МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра управления качеством, метрологии и сертификации

УТВЕРЖДАЮ
Первый проректор-
проректор по учебной работе
_________ Е.А.Кудряшов
«30» ноября 2011 г.

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРТНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Методические указания по выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Методы оптимизации и принятия решений»
для обучающихся по направлению
552200 (200500.68) «Метрология, стандартизация и сертификация»
магистерской программы
552215 «Всеобщее управление качеством»

Курск 2011

УДК 007.5

Составители: О.В. Аникеева, А.Г. Ивахненко

Рецензент
Доктор технических наук, профессор кафедры
«Машиностроительные технологии и оборудование» А.И. Ремнев

Обработка экспертной информации: методические указания по выполнению лабораторной работы по дисциплине «Методы оптимизации и принятия решений» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.В. Аникеева, А.Г. Ивахненко. Курск, 2011. 20 с. Библиогр.: с. 20.

Излагаются краткие теоретические сведения по статистической обработке экспертной информации. Приводится пример расчета, а также варианты задания для выполнения на ЭВМ.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению «Метрология, стандартизация и сертификация».

Предназначены для обучающихся по направлению 552200 (200500.68) «Метрология, стандартизация и сертификация» магистерской программы 552215 «Всеобщее управление качеством» очной формы обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч. - изд. л. . Тираж 20 экз. Заказ .
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1 Цель работы

Изучение методов обработки экспертной информации.

При выполнении индивидуального задания рекомендуется обратить особое внимание на случаи отсутствия и наличия связных рангов в ранжировках при расчете коэффициента согласия мнений экспертов и коэффициентов ранговой корреляции.

2 Задание

По указанным преподавателем вариантам, содержащим матрицу оценок 4-х объектов 5-ю экспертами $A = |a_{ij}|_{4\times5}$, выполнить:

– оценку компетентности экспертов и обобщенную оценку объектов;

– обобщенную ранжировку объектов;

– оценку согласованности мнений экспертов;

а также установить зависимость между ранжировками экспертов.

3 Краткие теоретические положения

После проведения опроса экспертов осуществляется обработка результатов, целью которой является обработка данных и новой информации, содержащейся в скрытой форме в экспертных оценках. В зависимости от целей экспертного оценивания при обработке результатов опроса возникают следующие основные задачи:

– оценку компетентности экспертов и обобщенную оценку объектов;

– обобщенную ранжировку объектов;

– согласованность мнений экспертов;

– зависимость между ранжировками экспертов.

Оценка компетентности экспертов и обобщенная оценка объектов

Пусть m экспертов произвели оценку n объектов. Результаты оценки представлены в виде величин x_{ij}, где j – номер эксперта, i – номер объекта. Эти величины могут быть заданы с использованием баллов либо чисел, принадлежащих некоторому отрезку числовой оси.

Коэффициент компетентности экспертов и обобщенные оценки объектов для тех случаев, когда проводится непосредственное числовое оценивание альтернатив, можно вычислить по апостериорным данным, т.е. по результатам оценки объектов. При этом компетентность экспертов оценивается по степени согласованности их оценок с групповой оценкой объектов.

Алгоритм вычисления коэффициентов компетентности экспертов и обобщенной оценки объектов сводится к расчетам по следующим рекуррентным формулам:

$$x_i^t = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} k_j^{t-1} \ , i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

$$\lambda^t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} x_j^t \, , t = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

$$k_j^t = \frac{1}{\lambda^t} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_i^t \ , j = 1, 2, \ldots, m. \qquad (3)$$

Вычисления начинаются с t=1. Начальные значения компетентности принимаются одинаковыми и равными $k_j^0 = \frac{1}{m}$.

