МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра управления качеством, метрологии и сертификации

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-
проректор по учебной работе
Е.А.Кудряшов
« 30 » ноября 2011 г.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Методы оптимизации и принятия решений»
для обучающихся по направлению
552200 (200500.68) «Метрология, стандартизация и сертификация»
магистерской программы
552215 «Всеобщее управление качеством»

Курск 2011

УДК 007.5

Составители: О.В. Аникеева, А.Г. Ивахненко

Рецензент
Доктор технических наук, профессор кафедры
«Машиностроительные технологии и оборудование» А.И. Ремнев

Многокритериальная оптимизация: методические указания по выполнению лабораторной работы по дисциплине «Методы оптимизации и принятия решений» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В. Аникеева, А.Г. Ивахненко. Курск, 2011. 18 с. Библиогр.: с.18.

Излагаются краткие теоретические сведения по применению различных принципов для решения проблемы выбора, основанного на введении понятия лучших решений, опирающегося на постулируемые принципы оптимальности. Приводятся варианты задания для выполнения на ЭВМ.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению «Метрология, стандартизация и сертификация».

Предназначены для обучающихся по направлению 552200 (200500.68) «Метрология, стандартизация и сертификация» магистерской программы 552215 «Всеобщее управление качеством» очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч. - изд. л. . Тираж 20 экз. Заказ .
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

Изучение различных методов и приобретение практических навыков в решении многокритериальных задач принятия решений.

2 Задание

Даны выражения для двух критериев (целевых функций) z_1 и z_2 некоторой системы, являющихся функциями параметров x_1 и x_2

$$\begin{cases} z_1 = a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2 + a_4 \\ z_1 = b_1 x_1^2 e^{-c_1 x} + b_2 x_2 e^{-c_2 x} + b_3 \end{cases}.$$

Задача многокритериальной оптимизации сводится к получению таких значений параметров x_1 и x_2, которые бы обеспечили достижение цели: $z_1 \to max$ и $z_2 \to max$.

1) Построить графики целевых функций и дать предварительные выводы о возможности одновременного достижения поставленной цели.

2) Сформировать 20 альтернатив, т.е. рассчитать 20 значений критериев z_1 и z_2 в области допустимых значений параметров $x_1 \in [0, 2]$ и $x_2 \in [0, 1]$, используя генератор случайных чисел.

3) Определить Парето-оптимальное множество альтернатив.

4) Определить оптимальные альтернативы по:

– принципу идеальной точки;

– принципу антиидеальной точки;

– принципу равенства;

– принципу квазиравенства;

– принципу максимина;

– принципу последовательного максимина;

– квазиоптимальному принципу последовательного максимина;

– принципу абсолютной уступки;

– принципу относительной уступки;

– принципу главного критерия;

– лексикографическому принципу;

– лексикографическому принципу квазиоптимальности;

– допустимой комбинации двух принципов.

5) Сделать выводы о влиянии использованных принципов на выбор оптимального решения.

3 Краткие теоретические положения

При выполнении данной работы использован подход к проблеме оптимальности, основанный на введении понятия лучших решений, опирающийся на постулируемые принципы оптимальности.

Принцип оптимальности по Парето. Данный принцип может быть использован на начальной стадии решения задачи с целью уменьшения исходного множества решений Z_X.

Решение (альтернативу) называют оптимальным по Парето, если невозможно улучшить решение ни по одному из критериев без ухудшения решения хотя бы по одному из критериев. Парето-оптимальные решения (альтернативы) составляют множество Парето (множество эффективных решений, множество π-оптимальных альтернатив, множество компромиссов).

Пусть X_p является *множеством Парето* в пространстве независимых переменных (параметров) и Z_p – множеством Парето в пространстве критериев, тогда эти множества могут быть описаны следующими моделями:

$$X_p = \left\{ x : \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1 \right\},$$

$$Z_p = \left\{ z = (z_1, ..., z_m) : \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} \gamma_i = 1 \right\}. \quad (1)$$

Данное описание корректно для выпуклого множества Z_X. На рис. 3.1 приведен пример выпуклого паретовского множества для дискретного случая.

Введем еще одно понятие. Альтернатива x_1 доминирует по Парето альтернативу x_2 ($x_1 \geq x_2$, альтернатива x_1 лучше по Парето альтернативы x_2), если $f_i(x_1) \geq f_i(x_2)$, i = 1, …, m и хотя бы для одного i такое неравенство является строгим. Те альтернативы, для которых не существует доминирующих их допустимых альтернатив $x \in X$, называются *оптимальными по Парето*. Структура моделей (1) приводит к простому алгоритму построения множества Парето: определить множества Г величин весового вектора $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_m)^T$, найти паретовские точки по (1) для каждого $\gamma \in \Gamma$, построить конечно-разностную аппроксимацию паретовского множества по полученным точкам.

$$Z_p = \left\{ z = (z_1, z_2) : \max_{x_k \in X} \sum_{i=1}^{2} \gamma_i z_i = \max_{x_k \in X} \sum_{i=1}^{2} \gamma_i f_i(x_k) \wedge \gamma_i \geq 0 \wedge \sum_{i=1}^{2} \gamma_i = 1 \right\}$$

