МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра программной инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________О.Г. Локтионова
«15» 02 __________ 2021 г.

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ. ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №1. СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов и магистрантов всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения

Курск 2021

УДК 519.6

Составитель: Е.П. Кочура

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой нанотехнологий, микроэлектроники, общей и прикладной физики *А.Е. Кузько*

Методы оптимальных решений. Практическая работа №1. Составление математических моделей для содержательных задач: методические рекомендации к практическим занятиям по дисциплине «Методы оптимальных решений» для студентов и магистрантов всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.П. Кочура. – Курск, 2021. – 20 с.

Изложены цель работы, краткие теоретические сведения и индивидуальные задания. Подробно рассмотрен пример выполнения типового задания.

Материал предназначен для студентов и магистрантов всех направлений подготовки очной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Методы оптимальных решений».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать Формат 60 х 84 1/16.
Усл. печ. л. 1,2. Уч.- изд. л. 1,1. Тираж 50 экз. Заказ Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Практическое занятие 1. Составление математических моделей для содержательных задач.

Цель. Научиться по содержательному описанию экономической системы строить ее математическую модель с целью нахождения оптимальных решений по управлению системой.

Задание. Дано словесное описание экономической системы. Построить соответствующую математическую модель.

Краткие теоретические сведения.

1. **Математические модели линейного программирования.**

   1.1. *Задачи распределения ресурсов*

   Значительная часть задач принятия решений- это задачи распределения ресурсов между объектами. Пусть имеется m видов ресурсов. Наличие каждого i-го вида ресурса составляет $b_i, i = 1,\ldots,m$ в соответствующих единицах измерения. Эти ресурсы используются для производства n видов продукции. Для выпуска единицы j-го вида продукции необходимо $a_{i,j}$ единиц i-го вида ресурса. Требуется определить, какого вида и сколько продукции следует произвести, чтобы такой выпуск был наилучшим для принятого критерия оптимизации. Обозначим через x_j количество выпускаемого j-го вида продукции. Тогда для i-го вида ресурса можно записать

   $$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le b_i .$$

   В левой части данного неравенства мы имеем фактическую потребность в ресурсе i-го типа, а в правой части имеющийся запас данного ресурса.

   Если для некоторого вида $j, j = 1,\ldots,n$ продукции имеется минимальная величина N_j^L потребности в данном виде продукции и величина N_j^U максимального спроса на нее, то в математическую модель задачи включается ограничение вида $N_j^L \le x_j \le N_j^U$ устанавливаемых ограничений снизу и сверху на объектную переменную x_j. Для формирования критерия оптимизации формируется функция получаемой прибыли $z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$, где $c_j, j = 1,\ldots,n$ - прибыль, получаемая от реализации единицы каждого вида продукции, таким образом план производства $x = (x_1,\ldots,x_n)$ ищется из условия максимизации прибыли. К математической модели добавляется также ограничения вида $x_j \ge 0, j = 1,\ldots,n$, означающие обязательное и обычно неявно подразумеваемое требование, что объемы производства видов продукции должны быть неотрицательными числами. Таким образом, в общем виде получаем математическую модель о планировании производства:

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le b_i, i = 1,..,m;$$

$$N_j^L \le x_j \le N_j^U \left(N_j^L \ge -\infty, N_j^U \le \infty\right), j = 1,\dots,n;$$

$$x_j \ge 0, j = 1,\dots,n.$$

1.2. Задачи о смесях.

Задача определения оптимального состава смеси возникает, когда из имеющихся видов сырья путем их смешивания необходимо получить конечный продукт с заданными свойствами. Пусть имеется n видов сырья, запасы которого составляют соответственно $d_1,\dots.,d_n$. Из этого сырья необходимо составить смесь, содержащую m веществ, определяющих технические характеристики этой смеси. Известны величины $a_{i,j}$ $\left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$, определяющие количество i - го вещества в единице j -го сырья, цена которого равна c_j $\left(i = \overline{1,n}\right)$, а также b_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$-наименьшее допустимое количество i - го вещества в смеси. Требуется получить смесь с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы. Для составления математической модели обозначим через x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ количество сырья j -го вида, включаемого в искомый состав смеси. Целевая функция модели- минимизация суммарных затрат на сырье имеет вид $z = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min$. Система ограничений математической модели включает в себя ограничения по уровню содержания полезных веществ в смеси вида