В работе [1] были исследованы вопросы сходимости рассматриваемой рекуррентной процедуры. Для этого из уравнений (1) и (3) были исключены переменные $k_j^{(t\text{-}1)}$ и x_i^t. Указанные уравнения (после данного преобразования) в векторно-матричной форме примут вид

$$\overrightarrow{x^t} = \frac{1}{\lambda^{t-1}} B \overrightarrow{x^{t-1}} \, , \ \overrightarrow{k^t} = \frac{1}{\lambda^t} C \overrightarrow{k^{t-1}} \, , \qquad (4)$$

где матрицы **B** и **C** имеют соответственно размерности ($n \times n$) и ($m \times m$):

$$\mathbf{B} = \mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}, \ \mathbf{C} = \mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{X}, \ \mathbf{X} = \|x_{ij}\|.$$

Из теоремы Перроны – Фробениуса [2] следует, что если матрицы **B**, **C** неотрицательны и неразложимы, то при $t \to \infty$ векторы $\overrightarrow{x^t}$, $\overrightarrow{k^t}$ сходятся к собственным векторам матриц **B** и **C**, соответствующим максимальным собственным числам этих матриц. Предельные значения векторов $\overrightarrow{x^t}$, $\overrightarrow{k^t}$ вычисляются при решении следующих уравнений:

$$\mathbf{B}\vec{x} = \lambda_{\mathbf{B}}\vec{x}, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \qquad (5)$$

$$\mathbf{C}\vec{k} = \lambda_{\mathbf{C}}\vec{k}, \ \sum_{j=1}^{m} k_j = 1, \qquad (6)$$

где $\lambda_{\mathbf{B}}$, $\lambda_{\mathbf{C}}$ – максимальные собственные числа матриц **B**, **C**.

На практике условия неразложимости и неотрицательности **B**, **C** практически всегда выполняются.

Обобщенная ранжировка объектов

Рассмотрим теперь случай, когда эксперты производят измерение объектов в порядковой шкале методом ранжирования, так что x_{ij} есть ранги. Задачей обработки является построение обобщенной ранжировки по индивидуальным ранжировкам экспертов [3].

Каждую ранжировку y^j можно представить в виде матрицы парных сравнений, элементы которой определим следующим образом:

$$y_{ik}^{j} = \begin{cases} 1, \ x_{ij} \le x_{kj}, \\ 0, \ x_{ij} > x_{kj}, \end{cases}$$

где x_{ij}, x_{kj} – ранги, присваиваемые j-м экспертом i-му и k-му объектам.

Пример

Пусть ранжировка одним экспертом следующая: $O_1>O_2=O_3>O_4>O_5$. Тогда матрица парных сравнений для этой ранжировки имеет вид

	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
O_1	1	1	1	1	1
O_2	0	1	1	1	1
O_3	0	1	1	1	1
O_4	0	0	0	1	1
O_5	0	0	0	0	1

Введем метрику в пространстве ранжировок (между матрицами парных сравнений экспертов), вычисляемую по формуле:

$$D_{jl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|y_{ik}^{j} - y_{ik}^{l}\right|, j,l = 1,2, \ldots, m. \qquad (7)$$

Используя данную метрику, определим обобщенную ранжировку как такую матрицу парных сравнений, которая наилучшим образом согласуется с матрицами парных сравнений каждого эксперта. Примером задания такой точки может быть медиана

$$\left\|y_{ik}^{*}\right\| = \arg\min_{\left\|y_{ik}\right\|}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|y_{ik}^{j} - y_{ik}\right|. \qquad (8)$$

Обобщенная ранжировка, доставляющая минимальное значение введенной метрике, находится по следующему правилу:

$$y_{ik}^{*} = \begin{cases} 1, \text{если } a_{ik} \geq \dfrac{m}{2}, \\ 0, \text{если } a_{ik} < \dfrac{m}{2}, \end{cases}$$

где $a_{ik} = \sum_{j=1}^{m} y_{ik}^{j}$ – количество голосов, поданных экспертами за предпочтение i-го объекта k-му объекту.

При построении обобщенной матрицы парных сравнений можно учесть компетентность экспертов путем введения коэффициентов компетентности k_j в соотношение (8)

$$\left\|y_{ik}^{*}\right\| = \arg\min_{\left\|y_{ik}\right\|}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}k_j\left|y_{ik}^{j} - y_{ik}\right|. \qquad (9)$$

Тогда обобщенная ранжировка, доставляющая минимальное значение введенной метрике, находится по следующему правилу:

$$y_{ik}^{*} = \begin{cases} 1, \text{если } b_{ik} \geq \dfrac{1}{2}, \\ 0, \text{если } b_{ik} < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $b_{ik} = \sum_{j=1}^{m} k_j y_{ik}^{j}$ – вероятность того, что i-й объект предпочтительнее k-го объекта.

