связанная с освоением материала, полученного на лекциях, и материалов, изложенных в учебниках и учебных пособиях, а также литературе, рекомендованной преподавателем.

Качество учебной работы студентов преподаватель оценивает по результатам тестирования, собеседования, устным выступлениям, контрольным работам, а также по результатам докладов.

Преподаватель уже на первых занятиях объясняет студентам, какие формы обучения следует использовать при самостоятельном изучении дисциплины «Дополнительные главы дискретной математики»: конспектирование учебной литературы и лекций, выполнение индивидуальных практических заданий т. п.

В процессе обучения преподаватель использует активные формы работы со студентами: чтение лекций, привлечение студентов к творческому процессу на лекциях, промежуточный контроль путем отработки студентами пропущенных лекции, участие в групповых и индивидуальных консультациях (собеседовании). Эти формы способствуют выработке у студентов умения работать с учебником и литературой. Изучение литературы составляет значительную часть самостоятельной работы студента. Это большой труд, требующий усилий и желания студента. В самом начале работы над книгой важно определить цель и направление этой работы. Прочитанное следует закрепить в памяти. Одним из приемов закрепление освоенного материала является конспектирование, без которого немыслима серьезная работа над литературой. Систематическое конспектирование помогает научиться правильно, кратко и четко излагать своими словами прочитанный материал.

Самостоятельную работу следует начинать с первых занятий. От занятия к занятию нужно регулярно прочитывать конспект лекций, знакомиться с соответствующими разделами учебника, читать и конспектировать литературу по каждой теме дисциплины. Самостоятельная работа дает студентам возможность равномерно распределить нагрузку, способствует более глубокому и качественному усвоению учебного материала. В случае необходимости студенты обращаются за консультацией к преподавателю по вопросам дисциплины «дополнительные главы дискретной математики» с целью усвоения и закрепления компетенций.

Аудиторная работа по дисциплине «Дополнительные главы дискретной математики» складывается из лекционных и практических занятий.

Таблица 1 – Содержание дисциплины и его методическое обеспечение

№ п/п	Раздел учебной дисциплины	Виды учебной деятельности (в часах)			Учебно-методические материалы	Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* Форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*	Компетенции
		Лек.	Лаб.	Пр.			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Комбинаторика	4	-	6	[1], [2], [3] [6], [13], [18]	Сдача заданий.	ОК-1, ОПК-4, ПК-1
2	Элементы теории алгебраических систем	6	-	6	[1], [2], [5], [12], [16], [25]	Сдача заданий.	ОК-1, ОПК-4, ПК-1
3	Теория графов	10	-	10	[1], [2], [3], [5], [11], [13], [17]	Сдача заданий.	ОК-1, ОПК-4, ПК-1
	Всего	18	-	18			

В данных методических указаниях рассматриваются темы указанные в таблице 1.

По каждой теме представлены:

1) краткие теоретические положения;
2) перечень вопросов, выносимых на практическое задание;
3) задачи, выносимые на самостоятельную работу магистров.

Тема № 1 Комбинаторика

Работа №1
Перестановки, размещения и сочетания

Цель: Изучить определения и формулы расчёта основных понятий комбинаторики (перестановки, размещения и сочетания) и научиться использовать их при решении типовых комбинаторных задач.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.
1. Предмет изучения комбинаторики.
2. Правило произведения в комбинаторике.
3. Понятие факториала. Перестановки без повторений. Перестановки с повторениями.
4. Размещения без повторений и размещения с повторениями.
5. Сочетания без повторений и сочетания с повторениями.

Краткие теоретические положения

Комбинаторными задачами принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

Факториал от n – это функция, определённая на множестве целых положительных чисел и представляющая собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n, где каждое число встречается только 1 раз $n!=1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n$. Заметим, что принято считать $0!=1$.

Правило произведения в комбинаторике

Если 1 элемент множества A может быть выбран n способами, а после него второй элемент из множества B – m способами, то выбор того и другого элемента в заданном порядке может быть осуществлен N способами, где: N=n×m.

Перестановки
Перестановки без повторений

Пусть дано множество вида: A=$\{a_1, a_2 \ldots a_n\}$. Перестановками без повторений называется упорядоченные последовательности, включающие в себя все элементы множества A точно по 1 разу, но отличается между собой порядком расположения элементов.

Формула расчёта числа перестановок без повторений имеет вид:

$$P_n = n!$$

Перестановки с повторениями

Даныn_1 элементов вида 1 (неразличимых между собой), n_2 элементов вида 2, … , n_k элементов вида k.

Из этих элементов образуют n-элементные последовательности, содержащие все перечисленные элементы

n=$n_1 + n_2 + \cdots n_k$.

Количество перестановок, образующих различные последовательности, рассчитывается по формуле:

$$\dot{P}_n = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Размещения

Размещение без повторений

Дано множество A, содержащее n элементов. Размещениями без повторений называется упорядоченные последовательности длины $m \leq n$, в которых каждый элемент множества встречается не более 1 раза. Различными считаются последовательности, отличающиеся либо составом элементов, либо порядком расположения элементов.

Количество размещений без повторений из n элементов по m элементов рассчитывается по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \ .$$

Размещения с повторениями

Размещения с повторениями отличаются от размещений без повторений тем, что одни и те же элементы могут многократно входить в рассматриваемую последовательность.

Количество размещений с повторениями из n элементов по m элементов рассчитываем по формуле: $\dot{A}_n^m = n^m$.

Сочетания

Сочетания без повторений

Дано множество A, содержащее nэлементов. Сочетаниями без повторений называются неупорядоченные последовательности длины m, в которых каждый элемент множества A встречается не более 1 раза. Различными считаются последовательности, отличающиеся составом элементов. Подчеркнем, что последовательности, отличающиеся только порядком расположения элементов, не считаются различными. Количество сочетаний без повторений из n элементов по m элементов рассчитываем по формуле: $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Сочетания с повторениями

Сочетания с повторениями отличается от сочетаний без повторений тем, что в них могут входить повторяющиеся элементы.

Количество сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов рассчитываем по формуле:

$$f_n^m = \dot{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!\,(n-1)!} = C_{n+m-1}^m$$

То есть число сочетаний с повторениями подсчитывается по формуле сочетаний без повторений с другими параметрами.

ВАРИАНТ №1.

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно образовать из букв слова "ученик":

2. В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

3. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число *2*5? в число 3*7*?

4. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого—9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?

5. В букинистическом магазине продаются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, имеется 5 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

6. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

7. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

ВАРИАНТ №2

1. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2- санитара. Сколькими способами можно выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

2. Сколько различных трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова “ромб”?

3. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться? Решите ту же задачу при условии допустимости повторения цифр.

4. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между четырьмя студентами?

5. Из полного набора шахмат вынули 4 фигуры или пешки. В скольких случаях среди них окажется: а) два коня, б) не менее двух коней?

6. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждой команде должно быть, хотя бы по одному юноше?

7. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

8. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

ВАРИАНТ №3

1. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?

2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?

3. На железнодорожной станции имеются t светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?

4. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет разного достоинства?

5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова “выборка”?

6. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников и 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?

7. На прямой взятыt точек, а на параллельной ей прямой —***n*** точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

8. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников может вручаться только одна книга)?

ВАРИАНТ №4

1. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен? Постройте «дерево» для всех возможных положении переключателей.

2. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

4 . Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

5. На прямой взятыt точек, а на параллельной ей прямой — ***n***точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти **точки?**

6. Сколько букв алфавита можно составить из пяти сигналов используемых в каждой букве, если три сигнала — импульсы тока, а два — паузы?

7. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по

математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

8. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают только женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины?

ВАРИАНТ №5

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех букв, можно образовать из букв слова «студент»?
2. В группе 8 девушек и 6 юношей. Для участия в соревнованиях требуется представить команду из 3 человек, в которой одна девушка. Сколько вариантов выбора команды существует?
3. Сколько можно получить различных шестизначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число *2*5*5?
4. Студенты получили в библиотеке учебники. У одного из них имеется 3 книг по математике, а у другого—9 по другим предметам. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?
5. В букинистическом магазине продаются 5 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 4 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 3 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, имеется 7 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 6 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?
6. Имеется 4 чашки, 12 блюдец и 5 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?
7. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на белых полях шашечной доски?
8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 2 до 8, или от 11 до 14?

ВАРИАНТ №6

1. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех различных букв, можно образовать из букв слова «студент»?
2. В районе выбирают двух депутатов в местные органы и одного в федеральные. В выборах принимают участие 3 партии и 5 независимых представителей. Оцените число возможных вариантов выбора депутатов.

3. Сколько можно получить различных шестизначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число 3*7*2*?
4. Студенты получили в библиотеке учебники. У одного из них имеется 9 книг по математике, а у другого—3 по другим предметам. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?
5. Для студентов имеется 3 пары предметов по выбору. Студент должен из каждой пары выбрать по крайней мере один предмет. Общее число выбранных предметов для студента не должно превышать 5. Сколькими способами может осуществиться выбор предметов студентом?
6. Имеется 5 чашки, 7 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?
7. Сколькими способами можно расставить 16 белых и 16 черных фигур на черных полях шахматной доски?
8. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина его одного ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10, другого от 2 до 6, а третьего от3 до 5?

ВАРИАНТ №7

1. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 2 первых, 4 вторых и 3 третьих блюда?

2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из четных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется? Такой же вопрос при условии возможности повторения цифр.
3. На перекрестках дорог города имеется n светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?
4. Сколькими способами можно разложить в три кошелька 10 монет разного достоинства?
5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова “перестройка”?
6. В состав сборной по футболу включены 2 вратаря, 7ащитников, 6 полузащитников и 3 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 4 защитника, 4 полузащитника и 2 нападающих?
7. На прямой взятым точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?
8. Для премий на олимпиаде выделено 4 экземпляра одной книги, 3 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 15 человек (каждому из участников может вручаться не более одной книги)?