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{1,j} \cdot x_j + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n \ge b_1, \\ \vdots \\ a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,j} \cdot x_j + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n \ge b_i, \\ \vdots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{m,j} \cdot x_j + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n \ge b_m, \end{cases}$$

Ограничения по запасу сырья, которые с учетом не отрицательности переменных имеют вид:

$$0 \le x_j \le d_j \quad \left(0 \le j \le n\right).$$

Таким образом , математическая модель задачи о смесях имеет вид:

$$z = c_1 \cdot x_1 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \min \qquad (1),$$

$$a_{1,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{1,j} \cdot x_j + \ldots + a_{1,n} \cdot x_n \ge b_1,$$
$$\vdots$$
$$a_{i,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{i,j} \cdot x_j + \ldots + a_{i,n} \cdot x_n \ge b_i, \quad (2)$$
$$\vdots$$
$$a_{m,1} \cdot x_1 + \ldots + a_{m,j} \cdot x_j + \ldots + a_{m,n} \cdot x_n \ge b_m,$$

$$0 \le x_j \le d_j \quad (0 \le j \le n) \qquad (3)$$

1.3 *Сбалансированная транспортная задача.*

Пусть имеется m складов $A_1,\ldots,A_m$, на которых имеется запасы однородной продукции в количествах $a_i \ (i = \overline{1,m})$, n пунктов потребления(розничных магазинов) $B_1,\ldots,B_n$ с величиной спроса $b_j \ (j = \overline{1,n})$, причем имеет место равенство $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарный запас равен суммарному спросу, такая транспортная задача называется сбалансированной. Дана также матрица $C = (c_{i,j})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ удельных транспортных расходов, где $c_{i,j}$ - стоимость доставки одной единицы продукции от i-го поставщика j- му потребителю. Требуется найти план перевозок $X = (x_{i,j})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, где $x_{i,j}$ - объем поставок продукции от i-го поставщика j- му потребителю, при котором запасы всех поставщиков вывозятся, т.е. $a_i = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$, $i = \overline{1,m}$, спрос всех потребителей удовлетворен, т.е. $b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$, $j = \overline{1,n}$

И суммарные транспортные расходы являются минимально возможными, т.е. $z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min$. Получаем математическую модель вида

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = a_i, \ i = \overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j, \ j = \overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$x_{i,j} \ge 0, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

1.4 Открытая транспортная задача с избыточным предложением.

Пусть имеется m складов $A_1,...,A_m$, на которых имеется запасы однородной продукции в количествах a_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, n пунктов потребления(розничных магазинов) $B_1,...,B_n$ с величиной спроса b_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, причем имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарный запас превышает суммарному спрос, такая транспортная задача называется не сбалансированной с избыточным предложением. Дана также матрица $C=\left(c_{i,j}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ удельных транспортных расходов, где $c_{i,j}$ - стоимость доставки одной единицы продукции от i-го поставщика j- му потребителю. Требуется найти план перевозок $X=\left(x_{i,j}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, где $x_{i,j}$- объем поставок продукции от i-го поставщика j- му потребителю, при котором поставки выполняемые поставщиками не превосходят из запасов, т.е. $a_i \geq \sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$, $i=\overline{1,m}$, спрос всех потребителей удовлетворен, т.е. $b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$, $j=\overline{1,n}$

И суммарные транспортные расходы являются минимально возможными, т.е. $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min$. Получаем математическую модель вида

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \leq a_i,\ i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} = b_j,\ j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$x_{i,j} \geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

1.5 *Открытая транспортная задача с избыточным спросом.*
Пусть имеется m складов $A_1,...,A_m$, на которых имеется запасы однородной продукции в количествах a_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$, n пунктов потребления(розничных магазинов) $B_1,...,B_n$ с величиной спроса b_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, причем имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, т.е. суммарный спрос превышает суммарному запас, такая транспортная задача называется не сбалансированной с