При наличии нескольких ситуаций эксперты упорядочивают объекты для каждой ситуации в отдельности. Если известны вероятности проявления той или иной ситуации $p_1, p_2, \ldots, p_d$, где d – число различных ситуаций, то можно построить обобщенную ранжировку, осредненную по всем ситуациям. Введем у элементов матриц парных сравнений индекс s – номер ситуации y_{ik}^{js}. В этом случае обобщенная ранжировка будет определяться из условия

$$\left\| y_{ik}^{*} \right\| = \arg\min_{\left\| y_{ik} \right\|} \sum_{s=1}^{d} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} k_j p_s \left| y_{ik}^{js} - y_{ik} \right|. \qquad (10)$$

Тогда обобщенная ранжировка, доставляющая минимальное значение введенной метрике, находится по следующему правилу:

$$y_{ik}^{*} = \begin{cases} 1, \text{если } c_{ik} \geq \dfrac{1}{2}, \\ 0, \text{если } c_{ik} < \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

где $c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{d} k_j p_s y_{ik}^{js}$.

Согласованность мнений экспертов

При оценке объектов эксперты обычно расходятся во мнениях по решаемому вопросу. В связи с этим возникает необходимость количественной оценки степени согласия экспертов. Оценка согласованности мнений экспертов основывается на использовании понятия компактности. Оценка каждого эксперта представляется как точка в некотором пространстве, в котором введено понятие расстояния. Если оценки экспертов находятся на небольшом расстоянии друг от друга, то можно это интерпретировать как хорошую согласованность суждений экспертов. Если же точки разбросаны в пространстве на большом расстоянии, то согласованность – невысокая.

При использовании количественных шкал измерения и оценке объекта всего по одному критерию мнения группы экспертов можно представить как точки числовой оси. Эти значения можно рассматривать как реализации случайной величины. Тогда центр группировки точек можно рассматривать как математическое ожидание, а разброс количественно оценивается дисперсией случайной величины.

При измерении объектов в порядковой шкале согласованность оценок экспертов в виде ранжировок или парных сравнений объектов также основывается на понятии компактности. Для этого обычно используется мера согласованности мнений экспертов – *дисперсионный коэффициент конкордации* (коэффициент согласия).

Сущность данного подхода заключается в следующем.

Рассмотрим матрицу результатов ранжировки n объектов m экспертами $\|r_{ij}\|$ (i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, …, m), где r_{ij} – ранг, присваиваемый i-м экспертом j-му объекту. Составим суммарный ранг для каждого объекта по всем экспертам:

$$r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\,,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Будем рассматривать величины r_i как реализацию некоторой случайной величины и найдем оценку ее дисперсии

$$D = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2\,, \tag{12}$$

где $\bar{r}$ – оценка математического ожидания, равная

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i\,.$$

Дисперсионный коэффициент конкордации определяется как отношение оценки дисперсии к максимальному значению этой оценки:

$$W = \frac{D}{D_{\max}}\,. \tag{13}$$

1-й случай – отсутствие связанных рангов в матрице ранжировок.

Данное условие характеризуется отсутствием совпадающих рангов объектов, устанавливаемых экспертами. Полное согласие экспертов определяется следующей структурой матрицы $\|r_{ij}\|$ при соответствующей перенумерации строк

$$\left\| r_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ & \dots\dots\dots & & \\ n & n & \dots & n \end{matrix} \right\|.$$

Указанной матрице соответствует максимальная дисперсия, значение которой вычисляется по следующей формуле с учетом того, что $r_i = rm$:

$$D_{\max} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(r_i^2 - 2r_i\bar{r} + \bar{r}^2)\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} r_i^2 - n\bar{r}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(im)^2 - n(\sum_{i=1}^{n}\frac{im}{n})^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\frac{m^2 n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{nm^2(n+1)^2}{4}\right] =$$

$$= \frac{m^2 n(n+1)}{12}.$$

Введем обозначение $S = \sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$, тогда $D = \frac{1}{n-1}S$. Подставляя полученные результаты в формулу (13), запишем окончательное выражение для коэффициента конкордации

$$W = \frac{12}{m^2(n^3 - n)}S. \tag{14}$$

Коэффициент конкордации изменяется от 0 до 1. В случае полного совпадения $W = 1$, в случае полного расхождения мнений экспертов $W = 0$.

2-й случай – наличие связанных рангов в матрице ранжировок.

