

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 04.05.2022 14:07:28
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a50426d19e74367a489fda560089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

» _____ 2022 г.

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Вероятностные модели»
для всех направлений подготовки

Курск 2022

УДК 51

Составитель: Н. А. Моргунова

Рецензент

Доктор физ.-мат. наук,
профессор кафедры высшей математики
Хохлов Н. А.

Вероятностные модели: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Вероятностные модели» для всех направлений подготовки / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н. А. Моргунова – Курск, 2022. – 10 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических заданий. Содержатся краткие описания методов, применяемых при решении задач вероятностных моделей, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 45.03.03 - Фундаментальная и прикладная лингвистика, направленность (профиль) «Теоретическая и прикладная лингвистика». Материал предназначен для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 45.03.03 - Фундаментальная и прикладная лингвистика, направленность (профиль) «Теоретическая и прикладная лингвистика», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих раздел высшей математики «Вероятностные модели».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 10.02.2022. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 0,6. Уч.-изд. л. 0,5. Тираж 100 экз. Заказ 763. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задания по работам

1. Тема «Элементы комбинаторики. Расчет вероятностей случайных событий».

В книжной лотерее разыгрываются 5 книг. Всего в урне имеются 30 билетов. Первый человек, подошедший к урне, наудачу вынимает билет. Определить вероятность того, что билет окажется выигрышным.

2. Тема «Алгебра событий. Формулы полной вероятности и Байеса».

В партии из 12 телефонных аппаратов – 3 бракованных. Какова вероятность того, что из 2 случайно взятых аппаратов оба будут исправными?

3. Тема «Повторные испытания».

Вероятность наличия заболевания X в возрастной группе населения старше 50 лет равна 0,6. Найти вероятность того, что из 100 человек указанной возрастной группы 55 страдают болезнью X .

4. Тема «Дискретная случайная величина, ее характеристики, законы распределения».

Случайная величина X имеет ряд распределения:

X	1	3,5	10
P	0,2	0,5	p_0

Найти параметр p_0 , математическое ожидание и дисперсию X .

5. Тема «Непрерывная случайная величина, ее характеристики, законы распределения».

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, & 2 < x \leq 6. \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Найти $P(3 < x < 4)$.

6. Тема «Закон больших чисел».

Случайная величина X является суммой 100 независимых случайных величин, имеющих одинаковые математические ожидания, равные 2, и одинаковые дисперсии, равные 0,16. Какова вероятность того, что значения случайной величины X будут заключены в пределах от 195 до 206?

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов**1. Тема «Элементы комбинаторики. Расчет вероятностей случайных событий»**

В книжной лотерее разыгрываются 5 книг. Всего в урне имеются 30 билетов. Первый человек, подошедший к урне, наудачу вынимает билет. Определить вероятность того, что билет окажется выигрышным.

Решение.

Проводится испытание, состоящее в вытаскивании случайным образом билета. Все исходы равновозможны, поэтому воспользуемся классическим определением вероятности. Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

2. Тема «Алгебра событий. Формулы полной вероятности и Байеса»

В партии из 12 телефонных аппаратов – 3 бракованных. Какова вероятность того, что из 2 случайно взятых аппаратов оба будут исправными?

Решение.

Пусть A и B - события, заключающиеся в том, что соответственно первый и второй наудачу взятые аппараты будут исправными.

Интересующее нас событие – это пересечение событий А и В, которые зависят друг от друга. Тогда по формуле вероятности умножения двух зависимых событий получим:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(A|B) = \frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} = \frac{6}{11}.$$

При подсчете вероятности $P(A)$ и $P(A|B)$ использовано классическое определение вероятности.

Искомую вероятность можно было бы найти иначе:

$$P(A \cdot B) = \frac{C_9^2}{C_{12}^2} = \frac{\frac{9!}{7! \cdot 2!}}{\frac{12!}{10! \cdot 2!}} = \frac{8 \cdot 9}{11 \cdot 12} = \frac{6}{11}.$$

3. Тема «Повторные испытания»

Вероятность наличия заболевания Х в возрастной группе населения старше 50 лет равна 0,6. Найти вероятность того, что из 100 человек указанной возрастной группы 55 страдают болезнью Х.

Решение.

Из условия задачи понятно, что имеет место схема Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где n – количество испытаний, k – количество появления события А, p – вероятность появления события А в каждом опыте, $q = 1 - p$ – вероятность противоположного события в каждом опыте.

По условию $n = 100$, $k = 55$, $p = 0,6$, $q = 0,4$.

$$P_{100}(55) = C_{100}^{55} \cdot 0,6^{55} \cdot 0,4^{45} \approx 0,04831.$$

Очевидно, что расчеты в данном случае затруднительны.

Решим ту же задачу о локальной формуле Лапласа (Муавра-Лапласа).

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1 - p,$$

где $\varphi(x)$ – функция Гаусса.

$$x = \frac{55 - 60}{\sqrt{100 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = \frac{-5}{4,895} \approx -1,02;$$

$$P_{100}(55) = \frac{\varphi(-1,02)}{\sqrt{24}} = \frac{0,2371}{4,899} \approx 0,04835.$$

Значение функции $\varphi(-1,02) = 0,237$ взято из таблицы приложений значений функции Гаусса.

Сравнивая результаты, видим, что относительная погрешность применения асимптотической и точной формул незначительна и равна $\frac{|0,04835 - 0,04831|}{0,04831} \cdot 100\% = 0,0828\%$, в то время как вычисления по формуле Муавра-Лапласа гораздо проще.