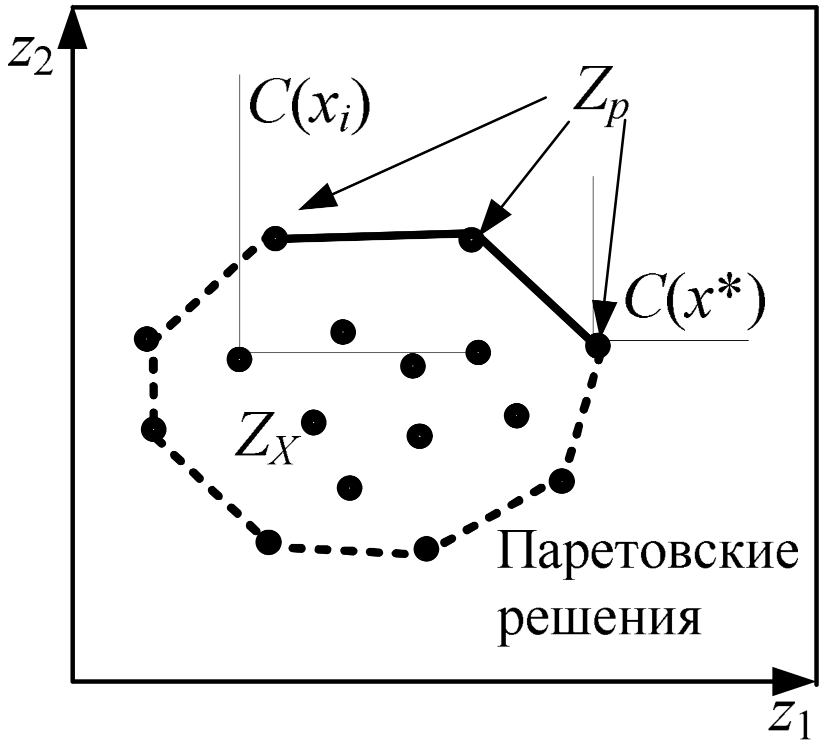


Рис. 3.1 – Пример выпуклого дискретного множества

Одним из достоинств паретовского принципа оптимальности является его инвариантность к масштабу, единицам измерения критериев и взаимной важности критериев. Один из недостатков принципа заключается в отсутствии ответа на вопрос: какое из решений лучшее?

Ответ на этот вопрос дают следующие принципы (при изложении принципов оптимальности предполагается, что множество векторных оценок Z_X ограничено, замкнуто и полностью лежит во внутренности неотрицательного ортанта пространства критериев R^m).

Принцип идеальной точки. Согласно принципу идеальной точки лучшим считается решение, расположенное в пространстве параметров ближе всего (в смысле некоторой нормы) к «идеальной точке» z^I:

$$x^* = \min_{x \in X} D(z^I - z(x), \gamma),$$

где $z^I = (z_1^I, ..., z_m^I)^T$ – идеальная точка; D (.,.) – норма; γ – весовой вектор.

Например, для евклидовой нормы получим:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^{\,2} \cdot (z_i^{\,I} - z_i)^2.$$

Для удобства можно использовать относительные величины:

$$x^* = \arg\min_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^{\,2} \cdot \left(1 - \frac{z_i(x)}{z_i^{\,I}}\right)^2.$$

Идеальная точка может быть выбрана лицом, принимающим решения (ЛПР) интуитивно или взята формально как вектор максимальных значений каждого из критериев в отдельности:

$$z_1 = (z_1^I, ..., z_m^I) = (\max_{x \in X} f_1(x), ..., \max_{x \in X} f_m(x)).$$

Этот принцип выражает желание найти решение, ближайшее к идеальной точке. Изменяя норму D (.,.) и весовой вектор γ, можно по-разному описывать понятие «близости» к идеальной точке.

На рис. 3.2 приведена графическая иллюстрация принципа идеальной точки в случае невыпуклого множества Z_X для дискретного случая.

Принцип антиидеальной точки. В соответствии с этим принципом лучшим считается наиболее удаленное решение от антиидеальноц точки z^{AI}:

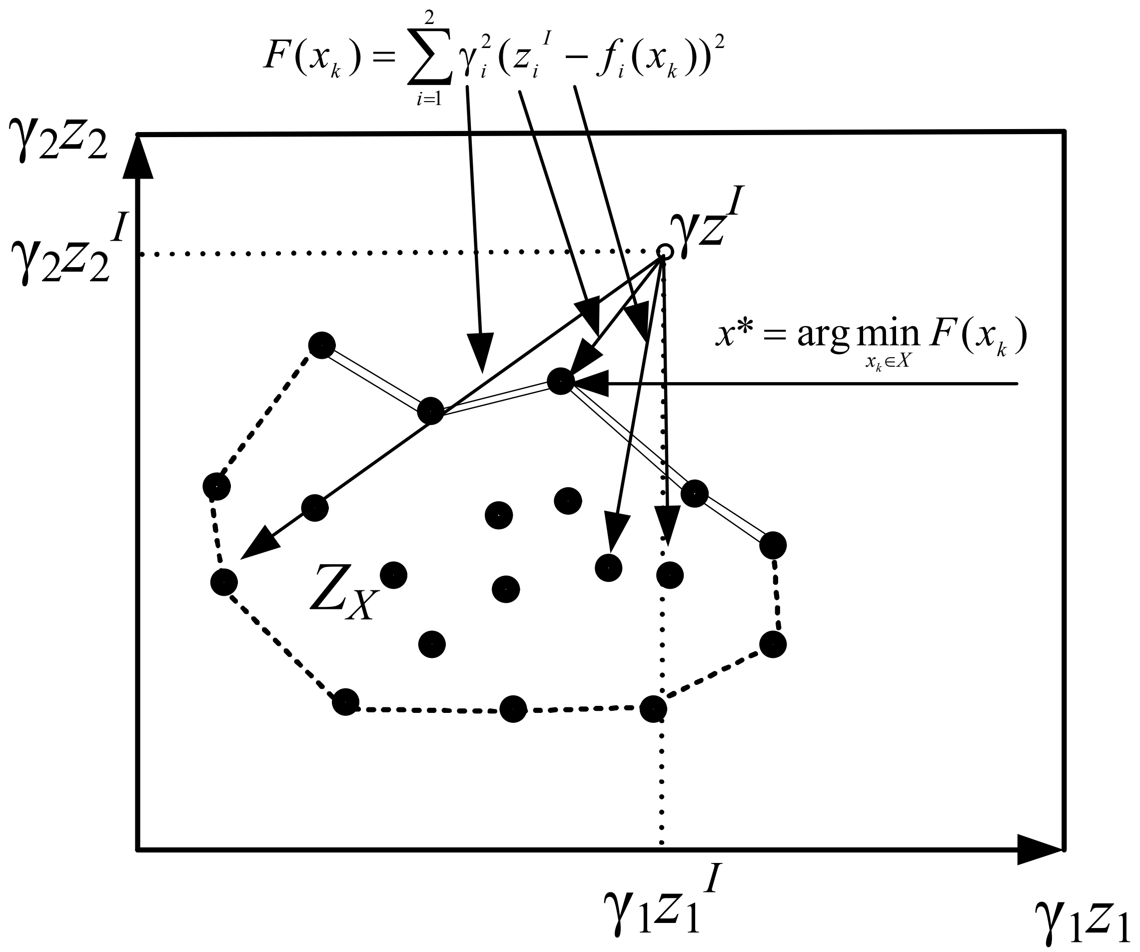
$$x^* = \max_{x \in X} D(z^{AI} - z(x), \gamma),$$