Если в ранжировках имеются связанные ранги, то максимальное значение дисперсии в знаменателе формулы (14) становится меньше, чем при отсутствии связанных рангов. В этом случае коэффициент конкордации вычисляется по формуле

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j}, \tag{15}$$

где

$$T_j = \sum_{k=1}^{H_j} (h_k^3 - h_k), \qquad (16)$$

T_j – показатель связанных рангов в j-й ранжировке; H_j – число групп равных рангов в j-й ранжировке; h_k – число равных рангов в k-й группе связанных рангов при ранжировке j-м экспертом.

Если совпадающих рангов нет, формула (15) совпадает с формулой (14).

Зависимость между ранжировками экспертов

При обработке результатов ранжирования нередко возникает необходимость определения зависимости между результатами ранжирования, полученными от двух экспертов. Принято меру взаимосвязи оценивать *коэффициентом ранговой корреляции*. Обобщенный коэффициент ранговой корреляции вычисляется по формуле:

$$\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)} p_{ij}^{(\mu)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\mu)2}}}, \qquad (17)$$

при этом $p_{ij}^{(\nu)} = r_j^{(\nu)} - r_i^{(\nu)}$, $p_{ij}^{(\mu)} = r_j^{(\mu)} - r_i^{(\mu)}$ – разность оценок j и i объектов в ранжировках ν, μ экспертов.

Отметим некоторые свойства коэффициента ранговой корреляции Г. Из неравенства Коши – Шварца

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)} p_{ij}^{(\mu)} \right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\nu)2} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(\mu)2}$$

следует, что $-1 \le \Gamma \le 1$. Если ранжировки $r^{(\nu)} = (r_1^{(\nu)}, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)})$, $r^{(\mu)} = (r_1^{(\mu)}, r_2^{(\mu)}, \ldots, r_n^{(\mu)})$ совпадают (т.е. $r_i^{(\nu)} = r_i^{(\mu)}$), то $\Gamma = 1$, если противоположны (т.е. $r_i^{(\nu)} = n - r_i^{(\mu)} + 1$), то $\Gamma = -1$. $\Gamma = 0$ соответствует случаю, когда ранжировки независимы.

Частным случаем обобщенного коэффициента ранговой корреляции, когда ранжировки представляют собой ранги объектов, является *ранговый коэффициент корреляции Спирмена:*

$$\rho = \frac{K_{\nu\mu}}{\sqrt{D_\nu D_\mu}}, \tag{18}$$

где $K_{\nu\mu}$ – взаимный корреляционный момент первой и второй ранжировок; D_ν, D_μ – дисперсии этих ранжировок.

Формула Спирмена верна лишь при условии в ранжировках связанных (повторяющихся) рангов объектов.

Пусть $\overrightarrow{r^{(\nu)}} = (r_1^{(\nu)}, r_2^{(\nu)}, \ldots, r_n^{(\nu)})$, $\overrightarrow{r^{(\mu)}} = (r_1^{(\mu)}, r_2^{(\mu)}, \ldots, r_n^{(\mu)})$ – ранжировки двух экспертов, тогда оценки взаимного корреляционного момента и дисперсии этих ранжировок вычисляются по формулам:

$$K_{\nu\mu} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - \overline{r^{(\nu)}})(r_j^{(\mu)} - \overline{r^{(\mu)}}), \tag{19}$$

$$D_\nu = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - \overline{r^{(\nu)}})^2, \tag{20}$$

$$D_\mu = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\mu)} - \overline{r^{(\mu)}})^2. \tag{21}$$

1-й случай – отсутствие связанных рангов в двух ранжировках.

Оценки средних рангов и дисперсий для рассматриваемого случая одинаковы для обеих ранжировок и равны

$$\bar{r} = \overline{r^{(\nu)}} = \overline{r^{(\mu)}} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}; \tag{22}$$

$$\begin{aligned} D_\nu = D_\mu &= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} r_j^{(\nu)2} - n\bar{r}^2\right) = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2 - n\bar{r}^2\right) = \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{4}\right) = \frac{n(n+1)}{12} \end{aligned}; \tag{23}$$

$$K_{\nu\mu}=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}-\bar{r})(r_j^{(\mu)}-\bar{r})=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}r_j^{(\mu)}-n\bar{r}^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)^2}{4}-\frac{\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}-r_j^{(\mu)})^2}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{n-1}\left(\frac{n(n+1)(n-1)}{12}-\frac{\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}-r_j^{(\mu)})^2}{2}\right) \qquad (24)$$

