

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 17.12.2021 13:17:01

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

**Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)**

**Кафедра управления качеством, метрологии и сертификации**

**УТВЕРЖДАЮ**  
Проректор по учебной работе  
**О.Г. Локтионова**  
«  » 2018 г.



## **ОПТИМИЗАЦИЯ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ**

Методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ проблем качества» по направлению подготовки 27.06.01 Управление в технических системах, профиль «Стандартизация и управление качеством продукции»

Составители: В.В. Куц, Н.А. Масалов

УДК 519.6

Рецензент

Доктор технических наук, профессор *Е.В. Агеев*

**Оптимизация сетевых моделей** : методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ проблем качества» по направлению подготовки 27.06.01 Управление в технических системах, профиль «Стандартизация и управление качеством продукции» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.В. Куц, Н.А. Масалов. - Курск, 2018. - 24 с.: ил. 4, табл. 3.

Содержат методические указания к выполнению практической работы по курсу «Системный анализ проблем качества» у студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.06.01 Управление в технических системах, профиль «Стандартизация и управление качеством продукции».

В методических указаниях излагаются цели, задание, теоретические сведения, необходимые для проведения практической работы, а также порядок её выполнения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 4.02.18 . Формат 60x84 1/16.

Усл.печ.л. 1,4 .Уч.-изд.л 1,26. Тираж 100 экз. Заказ. 404 Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

### **3. Сетевое планирование и управление**

Современное разнообразие, многосвязность и взаимозависимость задач коммерческой деятельности вызывают большие трудности при планировании реальных сроков их выполнения.

Традиционные, сложившиеся методы планирования и управления иногда не обеспечивают выполнение операций в коммерческой деятельности в намеченные сроки и не позволяют определить оптимальные объемы ресурсов, а, как известно, «время - деньги». Необходимым свойством системы планирования и управления работами является способность оценить текущее состояние, учесть возможное состояние в будущем, предсказать дальнейший ход работ и таким образом предупредить от возможных ошибок, заранее оперативно воздействовать на ход комплекса работ в сжатые сроки и с наименьшими затратами.

Наиболее эффективны в настоящее время сетевые методы и модели, на базе которых созданы методы сетевого планирования и управления (СПУ). Такие системы предназначены для управления объектами особого типа и сложности, получившими название комплексов взаимосвязанных работ, коммерческих операций, разработок, которые требуют четкой координации взаимодействия множества исполнителей. СПУ позволяет осуществить надежную координацию всех звеньев и подразделений, участвующих в сложном комплексе. В таких случаях СПУ, по существу, является единственно возможным методом научного планирования и управления по выполнению больших масштабов работ с высокой вероятностью соблюдения заданных сроков их реализации, что является их главным достоинством.

#### ***2.3.1. Методы сетевого планирования***

Особенность СПУ заключается в том, что деятельность всех коллективов исполнителей рассматривается в целом как единый комплекс взаимосвязанных и взаимозависимых операций, направленных на достижение общей конечной цели. Здесь используется информационно-динамическая модель особого вида, так называемая сетевая модель логико-математического описания, позволяющая алгоритмизировать расчеты параметров этого процесса: продолжительности, трудоемкости, стоимости и т.д. Системы рассчитаны на использование

компьютерных систем обработки исходных и оперативных данных для расчета контролируемых показателей и получения необходимых аналитических и отчетных сводок.

В СПУ применяются графическое изображение или аналитическая запись плана работ, в которых отражается их логическая последовательность, взаимосвязь, продолжительность, стоимость и др. Они создаются с целью оптимизации разработанного плана и текущего управления ходом работ путем периодического сбора информации и соответствующей корректировки плана. Эти системы являются комплексом графических и расчетных методов, организационных мероприятий и контрольных приемов, обеспечивающих моделирование и динамическую перестройку планов в коммерческой деятельности. Причем графические методы дают наиболее наглядно-обозримую информацию о ходе комплекса работ, как в целом, так и в деталях. В этом случае системой СПУ осуществляется управление по отклонениям, т.е. сообщаются лишь необходимые сведения только изменившихся, а не плановых состояний работ, поскольку избыточная информация затрудняет процесс управления. В целом система СПУ включает сбор, переработку информации, поступающей от управляемого объекта, выработку решений на ее основе и передачу распоряжений на управляемый объект.

СПУ концентрируют внимание руководителей на самых важных работах комплекса, отсеивая второстепенные. Так, при сложившихся методах управления в поле зрения руководителя обычно находится до 70% работ, что, безусловно, затрудняет принятие им эффективных решений. Разработка СПУ позволила установить, что практически лишь около 10% работ от всего комплекса существенно влияют на ход выполнения работ. При этом время, затрачиваемое руководителями на решение вопросов управления, сокращается на 50-60%. Кроме того, все участники работ находятся в объективно равных условиях осведомленности, что оказывает влияние на успех завершения всего комплекса работ в намеченные сроки.

Преимущество СПУ заключается в следующем:

- а) концентрирует внимание руководителей на небольшом числе работ и исполнителей;
- б) устанавливает четкую взаимосвязь между исполнителями, обеспечивая тесное организационное единство;
- в) позволяет в любой момент времени располагать исчерпывающей информацией;

г) обеспечивает непрерывность управления ходом работ, своевременность принятия решений, оперативность вмешательства;

д) позволяет рационально маневрировать выделенными ресурсами;

е) дает большую экономию времени, средств, энергии, материалов, и т.д.;

ж) дисциплинирует исполнителей, создается объективная картина качества работ, доступная каждому, исключается штурмовщина;

з) создается возможность выполнения вычислительных работ на компьютере.

В зависимости от масштаба комплекса работ различают такие системы: с числом событий в сети 10...12 тыс. — большие разработки, средние — 1,5...10 тыс. и малые — до 1,5 тыс. В случае небольших разработок от нескольких десятков событий до 100 используются ручные методы расчета и анализа, в остальных случаях — по специальным компьютерным программам.

