МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
___________ О.Г. Локтионова
« ___ » ____________ 2022 г.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Методические указания к выполнению практических заданий
по дисциплине «Математическая логика»
для студентов очной и заочной форм обучения

Курск 2022

УДК 51

Составитель: Е.В.Скрипкина

Рецензент
Доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
Н.А. Хохлов

Математическая логика: методические указания к выполнению практических заданий по дисциплине «Математическая логика» для студентов очной и заочной форм обучения / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В.Скрипкина. – Курск, 2022. – 12 с.

В методических рекомендациях по выполнению практических заданий проводится описание применяемых при решении задач математической логики, задания и вопросы для контроля знаний.
Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для направлений подготовки 04.00.00 «Химия», 07.00.00 «Архитектура», 08.00.00 «Техника и технологии строительства», 13.00.00 «Электро- и теплоэнергетика», 15.00.00 «Машиностроение», 18.00.00 «Химические технологии», 20.00.00 «Техносферная безопасность и природообустройство», 28.00.00 «Нанотехнологии и наноматериалы», 38.00.00 «Экономика и управление», 39.00.00 «Социология и социальная работа» 45.00.00 «Языкознание и литературоведение» материал предназначен для студентов очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать _______ . Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л.0,6 .Тираж 100 экз. Заказ 922 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Содержание

Введение

Основной формой обучения студентов является самостоятельная работа с учебником и учебными пособиями. Поэтому каждый студент с самого начала занятий должен выработать для себя рациональную систему работы над курсом, постоянно практикуясь при этом в решении задач. В противном случае усвоение и практическое использование материала затруднены. Чрезвычайно важны систематические занятия. Работа урывками не приносит положительных результатов.

Часто приходится слышать высказывания студентов о том, что теорию они знают, а решать задачи не умеют. Данная работа содержит методические указания по выполнению модуля системы РИТМо, который способствует развитию индивидуального творческого мышления, обеспечивает ритмическую работу студента при изучении разделов математической логики.

Каждый параграф начинается с краткого теоретического введения, приводятся основные определения, методы и способы решения задач. Здесь же представлены индивидуальные задания, которые даны в объеме 5различных вариантов. Номер варианта дает лектор. Он приводит общую нумерацию студентов в потоке.

Для подготовки к защите модуля представлен список контрольных вопросов.

Для выполнения модуля достаточно аккуратно записанных лекций и внимательного изучения методических рекомендаций, предложенных в данном учебном пособии. Кроме того, весь теоретический материал по данным темам хорошо представлен в учебных пособиях, указанных в списке литературы.

Практическая работа №1-4. АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Алгебра, образованная двухэлементным множеством $B = \{0, 1\}$ вместе со всеми возможными операциями на нем, называется алгеброй логики. Функцией алгебры логики (логической функцией) от n¬ переменных называется n-арная операция на множестве $\{0, 1\}$. Логическая функция f(x1, x2, x3, …, xn) – это функция, принимающая значения 0, 1. Множество всех логических функций обозначается P2, множество всех логических функций n переменных – P2 (n).

Исходным понятием математической логики является «высказывание». Высказыванием называется повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно. Логическим значением высказывания являются «истина» или «ложь». Такие высказывания называют простыми, или элементарными.

Пример

Повествовательное предложение «3 – это простое число» является истинным высказыванием, а «3,14… – рациональное число» –

ложным; «Юго-восточный берег озера Виви является географическим центром России» – истинным, а «Красноярск – столица России» – ложным, «Число 8 делится на 2 и на 4» – истинным, а «Сумма чисел 2 и 3 равна 8» – ложным и т. п.

При формальном исследовании сложных текстов понятие «простые высказывания» замещают понятием «пропозициональные переменные» (от лат. propositio – предложение), которое обозначают пропис¬ ными буквами латинского алфавита «A», «B», «C» и т. д.

«Истинность» или «ложность» предложения есть истинностное значение высказывания

Из простых высказываний с помощью операций над высказываниями или логических операций (связок) строят сложные высказывания, т. е. логические операции в логике представляют собой действия, образующие новые понятия на основе существующих. Существуют следующие основные логические операции: конъюнкция, дизъюнкция, инверсия, импликация и эквивалентность.

Индивидуальные задания

Задание 1.

Записать с помощью логических символов следующие высказывания и установить, истинны они или ложны.