где $z^{AI} = (z_1^{AI}, ..., z_m^{AI})^T$ – антиидеальная точка.

Например, она может быть выбрана следующим образом:

$$z^{AI} = (z_1^{AI}, ..., z_m^{AI}) = (\min_{x \in X} f_1(x), ..., \min_{x \in X} f_m(x)).$$

Данный принцип выражает желание найти решение, наиболее удаленное от антиидеальной точки.



$$\gamma z^I = (\gamma_1 z_1^{\ I}, \gamma_2 z_2^{\ I}) = (\max_{x_k \in X} \gamma_1 f_1(x_k), \max_{x_k \in X} \gamma_2 f_2(x_k))$$

Рис. 3.2 – Пример принципа идеальной точки для невыпуклого дискретного множества Z_X

На рис. 3.3 приведена графическая иллюстрация принципа антиидеальной точки для невыпуклого дискретного множества Z_X.

Следующие пять принципов выражают желание равномерно увеличивать величины всех локальных критериев при определении наилучшего решения.

Принцип равенства. Согласно этому принципу наилучшим будет следующее решение:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X_1} z_1 = \max_{x \in X_1} f_1(x),$$

где $X_1 = \left\{ x : \arg(\gamma_1 \cdot z_1 = \ldots = \gamma_m \cdot z_m) \right\}$.

Здесь решение определяется на прямой в пространстве критериев. Возможны случаи, когда найденное решение не будет паретовским.

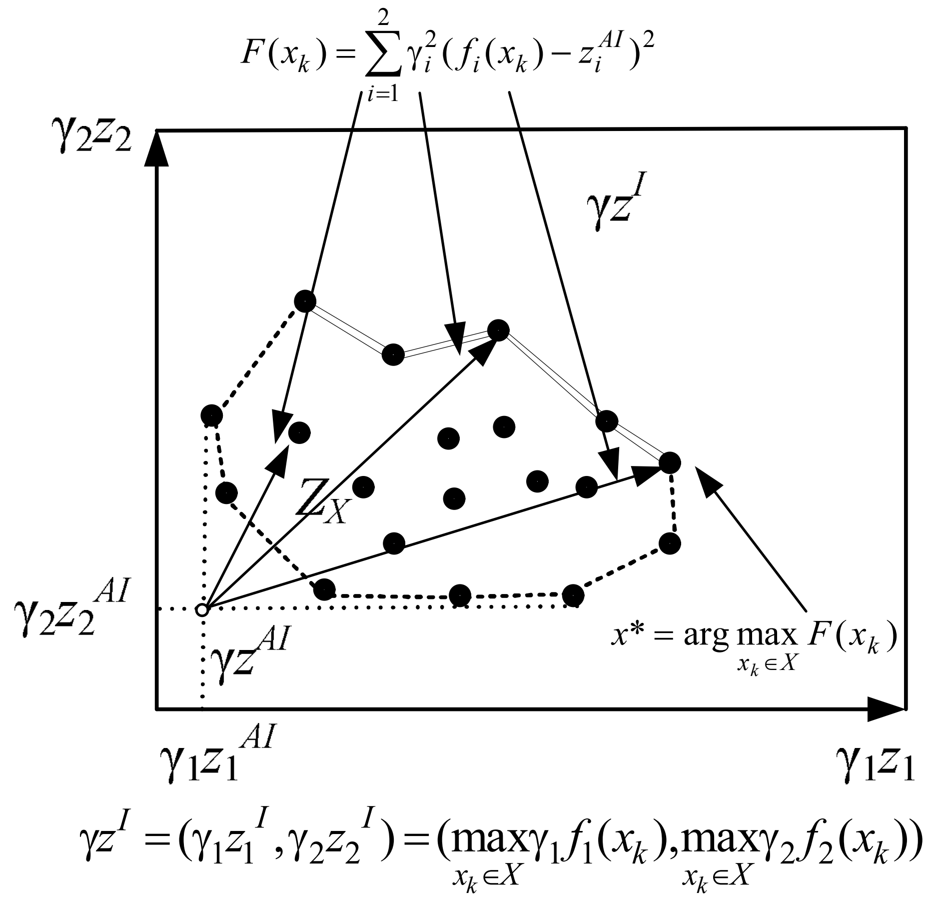


Рис. 3.3 – Пример использования принципа антиидеальной точки для невыпуклого дискретного множества Z_X

На рис. 3.4 приведена графическая иллюстрация применения принципа равенства дл случая невыпуклого дискретного множества Z_X.