Методы и модели СПУ могут с успехом применяться в коммерческой деятельности при выполнении различных комплексов работ: проведение текущего или капитального ремонта; реконструкции коммерческих торговых предприятий; подготовке и проведении оптовых и розничных ярмарок; разработка плана коммерческой деятельности; заготовка, переработка и закладка плодово-овощной продукции на длительное хранение; перевод предприятий торговли на самообслуживание; оперативная реконструкция секций супермаркетов; строительство универсальных оптовых предприятий; разработка плана развития торговой сети; планирование торговой деятельности; составление бухгалтерского отчета; поставка товаров покупателям; заключение договоров на поставку; открытие нового торгового предприятия, а также многих комплексов финансово-коммерческих операций.

**Подготовка задач к решению.** На предварительном этапе сетевого моделирования определяется структура комплекса работ, последовательность выполнения отдельных операций, состав и взаимосвязь организаций соисполнителей, ориентировочные сроки поставок, потребность в основных ресурсах и ассигнованиях. Внешние связи плана работ торгового предприятия согласовываются со всеми организациями-соисполнителями. Затем переходят к исходному планированию по одному из трех вариантов.

В первом случае проводят расчленение комплекса работ централизованно «сверху вниз» на составляющие элементы, на базе которых ответственным исполнителям выдаются задания.

Второй вариант построения сетевой модели «снизу вверх» базируется на сшивании, т.е. соединении нескольких первичных сетевых графиков, полученных от ответственных исполнителей, в одну сеть.

Третий, наиболее распространенный способ «сверху вниз»-«снизу вверх» включает поочередное членение комплекса работ и укрупнение с координацией на основе первичных графиков ответственных исполнителей, детально представляющих специфику торговых операций.

Ответственные исполнители в системах СПУ - это специалисты, осуществляющие руководство работами по отдельным частям комплекса и несущие за них персональную ответственность.

Более наглядное представление о содержании работ в целом и в деталях дает построение дерева комплекса работ.

### ***2.3.2. Правила построения сетевых моделей***

Наиболее распространенным способом изображения СПУ являются сетевые модели в терминах работ и событий, где работы изображаются стрелками, а события — кружками (см. рис. 2.5). Правила построения сетевых моделей существенно зависят от формы представления последовательности работ и событий. Если сформулированы события и описаны входящие и выходящие работы, то следует придерживаться следующих основных правил:

- 1) Строится трафарет событий (рис. 2,4).
- 2) Наносятся на трафарет в соответствии со структурно-временной табл. 2.3 последовательно все работы.
- 3) Просматриваются возможные варианты следования событий и работ, их табличная запись и формы изображения приведены на рис. 2.6.
- 4) Всем стрелкам сетевого графика задают общее направление слева направо.
- 5) Не должно быть стрелок, которые ниоткуда не выходят и никуда не входят.
- 6) Между одной парой событий можно изобразить только одну работу.
- 7) При необходимости изображения двух параллельно выполненных работ между двумя событиями 5 и 7 (рис. 2.6, а) вводят до-

полнительное промежуточное событие 6 и фиктивную работу (6, 7) с нулевой продолжительностью (рис. 2.6, б).

8) Из сети исключают тупиковые события, от которых не начинается ни одна работа, за исключением завершающего события комплекса.

9) Проводят преобразование геометрии взаимного расположения работ и событий к виду, удобному для восприятия в целом, например, устраняют пересечения работ.

10) Нумерацию событий проводят последовательно слева направо и сверху вниз.