избыточным спросом. Дана также матрица $C=\left(c_{i,j}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$ удельных транспортных расходов, где $c_{i,j}$ - стоимость доставки одной единицы продукции от i -го поставщика j - му потребителю. Требуется найти план перевозок $X=\left(x_{i,j}\right), i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$, где $x_{i,j}$ - объем поставок продукции от i -го поставщика j - му потребителю, при котором поставки выполняемые поставщиками не превосходят спроса каждого из потребителей, т.е. $b_j \geq \sum_{i=1}^{m} x_{i,j}$, $j=\overline{1,n}$, и запасы поставщиков полностью вывозятся, т.е. $a_i=\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}$, $i=\overline{1,m}$

И суммарные транспортные расходы являются минимально возможными, т.е. $z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min$. Получаем математическую модель вида

$$z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \to \min, \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j}=a_i, \; i=\overline{1,m}, \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i,j} \leq b_j, \; j=\overline{1,n}, \qquad (3)$$

$$x_{i,j} \geq 0, \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

2. Математические модели целочисленного линейного программирования.

Данная задача описывается как обычная задача линейного программирования, но на переменные x_j, $j=\overline{1,n}$ накладываются условия целочисленности вида $x_j \in Z$, $j=\overline{1,n}$.

2.1. Целочисленные задачи распределения ресурсов

Значительная часть задач принятия решений- это задачи распределения ресурсов между объектами. Пусть имеется m видов ресурсов. Наличие каждого i -го вида ресурса составляет $b_i, i=1,\ldots,m$ в соответствующих единицах измерения. Эти ресурсы используются для производства n видов продукции. Для выпуска единицы j -го вида продукции необходимо $a_{i,j}$ единиц i -го вида ресурса. Требуется определить, какого вида и сколько продукции следует произвести, чтобы такой выпуск был наилучшим для принятого критерия оптимизации. Обозначим через x_j количество выпускаемого j -го вида продукции, причем производимая продукция состоит из неделимых объектов и ее объем измеряется в штуках. Тогда для i -го вида ресурса можно записать

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le b_i .$$

В левой части данного неравенства мы имеем фактическую потребность в ресурсе i -го типа, а в правой части имеющийся запас данного ресурса.

Если для некоторого вида $j, j = 1,\ldots,n$ продукции имеется минимальная величина N_j^L потребности в данном виде продукции и величина N_j^U максимального спроса на нее, то в математическую модель задачи включается ограничение вида $N_j^L \le x_j \le N_j^U$ устанавливаемых ограничений снизу и сверху на объектную переменную x_j. Для формирования критерия оптимизации формируется функция получаемой прибыли $z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$, где $c_j, j = 1,\ldots,n$ - прибыль, получаемая от реализации единицы каждого вида продукции, таким образом план производства $x = (x_1,\ldots,x_n)$ ищется из условия максимизации прибыли. К математической модели добавляется также ограничения вида $x_j \ge 0, j = 1,\ldots,n$, означающие обязательное и обычно неявно подразумеваемое требование, что объемы производства видов продукции должны быть неотрицательными числами и ограничения вида $x_j \in Z, j = 1,\ldots,n$, означающие, что план производства должен выражаться целыми числами для штучной продукции. Таким образом, в общем виде получаем математическую модель о планировании производства:

$$z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j \le b_i, i = 1,..,m,$$

$$N_j^L \le x_j \le N_j^U \left(N_j^L \ge -\infty, N_j^U \le \infty\right), j = 1,\ldots,n,$$

$$x_j \ge 0, j = 1,\ldots,n,$$

$$x_j \in Z, j = 1,\ldots,n.$$

2.2 *Задача о рюкзаке.*

Имеется рюкзак(например, грузовой отсек самолета) известной емкости V и доступны (в любых количествах) n типов одинаковых неделимых предметов для перевозки, объем предмета каждого типа составляет $v_i, i=\overline{1,n}$, а цена каждого предмета $c_i, i=\overline{1,n}$. Требуется разместить в рюкзаке предметы указанных типов максимальной суммарной стоимости. Пусть $x_i, i=\overline{1,n}$ - количества размещенных в рюкзаке предметов каждого типа. Тогда имеем следующую модель целочисленного линейного программирования:

$$z=\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot x_i \le V,$$

$$x_i \in Z, i=\overline{1,n},$$

$$x_i \ge 0, i=\overline{1,n}.$$

2.3 *Задача о раскрое.*

Задача оптимального раскроя материалов заключается в определении наиболее рационального способа раскроя имеющегося материала (бревна, стальные полосы, кожа и т.д.), при котором будет изготовлено наибольшее количество готовых изделий в заданном ассортименте или будет достигнуто наименьшее количество отходов. Пусть на обработку поступает a единиц сырьевого материала одного вида (например, a бревен одной длины). Из него требуется изготовить комплекты, в каждый из которых входит n видов изделий в количестве, пропорциональном числам $b_1,\ldots,b_n$. Имеется m способов раскроя данного материала, т.е. известны числа $a_{i,j}$ $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$, определяющие количество единиц j-ых изделий при i-ом способе раскроя единицы сырьевого материала. Требуется определить план раскроя, обеспечивающий максимальное количество комплектов. Пусть x_i - количество единиц сырьевого материала, раскраиваемого i-м вариантом $i=\overline{1,n}$. Тогда количество изделий первого типа будет получено $a_{1,1}\cdot x_1+\ldots+a_{1,j}\cdot x_j+\ldots+a_{1,n}\cdot x_n$ штук. Принимая во внимание комплектацию изделий, получим уравнение

$$a_{1,1}\cdot x_1+\ldots+a_{i,1}\cdot x_i+\ldots+a_{m,n}\cdot x_m=b_1\cdot y,$$

Где y-количество комплектов. Аналогично по всем изделия получаем систему ограничений модели в виде равенств:

$$a_{1,j}\cdot x_1+\ldots+a_{i,j}\cdot x_i+\ldots+a_{m,j}\cdot x_m=b_j\cdot y, \left(j=\overline{1,n}\right).$$

Очевидно выполнение неравенства $x_1+\ldots+x_i+\ldots+x_m \le a$,

А также условий не отрицательности и целочисленности:

$$x_i \ge 0, \left(j=\overline{1,m}\right),$$

$$x_i \in Z, \left(j=\overline{1,m}\right),$$

$$y \ge 0, y \in Z.$$

Целевая функция задачи имеет вид:

$z(x_1,\ldots,x_m,y)=y\rightarrow\max$, т.е. необходимо максимизировать число получаемых комплектов. Итак, задача о раскрое это задача целочисленного линейного программирования, математическая модель которой имеет вид:

$z(x_1,\ldots,x_m,y)=y\rightarrow\max$ (1),

$a_{1,j}\cdot x_1+\ldots+a_{i,j}\cdot x_i+\ldots+a_{m,j}\cdot x_m=b_j\cdot y,\left(j=\overline{1,n}\right).$ (2)

$x_i\geq 0,\left(i=\overline{1,m}\right), y\geq 0,(3)$

$x_i\in Z,\left(i=\overline{1,m}\right), y\in Z(4)$

Эта задача имеет и другую форму:

Пусть на обработку можно использовать не более a единиц сырьевого материала одного вида (например, a бревен одной длины). Из него требуется изготовить n видов изделий в количествах, равным данным числам $b_1,\ldots,b_n$. Имеется m способов раскроя данного материала, т.е. известны числа $a_{i,j}$ $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$, определяющие количество единиц j-ых изделий при i-ом способе раскроя единицы сырьевого материала и числа r_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$- размер отходов при каждом способе раскроя. Требуется определить план раскроя, обеспечивающий получение заданного количества изделий всех типов при минимальном объеме получаемых при этом отходов. Пусть x_i- количество единиц сырьевого материала, раскраиваемого i-м вариантом $i=\overline{1,m}$. Имеем следующую математическую модель(минимизация отходов при заданном ассортименте):

$$z=\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot r_i\rightarrow\min;$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\leq a,$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i\cdot a_{i,j}=b_j, j=\overline{1,n},$$

$$x_i\in Z, i=\overline{1,m},$$

$$x_i\geq 0, i=\overline{1,m}.$$

3. Нелинейные математические модели.