Принцип квазиравенства. Это смягченная версия слишком «жесткого» принципа равенства. По данному принципу наилучшее решение ищется как точка:

$$x^*=\arg\max_{x\in X}U(x)=\arg\max_{x\in X_2} z_1=\max_{x\in X_2} f_1(x),$$

где $X_2=\left\{x:\arg(\left|\gamma_i\cdot z_i-\gamma_j\cdot z_j\right|\le\delta_{ij}),\,\delta_{ij}=\mathrm{const},i,j=1,\dots,m\right\}$ и δ_{ij} – заранее выбранная константа или величина, изменяемая ЛПР, которая позволяет значениям критериев отклоняться друг от друга.

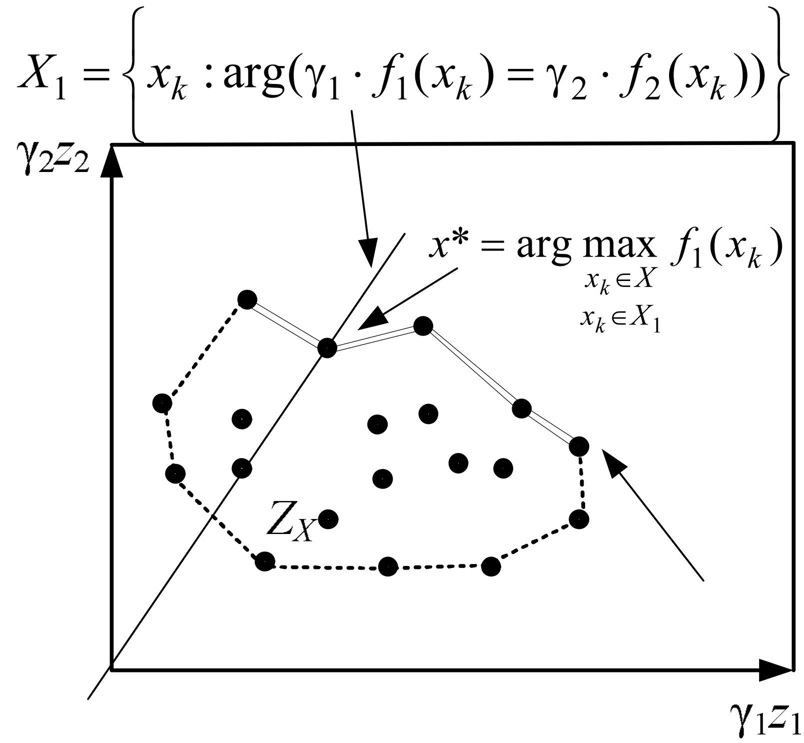


Рис. 3.4 – Пример удачного использования принципа равенства для невыпуклого дискретного множества Z_X

На рис. 3.5 приведена графическая иллюстрация принципа квазиравенства для случая невыпуклого дискретного множества Z_X.

Принцип максимина. Согласно данному принципу каждое решение описывается наименьшей взвешенной величиной из m критериев. Затем выбирается наибольшая величина среди этих наименьших значений и соответствующее ему решение принимается за наилучшее:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \min_{i \in I}(\gamma_i \cdot z_i),$$

где $I = \{1, \ldots, m\}$ – множество номеров критериев, ряд приоритета.

Иногда данный принцип называют принципом гарантированного результата или принципом наибольшей осторожности. Для графической иллюстрации можно рассмотреть рис. 3.4. Максиминное решение в этом примере совпадает с решением, полученным с помощью принципа равенства.