с учетом того, что

$$\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}-r_j^{(\mu)})^2=\sum_{j=1}^{n}r_j^{(\nu)2}-2\sum_{j=1}^{n}r_j^{(\nu)}r_j^{(\mu)}+\sum_{j=1}^{n}r_j^{(\mu)2}=$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-2\sum_{j=1}^{n}r_j^{(\nu)}r_j^{(\mu)}.$$

Используя формулы (23), (24), коэффициент ранговой корреляции приведем к следующему виду:

$$\rho=\frac{K_{\nu\mu}}{\sqrt{D_\nu D_\mu}}=1-\frac{6\sum_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)}-r_j^{(\mu)})^2}{n^3-n}. \qquad (25)$$

2-й случай – наличие связанных рангов в двух ранжировках.

Если в ранжировках имеются связанные ранги, то коэффициент ранговой корреляции вычисляется по следующей формуле:

$$\rho'=\frac{\rho-T_\nu-T_\mu}{\sqrt{(1-2T_\nu)(1-2T_\mu)}}\ , \qquad (26)$$

где ρ – оценка коэффициента ранговой корреляции, вычисляемая по формуле (25), а величины T_ν T_μ равны

$$T_{\nu} = \frac{1}{2(n^3 - n)} \sum_{k=1}^{H_{\nu}} (h_k^3 - h_k),$$

$$T_{\mu} = \frac{1}{2(n^3 - n)} \sum_{k=1}^{H_{\mu}} (h_k^3 - h_k), \qquad (27)$$

где (T_ν T_μ) – показатель связанных рангов в ν, μ-й ранжировках; (H_ν H_μ) – число групп равных рангов в ν, μ-й ранжировках; h_k – число рангов в k-й группе связанных рангов при ранжировках экспертов.

4 Варианты заданий

По данным таблицы 4.1 произвести обработку экспертных данных и определить:

- компетентность экспертов и обобщенную оценку объектов;
- обобщенную ранжировку объектов;
- согласованность мнений экспертов;
- зависимость между ранжировками экспертов при следующих исходных данных:

1) O = {O_1, O_2, …, O_5} – множество оцениваемых объектов;
2) Э = {$Э_1$, $Э_2$, …, $Э_4$} – множество экспертов;
3) A = $\|a_{ij}\|_{5\times4}$ – матрица оценок объектов экспертами.

Таблица 4.1

Варианты заданий

Вариант	Матрица оценок $\|a_{ij}\|$	Вариант	Матрица оценок $\|a_{ij}\|$
1	$\begin{Vmatrix} 1 & 2.5 & 3.5 & 4.7 \\ 4 & 1.5 & 5 & 2.8 \\ 5 & 4.5 & 1.2 & 3.7 \\ 2 & 1.5 & 1.2 & 4.7 \\ 3 & 1.5 & 5 & 2.8 \end{Vmatrix}$	3	$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 4.5 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4.5 & 5 \end{Vmatrix}$
2	$\begin{Vmatrix} 2.3 & 1.9 & 1.8 & 3.7 \\ 3.5 & 1.9 & 2.6 & 3.7 \\ 1 & 2.7 & 1.2 & 3.7 \\ 2.5 & 3.5 & 1.2 & 1.7 \\ 3.5 & 3.5 & 1.2 & 1.7 \end{Vmatrix}$	4	$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3.5 & 1 \\ 4 & 1 & 4.5 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3.5 & 5 \end{Vmatrix}$