ВАРИАНТ №8

1. Сколько различных команд по футболу может выставить клуб, если в клубе имеется 3 вратаря, 11 защитников 8 полузащитников и 5 нападающих, ели в команде не менее 3 защитников и не менее одного нападающего?
2. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из цифр от 1 до 7 при условии, что ни одна цифра не повторяется? Тот же вопрос при условии возможности повторения цифр.
3. Каждый из 35 делегатов может поддержать предложение, проголосовать «против» или воздержаться. Сколько может быть различных комбинаций итогов голосования по одному предложению?
4. Сколькими способами можно расставить 4 ладьи на шахматной доске так, чтобы ни одна из них не была под боем другой?
5. Сколько «слов», каждое из которых состоит из восьми различных букв, можно составить из букв слова “университет”? Тот же вопрос при условии возможности повторения букв.
6. В состав сборной по футболу включены 2 вратаря, 7 защитников, 6 полузащитников и 3 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 4 защитника, 5 полузащитников и 1 нападающий?
7. На прямой взято m точек, а на параллельной ей прямой — n точек. Сколько существует четырехугольников, вершинами которых являются эти точки по две на каждой прямой?
8. На студенческую конференцию из группы в 23 человека выбирают три делегата. Сколькими способами могут быть вручены делегаты?

Работа №2

Формула включений и исключений и бином Ньютона

Цель: Изучить методику использования формулы включений и исключений для решения задач по определению количества элементов в множестве. Изучить методику разложения выражения $(a+b)^n$ по формуле бинома Ньютона.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Формула включений и исключений.
2. Формула бинома Ньютона.
3. Свойства биномиальных коэффициентов.
4. Треугольник Паскаля.

Краткие теоретические положения

Формула включений и исключений

Пусть даны конечные множества $P_1, P_2, .. P_n$. Количество элементов в этих множествах обозначаем $|P_1|$,$|P_2|$,..$|P_n|$.

Тогда существует следующие правила суммы (формула включений и исключений)

а) $|P_1 \cup P_2| = |P_1| + |P_2| - |P_1 \cap P_2|$

б) $|P_1 \cup P_2 \cup P_3| = |P_1| + |P_2| + |P_3| - |P_1 \cap P_2| - |P_1 \cap P_3| - |P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_3|$

в) В случае n множеств правило суммы имеет вид:
$|P_1 \cup P_2 \cup .. P_n| = |P_1|+|P_2| + \cdots + |P_n| - (|P_1 \cap P_2| + |P_1 \cap P_3| + \cdots |P_{n-1} \cap P_n|) + (|P_1 \cap P_2 \cap P_3| + |P_1 \cap P_2 \cap P_4| + \cdots |P_{n-2} \cap P_{n-1} \cap P_n|) - \cdots + (-1)^{n-1}|P_1 \cap P_2 \cap \ldots \cap P_n|$.

Формула бинома Ньютона

Для произвольного положительного целого числа n справедлива следующая формула: $(a+b)^n = C_n^0 a^{n-0} b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \cdots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + C_n^n a^0 b^{n-0} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{n-m} b^m$

Это формула бинома Ньютона. Коэффициенты C_n^m называются биномиальными коэффициентами. При n=2 и n=3 получаем следующие формулы: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Свойство биномиальных коэффициентов

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$
2) $C_n^m = C_n^{n-m}$
3) $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$
4) $\sum_{m=0}^{n} C_n^m = 2^n$
5) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots$

То есть сумма биномиальных коэффициентов с чётными верхними индексами равна сумме биномиальных коэффициентов с нечётными верхними индексами.

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля позволяет найти значения биномиальных коэффициентов и имеет общий вид:

$$C_0^0$$

$$C_1^0 C_1^1$$

$$C_2^0 C_2^1 \quad C_2^2$$

$C_3^0 C_3^1 \quad C_3^2 C_3^3$

и так далее…

Строки под номером n содержит биномиальные коэффициенты разложения бинома$(a+b)^n$.

Воспользовавшись свойством $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$, можно заметить, что каждый внутренний элемент треугольника равен сумме двух соседних элементов, расположенных над ним, а боковые элементы треугольника всегда равны единице.

ВАРИАНТ №1.

1. Из ста учеников девятых классов на первом экзамене получили отличные и хорошие оценки 80%, на втором экзамене - 72%, на третьем - 60%.

Какое может быть наименьшее число учащихся, получивших отличные и хорошие оценки на всех трех первых экзаменах?

2. Каждый из учеников класса в зимние каникулы ровно два раза был в кинотеатре, при этом фильмы A, B, C видели соответственно 25,12 и 23 ученика. Сколько учеников в классе? Сколько из них видели спектакли A и B, A и C, B и C?

ВАРИАНТ №2

1. Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали экзамен 210 абитуриентов.

Сколько человек получили оценки 3 и 4?

2. В течении недели по телевизору демонстрировались фильмы: боевик A, вестерн B и мелодрама C. Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм A видели 13, фильм B - 16, фильм C -19. Найдите, сколько учеников просмотрели все три фильма.

ВАРИАНТ N3

1. В школе 1400 учеников. Из них 1250 умеют кататься на лыжах, 952 на коньках. Ни на лыжах, ни на коньках не умеют кататься 60 учащихся. Сколько учащихся умеют кататься и на лыжах и на коньках?

2. В 92-процессорном ЭВС 19 микропроцессоров обрабатывают текстовую информацию, 17 - графическую, 11 - символьную, 12 - микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую и текстовую, 7 - текстовую и символьную, 5 - графическую и символьную, а часть микропроцессоров одновременно обрабатывают графическую, текстовую и символьную информацию. Сколько микропроцессоров являются универсальными, если при решении задачи не задействованы 67 микропроцессоров.

ВАРИАНТ №4

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского ни французского языка?

2. Сколько студентов из группы в 30 человек изучают по свободному учебному плану три дисциплины, если известно; 19 студентов изучают по свободному плану Дискретную математику, 17 - алгебру, 11 - матлогику. 12 - Дискретную математику и алгебру, 7 - Дискретную математику и матлогику, 5 - алгебру и матлогику, а пять студентов обучается по типовому плану.

ВАРИАНТ №5

1. Сколькими способами 6 человек могут выбрать из 6 пар различных перчаток поправой и левой перчатки так, чтобы ни один из них не получил пары?

2. Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют группу в 12 человек по двум предметам. Каждый учащийся отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами экзаменаторы могут распределить между собой работу так, чтобы ни одному экзаменующемуся не пришлось отвечать сразу по двум предметам?

ВАРИАНТ №6

1. Сколькими способами 8 человек могут выбрать из 9 пар различных перчаток поправой и левой перчатки так, чтобы ни один из них не получил пары?

2. В отделе работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 – знают английский, 6 – немецкий, 7 французский, 4 - знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – английский и французский, 1 знает все три языка. Сколько человек работает в отделе?

ВАРИАНТ №7

1. У повара 7 друзей. Он приглашает их на обед в течении 7 дней по 3 человека. Сколькими способами он может сделать так, чтобы ни какие 3 не встречались дважды?
2. В отделе работают несколько человек. Каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 – знают английский, 6 – немецкий, 7 французский, 4 - знают английский и немецкий, 3 – немецкий и французский, 2 – английский и французский, 1 знает все три языка. Сколько человек знают только один язык?

ВАРИАНТ № 8

1. У повара 7 друзей. Сколькими способами можно составить 7 компаний по 3 человека так, чтобы никто не остался не приглашенным?
2. В загородную поездку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 48 человек, с сыром – 38, с ветчиной – 42, с сыром и колбасой – 28, с колбасой и ветчиной - 31, с сыром и ветчиной – 26. 25 человек взялис собой бутерброды всех трех видов, а несколько человек вместо бутербродов взяли пироги. Сколько человек взяли с собой пироги?

<u>Бином Ньютона</u>

ВАРИАНТ №1

1. Разложить по формуле бином Ньютона$\left(2-\sqrt[7]{x}\right)^{7}$.
2. Найти восьмой член в разложении бинома Ньютона $\left(\frac{1}{X}+\sqrt{X}\right)^{14}$

ВАРИАНТ №2

1. Разложить по формуле бином Ньютона$\left(3+\sqrt[6]{x}\right)^{6}$.
2. Найти пятый член разложения бинома$\left(x-\sqrt[7]{x}\right)^{12}$.

ВАРИАНТ №3

1. Разложить по формуле бином Ньютона $(3 - \sqrt[5]{x})^5$.

2. Найдите номер члена разложения $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$, не содержащего x.

ВАРИАНТ №4

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(2 + \sqrt[8]{x}\right)^8$.

2. Сколько членов разложения бинома $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[3]{7})^{36}$ являются целыми числами?

ВАРИАНТ №5

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(2y + \sqrt[3]{x}\right)^8$.
2. Найти восьмой член в разложении бинома Ньютона $(\sqrt[5]{3} + \sqrt[4]{7})^{26}$.

ВАРИАНТ №6

1. Разложить по формуле бином Ньютона $(5 - \sqrt[3]{x})^6$.
2. Имеются ли в разложении бинома $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{x}\right)^{24}$ члены, не содержащие x. Если они есть, то указать их номера.

ВАРИАНТ №7

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{x}\right)^{14}$.
2. Найти пятый член разложения бинома $(1 - \sqrt[4]{x})^7$.

ВАРИАНТ №8

1. Разложить по формуле бином Ньютона $\left(y + \sqrt[3]{x}\right)^6$.
2. Найти пятый член разложения бинома $\left(\sqrt[4]{x} + \frac{1}{x}\right)^{24}$.

Тема № 2.Алгебраические системы. Группа. Группа перестановок

РАБОТА **№ 3.**

Цель: изучить алгебраические системы, группы, группы перестановок.

Краткие теоретические сведения

Под *алгеброй* понимается множество с заданными на нём операциями.

Моделью называется множество, рассматриваемое с заданными на нём отношениями.

Если задана совокупность операций f_i и отношений P_j , то тем самым определена *сигнатура*$\sigma = \{f_i, P_j | i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$.

Алгебраическая система$\langle M;\ \sigma\rangle$ задана, если на множестве M заданы и операции f_i и отношения P_j .