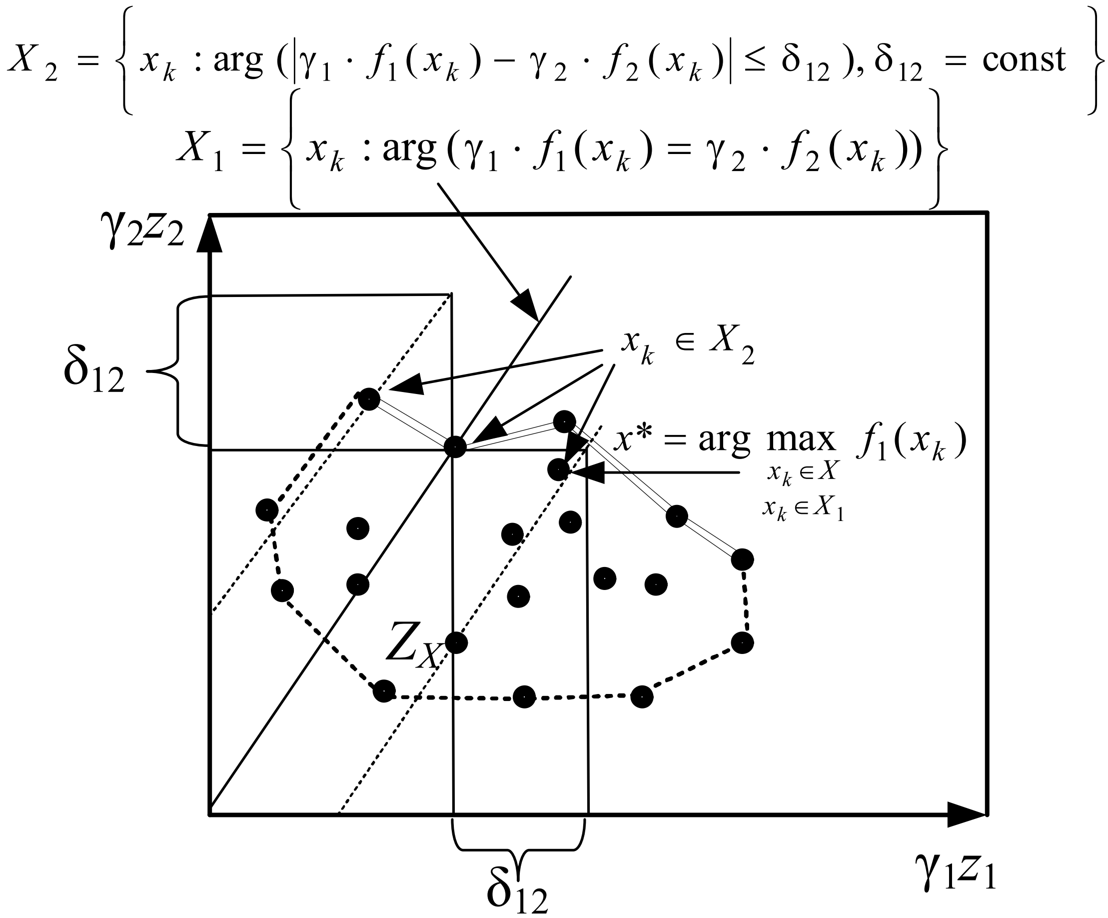


Рис. 3.5 – Пример применения принципа квазиравенства для невыпуклого дискретного множества Z_X

Принцип последовательного максимина. Если принцип максимина не приводит к единственному решению, то он может быть применен последовательно до m раз:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg(\max_{x \in X} \min_{i \in I_{m-1}} \ldots(\max_{x \in X} \min_{i \in I_1}(\max_{x \in X} \min_{i \in I}(\gamma_i \cdot z_i)))\ldots),$$

где I_1 – множество номеров критериев, полученное из множества I, из которого исключена единица (номер критерия с минимальным значением); I_2 – множество номеров критериев, полученное из множества I_1, из которого исключена двойка; $I_{m\text{-}1}$ – множество, содержащее только число m (состоит из номера одного критерия).

Квазиоптимальный принцип последовательного максимина. Этот принцип является смягченной версией принципа последовательного максимина. Принцип последовательного максимина может быть последовательно применен до m раз. Каждое максиминное i-е решение ослабляется на величину Δ_i, такое ослабление производят до m раз. По данному принципу лучшее решение ищется как точка:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X_3} z_1 = \max_{x \in X_3} f_1(x),$$

где

$$X_3 = \left\{ x : \arg\max_{x \in X} \min_{i \in I_{m-1}} (\ldots(\max_{x \in X} \min_{i \in I_1}(\max_{x \in X} \min_{i \in I}(\gamma_i \cdot z_i) - \Delta_1) - \Delta_2)\ldots - \Delta_m) \right\}$$

и Δ_j, $j = 1, \ldots, n$ – заранее выбранные константа и величины, изменяемые ЛПР, которые позволяют расширить множество допустимых значений. Критерий для максимизации может быть выбран ЛПР.

Данный принцип используется при постановке задач нечеткого математического программирования для расширения множества допустимых значений.

Стремление увеличивать величины всех критериев одновременно является привлекательным. Однако отклонение от приведенных принципов иногда может дать значительный выигрыш (например, если ухудшать значения части критериев для достижения улучшения значений по другим критериям).

Следующие два принципа носят название принципов справедливой уступки. Понятие справедливости может быть описано разными способами. До настоящего времени не установлено простого и очевидного «справедливого» принципа, который и не может существовать, так как различные ситуации требуют разной «справедливости». Компромисс и справедливость всегда привязаны к конкретной ситуации или к классу ситуаций. Рассмотрим подход к «справедливости», основанный на сравнении оценок увеличения и уменьшения значений локальных критериев при сравнении различных решений. Данный подход приводит к двум принципам: принципу абсолютной и относительной уступки.

Принцип абсолютной уступки. Пусть сравниваются два любых решения и осуществляется переход от первого ко второму решению. Пусть при этом переходе величины одной части критериев уменьшаются, а второй – увеличиваются. Согласно рассматриваемому принципу, второе решение лучше первого, если сумма взвешенных значений увеличившихся критериев больше суммы взвешенных значений уменьшившихся критериев. Данное определение и сам принцип абсолютной уступки могут быть выражены в простой математической форме:

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot f_i(x) = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot z_i .$$

Описанный принцип позволяет улучшать качество решения за счет компенсации (уступки) уменьшения значений по одним критериям большим увеличением значений по другим критериям. Запись, приведенная выше, называется сверткой значений критериев или просто сверткой. Взвешенная сумма величин критериев может рассматриваться как целевая функция или функция качества.

На рис. 3.6 приведена графическая иллюстрация принципа абсолютной уступки для дискретного множества Z_X.

Принцип относительной уступки. Пусть, как и ранее, сравниваются два любых решения и определяется переход от первого ко второму решению. При этом переходе относительные величины одной части критериев уменьшаются, а относительные величины второй части критериев увеличиваются.