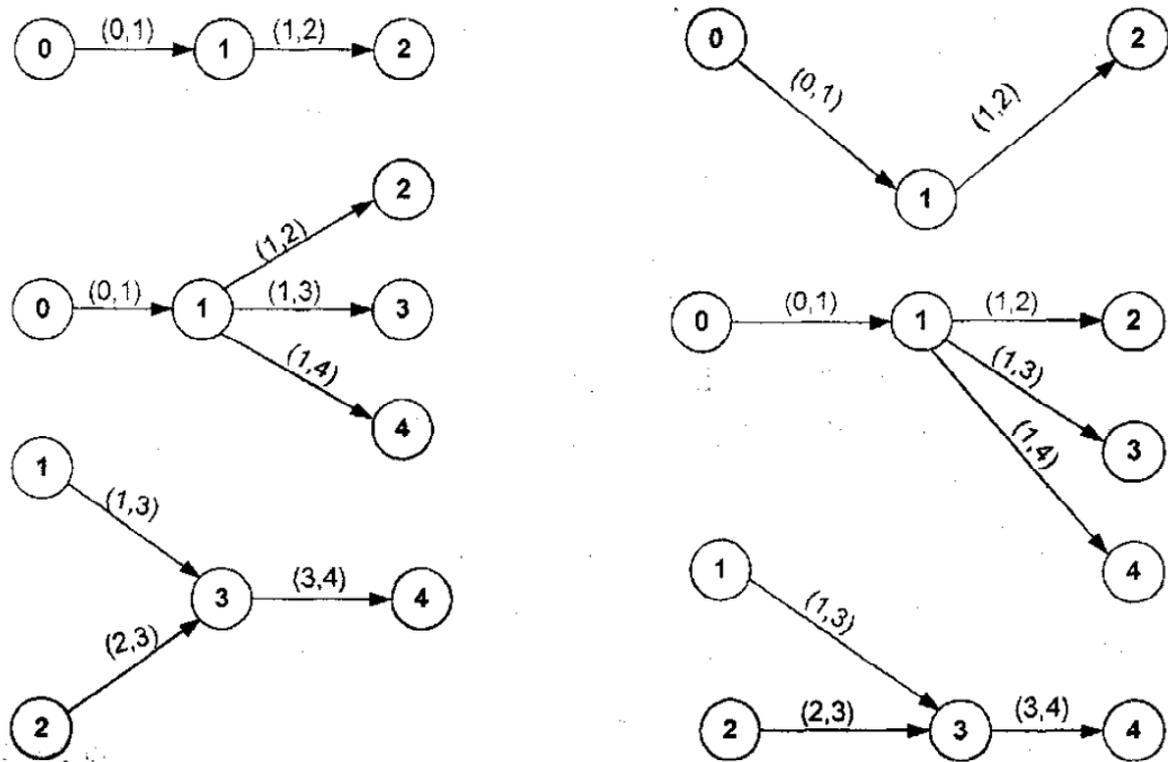


Рис. 2.5

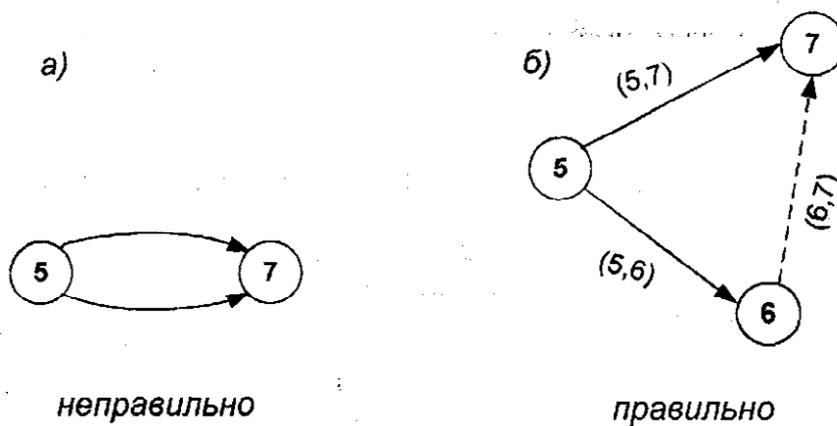


Рис. 2.6

Если же сформулированы только работы и их последовательность, а события не сформулированы, то следует использовать другую методику построения сетевого графика.

В случае больших комплексов работ сначала строят частные сетевые графики ответственные исполнители, а затем формируют сводную модель комплекса путем их сшивания.

Рассмотрим пример. Задача состоит в поиске минимального времени выполнения всего комплекса работ по переводу предприятия розничной торговли на самообслуживание, при заданных ограничениях в ресурсах В (общие ресурсы по выполнению комплекса работ). Подготовка задачи к решению начинается с формирования исходной информации на основе бесед со специалистами, детально представляющих специфику предстоящей работы. Необходимые исходные данные представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Работа (i,j)	Содержание работы	Ресурсы, $b_{ij}$	Коэффициенты пересчета $c_{ij}=1/b_{ij}$	Длительность работ, дни	
				Фактическая $t_{ij}$	Оптимальная
(0,1)	Составление сметы	$b_{0,1}$	$c_{0,1}=0,1$	$t_{0,1}=15$	?
(1,2)	Приобретение оборудования	$b_{1,2}$	$c_{1,2}=0,2$	$t_{1,2}=16$	?
(1,3)	Подбор кадров	$b_{1,3}$	$c_{1,3}=0,5$	$t_{1,3}=6$	?
(2,4)	Монтаж оборудования	$b_{2,4}$	$c_{2,4}=0,3$	$t_{2,4}=6$	?
(3,5)	Подготовка кадров	$b_{3,5}$	$c_{3,5}=0,6$	$t_{3,5}=5$	?
(4,6)	Оформление зала	$b_{4,6}$	$c_{4,6}=0,4$	$t_{4,6}=8$	?
(5,6)	Доставка товаров	$b_{5,6}$	$c_{5,6}=0,7$	$t_{5,6}=6$	?
(5,8)	Заказ и получение формы	$b_{5,8}$	$c_{5,8}=0,9$	$t_{5,8}=14$	?
(5,7)	Заказ и получение ценников	$b_{5,7}$	$c_{5,7}=1,0$	$t_{5,7}=8$	?
(6,8)	Выкладка товаров	$b_{6,8}$	$c_{6,8}=0,8$	$t_{6,8}=2$	?
(7,8)	Заполнение ценников	$b_{7,8}$	$c_{7,8}=1,1$	$t_{7,8}=4$	?
(8,9)	Генеральная репетиция	$b_{8,9}$	$c_{8,9}=1,2$	$t_{8,9}=3$	?

В таблице используются следующие обозначения:

$b_{i,j}$  - выделенные ресурсы для выполнения элементарной работы (i,j);

$t_{i,j}$  - длительность выполнения элементарной работы  $(i,j)$  выделенными ресурсами  $b_{i,j}$ ;

$c_{i,j}$  - коэффициент пересчета ресурсов работы  $(i,j)$ ;  $c_{i,j}=1/b_{i,j}$ .

Граф, построенный по исходным данным табл. 2.3 и перечисленным правилам расположения и взаимосвязи работ и событий (рис. 2.7), представляет собой сетевую модель задачи по переводу коммерческого предприятия на самообслуживание.