Непустое множество *A* с бинарной операцией *f* называется *группой*, если в этом множестве:

1. Определено бинарное отношение равенства элементов,

2. Заданная внутренняя бинарная операция *f*, обладает свойствами:

   1) ассоциативностью $af(bfc) = (afb)fc.$,

   2) относительно этой операции в множестве *A* есть нейтральный элемент, т.е. выполняются равенства

   $afe = efa = a$,

   3) каждый элемент a множества A обладает обратным (симметричным) a^{-1} , т.е. выполняются равенства $afa^{-1} = a^{-1}fa = e.$

При этом говорят, что *A* есть группа относительно операции *f.*

Группу относительно сложения называют аддитивной группой. Группу относительно умножения называют мультипликативной группой.

Если операция, относительно которой задана группа, коммутативна, то группа называется коммутативной или абелевой.

Утверждение 1. В группе существует только один нейтральный элемент.

Утверждение 2. В группе для каждого элемента существует только один симметричный ему элемент.

Утверждение 3. В группе *A* относительно операции *f* уравнение *afx* = *b* с одним неизвестным *x* разрешимо, причем однозначно, при любых *a* и *b*∈*A*.

Утверждение 4. В группе *A* относительно операции *f* уравнение *yfa* = *b* с одним неизвестным *y* разрешимо, причем однозначно, при любых *a*, *b*∈*A*.

Замечание: при фиксированных a и $b \in A$ уравнение $afx = b$ имеет и притом только одно решение $\alpha \in A$, а уравнение $yfa = b$ имеет и притом только одно решение $\beta \in A$. Если операция f для группы A некоммутативна, то α не обязано равняться β.

Утверждение 5. Если a – элемент группы A относительно операции f, то из $a\,f\,x = a\,f\,y$ следует $x = y$.

Второе определение группы.

Непустое множество A называется *группой* относительно внутренней бинарной операции f, если

1. Операция f алгебраическая,
2. Операция f ассоциативна,
3. Всегда разрешимы, причем однозначно, уравнения: $afx = b$ и $yfa = b$.

Вопросы, выносимые на практические занятия

1. Отображения и отношения.
2. Операции на множестве.
3. Понятие алгебры, модели, алгебраической системы.
4. Полугруппа, моноид, группа.
5. Подгруппа. Пересечение подгрупп.
6. Коммутативные группы.
7. Порождающие множества.
8. Циклические группы.
9. Порядок элемента.
10. Перестановки и подстановки. Группа перестановок. Подгруппы группы перестановок.
11. Циклический индекс группы перестановок.
12. Комбинаторные оценки различных классов отображений.
13. Цикловые классы.
14. Перестановки с заданным числом циклов.
15. Транзитивные группы подстановок.

Практические задания

Задание 1. (По вариантам)

1. Доказать, что $\delta_R = \emptyset \Leftrightarrow R = \emptyset \Leftrightarrow \rho_R = \emptyset$.
2. Доказать, что $\delta(R^{-1}) = \rho R$, $\rho(R^{-1}) = \delta R$.
3. Доказать, что $\delta_{(R_1 \circ R_2)} = R_1^{-1}(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.

4. Доказать, что $\rho_{(R_1 \circ R_2)} = R_2(\rho_{R_1} \cap \delta_{R_2})$.
5. Доказать, что: $\delta_{R^{-1}} = \rho_R, \rho_{R^{-1}} = \delta_R$.
6. Доказать, что: $\delta_R \neq \emptyset \Leftrightarrow R \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho_R \neq \emptyset$.
7. Существует ли отношение R такое, что $\delta R \neq \emptyset$ и $\rho R = \emptyset$?
8. Существует ли отношение $R \neq \emptyset$ такое, что $\delta_R = \emptyset$ и $\rho_R = \emptyset$?

Задание 2. (По вариантам)

1. Доказать, чтодлялюбыхбинарныхотношенийимеетместоравенство: $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.
2. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство
$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}.$$
3. Доказать, чтодлялюбыхбинарныхотношенийимеетместоравенство: $(R_1 \circ R_2)^{-1} = R_1^{-1} \circ R_2^{-1}$.
4. Доказать, что: $\delta_{R^{-1}} = \rho_R, \rho_{R^{-1}} = \delta_R$.
5. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство: $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$.
6. Доказать, что для любых бинарных отношений имеет место равенство $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.
7. Доказать, что для любых бинарных отношений: $(R^{-1})^{-1}=R$.
8. Доказать, что для любых бинарных отношений: $R \cup R = R \cap R =$ R.

Задание 3. (По вариантам)

1. Пусть φ: A⟶A – подстановка множества A. Доказать, что φ^{-1} – подстановка множества A.
2. Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: φ^{-1} – взаимно однозначное соответствие между B и A.
3. Пусть φ: A⟶B – взаимно однозначное соответствие. Доказать, что: $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{i}_\mathrm{B}$.
4. Доказать, что объединение двух функций f_1 и f_2 из A в B является функцией из A в B тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$.
5. Пусть f_1 и f_2 функции из A в B . Доказать, что их пересечение будет функциональным соответствием.
6. Пусть f_1 и f_2 функции из A в B . Будет ли их объединение функциональным соответствием?
7. Доказать, что пересечение двух функций f_1 и f_2 из A в B является функцией из A в B тогда и только тогда, когда $f_1 = f_2$.

8. Пусть f_1 и f_2 функции из A в B . Будет ли их разность $f_1 \setminus f_2$функциональным соответствием?

Задание 4. (По вариантам)

1. Множество A=$\{e\}$, где e – нейтральный элемент относительно внутренней бинарной операции f, есть группа.
2. Доказать, что множество ***N*** не является аддитивной группой.
3. Проверить, что множество A=$\{$-1, 1$\}$, если 1 и -1 – целые числа, есть мультипликативная группа.
4. Доказать, что множество **Z** всех целых чисел является аддитивной группой.
5. Доказать утверждение 3. В группе A относительно операции f уравнение $afx = b$ с одним неизвестным x разрешимо, причем однозначно, при любых a и $b \in A$.
6. Доказать утверждение 2. В группе для каждого элемента существует только один симметричный ему элемент.
7. Доказать утверждение 1. В группе существует только один нейтральный элемент.
8. Доказать утверждение 4. В группе A относительно операции f уравнение $yfa = b$ с одним неизвестным y разрешимо, причем однозначно, при любых a, $b \in A$.

РАБОТА **№ 4.**

Цель: изучить алгебраические системы, группы, группы перестановок.

Краткие теоретические сведения

Под *алгеброй* понимается множество с заданными на нём операциями.

Моделью называется множество, рассматриваемое с заданными на нём отношениями.

Если задана совокупность операций f_i и отношений P_j , то тем самым определена *сигнатура*$\sigma = \{f_i, P_j \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$.

Алгебраическая система$\langle M;\ \sigma \rangle$ задана, если на множестве M заданы и операции f_i и отношения P_j .

Непустое множество A с бинарной операцией f называется *группой*, если в этом множестве:

9. Определено бинарное отношение равенства элементов,

10. Заданная внутренняя бинарная операция f, обладает свойствами:

4) ассоциативностью $af(bfc) = (afb)fc$.,

5) относительно этой операции в множестве A есть нейтральный элемент, т.е. выполняются равенства

$afe = efa = a$,

6) каждый элемент a множества A обладает обратным (симметричным) a^{-1} , т.е. выполняются равенства $afa^{-1} = a^{-1}fa = e$.

При этом говорят, что A есть группа относительно операции f.

Группу относительно сложения называют аддитивной группой. Группу относительно умножения называют мультипликативной группой.

Если операция, относительно которой задана группа, коммутативна, то группа называется коммутативной или абелевой.

Утверждение 1. В группе существует только один нейтральный элемент.

Утверждение 2. В группе для каждого элемента существует только один симметричный ему элемент.

Утверждение 3. В группе A относительно операции f уравнение $afx = b$ с одним неизвестным x разрешимо, причем однозначно, при любых a и $b \in A$.

Утверждение 4. В группе A относительно операции f уравнение $yfa = b$ с одним неизвестным y разрешимо, причем однозначно, при любых a, $b \in A$.

Замечание: при фиксированныхa и $b \in A$ уравнение $afx= b$ имеет и притом только одно решение $\alpha \in A$, а уравнение $yfa= b$ имеет и притом только одно решение $\beta \in A$. Если операция f для группы A некоммутативна, то α не обязано равняться β.

Утверждение 5. Если a – элемент группы A относительно операцииf, то из $a\,f\,x = a\,f\,y$ следует $x = y$.

Второе определение группы.

Непустое множество A называется *группой* относительно внутренней бинарной операции f, если

4. Операция f алгебраическая,

5. Операция f ассоциативна,

6. Всегда разрешимы, причем однозначно, уравнения: $afx = b$ и $yfa = b$.

Вопросы, выносимые на практические занятия

1. Отображения и отношения.
2. Операции на множестве.

3. Понятие алгебры, модели, алгебраической системы.
4. Полугруппа, моноид, группа.
5. Подгруппа. Пересечение подгрупп.
6. Коммутативные группы.
7. Порождающие множества.
8. Циклические группы.
9. Порядок элемента.
10. Перестановки и подстановки. Группа перестановок. Подгруппы группы перестановок.
11. Циклический индекс группы перестановок.
12. Комбинаторные оценки различных классов отображений.
13. Цикловые классы.
14. Перестановки с заданным числом циклов.
15. Транзитивные группы подстановок.

Практические задания

Задание 1. (По вариантам)

1. Доказать, что постановки одной размерности образуют группу относительно произведения подстановок.
2. Доказать, что взаимно-однозначные соответствия конечного множества образуют группу относительно композиции.
3. Образуют ли функции, заданные на отрезке [0, 1] и имеющие значения из этого же отрезка, группу?
4. Образуют ли функции, заданные на отрезке [0, 1] и имеющие значения из этого же отрезка, абелеву группу?
5. Доказать, что матрицы фиксированной размерности образуют аддитивную группу.
6. Образуют ли матрицы фиксированной размерности образуют коммутативную группу относительно сложения матриц?
7. Образуют ли квадратные матрицы фиксированной размерности группу относительно умножения матриц?
8. Задано множество не вырожденных квадратных матриц данной размерности. Проверить аксиомы группы.

Задание 2. (По вариантам)

1. Доказать утверждение 5. Если a – элемент группы A относительно операцииf, то из $a\,f\,x = a\,f\,y$ следует $x = y$.

