МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра электроснабжения

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«_14_» _____________ 2018 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Методические указания к практическим занятиям по дисциплине
«Математические задачи энергетики»
для студентов заочной формы обучения направления подготовки
«Электроэнергетика и электротехника»

Курск 2018

УДК 621.311

Составитель: В.Н. Алябьев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *О.М.Ларин*

Математические задачи энергетики: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математические задачи энергетики» для студентов заочной формы обучения направления подготовки Электроэнергетика и электротехника/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.Н.Алябьев. Курск, 2018. 12 с.

Излагаются методические указания к выполнению практических занятий, посвященных изучению методов расчета установившихся режимов работы электроэнергетических систем, выполняющихся для решения широкого спектра инженерных задач в области электроэнергетики.

Целью проведения данных занятий является выработка у студентов практических навыков расчета нормального режима работы электроэнергетической системы.

Предназначены для студентов заочной формы обучения направления подготовки Электроэнергетика и электротехника.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд.л. . Тираж 100 экз. Заказ. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 1

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

ЦЕЛЬ: Приобретение практических навыков формирования уравнений состояния электроэнергетической системы

УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ЗАНЯТИЯ

Уравнения узловых напряжений при напряжении балансирующего узла $U_б = 0$ для сети постоянного тока, например, из четырех узлов можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} y_{11}U_1 - y_{12}U_2 - y_{13}U_3 &= I_1\ ; \\ -y_{21}U_1 + y_{22}U_2 - y_{23}U_3 &= I_2\ ; \\ -y_{31}U_1 - y_{32}U_2 + y_{33}U_3 &= I_3\ , \end{aligned}\right\}$$

где y_{kj} (k = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; j ≠ k) – взаимная проводимость узлов k и j, равная сумме проводимостей ветвей, соединяющих эти узлы (если между двумя узлами нет ветви, то соответствующая взаимная проводимость равна нулю);

y_{kk} (k=1,2,3) – собственная проводимость k-го узла, равная сумме проводимостей всех ветвей, соединенных с узлом k (в их число входят и ветви, соединяющие узел с нулевым напряжением с узлом k);

I_k – ток k-го узла;

U_k – неизвестное узловое напряжение, т. е. напряжение между k-м узлом и балансирующим, совпадающим с базисным по напряжению.

При расчетах режимов электрических систем задающий ток I_k равен алгебраической сумме источников тока, подключенных к узлу k.

Источники тока, соответствующие генерации или потреблению, имеют разные знаки. При наличии в цепи источников э. д. с. в ток k-го узла I_k входит алгебраическая сумма произведений э. д. с. ветвей, соединенных с узлом k, на проводимость этих ветвей.

Будем использовать матрицу собственных и взаимных проводимостей узлов $Y_{пр}$ и вектор-столбцы токов в узлах I и узловых напряжений U

$$Y_{пр} = \begin{bmatrix} Y_{11} & -Y_{12} & -Y_{13} \\ -Y_{21} & Y_{22} & -Y_{23} \\ -Y_{31} & -Y_{32} & Y_{33} \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix}, \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}.$$

Учитывая правило умножения матриц, систему уравнений узловых напряжений (1.1) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$Y_{пр}U = I \qquad (1.1)$$

Для цепи переменного тока узловые напряжения, токи в узлах, собственные и взаимные проводимости узлов – комплексные величины. Если использовать матрицу собственных и взаимных проводимостей узлов $Y_{пр}$ с комплексными элементами y_{kj} , а также вектор-столбцы токов в узлах I и узловых напряжений U с комплексными элементами I_k и U_k , то получим систему уравнений узловых напряжений для цепи переменного тока.

Уравнения узловых напряжений при напряжении балансирующего узла $U_б \neq 0$ для сети постоянного тока из четырех узлов можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} y_{11}(U_1 - U_б) - y_{12}(U_2 - U_б) - y_{13}(U_3 - U_б) &= I_1 \;; \\ -y_{21}(U_1 - U_б) + y_{22}(U_2 - U_б) - y_{23}(U_3 - U_б) &= I_2 \;; \\ -y_{31}(U_1 - U_б) - y_{32}(U_2 - U_б) + y_{33}(U_3 - U_б) &= I_3 \;. \end{aligned}\right\}$$

Будем использовать вектор-столбец [U_1 - $U_б$], k-й элемент которого равен разности напряжений k-го и балансирующего узлов, т. е. для электрической системы из четырех узлов

$$[U - U_б] = \begin{bmatrix} U_1 - U_б \\ U_2 - U_б \\ U_3 - U_б \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнения узловых напряжений при $U_б \neq 0$ в матричной форме будут иметь вид:

$$\mathbf{Y_{пр}[U - U_б] = I.} \qquad (1.2)$$

Рассмотренное выше уравнение (1.1) – это частный случай (1.2) при $U_б = 0$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Преимущества системы уравнений узловых напряжений.
2. Определение собственных и взаимных проводимостей узлов.
3. Матричная форма системы уравнений узловых напряжений.
4. Свойства матрицы узловых проводимостей.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

ЦЕЛЬ: Приобретение практических навыков решения систем уравнений состояния.

УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ЗАНЯТИЯ

Решение систем линейных алгебраических уравнений можно получать как с помощью прямых (точных), так и с помощью итерационных методов. Для систем уравнений средней размерности чаще используют прямые методы.

Точными методами называются такие, которые в предположении, что все вычисления ведутся точно (без округлений), позволяют получить точные значения неизвестных в результате конечного числа операций. Практически все вычисления ведутся с округлением, поэтому и значения неизвестных, полученные точным методом, будут содержать погрешности. Из точных методов ниже рассмотрим метод Гаусса.

Метод последовательного исключения (метод Гаусса) – один из наиболее распространенных методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Если точно выполнить все действия по методу Гаусса, то получим точное решение системы. Вычислительные схемы, с помощью которых может быть реализован метод Гаусса, различны. Рассмотрим одну из них – схему единственного деления. Запишем систему трех уравнений с тремя неизвестными (см. уравнения узловых напряжений (1.1)) в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \quad ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24} \quad ; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34} \quad . \end{cases} \qquad (2.1)$$

Пусть $\mathbf{a_{11} \neq 0}$ – «ведущий элемент». Разделим первое уравнение системы (1.14) на $\mathbf{a_{11}}$ и получим:

$$x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 = b_{14} \quad , \qquad (2.2)$$

где $b_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2,3,4).$

Теперь, пользуясь уравнением (2.2), можно исключить не известное $\mathbf{x_1}$ из второго и третьего уравнений системы (2.1).

Для этого исключения нужно умножить уравнение (2.2) на $\mathbf{a_{21}}$ и $\mathbf{a_{31}}$ и вычесть результаты соответственно из второго и третьего уравнений системы (2.1). В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 = a_{24}^{(1)} \quad ; \\ a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 = a_{34}^{(1)} \quad , \end{cases} \qquad (2.3)$$

где коэффициенты $a_{kj}^{(1)}$ вычисляются по формуле

$$a_{kj}^{(1)} = a_{kj} - a_{k1} b_{1j} \quad (k = 2,3;\ j = 2,3,4). \qquad (2.4)$$

Из системы (2.3) можно так же исключить переменную x_2, как исключили x_1 из системы (2.1). Для этого разделим. коэффициенты первого уравнения системы (2.3) на «ведущий элемент» и получим:

$$x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 = b_{24}^{(1)} \ , \qquad (2.5)$$

где $b_{2j}^{(1)} = \dfrac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3,4).$

Затем умножим (2.5) на $a_{32}^{(1)}$ и вычтем результат из второго уравнения системы (2.3). При этом получим уравнение

$$a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)} \ , \qquad (2.6)$$

где $a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - a_{32}^{(1)} b_{2j}^{(1)} \quad (j = 3,4).$

Таким образом, система (2.1) приведена к эквивалентной системе с треугольной матрицей

$$\begin{cases} x_1 + b_{12} x_2 + b_{13} x_3 = b_{14}; \\ \quad x_2 + b_{23}^{(1)} x_3 = b_{24}^{(1)}; \\ \quad\quad a_{33}^{(2)} x_3 = a_{34}^{(2)}. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Из системы (2.7) последовательно найдем значения всех трех неизвестных:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{a_{34}^{(2)}}{a_{33}^{(2)}}; \\ x_2 = b_{24}^{(1)} - b_{23}^{(1)} x_3; \\ x_1 = b_{14} - b_{13} x_3 - b_{12} x_2. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Решение по методу Гаусса распадается на два этапа: ***прямой ход*** – приведение системы (2.1) к эквивалентной системе (2.7) с треугольной матрицей и ***обратный ход*** – вычисление неизвестных в соответствии с (2.8).

Итерационные методы применяют главным образом при решении задач большой размерности, когда использование прямых методов невозможно из-за ограничений в доступной оперативной памяти ЭВМ или из-за необходимости выполнения чрезмерно большого числа арифметических операций.

Методы исключения для решения систем со слабо заполненными или разреженными матрицами неудобны тем, что при их использовании большое число нулевых элементов превращается в ненулевые, и матрица теряет свойство разреженности. В противоположность им при использовании итерационных методов в ходе итерационного процесса матрица не изменяется и, естественно, остается разреженной.

Одним из наиболее эффективных и широко используемых итерационных методов является метод последовательной верхней релаксации. Он применяется для решения систем линейных алгебраических уравнений с симметричными положительно определенными матрицами, к которым относятся и матрицы узловых проводимостей. В литературе можно найти другое название этого метода - SOR-метод.