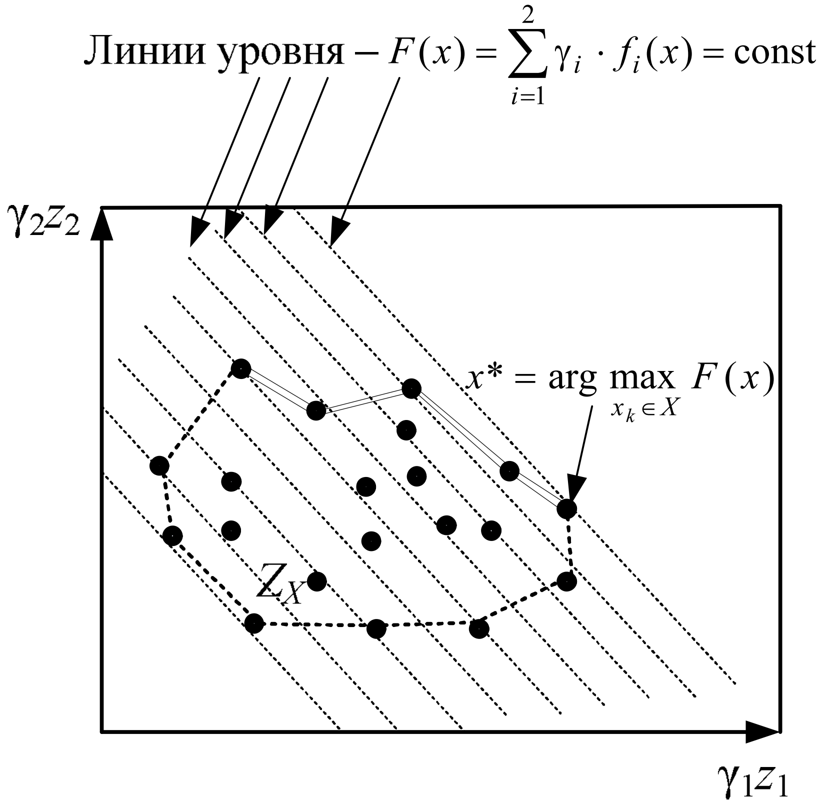


Рис. 3.6 – Пример использования принципа абсолютной уступки для невыпуклого дискретного множества Z_X

Согласно принципу относительной уступки второе решение лучше первого, если суммарное относительное увеличение взвешенных значений увеличившихся критериев больше суммарного относительного уменьшения взвешенных значений уменьшившихся критериев. принцип относительной уступки и данное определение могут быть выражены в простой математической форме:

$$x = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \prod_{i=1}^{m} [f_i(x)]^{\gamma_i} = \arg\max_{x \in X} \prod_{i=1}^{m} z^{\gamma_i} \quad \text{или}$$

$$x^* = \arg\max_{x \in X} U(x) = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot \log f_i(x) = \arg\max_{x \in X} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \cdot \log z_i \,.$$

Этот принцип учитывает значения критериев, и самый простой путь улучшения решения заключается в уменьшении значений критериев с большими значениями.

На рис. 3.7 приведена графическая иллюстрация принципа относительной уступки для случая невыпуклого дискретного множества Z_X.

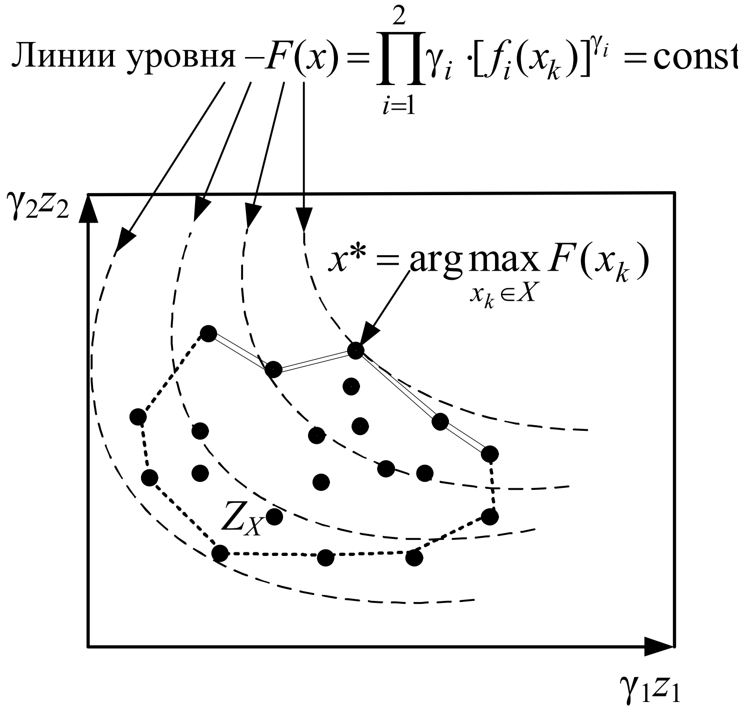


Рис. 3.7 – Пример использования принципа относительной уступки для невыпуклого дискретного множества Z_X

Принцип абсолютной уступки не учитывает значений локальных критериев, его лучше всего использовать в комбинации с другими принципами. Принцип относительной уступки довольно чувствителен к величинам критериев, и относительная уступка ведет к учету интересов, прежде всего, критериев с наибольшими значениями за счет критериев с меньшими значениями. Важным достоинством этого принципа является его инвариантность к единицам, в которых измеряются значения критериев.

Все описанные принципы оптимальности используют весовой вектор. Приводимые далее принципы используют меньше информации о взаимной важности критериев.