2. В множестве **Z** всех целых чисел всегда однозначно разрешимы уравнения $a + x = b$ и $y + a = b$.
3. Показать, что множество **Z** не является мультипликативной группой.
4. В группе A относительно операции fсуществует правый нейтральный элемент. Это такой элемент e_1, который удовлетворяет условию: $\alpha f e_1 = \alpha$ для любого элемента $\alpha \in A$.
5. На множестве A всех векторов, как направленных отрезков, расположенных в пространстве, определено векторное умножение. Показать, что множество A относительно векторного умножения не является группой.
6. Рассмотрим множество A всех корней n-ой степени из 1. Будет ли A мультипликативной группой относительно обычного умножения комплексных чисел?
7. Будет ли множество комплексных чисел аддитивной группой?
8. Образует ли множество комплексных чисел мультипликативную группу?

Задание 3. (По вариантам)

1. Образует ли кольцо множество целых чисел относительно сложения и умножения? Ответ обосновать.
2. Образует ли поле множество целых чисел относительно сложения и умножения? Ответ обосновать.
3. Образует ли кольцо множество рациональных чисел относительно сложения и умножения? Ответ обосновать.
4. Образует ли поле множество рациональных чисел относительно сложения и умножения? Ответ обосновать.
5. Образует ли кольцо множество действительных чисел относительно сложения и умножения? Ответ обосновать.
6. Образует ли поле множество действительных чисел относительно сложения и умножения? Ответ обосновать.
7. Образует ли поле множество квадратных матриц фиксированной размерности относительно сложения и умножения матриц? Ответ обосновать.
8. Образует ли поле множество не вырожденных квадратных матриц фиксированной размерности относительно сложения и умножения матриц? Ответ обосновать.

Тема №3. Теория графов

Работа 5

Графы и операции над ними

Цель: изучить способы задания графов, основные операции над ними, понятия гомоморфизма и изоморфизма графов, каркаса (остова) графа, рангов графа. Научиться решать задачи по указанным темам.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Понятие графа и способы задания графов.
2. Гомоморфизм и изоморфизм графов.
3. Операции над графами.
4. Остов (каркас) графа.
5. Циклический и ко-циклический ранги графа.

Краткие теоретические положения

Граф будем обозначать парой $G =< V, E >$, где V- множество вершин, E- множество ребер. Если $e \in E$, то$e = (a, b)$*направленное ребро*, причем вершина a- начало ребра, а вершина b - конец ребра. Если ребро без направления (двунаправленное), то будем его обозначать так: $[a, b]$.

Если в графе имеются направленные ребра, то его будем называть *ориентированным – орграфом*. Если все ребра графа не направленные, то он называется *неориентированным – неорграфом*.

Граф можно задать графически (рисунком), матрицей соответствия, когда в таблице для каждого ребра указывается его начало и конец, матрицей инцидентности, в которой строки названы именами ребер, а столбцы – именами верши. Для каждого ребра -1 отмечается столбец, соответствующий его началу, и 1 столбец, соответствующий концу ребра. Для неориентированного ребра в обоих случаях используется 1. «Петли» отмечаются каким-то другим символом, например, - 2.

Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$, называется *гомоморфным* образом графа $G =< V, E >$, если существует отображение $\varphi: V \to V_1$, *сохраняющее наличие ребер* между вершинами, т.е. если вершины были соединены в графе G , то их образы будут соединены ребром и в графе G_1.

Два графа $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие $\varphi: V \to V_1$, сохраняющее связность вершин ребрами как из графа G в граф G_1, так и наоборот из графа G_1 в граф G.

Под *объединением* графов $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ понимается граф $G_2 ==< V \cup V_1, E \cup E_1 >$. *Пересечением* этих графов называется граф $G_3 ==< V \cap V_1, E \cap E_1 >$.

Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется *частью* графа $G =< V, E >$, если выполнены условия $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$.

Последовательность ребер графа такая, что конец предыдущего ребра является началом следующего, называется *маршрутом* (*путем*) в графе. Две вершины графа, связанные некоторым путем, называются *связанными*. Если путь состоит из одного ребра, то вершины называются *смежными*.

Граф $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется *подграфом* графа $G =< V, E >$, если выполнены условия $V_1 \subset V$ и $E_1 \subset E$, причем, если вершины из V_1являются смежными в графе G, то они будут смежными и в графе G_1 (т.е. E_1 получается из множества ребер E ограничением на множество вершин V_1).

Часть графа, не содержащая циклов и сохраняющая связность вершин, называется *остовом* (*каркасом*) графа.

Число ребер графа, которые необходимо удалить для получения каркаса этого графа, называется *циклическим рангом*.

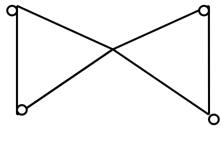
Число ребер остова графа называется *ко-циклическим рангом* графа.

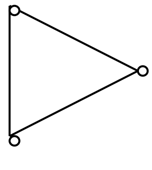
Произведением графов $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется граф $G_3 =< V_3, E_3 >$, где $V_3 = V \times V_1$ и ребро $(< a, a_1 >, < b, b_1 >)$ входит в множество E_3 тогда и только тогда, когда либо $(a, b) \epsilon E$ и a_1=b_1, либо $a = b$ и $(a_1, b_1) \epsilon E_1$.

Композицией графов $G =< V, E >$, $G_1 =< V_1, E_1 >$ называется граф $G_3 =< V_3, E_3 >$, где $V_3 = V \times V_1$ и ребро $(< a, a_1 >, < b, b_1 >)$ входит в множество E_3 тогда и только тогда, когда либо $(a, b) \epsilon E$, либо $a = b$ и $(a_1, b_1) \epsilon E_1$.

Задача 1. Для каждой приведенной пары графов найдите гомоморфизм из одного графа в другой, если он существует.

1)

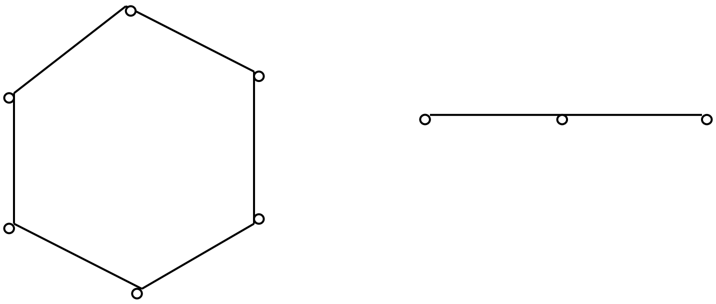




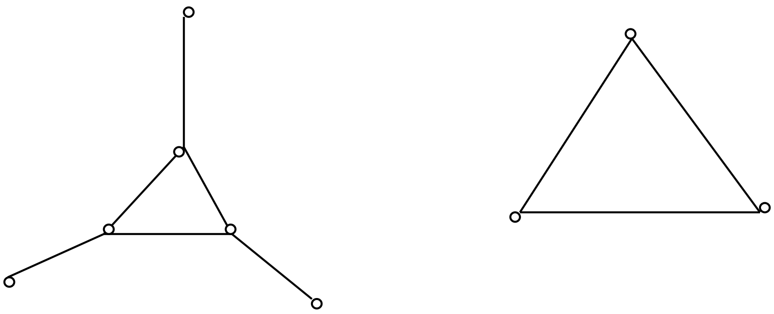
2)

3)

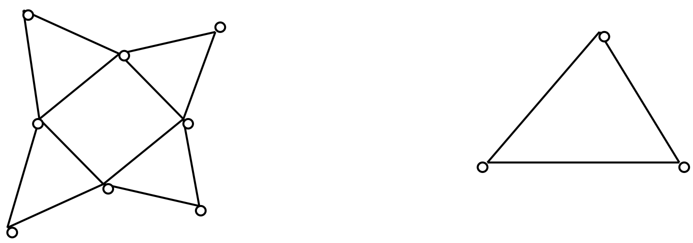
4)



5)



6)



7)

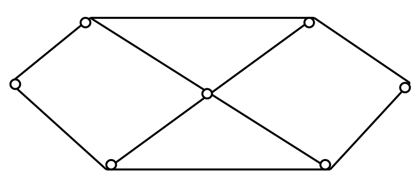
8)

Задача 2. Для каждой приведенной пары графов описать изоморфизм между ними или показать, что вследствие нарушения инвариантности графы не изоморфны.

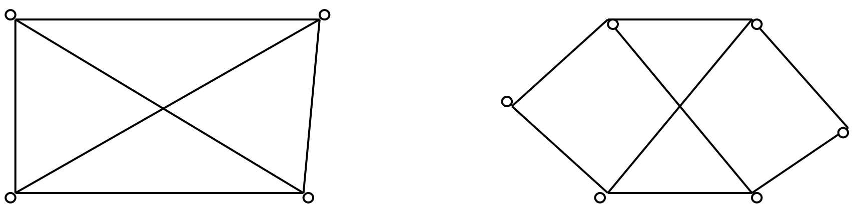
1)

2)

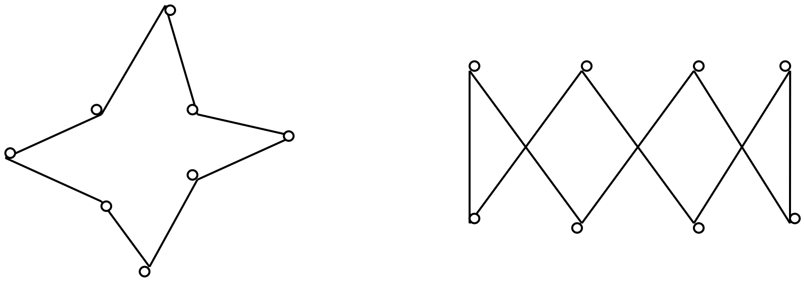
3)