4. Тема «Дискретная случайная величина, ее характеристики, законы распределения»

Случайная величина X имеет ряд распределения:

X	1	3,5	10
P	0,2	0,5	p_0

Найти параметр p_0 , математическое ожидание и дисперсию X .

Решение.

а) параметр p_0 найдем из условия: $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

$0,2 + 0,5 + p_0 = 1$, тогда $p_0 = 0,3$.

Получим ряд распределения X :

X	1	3,5	10
P	0,2	0,5	0,3

б) найдем математическое ожидание и дисперсию X :

$$M[X] = 1 \cdot 0,2 + 3,5 \cdot 0,5 + 10 \cdot 0,3 = 4,95.$$

$$D[X] = M[X^2] - (M[X])^2 = 1^2 \cdot 0,2 + 3,5^2 \cdot 0,5 + 10^2 \cdot 0,3 - 4,95^2 = 11,8225.$$

5. Тема «Непрерывная случайная величина, ее характеристики, законы распределения»

Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}, & 2 < x \leq 6. \\ 1, & x > 6 \end{cases}$$

Найти $P(3 < x < 4)$.

Решение.

Вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал (a, b) найдем по формуле: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$;

$$P(3 < X < 4) = F(4) - F(3) = \left(\frac{16}{16} - \frac{4}{4} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{9}{16} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}.$$

6. Тема «Закон больших чисел».

Случайная величина X является суммой 100 независимых случайных величин, имеющих одинаковые математические ожидания, равные 2, и одинаковые дисперсии, равные 0,16. Какова вероятность того, что значения случайной величины X будут заключены в пределах от 195 до 206?

Решение.

По теореме Ляпунова, так как X является суммой большого числа случайных величин, то она имеет закон распределения, близкий к нормальному.

Поэтому ее математическое ожидание равно $a = 100 \cdot 2 = 200$;

среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,16} = 4$;

$$\begin{aligned} P(195 \leq X \leq 206) &= \Phi\left(\frac{206 - 200}{4}\right) - \Phi\left(\frac{195 - 200}{4}\right) = \\ &= \Phi(1,5) + \Phi(1,25) = 0,4332 + 0,3944 = 0,8276, \end{aligned}$$

где $\Phi(1,5)$ и $\Phi(1,25)$ взяты из таблицы приложения значений функции Лапласа.

Контрольные вопросы

1. Что называется сочетанием, размещением, перестановкой? Укажите формулы для подсчета их числа.
2. Дайте определения несовместных событий, полной группы событий, исходов испытания, пространства элементарных событий, исходов, благоприятствующих случайному событию.
3. Сформулируйте классическое, геометрическое определения вероятности. Каковы их свойства?
4. Сформулируйте понятия испытания и случайного события, частоты появления случайного события. Каково свойство статистической устойчивости частот?
5. Дайте статистическое определение вероятности случайного события и укажите ее свойства.
6. Какие события называются противоположными?
7. Что называется суммой событий, произведением событий?
8. Сформулируйте теоремы сложения вероятностей несовместных событий, совместных событий.
9. Какая вероятность называется условной? Какие события называются независимыми? Теорема умножения вероятностей.
10. Запишите формулы полной вероятности и Байеса.
11. Какие испытания называются повторными? Запишите формулы Бернулли, Пуассона.
12. Что называется наивероятнейшим числом появлений случайного события в схеме Бернулли?
13. Опишите функции Гаусса и Лапласа, их свойства и графики.
14. Запишите локальную формулу Муавра-Лапласа и интегральную формулу Лапласа.
15. Чему равна вероятность отклонения относительной частоты появления события от его вероятности в независимых испытаниях?
16. Сформулируйте понятия дискретной и непрерывной случайных величин. Каковы их способы задания?
17. Как определяется функция распределения случайной величины, и каковы ее свойства?
18. Что называется функцией плотности вероятности непрерывной случайной величины? Опишите ее свойства.

19. Как вводятся числовые характеристики – математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение – для дискретной и непрерывной случайной величины. Каков их вероятностный смысл? Опишите свойства этих характеристик.
20. Опишите биномиальное распределение, пуассоновское распределение, геометрическое распределение. Чему равны их числовые характеристики?
21. Опишите равномерное показательное распределение непрерывной случайной величины, нормальное распределение. Каковы их числовые характеристики?
22. Запишите формулу вероятности отклонения нормально распределенной случайной величины от своего математического ожидания. В чем заключается правило трех сигм?
23. Дайте определение моментов (начальных, центральных, абсолютных) случайных величин, асимметрии, эксцесса. Запишите простейшие соотношения между моментами, формулы для вычисления моментов нормально распределенной случайной величины.
24. Что в теории вероятностей понимается под законом больших чисел? Сформулируйте теоремы Чебышёва, Бернулли, центральную предельную теорему Ляпунова.
25. Что называется коэффициентом корреляции? Каковы его свойства?
26. Сформулируйте понятие корреляционной зависимости.
27. В чем суть метода наименьших квадратов?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2012. – 479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2011.–404с.
3. Математика для гуманитариев [Текст]: учебник / К.В. Балдин. – М.: Дашков и К, 2009. – 512с.

4. Колемаев В.А. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 302 с.
5. Пиотровский Р.Г. Математическая лингвистика [Текст]: учебное пособие / Р.Г. Пиотровский и др. – М.: Высшая школа, 1977. – 383 с.
6. Салий В.Н. Математические основы гуманитарных знаний. [Текст]: учебное пособие / В.Н. Салий. – М.: Высшая школа, 2009. – 304 с.
7. Повторные испытания. Закон больших чисел. Дискретная случайная величина [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Н. А. Моргунова. – Курск: ЮЗГУ, 2016.– 54 с.