Нелинейная математическая модель в общем случае имеет следующую форму:

$z=f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\rightarrow extr,\left(extr\in\{\max,\min\}\right)$- целевая функция задачи,

$h_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)=a_i, i=\overline{1,m}$- ограничения в форме равенств,

$g_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)\leq b_k, k=\overline{m,m+m_1}$ - ограничения в форме неравенств. Таким образом, нужно найти план $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$работы системы, при котором достигается экстремальное значение критерия качества $f(x_1,...,x_n)$ и выполняются все технические и экономические ограничения задачи. На практике часто используются следующие нелинейные математические модели:

3.1 Задача потребительского выбора.

Пусть $x=(x_1,...,x_n)$- набор товаров приобретаемых потребителем на рынке, где $x_j\left(j=\overline{1,n}\right)$- количество приобретаемого товара j, $p=(p_1,...,p_n)$-вектор цен товаров, $u(x_1,...,x_n)$-функция полезности товаров, применяемая потребителем, $M-$бюджет потребителя, тогда нелинейная математическая модель потребительского выбора имеет вид:

$$u(x_1,...,x_n)\to \max,$$
$$x_1\cdot p_1+...+x_n\cdot p_n\le M,$$
$$x_1\ge 0,...,x_n\ge 0.$$

3.2 Задача управления запасами.

Пусть даны параметры работы склада; c-цена единицы товара, d-интенсивность спроса товара в единицах в год, s-организационные издержки за одну партию товара, h- издержки на хранение одной единицы товара в год. Пусть x- размер одной партии товара. Тогда затраты за год на закупку и хранение товара будут равны $C(x)=c\cdot d+\frac{s\cdot d}{x}+\frac{h\cdot x}{2}$. Получаем математическую модель минимизации издержек за год:

$$C(x)=c\cdot d+\frac{s\cdot d}{x}+\frac{h\cdot x}{2}\to \min;$$
$$x\le d;$$
$$x\ge 0.$$

Примеры выполнения.

Пример решения 1.

Предприятию необходимо изготовить два вида продукции A и B, с использованием трех видов ресурсов R_1, R_2, R_3 количество которых ограничено. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Вид ресурсов	Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	A	**B**	
R_1	6	6	36
R_2	4	2	20

R_3	4	8	40
Доходы от реализации продукции	12	15	

Составить математическую модель задачи.
Решение:
Имеем задачу об оптимальном распределении ресурсов (п. 1.1 теоретич. положений). Математическая модель на максимум получаемой прибыли имеет вид:

$z = 12 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 \to \max;$

$6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 \le 36;$

$4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \le 20;$

$4 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \le 40;$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

Пример решения 2.
Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества A,B и C. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества A не менее 6 единиц, вещества B- не менее 8 единиц, вещества C не менее 12 единиц. Вещества A,B,C содержатся в трех видах продуктов I, II, III в концентрации, указанной в таблице:

Хим. в-ва Продукты	I	II	III
A	2	1	3
B	1	2	1.5
C	3	4	2

Стоимость единицы продуктов I, II, III различна: единица продукта I стоит 2 у.е., единица II – 3 у.е., единица III – 2,5 у.е. Смесь надо составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей.
Решение. Имеем задачу о смесях (п. 1.2 теоретич. положений). Получаем модель вида:

$z = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 \to \min,$

$2 \cdot x_1 + x_2 + 3 \cdot x_3 \ge 6,$

$x_1 + 2 \cdot x_2 + 1.5 \cdot x_3 \ge 8,$

$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \ge 12,$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$

Пример решения 3.
Дана транспортная задача.

	Стоимость перевозок	Наличие

		потребителям (млн. руб. за 1 тыс. ед.)			(тыс.ед.)
		B_1	B_2	B_2	
Склады	A_1	8	5	6	120
	A_2	4	9	7	180
Запрос(тыс. ед.)		70	140	90	300

Требуется построить соответствующую математическую модель.
Решение. Имеем сбалансированную транспортную задачу(п.1.4 теоретич. положений).
Математическая модель данной транспортной задачи имеет вид:

$$z = 8 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 6 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{21} + 9 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23} \to \min,$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180,$$

$$x_{11} + x_{21} = 70,$$

$$x_{12} + x_{22} = 140,$$

$$x_{13} + x_{23} = 90,$$

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0.$$

Пример решения 4.
Дана транспортная задача.