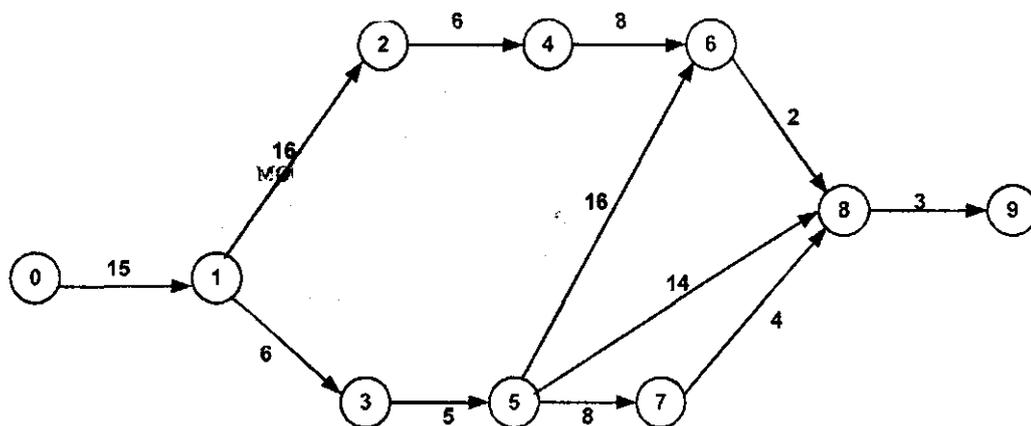


Рис. 2.7

Следует учитывать, что сетевые модели большого объема трудно обозримы. В связи с этим проводят укрупнение сетевой модели путем устранения менее важных фрагментов и, следовательно, уменьшения числа изображаемых событий и работ, оставляя только наиболее значимые.

### 2.3.3. Параметры сетевых моделей и методы их расчета

Основные параметры сетевых моделей — это критический путь, резервы времени событий, работ и путей. Кроме этих показателей имеется ряд вспомогательных, которые являются исходными для получения дополнительных характеристик по анализу и оптимизации сетевого плана комплекса работ.

При расчетах применяют следующие обозначения параметров сетевой модели: -

$t_j^P$  - ранний срок свершения  $j$ -го события;

$t_j^П$  - поздний срок свершения  $j$ -го события;

$R_j$  - резерв времени на свершение  $j$ -го события;

$t_{ij}^{PH}$  - ранний срок начала работы  $(i,j)$ ;

$t_{ij}^{PO}$  - ранний срок окончания работы  $(i,j)$ ;

$t_{ij}^{PH}$  - поздний срок начала работы  $(i,j)$ ;

$t_{ij}^{PO}$  - поздний срок окончания работы  $(i,j)$ ;

$r_{ij}^{\Pi}$  - полный резерв времени работы  $(i,j)$ ;

$r_{ij}^{CB}$  - свободный резерв времени работы  $(i,j)$ ;

$k_{ij}^H$  - коэффициент напряженности работы  $(i,j)$ ;

$T_{\Pi}$  - продолжительность пути  $L_{\Pi}$ ;  $T_{\Pi} = t(L_{\Pi})$ ;

$T_{KР}$  - продолжительность критического пути  $L_{KР}$ ;

$R_{\Pi}$  - полный резерв времени пути  $L_{\Pi}$ .

Рассмотрим определения и модели расчета параметров сетевой модели.

*Ранний срок свершения  $j$ -го события  $t_j^P$*  - наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов наступления данного события при заданной продолжительности работ.

*Поздний срок свершения  $j$ -го события  $t_j^{\Pi}$*  - наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов наступления данного события, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок.

*Резерв времени на свершение  $j$ -го события  $R_j$*  - это промежуток времени, на который может быть отсрочено наступление события  $j$  без нарушения сроков завершения всего комплекса, определяется как разность между поздним  $t_j^{\Pi}$  и ранним  $t_j^P$  сроками наступления события  $R_j = t_j^{\Pi} - t_j^P$ .

*Ранний срок начала работы  $t_{ij}^{PH}$*  - наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов начала данной работы при заданной продолжительности работ. Он совпадает с ранним сроком наступления ее начального события:  $t_{ij}^{PH} = t_j^P$ .

*Ранний срок окончания работы  $t_{ij}^{PO}$*  - наиболее ранний (минимальный) из возможных моментов окончания данной работы при заданной продолжительности работ. Он превышает ранний срок наступления ее события  $i$  на величину продолжительности работы:

$$t_{ij}^{PO} = t_j^P + t_{ij}.$$

*Поздний срок начала работы*  $t_{ij}^{\text{ПН}}$  - наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов начала данной работы, при котором еще возможно выполнение всех последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{ПН}} = t_j^{\text{П}} - t_{ij}.$$

*Поздний срок окончания работы*  $t_{ij}^{\text{ПО}}$  — наиболее поздний (максимальный) из допустимых моментов окончания данной работы, при котором еще возможно выполнение последующих работ в установленный срок:

$$t_{ij}^{\text{ПО}} = t_j^{\text{П}}.$$

*Полный резерв времени работы (i,j)*  $r_{ij}^{\text{П}}$  - максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы  $t_0$  без изменения общего срока выполнения комплекса:

$$r_{ij}^{\text{П}} = t_j^{\text{П}} - t_i^{\text{Р}} - t_{ij}.$$

*Свободный резерв времени работы (i,j)*  $r_{ij}^{\text{СВ}}$  - максимальное время, на которое можно отсрочить начало или увеличить продолжительность работы при условии, что все события сети наступают в свои ранние сроки:

$$r_{ij}^{\text{СВ}} = t_j^{\text{Р}} - t_i^{\text{Р}} - t_{ij}.$$

*Полный резерв времени пути*  $R_{\text{П}}$  - показывает, насколько могут быть увеличены продолжительности всех работ в сумме пути  $L_{\text{П}}$  относительно критического пути

$$R_{\text{П}} = L_{\text{КР}} - L_{\text{П}}.$$

*Коэффициент напряженности работы (i,j)*  $k_{ij}^{\text{Н}}$  - характеризует напряженность по срокам выполнения работы (i,j). Чем ближе коэффициент напряженности к 1, тем сложнее выполнять эту работу в установленные сроки.

*Методы расчета* параметров сетевой модели делятся на две группы.

В первую группу входят аналитические методы, которые включают вычисления по формулам непосредственно на сетевом графике, табличный и матричный методы.