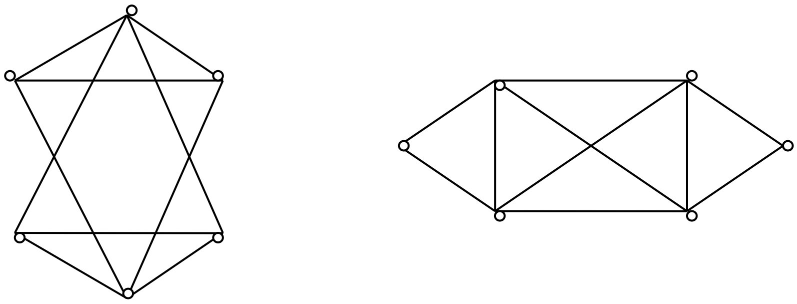
4)



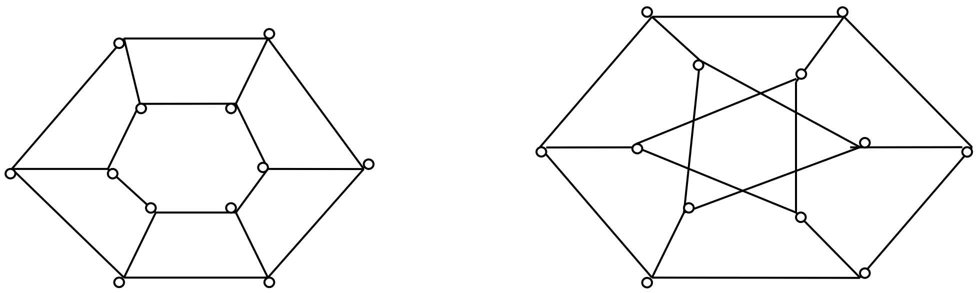
5)



6)



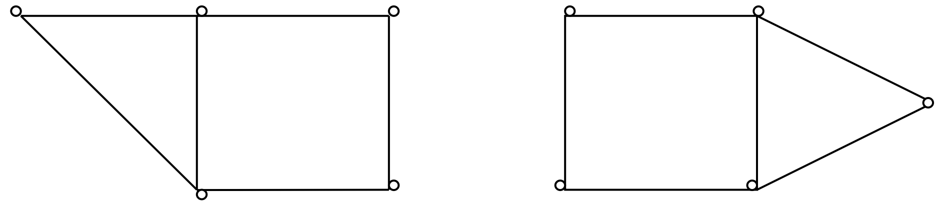
7)



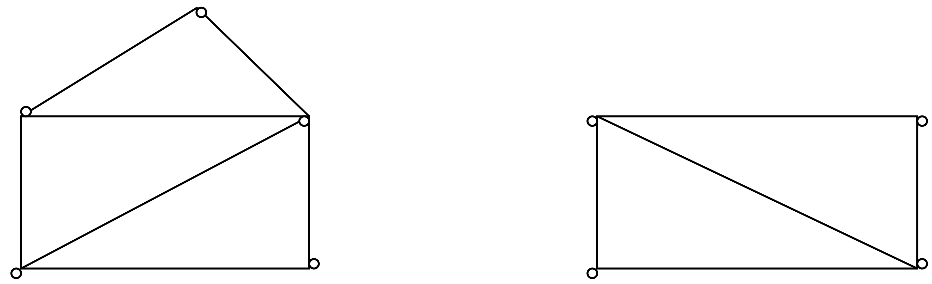
8)

Задача 3. Найти объединение и пересечение приведенных ниже множеств графов.

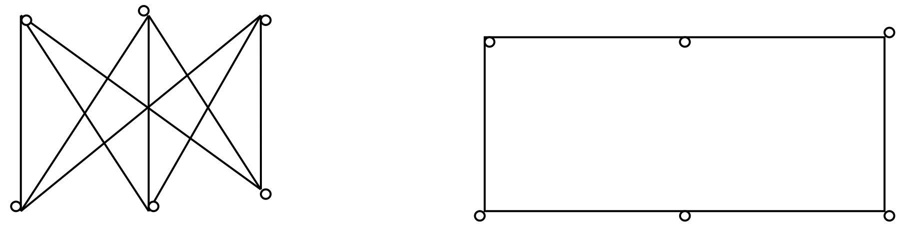
1)



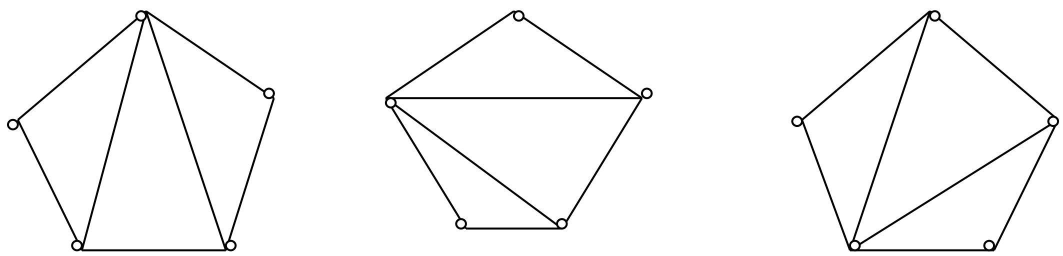
2)



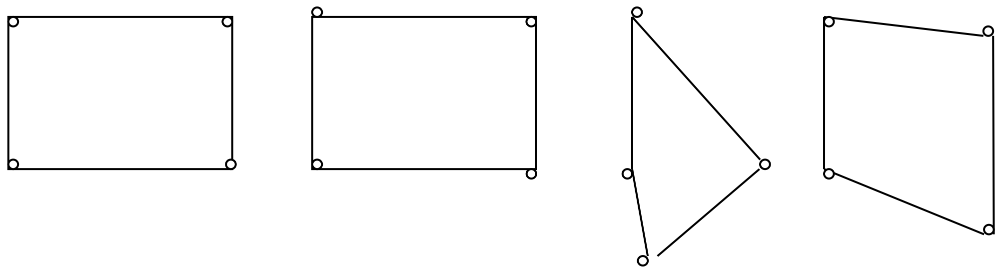
3)



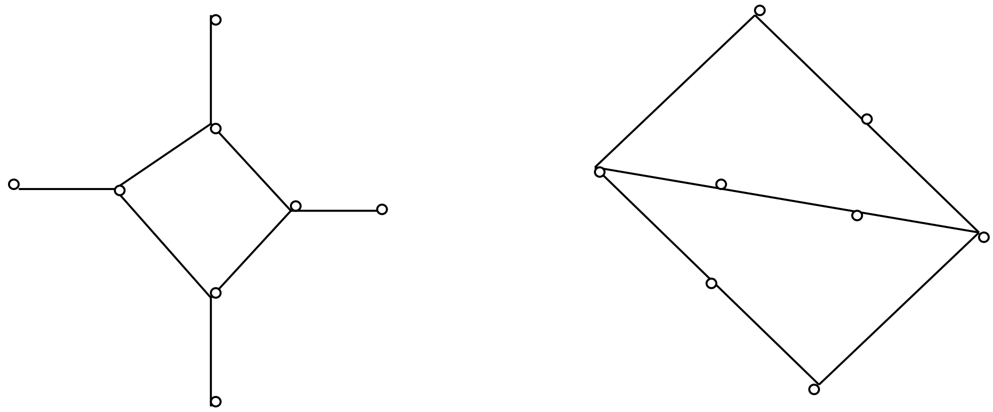
4)



5)

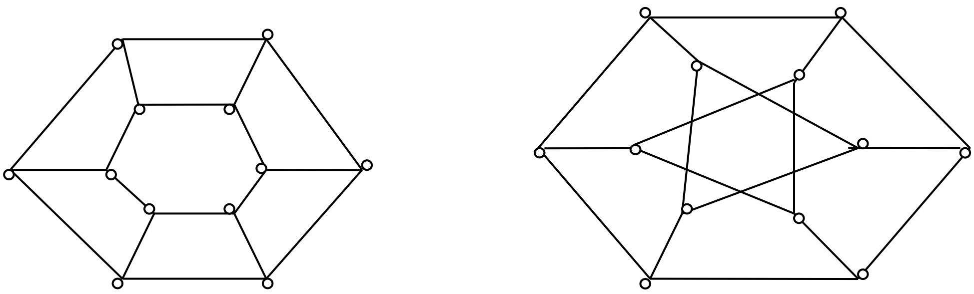


6)



7)

8)



Задача 4. В задаче 3 подсчитать циклический и коциклический ранги графов, считая графом систему, заданную под одним пунктом.

Задача 5. Найти каркас каждого графа, рассмотренного в задаче 2.

Задача 6. Для пар графов, приведенных в задаче 1, найти произведения и композиции, меняя порядок в парах.

Работа № 6

Связность в графах. Взвешенные графы.

Цель: Освоить основные понятия в ориентированных и неориентированных графах, деревьев.

Вопросы, выносимые на практическое занятие.

1. Пути и маршруты в графе. Связность вершин и графа.
2. Взвешенные графы, их применения.
3. Алгоритм нахождения остова наименьшего веса.
4. Эксцентриситет вершины. Диаметр и радиус графа.
5. Периферийные и центральные вершины.
6. Деревья, лес, корневые деревья.

Краткие теоретические положения

Если каждому ребру графа поставлено в соответствие некоторое число (называемое *весом* этого ребра), то граф называется *взвешенным*. Сумма весов всех ребер графа является *весом самого графа*.

Число ребер, исходящих из данной вершины, называется *степенью истока*. Число ребер, входящих в данную вершину, называется степенью стока. Если ребра ненаправленные, то степени стока и истока будут равны, в этом случае говорят просто о *степени вершины*.

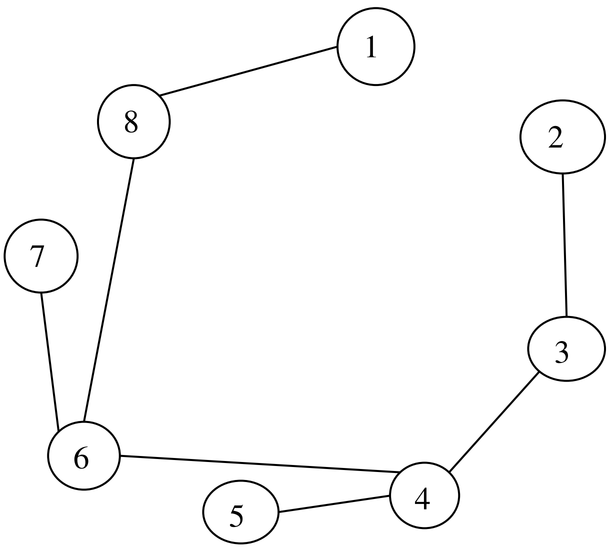
Максимальное расстояние от данной вершины до других вершин этого графа называется *эксцентриситетом* этой вершины. Минимальное значение эксцентриситета вершин называется *радиусом* графа. Максимальное значение эксцентриситета вершин называется диаметром графа.