Метод состоит в следующем: при вычислении очередного (k+1) приближения неизвестного x_i при i > 1 используют уже найденные (k+1) приближения неизвестных $x_1, x_2, ..., x_{i-1}$. Кроме того, после вычисления значения x_i производят дополнительное смещение значения x_i на величину $(\omega - 1)(x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)})$,

где ω - параметр релаксации. Вычисление $x^{(k+1)}$ производится таким образом по следующей компактной формуле

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega B_1 x^{(k+1)} + \omega B_2 x^{(k)} + \omega C \qquad (2.9)$$

где ω - параметр релаксации, находящийся в пределах 0<ω<2;

B_1, B_2, C - соответственно верхняя и нижняя треугольные матрицы и столбец свободных членов системы уравнений, приведенной к итерационному виду.

Применение метода релаксации рассмотрим на примере решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} 6.25\,x1 - x2 + 0.25\,x3 = 7.5, \\ -x1 + 5x2 + 2.12\,x3 = -8.68, \\ 0.5\,x1 + 2.12x2 + 3.6\,x3 = -0.24 \end{cases} \qquad 2.10$$

Преобразуем систему (2.10) к итерационному виду, в результате получим:

$$\begin{cases} x1 = 0.16\,x2 - 0.08x3 + 1.2, \\ x2 = 0.2\,x1 - 0.424x3 - 1.736, \\ x3 = -0.1389\,x1 - 0.5889x2 - 0.0667. \end{cases} \qquad 2.11$$

Систему запишем в компактном виде

$$x = Bx + C \qquad (2.12)$$

Матрицу B представим как сумму двух треугольных матриц B_1 и B_2 :

$$B = B_1 + B_2\,. \qquad (2.13)$$

Матрицы B_1 и B_2 имеют вид :

$$B1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ -0.1389 & -0.5889 & 0 \end{bmatrix}, \quad B2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.16 & -0.08 \\ 0 & 0 & -0.424 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad 2.14$$

С учетом (2.9),(2.11),(2.14) приведем формулы для нахождения x1, x2 и x3 по методу последовательной верхней релаксации:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= (1-\omega)x_1^{(k)} + \omega(0.16x_2^{(k)} - 0.08x_3^{(k)} + 1.2), \\ x_2^{(k+1)} &= \omega 0.2x_1^{(k+1)} + (1-\omega)x_2^{(k)} + \omega(-0.424x_3^{(k)} - 1.736), \\ x_3^{(k+1)} &= \omega(-0.1389x_1^{(k+1)} - 0.5889x_2^{(k+1)}) + (1-\omega)x_3^{(k)} - \omega 0.0667. \end{aligned} \qquad 2.15$$

В качестве начального приближения для x1, x2, x3 принимаем значения столбца свободных членов системы (2.11)

x1 = 1.2, x2 = -1.736, x3 = -0.0667.

Значение параметра релаксации ω примем равным 1.2. Решение системы будем искать с точностью до $\xi = 0.001$. В качестве критерия окончания итерационного процесса используем упрощенное выражение

$$\left|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}\right| \langle \ \xi \ . \tag{2.16}$$

Значения приближений с четырьмя цифрами после запятой приведены в табл. 1.

Таблица 1. Решение системы уравнений

Номер шага	Решение			Точность		
	X1	X2	X3	1	2	3
1	0.88293	-1.56990	0.81542	0.07353	0.42737	0.18318
2	0.88366	-1.94522	0.97301	0.0007	0.37532	0.15759
3	0.80219	-1.99326	0.99847	0.08147	0.04804	0.02545
4	0.80108	-1.99984	0.99992	0.001	0.00658	0.00145
5	0.79999	-2.00000	1.00004	0.001	0.0001	0.0001
6	0.79999	-2.00002	1.00002	0	0.00002	0.00002

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Точные методы решения систем уравнений состояния.
2. Итерационные методы решения систем уравнений состояния.
3. Что такое «самоисправляемость»?
4. Чем отличается метод Зейделя от простой итерации?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лыкин А. В. Электрические системы и сети [Текст] : учебное пособие / А. В. Лыкин. - М. : Логос, 2007. - 254 с.
2. Хорошилов Н.В., Пилюгин А.В., Хорошилова Л.В., Бирюлин В.И., Ларин О.М. Электропитающие системы и электрические сети. Учебное пособие/ Хорошилов Н.В., Пилюгин А.В. и др.. _Старый Оскол: ТНТ, 2012. -352 с.
3. Электрические системы. Математические задачи электроэнергетики [Текст] : учебник для электроэнергетических специальностей вузов / Э. Н. Зуев, И. В. Литкенс ; под ред. В. А. Веникова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Высшая школа, 1981. - 288 с. : ил.
4. Идельчик В.И. Расчёты установившихся режимов электрических систем. М., Энергия, 1977.