Ко второй группе относятся методы, основанные на теории статистического моделирования, которые целесообразно применять при расчете стохастических сетей с очень большим разбросом возможных сроков выполнения работ.

В качестве примера рассмотрим из первой аналитической группы табличный, метод расчета параметров. В этом случае заполнение табл. 2.4 производится последовательно по следующим правилам:

а) графы 1 и 3 заполняются на основе исходных данных, представленных в структурно-временной табл. 2.3.

б) в графе 2 записывается количество предшествующих работ по сетевому графику или определяется из графы 1 по числу работ, имеющих второй цифрой в коде ту, с которой начинается данная работа. Например, в графе 1 имеются три работы, оканчивающиеся на цифру 8: (5,8); (6,8); (7,8), поэтому работа (8,9) имеет три предшествующие работы;

Таблица 2.4

Работа, $ij$	Количество предшествующих работ	Продолжительность работ, $t_{ij}$	Сроки выполнения работ				Резервы времени		
			ранние		поздние		Работ		событий, $R_{ij}$
			Начала	окончания	начала	окончания	полный	свободный	
1	2	3	4	5	6	7-	8	9	10
(0,1)	0	15	0	15	0	15	0	0	0
(1,2)	1	16	15	31	15	31	0	0	0
(1,3)	1	6	15	21	22	28	7	0	7
(2,4)	1	6	31	37	31	37	0	0	0
(3,5)	1	5	21	26	28	33	7	0	7
(4,6)	1	8	37	45	37	45	0	0	0
(5,6)	1	6	26	32	39	45	13	13	0
(5,8)	1	14	26	40	33	47	7	7	0
(5,7)	1	8	26	34	35	43	9	0	9
(6,8)	2	2	45	47	45	47	0	0	0
(7,8)	1	4	34	38	43	47	9	9	0
(8,9)	3	3	47	50	47	50	0	0	0

) в графе 4 раннее начало работ, выходящих из исходного события, равно нулю, а раннее окончание этих работ равно их продолжительности (гр. 5). Раннее начало последующих работ определяется путем

выбора максимального из сроков раннего окончания предшествующих работ. Количество сравниваемых сроков равно количеству предшествующих работ графа 2. Раннее начало последующих работ можно определить после того, как найдено раннее окончание предшествующих. В свою очередь, раннее окончание каждой работы находится как сумма величин раннего начала и продолжительности данной работы;

г) продолжительность критического пути определяется после заполнения граф 4 и 5 как максимальная величина из сроков раннего окончания работ, которые ведут к завершающему событию 9;

д) найденная величина критического пути  $T_{\text{кр}} = 50$  дням заносится в графу 7 для всех работ, ведущих к завершающему событию. Затем заполнение ведется снизу вверх. Находятся все работы, следующие за рассматриваемой, и определяются разности между поздним окончанием этих работ и их продолжительностями. Минимальная из величин заносится в графу 7;

е) в графе 6 позднее начало работы определяется как разность позднего окончания этих работ и их продолжительности (из значений графы 7 вычитаются данные графы 3);

ж) в графе 8 полный резерв времени работы определяется разностью между значениями граф 7 и 5. Если он равен нулю, то работа является критической;

з) в графе 10 резерв времени событий  $j$  определяется как разность позднего окончания работы, заканчивающегося событием  $j$  графы 7, и ранним началом работы, начинающимся событием;

и) значение свободного резерва времени работы определяется как разность значений графы 8 и данных графы 10 и указывает на расположение резервов, необходимых для оптимизации.

Пользуясь полученными значениями параметров работ по переводу предприятия торговли на самообслуживание (табл. 2.4), можно перейти к анализу сетевой модели, а затем провести оптимизацию.

### ***2.3.4. Анализ сетевых моделей***

Анализ сетевой модели проводится с целью выявления резервов и «узких мест». Табличный метод расчета параметров табл. 2.4 позволяет решить эту задачу. Однако большую наглядность все же дает графический метод анализа. Соединение различных методов сетевого моделирования позволяет объединить их преимущества.

Следует помнить, что обнаруженные резервы позволяют более гибко управлять комплексом работ путем их разумного перераспределения с одних работ на другие, не произвольно, а по специальным методам оптимизации.

Анализ сетевой модели (рис. 2.7) начинаем с определения минимального времени выполнения всего комплекса работ. Для этой цели проследим все возможные пути перехода из одного события (0) к завершающему (9). Таких путей четыре:

$$L_1 = [(0,1)(1,2)(2,4)(4,6)(6,8)(8,9)]$$

$$L_2 = [(0,1)(1,3)(3,5)(5,6)(6,8)(8,9)]$$

$$L_3 = [(0,1)(1,3)(3,5)(5,8)(8,9)]$$

$$L_4 = [(0,1)(1,3)(3,5)(5,7)(7,8)(8,9)]$$

Определим длительности этих путей:

$$T_1 = t(L_1) = t_{0,1} + t_{1,2} + t_{2,4} + t_{4,6} + t_{6,8} + t_{8,9} = 15 + 16 + 6 + 8 + 2 + 3 = 50 \text{ дн.}$$

$$T_2 = t(L_2) = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,5} + t_{5,6} + t_{6,8} + t_{8,9} = 15 + 6 + 5 + 6 + 2 + 3 = 37 \text{ дн.}$$

$$T_3 = t(L_3) = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,5} + t_{5,8} + t_{8,9} = 15 + 6 + 5 + 14 + 3 = 43 \text{ дн.}$$

$$T_4 = t(L_4) = t_{0,1} + t_{1,3} + t_{3,5} + t_{5,7} + t_{7,8} + t_{8,9} = 15 + 6 + 5 + 8 + 4 + 3 = 41 \text{ дн.}$$

Поскольку многие из работ, лежащих на этих путях, выполняются параллельно, общий срок перевода коммерческого предприятия на самообслуживание будет определяться путем максимальной продолжительности, называемым критическим:

$$T_{KP} = \max\{t(L_i)\} = 50 \text{ дн.}$$

Длительность пути  $L_2$ , составляющая 37 дней, минимальна, однако не позволяет выполнить все работы комплекса.