		Стоимость перевозок к потребителям (млн. руб. за 1 тыс. ед.)			Наличие (тыс.ед.)
		B_1	B_2	B_2	
Склады	A_1	8	5	6	140
	A_2	4	9	7	180
Запрос(тыс. ед.)		70	140	90	320 300

Требуется построить соответствующую математическую модель.
Решение.
Имеем транспортную задачу с избыточным предложением.
Математическая модель данной транспортной задачи имеет вид:

$$z = 8 \cdot x_{11} + 5 \cdot x_{12} + 6 \cdot x_{13} + 4 \cdot x_{21} + 9 \cdot x_{22} + 7 \cdot x_{23} \to \min,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 140,$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 180,$$
$$x_{11} + x_{21} = 70,$$
$$x_{12} + x_{22} = 140,$$
$$x_{13} + x_{23} = 90,$$
$$x_{11} \ge 0, x_{12} \ge 0, x_{13} \ge 0, x_{21} \ge 0, x_{22} \ge 0, x_{23} \ge 0.$$

Пример решения 5.

Из труб длиной 25 м требуется нарезать трубы длиной 8, 12 и 16 м в количестве 100, 50 и 30 соответственно. Определить план раскроя с минимальными отходами, изрезав не более 80.

Решение.

Имеем задачу о раскрое(п. 2.3. теоретических положений). Найдем методом перебора все варианты раскроя одной трубы 25 м, записав их в табличной форме:

Вариант	Трубы 16 м	Трубы 12 м	Трубы 8 м	Отход м
1	1	0	1	1
2	0	2	0	1
3	0	1	1	4
4	0	0	3	1
5	0	1	0	13
6	0	0	1	17
7	0	0	2	9

Пусть x_1 - количество труб 25 м, разрезанных по первому варианту, $x_2 - x_4$ соответственно по втором, третьему и четвертому вариантам. Тогда получаем математическую модель целочисленного линейного программирования:

$$z = x_1 + x_2 + 4 \cdot x_3 + x_4 + 13 \cdot x_5 + 17 \cdot x_6 + 9 \cdot x_7 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 80,$$
$$x_1 = 30,$$
$$2 \cdot x_2 + x_3 + x_5 = 50,$$
$$x_1 + x_3 + 3 \cdot x_4 + x_6 + 2 \cdot x_7 = 100,$$
$$x_1 \in Z, x_2 \in Z, x_3 \in Z, x_4 \in Z, x_5 \in Z, x_6 \in Z, x_7 \in Z,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0.$$

Пример решения 6. Емкость грузового отсека самолета равна 5 м^3. К транспортировке планируется 3 типа неделимых предметов с объемами 0.5, 0.2, 0.1 м^3, стоимости которых составляют соответственно 10000, 3000,1500 руб. Построить математическую модель оптимальной загрузки отсека грузового самолета.

Решение. Имеем задачу о рюкзаке как задачу целочисленного линейного программирования. Математическая модель имеет вид:

$$z = 10000 \cdot x_1 + 3000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3 \to \max,$$

$$0.5 \cdot x_1 + 0.2 \cdot x_2 + 0.1 \cdot x_3 \le 5;$$

$$x_1 \in Z, x_2 \in Z, x_3 \in Z,$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Пример решения 7.

Потребитель располагает средствами 100 у.е. и предполагает их использовать для приобретения двух видов товаров с ценами $p_1 = 10$ у.е. и $p_2 = 3$ у.е. Записать математическую модель плана покупок, если используется функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{4/5} \cdot x_2^{1/5}$.

Решение.

Имеем задачу оптимального потребительского выбора (п. 3.1 теоретич. указаний). Математическая модель имеет вид:

$$u(x_1, x_2) = x_1^{4/5} \cdot x_2^{1/5} \to \max;$$

$$10 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \le 100;$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Контрольные вопросы.

1. Как формулируется математическая модель распределения ресурсов.
2. Как формулируется математическая модель об оптимальной смеси.
3. Как формулируется математическая модель сбалансированной транспортной задачи.
4. Как формулируется математическая модель транспортной задачи с избыточным предложением.
5. Как формулируется математическая модель транспортной задачи с избыточным спросом.
6. Как формулируется математическая модель задачи о рюкзаке.
7. Как формулируется математическая модель задачи о раскрое.
8. Как формулируется математическая модель задачи о минимизации складских издержек.
9. Как формулируется математическая модель задачи о потребительском выборе.
10. Какой вид в общем случае имеет нелинейная задача оптимизации.