Таблица 1.

n	Задания
	1) Модуль любого действительного числа положителен. 2) Для любого вектора в пространстве найдется вектор пространства, который в сумме с ним дает нулевой вектор.
	1) Найдется единственное действительное число, квадрат которого равен 3. 2) Для любой прямой на плоскости найдется прямая на плоскости, перпендикулярная ей.
	1) Существует единственное натуральное число, являющееся общим делителем чисел 6 и 9. 2) Для любого действительного числа найдется действительное число, обратное ему.
	1) Существует целое число, кратное 5. 2) Любое положительное действительное число есть квадратный корень некоторого действительного числа.
	1) Найдется единственное положительное действительное число, квадрат которого равен 3. 2) Существует натуральное число, которое в сумме с любым действительным числом дает это (то есть второе) число.

Задание 2.

Описать приведенные ниже высказывания и установить, истинны они или ложны.

Таблица 2

n	Задания
	1) $\forall x \in N (x + \frac{1}{x} \geq 2)$ 2) $\forall x \in R\ \exists y \in R (x \cdot y = 1)$
	1) $\forall x, y \in N (x + y > 0)$ 2) $\exists !\, y \in R\ \forall x \in R (x \cdot y = 0)$
	1) $\exists !\, x \in R (tg\ x = 0)$ 2) $\forall x \in N\ \exists y \in N (y < x)$
	1) $\exists !\, x \in R (x + 1 = \frac{6}{x})$ 2) $\forall x \in R\ \ \exists y \in R (x + y = 0)$
	1) $\forall x \in R (\lvert x \rvert > 0)$ 2) $\exists y \in N\ \forall x \in R (x \cdot y = 0)$

Контрольные вопросы

1. Доказать, что Ø {Ø}.
2. Доказать коммутативность операции пересечения множеств.
3. Доказать коммутативность операции объединения множеств.
4. Доказать коммутативность симметрической разности множеств.
5. Доказать ассоциативность операции пересечения множеств.
6. Доказать ассоциативность операции объединения множеств.
7. Выразить объединение множеств А и В через пересечение и симметрическую разность.
8. Выразить пересечение множеств А и В через объединение и симметрическую разность.
9. Выразить объединение множеств А и В через разность и симметрическую разность.
10. Выразить пересечение множеств А и В через разность и симметрическую разность.

Практическая работа № 5-9.ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ. МАШИНА ТЬЮРИНГА

Теория алгоритмов – это наука, изучающая общие свойства и закономерности алгоритмов, разнообразные формальные модели их представления. На основе формализации понятия алгоритма возможно сравнение алгоритмов по их эффективности, проверка их эквивалентности, определение областей применимости. Предметом теории алгоритмов являются объекты и действия над ними в смысле их точного определения, комплексы действий их свойств, а также установление того, что можно и что нельзя получить в результате их действия. Цель теории алгоритмов – доказательство алгоритмической разрешимости или неразрешимости той или иной математической проблемы. Алгоритмическая разрешимость – существование однозначного и точного (в соответствии с некоторым критерием) решения. Основной чертой алгоритмического подхода является его конечность (финитность), заключающаяся в рассмотрении только конечного комплекса действий над конечным числом объектов. Рассмотрим неформальное определение алгоритма. Алгоритм – это заданное на некотором языке конечное предписание, задающее конечную последовательность выполнимых элементарных операций для решения задачи. Пусть D – область (множество) исходных данных задачи, а R – множество возможных результатов, тогда мы можем говорить, что алгоритм осуществляет отображение $D \rightarrow R$. Поскольку такое отображение может быть неполным, то вводятся следующие понятия. Алгоритм называется частичным алгоритмом, если мы получаем результат только для некоторых $d \in D$, и полным алгоритмом, если алгоритм получает правильный результат для всех $d \in D$. Несмотря на усилия исследователей, отсутствует одно исчерпывающе строгое определение понятия «алгоритм», в теории алгоритмов были введены различные формальные определения алгоритма, и удивительным научным результатом является доказательство эквивалентности этих формальных определений в смысле их равномощности. Первые работы по уточнению понятия «алгоритм» появились в 1936–1937 гг. Это были работы Тьюринга, Поста, Маркова, Чёрча. Рассмотрим варианты словесного определения алгоритма, принадлежащие российским ученым А. Н. Колмогорову и А. А. Маркову. Определение Колмогорова . Алгоритм – это всякая система вычислений, выполняемых по строго определенным правилам, которая после какого-либо числа шагов заведомо приводит к решению поставленной задачи.

Определение Маркова . Алгоритм – это точное предписание, определяющее вычислительный процесс, идущий от варьируемых исходных данных к искомому результату.

Рассмотрим основные требования к алгоритмам.

1. Алгоритм применяется к исходным данным и дает результаты. Кроме того, в процессе работы алгоритма могут появляться промежуточные данные.

2. Данные для своего размещения требуют памяти. Память состоит из ячеек, так что каждая ячейка может содержать один символ алфавита данных. Таким образом, объем данных и требуемая память согласованы.

3. Алгоритм состоит из отдельных элементарных шагов или действий. Множество различных шагов, из которых составлен алгоритм, конечно.