Длительность пути  $L_1$  составляет 50 дней, однако за это время все работы комплекса могут быть выполнены. Следовательно, минимальное время, за которое может быть выполнен весь комплекс работ, составляет 50 дней, следовательно, путь  $L_1$  является критическим.

Теперь определим полные резервы времени по всем путям:

$$R(L_1) = T_{KP} - T_1 = 0$$

$$R(L_2) = T_{KP} - T_2 = 13 \text{ дн.}$$

$$R(L_3) = T_{KP} - T_3 = 7 \text{ дн.}$$

$$R(L_4) = T_{KP} - T_4 = 9 \text{ дн.}$$

В пределах имеющихся резервов времени с выполнением некоторых работ можно не спешить, и общий срок выполнения ком-

плекса работ не увеличится. Если же длительность выполнения любой из работ критического пути увеличилась, то общий срок выполнения комплекса работ неизбежно возрастет.

Для наглядного выявления мест расположения резервов времени построим сетевой график работ в масштабе времени (рис. 2.8).

Построение начинается с критического пути  $L_{KP}$  в соответствии с правилами сетевого моделирования по графику событий с учетом изображения длительностей работ  $t_{ij}$  в масштабе времени по оси абсцисс. По оси ординат длины стрелок выбираются из соображений удобства восприятия топологии сети в целом. Этим объясняется почти равная длина стрелки работы (6,8) и работы (2,4), хотя по масштабу времени длительность  $t_{2,4}$  больше  $t_{6,8}$ .

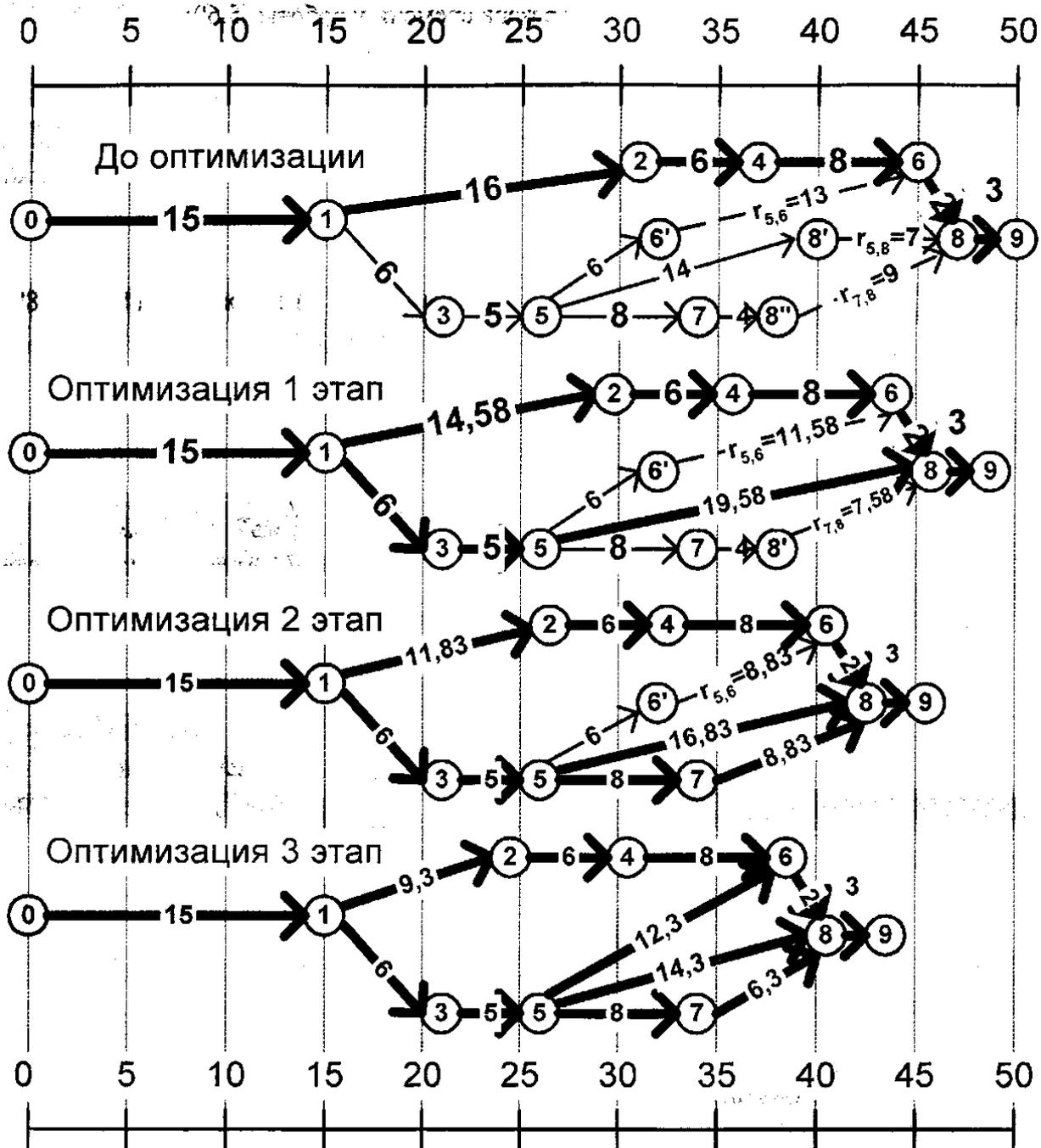


Рис. 2.8

Длительность всех остальных путей  $T_1$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  меньше, поэтому вводим фиктивные события  $6'$ ,  $8'$ ,  $8''$  и фиктивные работы  $(6',6)$ ,  $(8',8)$ ,  $(8'',8)$  с нулевой продолжительностью.