Окончание табл. 4.1

Вариант	Матрица оценок $\|a_{ij}\|$	Вариант	Матрица оценок $\|a_{ij}\|$
5	$\begin{Vmatrix} 2 & 3 & 2.8 & 5 \\ 3 & 1.5 & 5 & 4.7 \\ 3 & 3.7 & 3.2 & 1.7 \\ 1 & 2 & 3.2 & 4.7 \\ 1 & 2 & 2 & 2.8 \end{Vmatrix}$	8	$\begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1.5 & 2 & 4 \\ 4 & 1.5 & 4 & 3 \\ 5 & 4.5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \end{Vmatrix}$
6	$\begin{Vmatrix} 3.5 & 1 & 3 & 1 \\ 3.5 & 3 & 2 & 2.7 \\ 1 & 3.7 & 1.5 & 1.7 \\ 2.5 & 5 & 1.5 & 2.7 \\ 3 & 2 & 1.5 & 3 \end{Vmatrix}$	9	$\begin{Vmatrix} 5 & 5 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 1.5 & 1 \\ 3 & 2 & 1.5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{Vmatrix}$
7	$\begin{Vmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2.5 & 3 & 2 \\ 3 & 4.7 & 4 & 3 \\ 2 & 2.5 & 1.2 & 4 \\ 1 & 2.5 & 2.5 & 2 \end{Vmatrix}$	10	$\begin{Vmatrix} 1.5 & 3 & 2 & 4.5 \\ 4 & 1.5 & 2 & 3.5 \\ 1.5 & 1.5 & 3 & 3.5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{Vmatrix}$

5 Пример решения варианта задания

Произвести обработку экспертных данных и определить:

- компетентность экспертов и обобщенную оценку объектов;
- обобщенную ранжировку объектов;
- согласованность мнений экспертов;
- зависимость между ранжировками экспертов при следующих исходных данных:

1) $O = \{O_1, O_2, \ldots, O_4\}$ – множество оцениваемых объектов;

2) $Э = \{Э_1, Э_2, \ldots, Э_5\}$ – множество экспертов;

3) $A = \|a_{ij}\|_{4\times 5} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3.5 & 3 & 4 \\ 2.5 & 2 & 1.5 & 2 & 1 \\ 2.5 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3.5 & 3.5 & 4 & 1 \end{Vmatrix}$ – матрица оценок объектов экспертами.

Расчет коэффициентов компетентности экспертов и коэффициентов обобщенной оценки объектов

Для расчета коэффициентов компетентности экспертов и обобщенной оценки объектов воспользуемся формулами (5), (6)

$$\mathbf{B}\vec{x} = \lambda_{\mathbf{B}}\vec{x},\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\ \mathbf{C}\vec{k} = \lambda_{\mathbf{C}}\vec{k},\ \sum_{j=1}^{m} k_j = 1,$$

где матрицы **B** = **AA**$^{\mathrm{T}}$, **C** = **A**$^{\mathrm{T}}$**A**, $\vec{x}$, $\vec{k}$ – собственные векторы матриц **B** и **C**, соответствующие максимальным собственным числам этих матриц $\lambda_{\mathbf{B}}$, $\lambda_{\mathbf{C}}$.

Произведем расчет матриц **B** и **C**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{AA}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 42.25 & 21.75 & 28.00 & 39.25 \\ 21.75 & 17.50 & 18.75 & 31.25 \\ 28.00 & 18.75 & 24.25 & 33.50 \\ 39.25 & 31.25 & 33.50 & 57.50 \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 29.50 & 26.00 & 28.75 & 26.50 & 15.50 \\ 26.00 & 24.25 & 28.25 & 26.00 & 17.50 \\ 28.75 & 28.25 & 35.75 & 30.50 & 25.00 \\ 26.50 & 26.00 & 30.50 & 30.00 & 20.00 \\ 15.50 & 17.50 & 25.00 & 20.00 & 22.00 \end{Vmatrix}.$$

Для нахождения собственных векторов матриц **B** и **C**, соответствующих максимальным собственным векторам и удовлетворяющих свойствам нормировки, воспользуемся приближенным методом, который состоит в следующем:

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \dots\dots\dots\dots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{y} = \begin{Vmatrix} \sqrt[n]{b_{11} \quad b_{12} \quad \dots \quad b_{1n}} \\ \sqrt[n]{b_{21} \quad b_{22} \quad \dots \quad b_{2n}} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sqrt[n]{b_{n1} \quad b_{n2} \quad \dots \quad b_{nn}} \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{Vmatrix} \dfrac{y_1}{\sum\limits_{i=1,n} y_i} \\ \dfrac{y_2}{\sum\limits_{i=1,n} y_i} \\ \dots \\ \dfrac{y_n}{\sum\limits_{i=1,n} y_i} \end{Vmatrix}.$$

Произведя указанные вычисления, получим:

- коэффициенты обобщенной оценки объектов (матрица **B**)