Принцип главного критерия. Это наиболее широко используемый принцип при постановке задач оптимизации. Один из критериев (обычно самый важный) принимается за главный, для остальных критериев назначают пороговые величины. Величины этих критериев должны превышать пороговые значения. Наилучшим решением является точка:

$$x^* = \arg\max_{x\in X} U(x) = \arg\max_{x\in X} z_1 = \arg\max_{x\in X} f_i(x),$$

$$X_0 = \left\{ x : x \in X, \arg(z_i \geq \overline{z_i}), \overline{z_i} = \text{const}, i = 2,\ldots,m \right\}.$$

Выбор величин пороговых значений $\overline{z_i}$ очень важен. Изменяя их, можно получать различные значения. Кроме того, можно рекомендовать при использовании данного принципа исследовать то, как влияет выбор главного критерия на результирующее оптимальное решение.

На рис.3.8 приведена графическая иллюстрация принципа главного критерия для случая невыпуклого дискретного множества Z_X. ***Лексикографический принцип.*** В этом случае используется ряд приоритета и решается последовательность задач. Сначала максимизируется самый важный критерий. Полученное в результате множество решений является допустимым множеством для максимизации следующего по важности критерия и т.д.:

1. $X_1 = \{x : \arg\max_{x\in X} z_1\}$,
2. $X_2 = \{z : \arg\max_{x\in X_1} z_2\}$,

……………………….

$m.\ X_m = \{x : \arg \max\limits_{x \in X_{m-1}} z_m\}$.

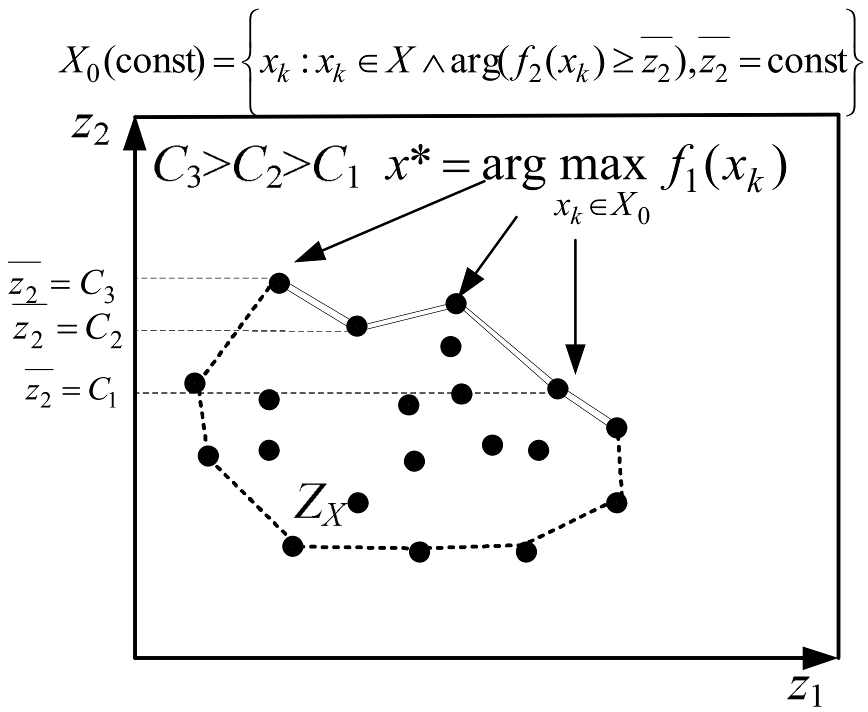


Рис. 3.8 – Пример использования принципа главного критерия для невыпуклого дискретного множества Z_X

Данный принцип является довольно жестким. Часто после решения первой задачи максимизации получают единственное решение, а остальные критерии в решении не участвуют (тем самым их «интересы» не учитываются). На рис. 3.9 приведена графическая иллюстрация лексикографического принципа для случая дискретного множества Z_X.

Лексикографический принцип квазиоптимальности. Решается последовательность задач максимизации с введенными отклонениями от оптимума (уступками). Данные отклонения увеличивают допустимое множество, на котором решаются последующие задачи минимизации:

1. $X_1 = \{x : \arg(\max\limits_{x \in X} z_1 - \Delta_1)\}$,

2. $X_2 = \{z : \arg(\max\limits_{x \in X_1} z_2 - \Delta_2)\}$,

……………………….