4. Последовательность шагов алгоритма детерминирована, т. е. после каждого шага либо указывается, какой шаг делать дальше, либо дается команда остановки, после чего работа алгоритма считается законченной.

5. Результативность алгоритма – остановка после конечного числа шагов с указанием того, что считать результатом.

Любая практическая задача требует предварительного задания исходных данных. Как правило, можно задать некоторое характерное число n. Например, для задачи сортировки массива чисел по возрастанию n – число чисел в массиве, для задачи решения системы линейных уравнений n – число уравнений. Характерное число задачи определяет размерность задачи как величину массива исходных данных. С ростом характерного числа размерность задачи возрастает.

Индивидуальные задания

Задание 1.

Доказать, воспользовавшись методом математической индукции.

Таблица 3

n	Задание
	$2+16+56+...+(3n-2)\cdot 2^n = 10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$
	$5+45+325+...+(4n+1)\cdot 5^{n-1} = n\cdot 5^n$
	$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+...+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{2n+1}$
	$\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}+\frac{3\cdot 9}{5\cdot 7}+\frac{5\cdot 11}{7\cdot 9}+...+\frac{(2n-1)\cdot(2n+5)}{(2n+1)\cdot(2n+3)}=\frac{n\cdot(6n+1)}{3\cdot(2n+3)}$
	$\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}\cdot 2+\frac{4}{5\cdot 6}\cdot 2^2+...+\frac{n+1}{(n+2)\cdot(n+3)}\cdot 2^{n-1}=\frac{2^n}{n+3}-\frac{1}{3}$

Задание 2

Сконструировать машину Тьюринга, преобразующую заданное слово w1 в слово w2, при условии, что машина начинает работать из начального стандартного состояния. Изобразить схематически последовательность конфигураций, возникающих на ленте на каждом такте работы машины.

1. w1 = 000, w2 = 0000;
2. w1 = 010, w2 = 0101;
3. w1 = 000, w2 = 0001;
4. w1 = 011, w2 = 1010;
5. w1 = 001, w2 = 111;
6. w1 = 011, w2 = 1011

Контрольные вопросы

1. Что такое теория алгоритмов?
2. Какие основные требования к составлению алгоритмов?
3. В чем отличие определений Маркова и Колмогорова?
4. Машина Тьюринга
5. Последовательность конфигураций в машине Тьюринга

Список рекомендуемой литературы

Основная учебная литература

1. Верещагин, Н. К. Начала теория множеств [Текст] : лекции по математической логике и теории алгоритмов / Н. К. Верещагин, А. Шень. - М. : МЦНМО, 1999. - 128 с.
2. Мендельсон, Эллиот. Введение в математическую логику [Текст] : пер. с англ. / под ред. С. И. Адаяна. - 3-е изд. - Москва : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. - 320 с.
3. Ершов, Ю. Л. Математическая логика [Текст] : учеб. пособие для вузов / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. - Москва : Наука, 1979. - 320 с.
4. Эдельман, С.Л. Математическая логика : учебное пособие / С.Л. Эдельман. – Москва: Высшая школа, 1975. – 176 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458226 (дата обращения: 23.03.2020). – Текст : электронный.
5. Шенфилд, Д. Математическая логика=Mathematical logic / Д. Шенфилд ; под ред. Ю.Л. Ершова ; пер. с англ. И.А. Лаврова, И.А. Мальцева ; пер. А.И. Донченко. – Москва : Наука, 1975. – 527 с. – (Математическая логика и основания математики). – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=450507 (дата обращения: 23.03.2020). – Текст : электронный.

Дополнительная литература

1. Гончаров, С. С. Введение в логику и методологию науки [Текст] / С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, К. Ф. Самохвалов. - М. : Интерпракс, 1994. - 256 с.
2. Шапорев, С. Д. Математическая логика [Текст] : курс лекций и практических занятий / С. Д. Шапорев. - СПб. : БХВ-Петербург, 2005. - 416 с.
3. Клини, С.К. Математическая логика / С.К. Клини ; под ред. Г.Е. Минц ; пер. с англ. Ю.А. Гастева. – Москва : Мир, 1973. – 479 с. –

Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=458243 (дата обращения: 23.03.2020). – Текст : электронный.
4. Гудстейн, Р.Л. Математическая логика=Mathematical logic / Р.Л. Гудстейн ; под ред. и с предисл. С.А. Яновской ; ред. Ю.А. Шиханович ; пер. с англ. В.С. Чернявского. – Москва : Издательство иностранной литературы, 1961. – 163 с. : ил. – (Библиотека сборника "Математика"). – Режим доступа: по подписке. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=449971 (дата обращения: 23.03.2020). – Текст : электронный.