

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Емельянов Сергей Геннадьевич
Должность: ректор
Дата подписания: 08.12.2022 11:09:53
Уникальный программный ключ:
9ba7d3e34c012eba476ff0c0d4b11c01

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____ О.Г. Локтионова
«_____» _____ 2021 г.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
СТАТИСТИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Теория вероятности и математическая статистика»
для направления подготовки 39.03.01 – Социология, направленность
(профиль) «Экономическая социология»

Курск 2021

УДК 51

Составители: Е.Ю. Машков

Рецензент

Кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики
Бредихина О.А.

Теория вероятности и математическая статистика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Теория вероятности и математическая статистика» для направления подготовки 39.03.01 – Социология, направленность (профиль) «Экономическая социология»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.Ю. Машков.– Курск, 2021. – 7с.

Методические рекомендации по выполнению практических заданий содержат описание методов, применяемых при решении задач Теория вероятности и математическая статистика, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направления подготовки 39.03.01 – Социология, направленность (профиль) «Экономическая социология». Материал предназначен для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки 39.03.01 – Социология, направленность (профиль) «Экономическая социология»

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _____ . Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж _____ экз. Заказ _____ . Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи.

Задания по работам

1. Тема «Расчёт вероятностей случайных событий».

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

2. Тема «Повторные испытания. Случайные величины».

Игральная кость брошена 4 раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

3. Тема «Элементы математической статистики и корреляционного анализа».

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0,95$, зная выборочное среднее $\bar{x} = 2,3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1,4$.

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

1. Тема «Элементы теории вероятностей».

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

Фраза «шары разного цвета» подразумевает два исхода: белый и чёрный шары или чёрный и белый шары.

$$\text{а) } P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7};$$

$$\text{б) } P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}.$$

2. Тема «Повторные испытания. Случайные величины».

Игральная кость брошена 4 раза. Написать закон распределения числа появлений шестёрки.

При четырёх бросаниях кости шестёрка может не появиться ни разу, появиться 1, 2, 3 или 4 раза. Значит, случайная величина – число появлений шестёрки при четырёх бросаниях, может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4. Вероятности $P(X = x_i)$ найдём по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

где n – количество испытаний, k – количество появления события А, p – вероятность появления события А в каждом опыте, $q = 1 - p$ – вероятность неудачи в каждом опыте.

По условию $n = 4$, $p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$.

$$P(X = 0) = \frac{4!}{0!4!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{6^4};$$

$$P(X = 1) = \frac{4!}{1!3!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4} = \frac{500}{6^4};$$

$$P(X = 2) = \frac{4!}{2!2!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{6 \cdot 5^2}{6^4} = \frac{150}{6^4};$$

$$P(X = 3) = \frac{4!}{3!1!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{4 \cdot 5}{6^4} = \frac{20}{6^4};$$

$$P(X = 4) = \frac{4!}{4!0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{6^4}.$$

Закон распределения числа появлений шестёрки примет вид:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{625}{6^4}$	$\frac{500}{6^4}$	$\frac{150}{6^4}$	$\frac{20}{6^4}$	$\frac{1}{6^4}$

Проверка: $\frac{625}{6^4} + \frac{500}{6^4} + \frac{150}{6^4} + \frac{20}{6^4} + \frac{1}{6^4} = 1$ – верно.

3. Тема «Элементы математической статистики».

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0,95$,

зная выборочное среднее $\bar{x} = 2,3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1,4$.

Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, среднеквадратическое отклонение σ известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней \bar{x} .

В данном случае в качестве случайной величины $Y(\Theta)$ берётся величина $Y(\Theta) = \frac{\bar{X} - \bar{x}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, которая при достаточно больших объёмах

выборки приближённо распределена по нормальному закону $N(0,1)$.

Поэтому с заданной надёжностью γ доверительный интервал имеет

$$\text{вид } \left(\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

Таким образом, если исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону с известным среднеквадратическим отклонением σ , то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством:

$$\bar{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\tilde{\Theta} = \bar{x}$ – точечная оценка математического ожидания (\bar{x} – выборочное среднее);

$$\varepsilon = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} \text{ – точность оценки;}$$

n – объём выборки;

t – квантиль нормального распределения или значение аргумента функции Лапласа (приложение 2 [5]), при котором $2\Phi(t) = \gamma$

$$\Rightarrow \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}.$$

Воспользуемся формулой: $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0,95}{2} = 0,475$, далее по таблице приложения 2 [5] находим $t = 1,96$. Искомый доверительный интервал:

$$2,3 - \frac{1,96 \cdot 1,4}{\sqrt{49}} < a < 2,3 + \frac{1,96 \cdot 1,4}{\sqrt{49}} \text{ или } 1,908 < a < 2,692.$$

Смысл полученного результата: если произведено достаточно большое количество выборок по 49 элементов в каждой, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых a заключено, и лишь в 5% случаев значение a может выйти за границы доверительного интервала.

Контрольные вопросы

1. Дайте определения: перестановок, сочетаний, размещений.
2. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
3. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
4. Дайте определение полной группы событий.
5. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
6. Дайте определение относительной частоты.
7. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
8. Сформулируйте теоремы о вероятности суммы двух совместных, несовместных событий.
9. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
10. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
11. Какие виды случайных величин вы знаете?
12. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.
13. Какие важнейшие распределения случайных величин вы знаете?
14. Дайте понятие вариационного ряда.
15. Какие виды вариационных рядов вы знаете?
16. Какие графики используются для изображения дискретных вариационных рядов?
17. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
18. Дайте понятие доверительного интервала.
19. Дайте определение основной и конкурирующей гипотез.
20. Дайте определение прямой регрессии Y на X , X на Y .

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2012.–479с.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2011.-404с.
3. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие / Е.А.Бойцова. – Старый Оскол: ТНТ, 2014. –156с.
4. Журавлева Е.В., Бойцова Е.А., Панина Е.А., Студеникина Л.И. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В.Журавлева, Е.А.Бойцова, Е.А.Панина, Л.И.Студеникина – Курск: ЮЗГУ, 2015. –178 с.
5. Сборник задач по математике для втузов. Ч.4 [Текст]: учебное пособие / Под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова -М.: Физматлит, 2004. –432с.
6. Расчёт вероятностей случайных событий [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Журавлёва, Е.А.Панина. – Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
7. Повторные испытания. Случайные величины [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-17 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Журавлева Е.В., Панина Е.А. – Курск: ЮЗГУ, 2013. -49с.
8. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: КурскГТУ, 2012. -35 с.