В результате мы получили полную картину расположения мест свободных резервов времени (табл. 2.4) работ  $r_{5,6}^{CB} = 13$  дням,  $r_{5,8}^{CB} = 7$  дням и  $r_{5,9}^{CB} = 9$  дням. Наиболее напряженными являются работы критического пути  $L_1$ , которые не имеют резервов и поэтому являются «узкими местами» комплекса работ.

Таким образом, в результате анализа сетевой модели мы получили все необходимые данные для проведения оптимизации.

Наличие резервов позволит провести оптимизацию сетевого графика путем лучшего перераспределения выделенных ресурсов и построить более экономный план, который даст возможность выполнить весь комплекс работ за меньшее время.

### 2.3.5. Оптимизация сетевой модели

Сетевой график работ составлен таким образом, что израсходованы все ресурсы  $B$ . Однако на этом графике не все работы критические, поэтому можно уменьшить время  $T_{KP}$  за счет резервов, имеющихся на некритических работах. Перебрасывая эти резервы на критические работы, можно уменьшить время их выполнения и тем самым получить новые сроки выполнения работ и соответственно меньший  $T_{KP}$ . Оптимальным сетевым планом будет такой план, когда  $T_{KP}$  получится наименьшим из всех возможных в данных условиях. Очевидно, новые длительности всех путей в таком случае будут равны, т.е.

$$T_1^0 = T_2^0 = T_3^0 = T_4^0 = T_{KP}^0.$$

Механизм перераспределения средств включает уменьшение средств части работы  $(i,j)$  на некоторую величину  $x_{ij} < b_{ij}$  что приводит, естественно, к увеличению времени ее выполнения:

$$t'_{ij} = f(x_{ij}) > t_{ij}.$$

Средства  $x_{ij}$  вложенные в другую работу  $(h,k)$ .  $x_{ij} = x_{hk}$  приводят к уменьшению времени ее выполнения:

$$t'_{hk} = f(x_{hk}) < t_{hk}.$$

Продолжительность выполнения работ зависит от объема выделенных ресурсов, работает формула «время - деньги», и не зависит от того, каким образом эти ресурсы были инвестированы.

В практике выполнения расчетов эти функции обычно представляют приближенно линейными выражениями следующего вида:

$$t'_{ij} = t_{ij}(1 + c_{ij}x_{ij}) = t_{ij} + t_{ij} \frac{x_{ij}}{b_{ij}},$$

$$t'_{hk} = t_{hk}(1 - c_{hk}x_{hk}) = t_{hk} - t_{hk} \frac{x_{hk}}{b_{hk}}.$$

В связи с тем, что выделенные ресурсы  $B$  ограничены, должно выполняться условие их сохранения, т.е. сумма средств, снимаемых с

работ  $(i,j)$ , должна быть равна сумме средств, передаваемых работам  $(h,k)$

$$\sum_{CH.}^M x_{ij} = \sum_{ПЕР.}^N x_{hk} ,$$

где  $M$ — число работ, с которых средства снимались;  
 $N$ —число работ, на которые средства переносились.

В процессе перераспределения средств необходимо соблюдать условие ограничения на величину снимаемых средств  $x_{ij}$  с работы  $(i,j)$ , которое определяется наличием свободного резерва времени  $r_{ij}^{CB}$  этой работы

$$t_{ij} + r_{ij}^{CB} \geq t_{ij} (1 - c_{ij} x_{ij}).$$

После преобразования это условие выглядит следующим образом:

$$x_{ij} \leq \frac{r_{ij}^{CB}}{t_{ij} c_{ij}} .$$

Решение задачи оптимизации состоит в последовательном переносе средств с не критических работ на критические, переходе от одного пути к другому до тех пор, пока все работы не будут критическими и не будут иметь резервов, а длительности всех путей станут равными.

Перед началом оптимизации расположим длительности всех путей последовательно в порядке увеличения их резервов.

**На первом этапе** оптимизации выбираем резервы работ, ближайший к критическому пути  $L_1 = 50$  дней, путь  $L_3 = 43$  дня. На этом пути  $L_3$  не критическая работа  $(5,8')$  имеет свободный резерв времени  $r_{5,8'}^{CB} = 7$  дней. Условие допустимости решения по величине переносимых средств определяется выражением

$$x_{5,8'} \leq \frac{r_{5,8'}^{CB}}{t_{5,8'} c_{5,8'}} \quad \bullet$$

Перенесем часть средств работы  $(5,8')$  на работу критического пути  $(1,2)$ . *Примечание.* Переносить средства с работы одного пути, например  $(5,8')$  пути  $L_2$ , на любую работу, даже и критическую, но входящую в этот же путь  $L_2$ , например  $(0,1)$ , нельзя.

Величину переносимых средств и длительности новых равных критических путей  $T_1' = T_3' = T_{кр}'$  можно найти, составив и решив следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{5,8'} = x_{1,2} \\ T_{KP} - t_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x_{1,2} = T_3 + t_{5,8'} \cdot c_{5,8'} \cdot x_{5,8'} \end{cases}$$

Найдя величину переносимых средств, проверяем допустимость такого решения по ограничению. Если оно недопустимо, то переносим средства на любую другую работу; опять составляем новую систему уравнений и таким образом продолжаем оптимизацию. Новые длительности работ (5,8') и (1,2) находим по формулам

$$\begin{aligned} t'_{1,2} &= t_{1,2} (1 - c_{1,2} \cdot x_{1,2}), \\ t'_{5,8'} &= t_{5,8'} (1 + c_{5,8'} \cdot x_{5,8'}), \end{aligned}$$

а длительности новых критических путей определяем из следующего выражения:

$$T'_1 = T'_3 = T'_{kp} = T_1 - t_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x_{1,2}.$$

*Примечание.* Тем не менее, для проверки правильности вычислений, следует повторить расчёты для  $T_3$  и  $T_{KP}$ , суммируя длительности работ, находящихся на этих путях.