Вершины, для которых эксцентриситет равен радиусу графа, называются *центральными*. Вершины, для которых эксцентриситет равен диаметру графа, называются *периферийными*.

Примеры задач, выносимых на практическое занятие

Задача 1.

Рассмотрим граф варианта 9 из задачи 1 практических заданий для самостоятельной работы студентов.В начале рассмотрим только вершины графа, которые затем будем соединять ребрами наименьшего веса так, чтобы не образовывалось циклов. Последовательно рассматриваем сначала ребра длины 1, затем – 2, потом -3 и т.д. до получения связного дерева. В результате получим остов наименьшего веса 17.



Задача 2

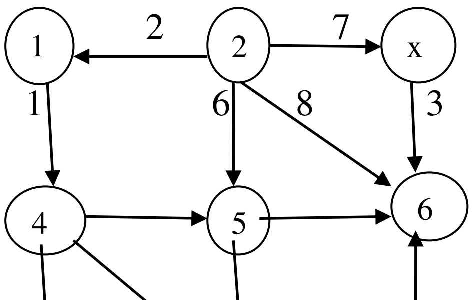
Для ваианта 9 задачи 2 из заданий для самостоятельной работы выпишем все пути из вершины 1 в вершину 2, указывая вершины, через которые проходит путь.

1 – 2;
1 – 8 – 2;
1 – 8 – 4 – 5- 6 -2;
1 – 8 – 4 – 5 – 6 – 7 – 3 – 2.

Для других вершин делается все аналогично.

Задача 3

В графе, представленном на рисунке из вершины x выходиттолко одно ребро в вершину 6. А вот из вершины 6 нет выходящих ребер, поэтому пути до вершины y не существует.



4 7

4 5 6 8

4 9

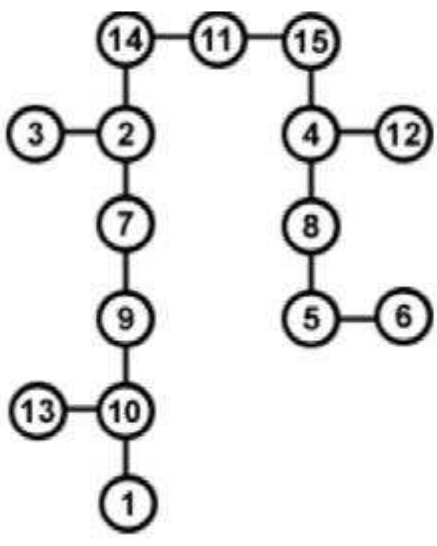
Задача 4

4.1. Для заданного дерева из варианта 9 задачи 4 из заданий для самостоятельного выполнения определим определите: эксцентриситет вершины 11. Самыми удаленными вершинами будут 13 и 1. Расстояние до них равно 6, следовательно$e(11) = 6$. Аналогично определяются и остальные эксцентриситеты $e(1) = 11, e(2) = 7, e(3) = 8, e(4) = 8, e(5) = 10, e(6) = 11, e(7) = 8, e(8) = 9, e(9) = 9, e(10) = 10, e(11) = 6,\ e(12) = 9, e(13) = 11, e(14) = 6$. Наибольшее значение эксцентриситета равно 11, поэтому диаметр графа $d(G) = 11$. А наименьшее значение эксцентриситета равно 6, т.е. радиус графа равен $r(G) = 6$. В соответствии с определением, центральными вершинами являются вершины 11 и 14, а периферийными – 1 и 13.

4.2. Обход графа из вершины 11 :

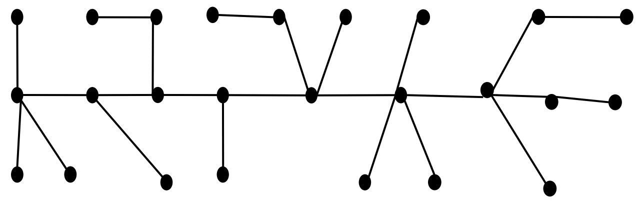
а) по глубине: 11, 14, 2, 7, 9, 10, 1, 13, 3, 15, 4, 8, 5, 6, 12;

б) по ширине: 11, 14, 15, 2, 4. 3, 7, 8, 12, 9, 5, 10, 6, 13, 1.



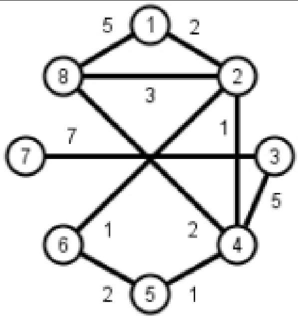
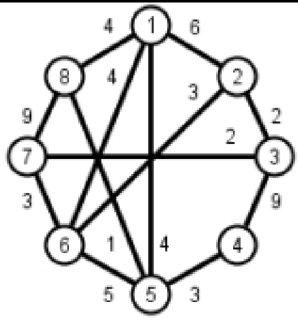
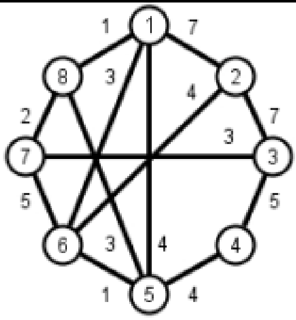
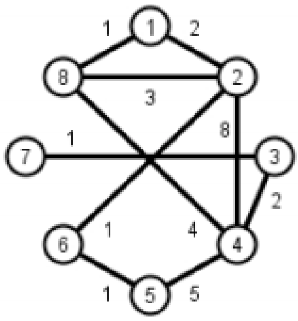
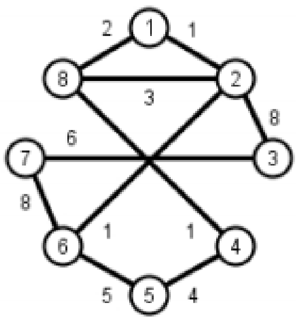
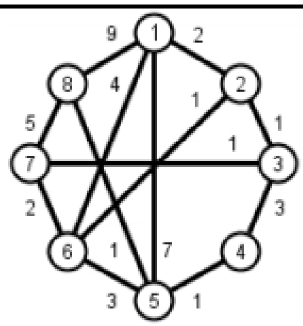
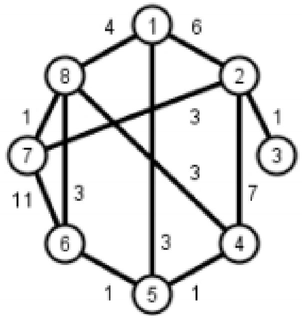
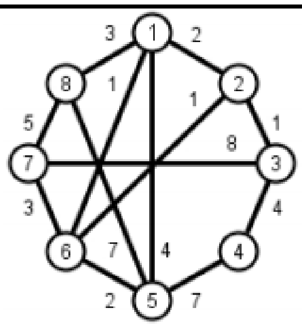
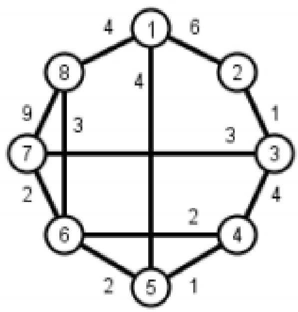
Задача 5

В графе вершина с максимальной степенью 5 только одна. Возьмем ее в качестве корня древа и постепенно по уровням нарисуем соответствующее дерево.



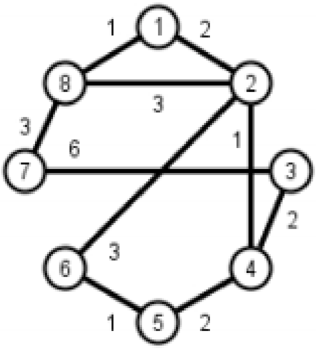
Задачи, выносимые на самостоятельную работу студентов

Задача 1. Найти остов графа наименьшего веса (Варианты графов в таблице).

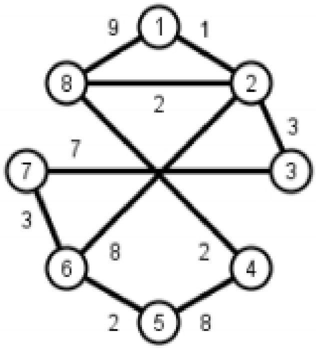
 10.1	 10.2	 10.3
 10.4	 10.5	 10.6
 10.7	 10.8	 10.9

Задание 2.

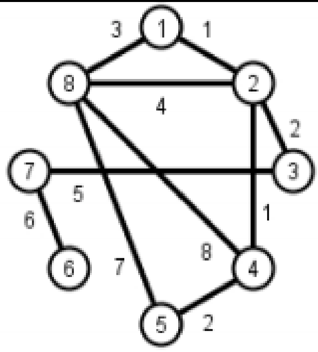
Для заданного весового не орграфа выписать все пути из вершины 1 ко всем остальным вершинам. Для каждой такой пары вершин выбрать кратчайшие пути.