Индивидуальные задания

N	Номера задач		Номера задач
1	1,9,2,8,4,5	2	3,14,15,13,12,16
3	6,9,2,18,17,5	4	7,14,15,8,19,16
5	11,20,2,13,5	6	1,20,15,18,12,16
7	3,9,2,8,4,17,5	8	6,14,15,13,19,16
9	7,9,2,18,4,5	10	11,14,15,8,12,16
11	1,9,2,13,17,5	12	3,20,15,18,19,16
13	6,20,2,8,4,5	14	7,14,15,13,12,16
15	11,9,2,18,17,5	16	1,20,15,8,19,16
17	3,9,2,13,4,5	18	6,14,15,18,12,16
19	7,20,2,8,17,5	20	11,14,15,13,19,16
21	1,9,2,18,4,5	22	3,14,15,8,12,16
23	6,9,2,13,17,5	24	7,14,15,18,19,16
25	11,9,2,8,4,5	26	1,20,15,13,12,16

Приложение. Список задач для индивидуальных вариантов.

1. Однородный продукт, сосредоточенный на трех складах в количествах a_1, a_2, a_3 единиц необходимо распределить между четырьмя потребителями, спрос которых равен соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц. Стоимость перевозки единицы продукции из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения равна $c_{i,j}$ и известна для всех маршрутов. Векторы a, b и матрица C таковы

$$a = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 30 & 60 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Емкость кузова автомобиля равна грузового отсека самолета равна 10 м^3. К транспортировке планируется 3 типа неделимых предметов с объемами 0.8, 0.5, 0.2 м^3, стоимости которых составляют соответственно 12000, 5000,2000 руб. Построить математическую модель оптимальной загрузки отсека грузового самолета.
3. Однородный продукт, сосредоточенный на трех складах в количествах a_1, a_2, a_3 единиц необходимо распределить между четырьмя потребителями, спрос которых равен соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц. Стоимость перевозки единицы продукции из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения равна $c_{i,j}$ и известна для всех маршрутов. Векторы a, b и матрица C таковы

$$a=\begin{pmatrix}54\\60\\63\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}41 & 50 & 44 & 30\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5 & 3\\4 & 2 & 2 & 3\\1 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Потребитель располагает средствами 80 у.е. и предполагает их использовать для приобретения двух видов товаров с ценами $p_1 = 7$ у.е. и $p_2 = 3$ у.е. Записать математическую модель плана покупок, если используется функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{3/5} \cdot x_2^{2/5}$.
5. Из труб длиной 35 м требуется нарезать трубы длиной 8, 12 и 15 м в количестве 120, 60 и 30 соответственно. Определить план раскроя с минимальными отходами, изрезав не более 80.
6. Дана транспортная задача.

		Стоимость перевозок к потребителям (млн. руб. за 1 тыс. ед.)			Наличие (тыс.ед.)
		B_1	B_2	B_2	
Склады	A_1	8	5	6	240
	A_2	4	9	7	180
Запрос(тыс. ед.)		70	140	90	

Требуется построить соответствующую математическую модель.

7. Дана транспортная задача.

		Стоимость перевозок к потребителям (млн. руб. за 1 тыс. ед.)			Наличие (тыс.ед.)
		B_1	B_2	B_2	
Склады	A_1	2	5	6	140
	A_2	4	3	7	180
Запрос(тыс. ед.)		170	140	90	

Требуется построить соответствующую математическую модель.

8. Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества A,B и C. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества A не менее 8 единиц, вещества B- не менее 7 единиц, вещества C не менее 10 единиц. Вещества A,B,C содержатся в трех видах продуктов I, II, III в концентрации, указанной в таблице:

Хим. в-ва Продукты	I	II	III

A	2	2	3
B	3	2	1.5
C	3	3	2

Стоимость единицы продуктов I, II, III различна: единица продукта I стоит 3 у.е., единица II – 2 у.е., единица III – 2,5 у.е. Смесь надо составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей.

9. Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, с использованием трех видов ресурсов R1, R2, R3 количество которых ограничено. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Вид ресурсов	Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	A	**B**	
R_1	6	6	32
R_2	3	2	26
R_3	4	4	48
Доходы от реализации продукции	10	14	

Составить математическую модель задачи.

10. Пусть даны параметры работы склада; 3-цена единицы товара, 100-интенсивность спроса товара в единицах в год, 12-организационные издержки за одну партию товара, 2- издержки на хранение одной единицы товара в год. Построить математическую модель минимизации складских издержек.

11. Дана транспортная задача.

		Стоимость перевозок к потребителям (млн. руб. за 1 тыс. ед.)			Наличие (тыс.ед.)
		B_1	B_2	B_2	
Склады	A_1	2	4	6	140
	A_2	4	3	5	380
Запрос(тыс. ед.)		170	140	60	

Требуется построить соответствующую математическую модель.

12. Потребитель располагает средствами 180 у.е. и предполагает их использовать для приобретения двух видов товаров с ценами $p_1 = 8$ у.е. и $p_2 = 4$ у.е. Записать математическую модель плана покупок, если используется функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{4/5} \cdot x_2^{1/5}$.

13. Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества А,В и С. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества А не менее 18 единиц, вещества В- не менее 10 единиц, вещества С не менее 12 единиц. Вещества А,В,С содержатся в трех видах продуктов I, II, III в концентрации, указанной в таблице:

Хим. в-ва Продукты	I	II	III
A	2	4	3
B	5	2	1.5
C	3	3	2

Стоимость единицы продуктов I, II, III различна: единица продукта I стоит 3 у.е., единица II – 5 у.е., единица III – 2,5 у.е. Смесь надо составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей. Построить математическую модель задачи.

14. Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, с использованием трех видов ресурсов R1, R2, R3 количество которых ограничено. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Вид ресурсов	Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	A	**B**	
R_1	2	4	30
R_2	8	2	25
R_3	4	4	44
Доходы от реализации продукции	11	16	

Составить математическую модель задачи.

15. Емкость кузова автомобиля равна грузового отсека самолета равна 12 м^3. К транспортировке планируется 3 типа неделимых предметов с объемами 0.7, 0.4, 0.3 м^3, стоимости которых составляют соответственно 11000, 6000,3000 руб. Построить математическую модель оптимальной загрузки отсека грузового самолета.
16. Из труб длиной 32 м требуется нарезать трубы длиной 6, 12 и 15 м в количестве 100, 70 и 30 соответственно. Определить план раскроя с минимальными отходами, изрезав не более 90.
17. Пусть даны параметры работы склада; 3-цена единицы товара, 120-интенсивность спроса товара в единицах в год, 11-организационные издержки за одну партию товара, 3- издержки на хранение одной единицы товара в год. Построить математическую модель минимизации складских издержек.

18. Требуется составить смесь, содержащую три химических вещества А,В и С. Известно, что составленная смесь должна содержать вещества А не менее 8 единиц, вещества В- не менее 10 единиц, вещества С не менее 12 единиц. Вещества А,В,С содержатся в трех видах продуктов I, II, III в концентрации, указанной в таблице:

Хим. в-ва Продукты	I	II	III
А	2	2	3
В	4	3	1.5
С	3	3	4

Стоимость единицы продуктов I, II, III различна: единица продукта I стоит 2 у.е., единица II – 2.5 у.е., единица III – 3 у.е. Смесь надо составить так, чтобы стоимость используемых продуктов была наименьшей.

19. Потребитель располагает средствами 250 у.е. и предполагает их использовать для приобретения двух видов товаров с ценами $p_1 = 6$ у.е. и $p_2 = 4$ у.е. Записать математическую модель плана покупок, если используется функция полезности $u(x_1, x_2) = x_1^{4/7} \cdot x_2^{3/7}$.

20. Предприятию необходимо изготовить два вида продукции А и В, с использованием трех видов ресурсов R1, R2, R3 количество которых ограничено. Исходные данные задачи представлены в таблице:

Вид ресурсов	Количество ресурсов, идущих на изготовление единицы продукции		Запасы ресурсов
	А	**В**	
R_1	3	6	31
R_2	7	3	25
R_3	5	4	40
Доходы от реализации продукции	10	113	

Составить математическую модель задачи.