**На втором этапе** рассматриваем следующий ближайший не критический путь  $B_4$ . на котором у работы (7,8') имеется свободный резерв времени

$$r_{7,8'}^{CB} = T'_{kp} - T_4.$$

Проверяем условие допустимости решения относительно величины переносимых средств:

$$x_{7,8'} \leq \frac{r_{7,8'}^{CB}}{t_{7,8'} \cdot c_{7,8'}}.$$

Затем переносим часть средств работы (7,8') на две работы (1,2) и (5,8') для сокращения времени выполнения работ первого и второго путей. Для нахождения величин переносимых средств составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{7,8'} = x'_{1,2} + x'_{5,8'} \\ T'_{kp} - t'_{1,2} \cdot c_{1,2} \cdot x'_{1,2} = T_4 + t_{7,8'} \cdot c_{7,8'} \cdot x_{7,8'} \\ T'_{kp} - t'_{5,8'} \cdot c_{5,8'} \cdot x'_{5,8'} = T_4 + t_{7,8'} \cdot c_{7,8'} \cdot x_{7,8'} \end{cases}$$

Затем находим величины переносимых средств  $x_{7,8'}$ ,  $x_{1,2}$ ,  $x_{5,8'}$ , а также новые длительности работ:

$$\begin{aligned} t_{1,2}'' &= t_{1,2}' (1 - c_{1,2} \cdot x_{1,2}'), \\ t_{5,8'}'' &= t_{5,8'}' (1 - c_{5,8'} \cdot x_{5,8'}'), \\ t_{7,8'}' &= t_{7,8'}' (1 - c_{7,8'} \cdot x_{7,8'}'). \end{aligned}$$

Длительности новых критических путей вычисляем по формуле

$$T_1'' = T_3'' = T_4'' = T_{KP}'' = T_4 + t_{7,8'}' \cdot c_{7,8'} \cdot x_{7,8'}'.$$

**На третьем этапе** - путь  $L_2$  имеет резерв времени у работы (5,6'):

$$r_{5,6'}^{CB} = T_{KP}' - T_2.$$

Проверяем условие допустимости решения по

$$x_{5,6'} \leq \frac{r_{5,6'}^{CB}}{t_{5,6'}' \cdot c_{5,6'}}.$$

Затем переносим резервы с некритической работы (5,6') на работы (1,2), (5,8'), (7,8') остальных критических путей, для чего запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{5,6'} = x_{1,2}'' + x_{5,8}'' + x_{7,8'}' \\ T_{KP}'' - t_{1,2}'' \cdot c_{1,2} \cdot x_{1,2}'' = T_2 + t_{5,6'}' \cdot c_{5,6'} \cdot x_{5,6}' \\ T_{KP}'' - t_{5,8'}'' \cdot c_{5,8'} \cdot x_{5,8}'' = T_2 + t_{5,6'}' \cdot c_{5,6'} \cdot x_{5,6}' \\ T_{KP}'' - t_{7,8'}' \cdot c_{7,8'} \cdot x_{7,8'}' = T_2 + t_{5,6'}' \cdot c_{5,6'} \cdot x_{5,6}' \end{cases}$$

Решая эту систему, находим величины переносимых средств, проверяем на допустимость такого решения и определяем новые длительности работ:

$$\begin{aligned} t_{1,2}''' &= t_{1,2}'' (1 - c_{1,2} \cdot x_{1,2}'') = 93 \text{ дня,} \\ t_{5,8'}''' &= t_{5,8'}'' (1 - c_{5,8'} \cdot x_{5,8}'') = 14,3 \text{ дня,} \\ t_{7,8'}''' &= t_{7,8'}' (1 - c_{7,8'} \cdot x_{7,8}') = 6,3 \text{ дня,} \\ t_{5,6'}''' &= t_{5,6'}' (1 + c_{5,6'} \cdot x_{5,6}') = 12,3 \text{ дня.} \end{aligned}$$

Теперь длительности всех четырех путей от исходного события (0) к завершающему (9) стали равными:

$$T_1''' = T_3''' = T_4'' = T_2' = T_{кр}^0 = 43,3 \text{ дня.}$$

Оптимизация закончена. Таким образом, применение методов сетевого моделирования позволило выявить экономию  $50 - 43,3 = 6,7$  дня по переводу коммерческого предприятия на самообслуживание.

Графически этапы оптимизации изображены на рис. 2.8.

Этот последний план является оптимальным, поскольку все его работы лежат на критических путях и не имеют резервов. Следует заметить, что резервы переносились с некритических работ на критические произвольно, поэтому полученный план не является единственным. Вообще можно перебрать все возможные варианты и затем выбрать из них лучший.

### **Варианты задания**



## **Вопросы и задания для самопроверки**

- 1) Дайте определения понятию сетевое планирование.
- 2) Перечислите достоинства и недостатки графического и аналитического представлений сетевых моделей.
- 3) Поясните, в каких случаях и зачем выполняется предварительный этап сетевого планирования.
- 4) Перечислите правила построения сетевой модели.
- 5) Какие выделяют параметры сетевых моделей? Зачем эти параметры нужны?
- 6) Какие существуют методики определения параметров сетевых моделей?
- 7) В чём заключается суть анализа сетевых моделей? Зачем он производится?
- 8) По каким параметрам и при каких ограничениях производится оптимизация сетевой модели?
- 9) Перечислите шаги оптимизации сетевой модели.