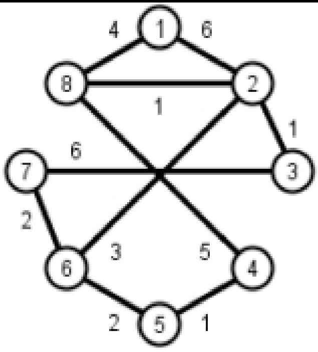
11.1



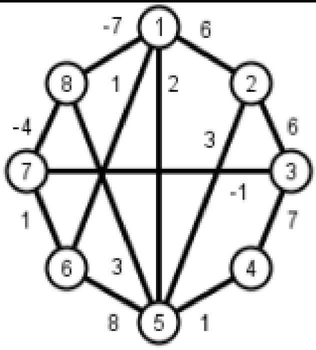
11.2



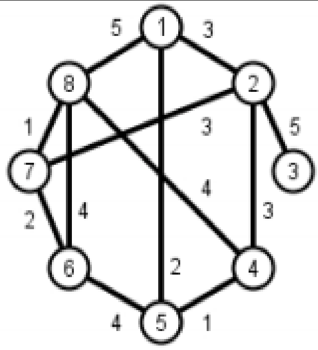
11.3



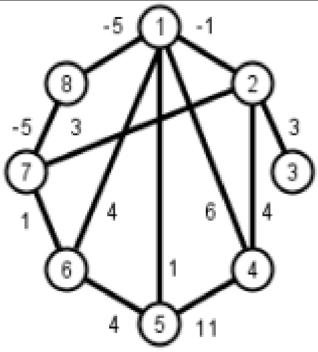
11.4



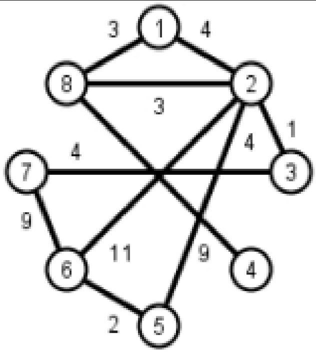
11.5



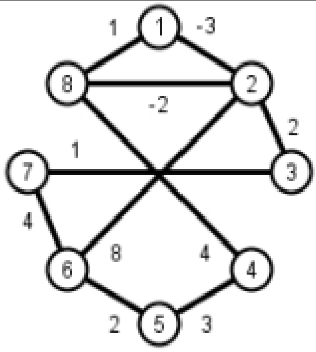
11.6



11.7



11.8

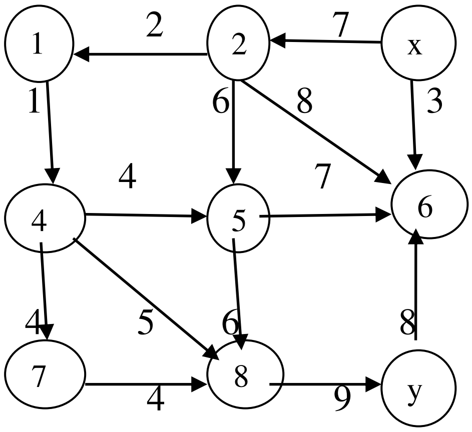


11.9

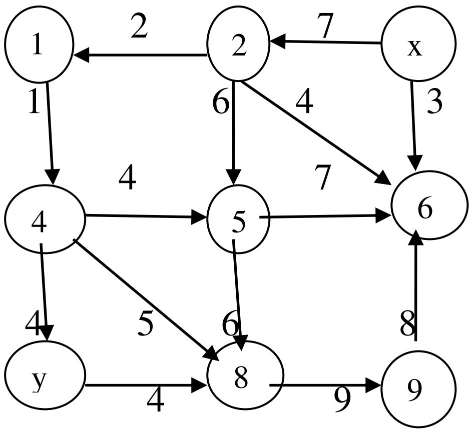
Задание 3.

Для заданного весового орграфа выписать все пути из вершины x в вершину y. Найти кратчайший путь.

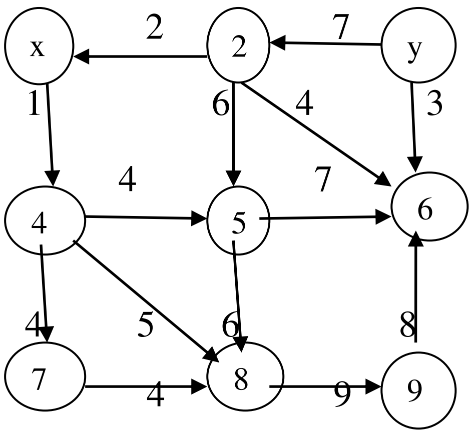
Вариант 1)



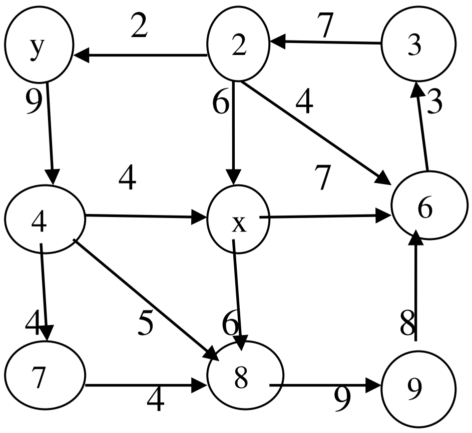
Вариант 2)



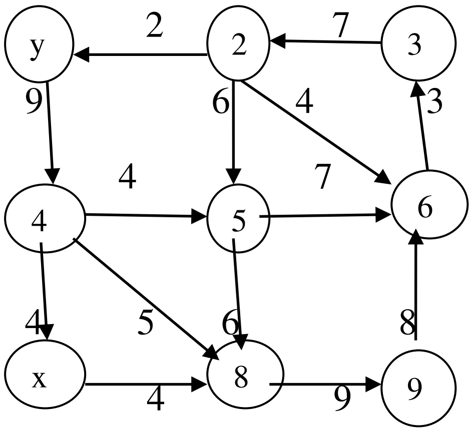
Вариант 3)



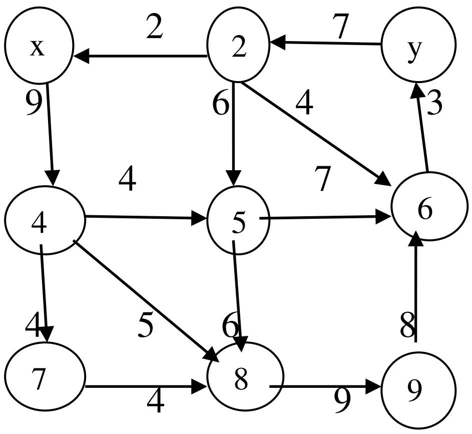
Вариант 4)



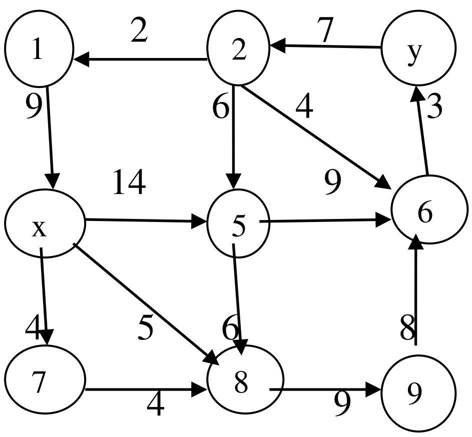
Вариант 5)



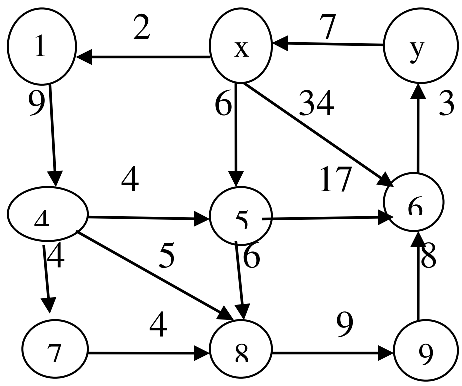
Вариант 6)



Вариант 7)



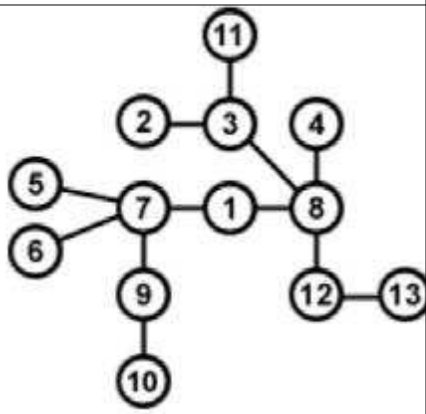
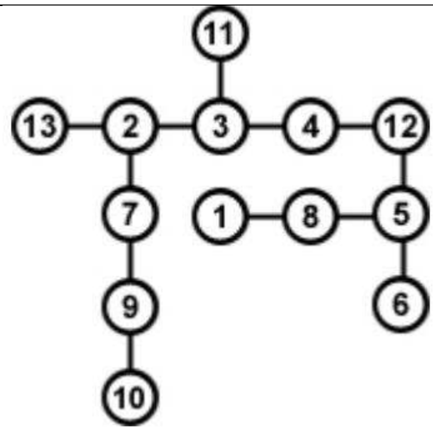
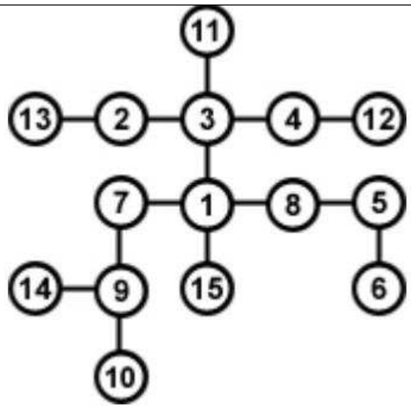
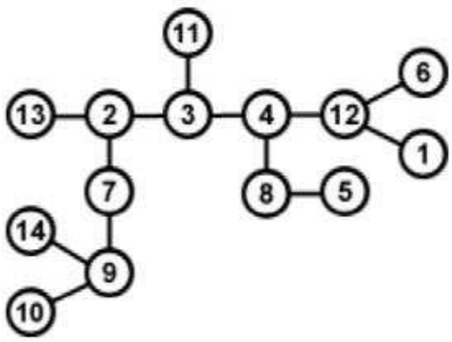
Вариант 8)