$$m-1.\ X_{m-1}=\{x:\arg\max_{x\in X_{m-2}} z_{m-1}-\Delta_{m-1})\},$$

$$m.\ X_m=\{x:\arg\max_{x\in X_{m-1}} z_m\}.$$

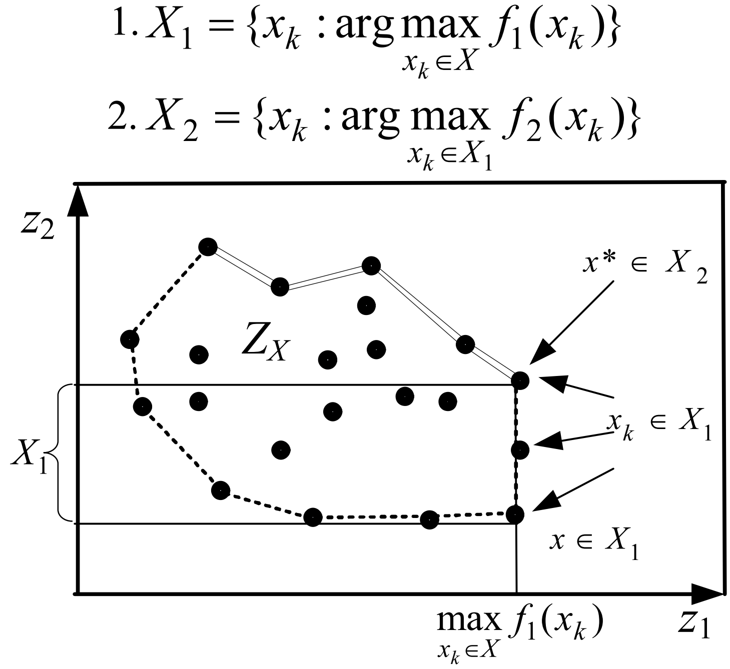


Рис. 3.9 – Пример применения лексикографического принципа оптимальности для невыпуклого дискретного множества Z_X

Принцип позволяет ЛПР выбирать величины Δ_i, $i=1, \ldots, m$-1 и влиять на решение и «интересы» последующих критериев.

На рис. 3.10 приведена графическая иллюстрация лексикографического принципа квазиоптимальности для случая дискретного множества Z_X.

Итак, описаны главные принципы оптимальности, которые могут быть использованы при постановке задач оптимизации для перехода от множества критериев к единому критерию и получению в результате такого перехода традиционной однокритериальной задачи для оптимизации. Правильное и гибкое использование данных принципов не означает их обязательного прямого использования на стадии постановки задачи оптимизации. Предполагается их последовательное или комбинированное применение, исследование того, как изменяется при этом решение и как они согласуются с целями ЛПР.

$$1.\ X_1 = \{x_k : \arg\max_{x_k \in X} f_1(x_k)\}$$

$$2.\ X_2 = \{x_k : \arg\max_{x_k \in X} f_2(x_k)\}$$

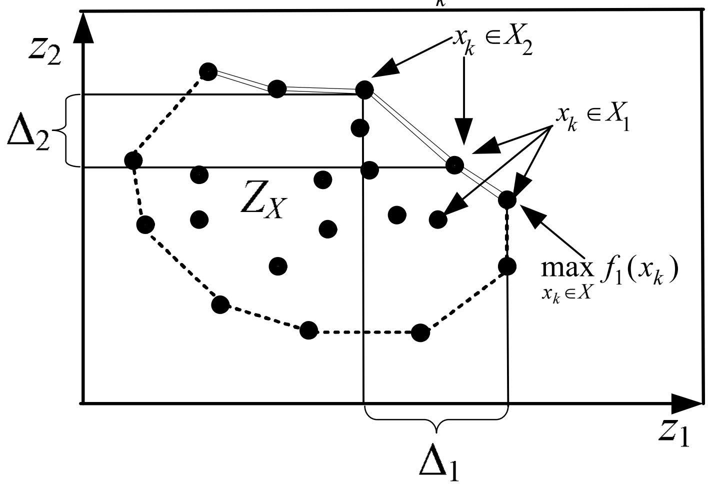


Рис. 3.10 – Пример применения лексикографического принципа квазиоптимальности для невыпуклого дискретного множества Z_X

Следует также отметить, что многие из принципов требуют от ЛПР дополнительной информации, которую ему обычно трудно предоставить априори. Часто ЛПР понимает то, чего можно достигнуть только в процессе решения задачи. Фактически выбор того или другого принципа оптимальности не является математической проблемой, а выбор или построение принципа оптимальности должен вести к решению, удовлетворяющему требованиям ЛПР, и отражать представление его о качестве решения. Чем больше вариантов постановок задач оптимизации и их решений рассматривается ЛПР, тем больше шансов найти решение, полностью его удовлетворяющее.

Таким образом, важной рекомендацией по использованию принципов оптимальности может быть их комбинирование и разумное сочетание применения принципов в диалоге с ЛПР.

4 Варианты заданий

По данным таблицы 4.1 выполнить поиск оптимальных решений.

Таблица 4.1

Варианты заданий

Вариант	a_1	a_2	a_3	a_4	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2
1	0,1	0,3	0,5	1	1	0,1	0,5	0,1	1
2	0,2	0,5	0,4	0,1	0,9	0,2	0,6	0,2	0,9
3	0,3	0,7	0,3	0,9	0,8	0,3	0,4	0,3	0,8
4	0,4	0,1	0,2	0,2	0,7	0,4	0,7	0,4	0,7
5	0,5	0,2	0,1	0,8	0,6	0,5	0,3	0,5	0,6
6	0,6	0,4	1	0,3	0,5	0,6	0,8	0,6	0,5

Значения остальных параметров выбираются самостоятельно с учетом ограничений, представленных в разделе 3.

5 Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен включать в себя:

– наименование лабораторной работы;

– цель лабораторной работы;

– задание к лабораторной работе;

– текст программы в системе Maple;

– Парето-оптимальное множество альтернатив;

– оптимальные альтернативы по: принципу идеальной точки; принципу антиидеальной точки; принципу равенства; принципу квазиравенства; принципу максимина; принципу последовательного максимина; квазиоптимальному принципу последовательного максимина; принципу абсолютной уступки; принципу относительной уступки; принципу главного критерия; лексикографическому принципу; лексикографическому принципу квазиоптимальности; допустимой комбинации двух принципов;

– выводы о влиянии использованных принципов на выбор оптимального решения.

6 Библиографический список

1. Рыков А.С. Модели и методы системного анализа:принятие решений и оптимизация: Учебное пособие для вузов. – М.: «МИСИС», Издательский дом «Руда и металлы», 2005, 352 с.