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} 31.70 \\ 21.73 \\ 25.56 \\ 39.21 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{Vmatrix} 0.268 \\ 0.184 \\ 0.216 \\ 0.332 \end{Vmatrix},$$

Следовательно, $O_2 > O_3 > O_1 > O_4$;

-коэффициенты компетентности экспертов (матрица **C**)

$$\vec{y} = \begin{Vmatrix} 24.63 \\ 24.08 \\ 29.45 \\ 26.31 \\ 19.72 \end{Vmatrix} \Rightarrow \vec{k} = \begin{Vmatrix} 0.198 \\ 0.194 \\ 0.237 \\ 0.212 \\ 0.159 \end{Vmatrix}.$$

Расчет обобщенной ранжировки объектов

Построим матрицы ранжировок экспертов (y^1, y^2, y^3, y^4, y^5)

$y^1=$		O_1	O_2	O_3	O_4
	O_1	1	1	1	1
	O_2	0	1	1	1
	O_3	0	1	1	1
	O_4	0	0	0	1

$y^2=$		O_1	O_2	O_3	O_4
	O_1	1	1	1	1
	O_2	1	1	1	1
	O_3	1	1	1	1
	O_4	0	0	0	1

$y^3=$		O_1	O_2	O_3	O_4
	O_1	1	0	0	1
	O_2	1	1	1	1
	O_3	1	0	1	1
	O_4	1	0	0	1

$y^4=$		O_1	O_2	O_3	O_4
	O_1	1	0	0	1
	O_2	1	1	0	1
	O_3	1	1	1	1
	O_4	0	0	0	1

$y^5=$		O_1	O_2	O_3	O_4
	O_1	1	0	0	0
	O_2	1	1	1	1
	O_3	1	0	1	0
	O_4	1	1	1	1

Тогда обобщенная ранжировка объектов без учета компетентности экспертов будет равна

		O_1	O_2	O_3	O_4
	O_1	1	0	0	1
y=	O_2	1	1	1	1
	O_3	1	1	1	1
	O_4	0	0	0	1

Следовательно, $O_2 = O_3 > O_1 > O_4$.

Расчет дисперсионного коэффициента конкордации экспертов (табл. 5.1)

Матрица ранжировок **A** имеет связанные ранги, поэтому для определения коэффициента конкорданции экспертов воспользуемся формулами (15), (16):

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j},$$

где $T_j = \sum_{k=1}^{H_j}(h_k^3 - h_k)$; $S = \sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2$; $r_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i$, $T_j = \sum_{k=1}^{H_j}(h_k^3 - h_k)$ – показатель связанных рангов в j-й ранжировке; H_j – число групп равных рангов в j-й ранжировке; h_k – число равных рангов в k-й группе связанных рангов при ранжировке j-м экспертом.

Таблица 5.1

Расчет дисперсионного коэффициента конкордации

Э / О	$Э_1$	$Э_2$	$Э_3$	$Э_4$	$Э_5$	r_i	$\bar{r}$	$(r_i - \bar{r})^2$	S
O_1	1	2	3.5	3	4	13.5	12.25	1.5625	29.25
O_2	2.5	2	1.5	2	1	9		10.5625	
O_3	2.5	2	3	1	2	10.5		3.0625	
O_4	4	3.5	3.5	4	1	16		14.0625	
H_j	1	1	1	0	1	Используя полученные результаты, рассчитываем коэффициент согласованности экспертов:			
h_k	h_1=2	h_1=3	h_1=2	h_1=0	h_1=3				
T_j	6	24	6	0	24				
$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} T_j} = \frac{12 \cdot 29.25}{25 \cdot 60 - 5 \cdot 60} = 0.2925$									

Расчет коэффициентов ранговой корреляции пар экспертов

Поскольку ранжировки экспертов имеют связанные ранги, то коэффициент ранговой корреляции вычисляется по формуле (26):

$$\rho' = \frac{\rho - T_\nu - T_\mu}{\sqrt{(1-2T_\nu)(1-2T_\mu)}},$$

где $\rho = \dfrac{K_{\nu\mu}}{\sqrt{D_\nu D_\mu}} = 1 - \dfrac{6\sum\limits_{j=1}^{n}(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2}{n^3 - n}$, а величины T_ν, T_μ равны

$$T_\nu = \frac{1}{2(n^3-n)}\sum_{k=1}^{H_\nu}(h_k^3 - h_k);\; T_\mu = \frac{1}{2(n^3-n)}\sum_{k=1}^{H_\mu}(h_k^3 - h_k).$$