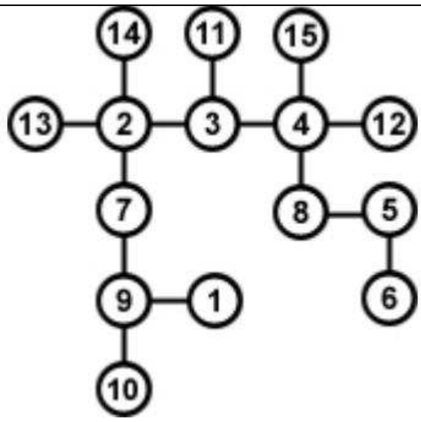
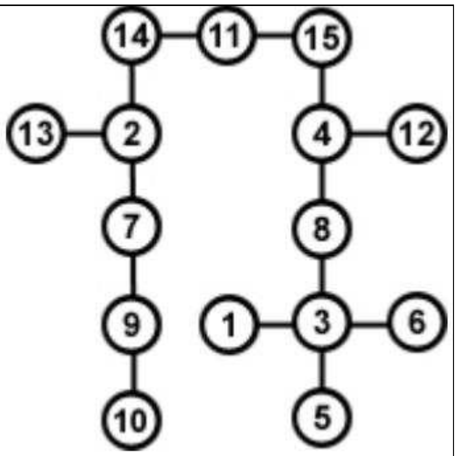
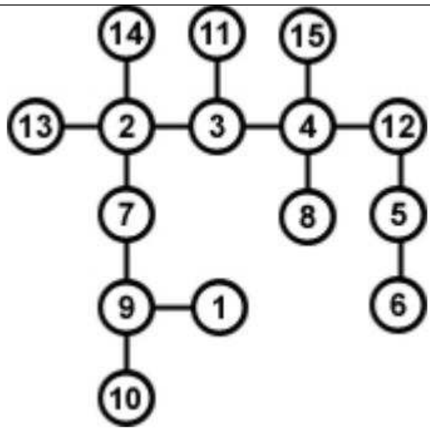
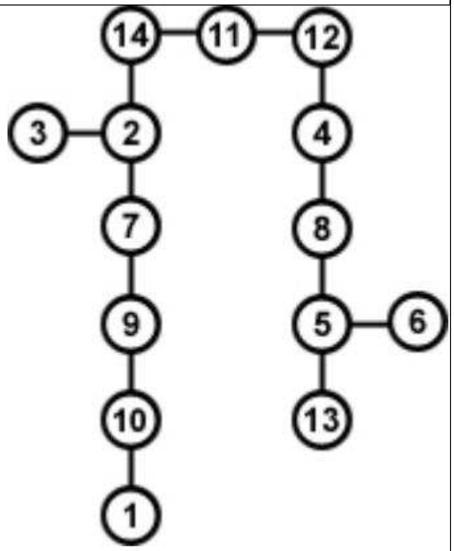


Задание 4.

4.1. Для заданного дерева определите:
а) эксцентриситеты вершин;
б) указать центральные и периферийные вершины.
б) определить радиус и диаметр графа;

4.2. Из вершины 11 сделайте обход графа:
а) по глубине;
б) по ширине.

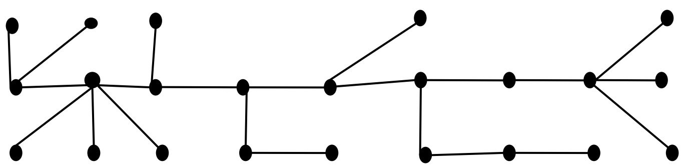
Вариант	Граф	Вариант	Граф
1		2	
3		4	

5		6	
7		8	

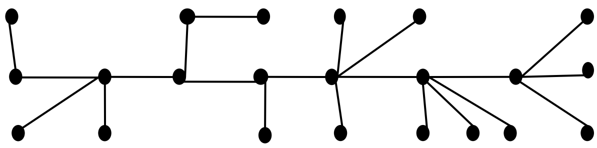
Задание 5.

Определить вершины максимальной степени. Взяв такую в качестве корня, построить ориентированное дерево.

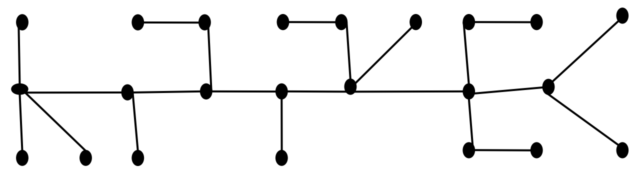
Вариант 1)



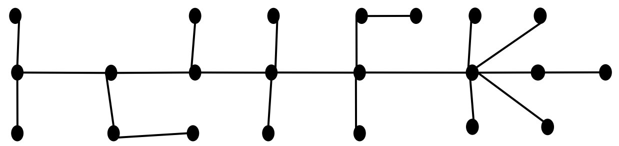
Вариант 2)



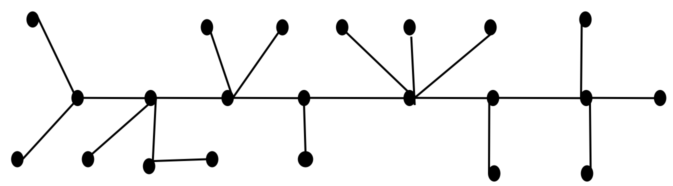
Вариант 3)



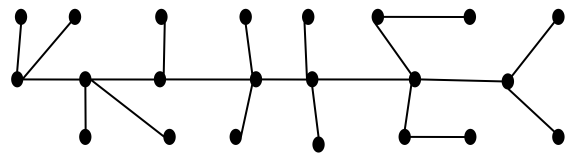
Вариант 4)



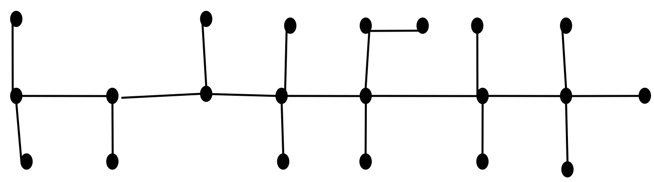
Вариант 5)



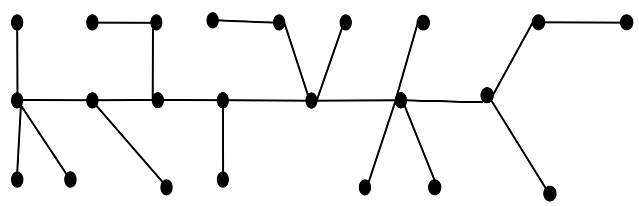
Вариант 6)



Вариант 7)



Вариант 8)



Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Микони С.В. Дискретная математика для бакалавров: множества, отношения, функции, графы. [Текст]: учебное пособие/ Станислав Витальевич Миконин. - СПб.: «Лань», 2012. -192 с.

2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов [Текст]: учебник для магистров и бакалавров / Федор Алексеевич Новиков. – СПб. [и др.]: Питер, 2011. – 384 с.

Дополнительная литература

3. Шевелев Ю.П. Дискретная математика. [Текст]: уч. пособие/ Ю.П. Шевелев. - СПб.: «Лань», 2008. – 592 с.

4. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов [Текст]: учебное пособие/ Р. Хаггарти; перевод с анг. под ред. С.А. Кулешова. – М.: Техносфера, 2005. – 400 с.

5. Милых В.А. Дискретная математика [Текст]: учебное пособие/ В.И. Милых, И.Г. Уразбахтин. – Курск: Курск ГТУ, 2006. – 139 с.

6. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. - М., Наука, 2004.

7. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. - 2-е изд., доп. -М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

8. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика. –М., Издательский дом «Вильямс», 2003.

9. Палий И.А. Дискретная математика. Курс лекций. – М., «Эксмо», 2008.

10. Аляев Ю.А., Тюрин С.Ф. Дискретная математика и математическая логика. – М., «Финансы и статистика», 2006.

11. Плотников А.Д. Дискретная математика. - М., ООО «Новые знание», 2005.

12. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Сборник задач по дискретной математике. Уч. пособие. - М., Наука, 1977.

13. Дискретная математика. Юнита 1. Отношения. Булевы функции. Предикаты. - М.:СГУ,2001.

14. Дискретная математика. Юнита 2. Графы и сети. Кодирование. Автоматы и алгоритмы. - М.:СГУ,2001.

15. Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.М. Элементы комбинаторики. - М., Наука, 1977.

16. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. Расширенный курс: Учебное пособие. – М.: Известия, 2011.

17. Оре О. Теория графов. - М., Мир, 1968.

18. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. Учебник для втузов. – М.:ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002г.

19. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику: Учебное пособие для вузов/ Под ред. В.А. Садовничего.- М.: Высш. шк., 2002.

20. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М., Наука, 1969.

21. Методические разработки по курсу «Элементы дискретной математики». Составитель С.В. Яблонский, -М., МГУ, 1971.

22. Москинова Г.И. Дискретная математика: Учебное пособие. – М.: Логос, 2000.

23. Косточка А.В. Дискретная математика. Ч.2. - Новосибирск, НГУ, 1996.

24. Косточка А.В., Соловьева Ф.И. Дискретная математика. Ч.1. - Новосибирск, НГУ, 1995.

25. Татт У. Теория графов. - М., Мир, 1988.

26. Белов В.В., Воробьев Е.М., Шаталов В.Е. Теория графов. - М., Высшая школа, 1976.

27. Горбатов В.А., Горбатов А.В., Горбатова М.В. Дискретная математика: учебн. для студентов втузов. - М.: АСТ: Астраль, 2006.

28. Басакер Р., Саати Т., Конечные графы и сети. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-
мат. лит., 1974.

29. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. – СПб.: Питер, 2003.

30. Бабичева, Ирина Владимировна. Дискретная математика. Контролирующие материалы к тестированию [Текст] : учебное пособие / И. В. Бабичева. - 2-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2013. - 160 с.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети ИНТЕРНЕТ

1. Электронно-библиотечная система «Лань» - http://e.lanbook.com/
2. Электронно-библиотечная система IQLib – http://www.iqlib.ru
3. Электронная библиотека «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - http://window.edu.ru/

Перечень методических указаний

1. Добрица В.П., Тезик К.А. Теория множеств [Электронный ресурс]: методические рекомендации по выполнению лабораторных работ/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, К.А. Тезик. – Курск, 2017. – 24с.

2. Добрица В.П., Тезик К.А. Комбинаторика и бином Ньютона [Электронный ресурс]: методические рекомендации по выполнению лабораторных работ/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица, К.А. Тезик. – Курск, 2017. – 29с.

3. Добрица В.П. Теория графов [Электронный ресурс]: методические рекомендации по выполнению лабораторных работ/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.П. Добрица. – Курск, 2017. – 21с.