1. Подготовим исходные данные для расчета ранговой корреляции пар экспертов. По оценкам объектов произведем их ранжировку (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Исходные данные

Эксперты	Объекты				Показатели		
	O_1	O_2	O_3	O_4	H_ν	h_k	T_ν
$Э_1$	1	2.5	2.5	4	1	2	0.05
$Э_2$	2	2	2	4	1	3	0.2
$Э_3$	3.5	1	2	3.5	1	2	0.05
$Э_4$	3	2	1	4	0	0	0
$Э_5$	4	1.5	2	1.5	1	2	0.05

2. Рассчитаем коэффициент ранговой корреляции пар экспериментов (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Расчет коэффициента ранговой корреляции

<table>
<tr><td rowspan="2">Пары</td><td colspan="4">Объекты</td><td colspan="2">Коэффициент ранговой корреляции</td></tr>
<tr><td>O_1</td><td>O_2</td><td>O_3</td><td>O_4</td><td>ρ</td><td>ρ'</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Э_1$, $Э_2$</td><td>1</td><td>2,5</td><td>2,5</td><td>4</td><td rowspan="3">0,85</td><td rowspan="3">0,816</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$</td><td>1</td><td>0,25</td><td>0,25</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Э_1$, $Э_3$</td><td>1</td><td>2,5</td><td>2,5</td><td>4</td><td rowspan="2">0,1</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>3,5</td><td>1</td><td>2</td><td>3,5</td></tr>
</table>

Окончание табл. 5.3

Пары	Объекты				Коэффициент ранговой корреляции	
	O_1	O_2	O_3	O_4	ρ	ρ'
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	6,25	2,25	0,25	0,25		
$Э_1$, $Э_4$	1	2,5	2,5	4	0,35	0,316
	3	2	1	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	4	0,25	2,25	0		
$Э_1$, $Э_5$	1	2,5	2,5	4	-0,65	-0,833
	4	1,5	3	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	9	1	0,25	6,25		
$Э_2$, $Э_3$	2	2	2	4	0,85	0,816
	3,5	1	2	3,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	0,25	1	0	0,25		
$Э_2$, $Э_4$	2	2	2	4	0,8	0,775
	3	2	1	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	1	0	1	0		
$Э_2$, $Э_5$	2	2	2	4	-0,15	-0,544
	4	1,5	3	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	4	0,25	1	6,25		
$Э_3$, $Э_4$	3,5	1	2	3,5	0,45	0,422
	3	2	1	4		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	0,25	1	4	0,25		
$Э_3$, $Э_5$	3,5	1	2	3,5	0,45	0,389
	4	1,5	3	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	0,25	0,25	1	4		
$Э_4$, $Э_5$	3	2	1	4	-0,15	-0,211
	4	1,5	3	1,5		
$(r_j^{(\nu)} - r_j^{(\mu)})^2$	1	0,25	4	6,25		

6 Требования к отчету

Отчет по лабораторной работе должен включать в себя:

– наименование лабораторной работы;

– цель лабораторной работы;

– задание к лабораторной работе;

– текст программы в системе Maple;

– оценку компетентности экспертов и обобщенную оценку объектов;

– обобщенную ранжировку объектов;

– согласованность мнений экспертов;

– зависимость между ранжировками экспертов при следующих исходных данных:

1) $O = \{O_1, O_2, O_3, O_4\}$ – множество оцениваемых объектов;

2) $Э = \{Э_1, Э_2, Э_3, Э_4, Э_5\}$ – множество экспертов;

3) $A = |a_{ij}|_{5\times4}$ – матрицу оценок объектов экспертами;

– выводы по результатам обработки экспертных данных.

7 Библиографический список

1. Дубов Ю.А., Травкин С.Н., Якимец В.Н. Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 295 с.

2. Евланов Л.Г., Кутузов В.А. Экспертные оценки в управлении. – М.: Экономика, 1978. – 134 с.

3. Павлов А.Н., Соколов Б.В. Методы обработки экспертной информации: учебно-методическое пособие. ГУАП. СПб., 2005. – 42 с.