

УДК 53

Составители: А.В. Кузько, А.Е. Кузько, А.В. Куценко

Рецензент

Директор РИЦ, д.ф.-м.н., профессор А.П. Кузьменко

Физика конденсированного состояния: методические указания к выполнению практических работ для студентов направления подготовки 28.03.01 «Нанотехнологии и микросистемная техника»/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Кузько А.В., Кузько А.Е., Куценко А.В. Курск, 2017. 52 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению практических работ, в которых изучается магнитный резонанс, магнитные свойства вещества, свойства диэлектриков, элементы кристаллографии, характеристическое рентгеновское излучение, статистика равновесных носителей заряда, особенности температурной зависимости концентрации носителей заряда в полупроводнике, эффект Холла в полупроводниках.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования и учебному плану направления подготовки 28.03.01 Нанотехнологии и микросистемная техника, степень (квалификация) – бакалавр. Предназначены для студентов всех форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.12.17. Формат 60 x 84 1/16.

Усл. печ. л. 3,02. Уч.-изд. л. 2,74. Тираж 50 экз. Заказ 3403. Бесплатно.

Юго-Западный государственный университет.

305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС

Магнитный момент ядра

$$\mu_I = g \mu_N I (I + 1),$$

где g -ядерный фактор Ланде (g -фактор); μ_N -ядерный магнетон ($\mu_N = e\hbar/(2m_p)$); m_p - масса протона; I - спиновое квантовое число ядра (спин ядра).

Связь магнитного момента ядра с моментом импульса Γ_j ядра

$$\mu_I = \gamma \Gamma_j,$$

где γ - гиромагнитное отношение ($\gamma = g\mu_N / \hbar$) и

$$\Gamma_j = \hbar \sqrt{I(I+1)}.$$

Проекция магнитного момента ядра на направление вектора магнитной индукций внешнего поля

$$\mu_z = g\mu_N m_I$$

где m_I - спиновое магнитное квантовое число ядра, $m_I = I, I-1, \dots, -I$

Круговая частота ω_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергии,

$$\omega_0 = \gamma B_0,$$

где B_0 - магнитная индукция внешнего постоянного магнитного поля.

Отношение заселенностей энергетических уровней (в отсутствие высокочастотного поля) $\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/(kT)}$, где N_1 -заселённость энергетического

уровня E_1 ; N_2 -заселенность энергетического уровня E_2 ; $E_2 > E_1$.

Пример 1. Образец из вещества, содержащего эквивалентные ядра (протоны), находится в однородном внешнем магнитном поле ($B=1$ Тл). Определить: 1) относительную разность заселенностей энергетических уровней при температуре $T=300$ К; 2) частоту λ_0 , при которой будет происходить ядерный магнитный резонанс. Экранирующим действием электронных оболочек и соседних ядер пренебречь.

Решение. 1. В магнитном поле ядра приобретают дополнительную энергию, определяемую соотношением

$$E = -\mu_z B, \tag{1}$$

где (μ_z - проекция магнитного момента ядра на направление вектора B (ось OZ). Проекций магнитного момента ядра выражается формулой

$$\mu_z = g\mu_N m_I$$

где g - ядерный фактор Ланде; μ_N - ядерный магнетон; m_I - спиновое магнитное квантовое число ядра.

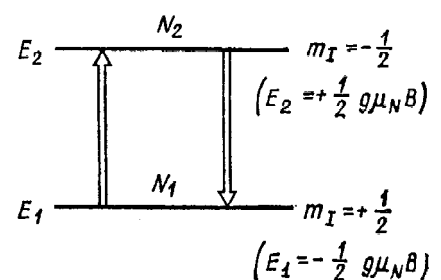


Рис. 51.2

Подставив это выражение в формулу (1), получим

$$E = -g\mu_Z B m_I.$$

Спиновое магнитное квантовое число m_I , протона может принимать только два значения: $m_I = +1/2$ и $m_I = -1/2$. Значение $m_I = +1/2$ соответствует нижнему энергетическому уровню:

$$E_1 = -\frac{1}{2} g\mu_N B \quad (2)$$

Значение $m_I = -1/2$ соответствует верхнему энергетическому уровню

$$E_2 = \frac{1}{2} g\mu_N B \quad (3)$$

В отсутствие магнитного поля число ядер с противоположно направленными спинами одинаково и равно $N/2$ (N - общее число ядер). В магнитном поле происходит перераспределение ядер по энергетическим уровням. На нижней уровне с энергией E_1 будет находиться больше ядер, чем на верхнем с энергией E_2 . Число ядер N_1 (заселенность данного уровня), находящихся на нижнем энергетическом уровне E_1 , может быть вычислено по формуле Больцмана:

$$N_1 = \frac{N}{2} e^{E_1/(kT)}, \text{ или } N_1 = \frac{N}{2} e^{+\frac{1}{2} g\mu_N B / (kT)}.$$

Соответственно можно найти и число ядер N_2 , находящихся на верхнем энергетическом уровне:

$$N_2 = \frac{N}{2} e^{E_2/(kT)}, \text{ или } N_2 = \frac{N}{2} e^{-\frac{1}{2} g\mu_N B / (kT)}.$$

Так как $1/2 g\mu_N B \ll kT$ (это будет показано ниже), то можно воспользоваться приближенными равенствами $e^{-x} = 1-x$ и $e^{+x} = 1+x$, если $x \ll 1$ (см. табл. 3). Тогда

$$N_1 \approx \frac{N}{2} \left(1 + \frac{1}{2} g\mu_N B / (kT)\right), \text{ или } N_2 \approx \frac{N}{2} \left(1 - \frac{1}{2} g\mu_N B / (kT)\right)$$

Разность ΔN заселенности энергетических уровней найдём, вычитая из первого приближённого равенства второе

$$\Delta N = N_1 - N_2 = \frac{1}{2} g\mu_N B / (kT) \quad (4)$$

Разделив ΔN на N , получим относительную разность заселенностей энергетических уровней:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{2} g\mu_N B / (kT)$$

Выразим все величины в единицах СИ: $g=5,58$ (для протона), $\mu_N = 5,05 \cdot 10^{-27} \text{ А} \cdot \text{м}^2$, $B=1 \text{ Тл}$, $k=1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, $T=300 \text{ К}$.

Подставим эти значения в формулу (4) и произведем вычислений:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{5,58 \cdot 5,05 \cdot 10^{-27} \cdot 1}{2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} = 3,4 \cdot 10^{-6}.$$

Полученный результат оправдывает наше допущение, что $\frac{1}{2} g\mu_N B / (kT) \ll kT$.

2. Под действием электромагнитного излучения, угловая частота

которого

$$\omega_0 = (E_1 - E_2) / \hbar, \quad (5)$$

будут происходить переходы между уровнями энергии E_1 и E_2 , причем электромагнитное излучение вызывает переходы $E_1 \rightarrow E_2$ и $E_2 \rightarrow E_1$ с равной вероятностью при условии одинаковой заселенности энергетических уровней. Так как нижний уровень имеет большую заселенность, чем верхний, то переходы с поглощением электромагнитного излучения ($E_1 \rightarrow E_2$) будут происходить чаще, чем с излучением ($E_2 \rightarrow E_1$). Это и есть резонансное поглощение электромагнитного излучения, обусловленное ядерным магнетизмом (ЯМР).

Подставив в (5) выражение для энергий E_1 и E_2 согласно (2) и (3) и заменив угловую частоту ω_0 на частоту $\nu_0 (\omega_0 = 2\pi\nu_0)$, найдем резонансную частоту ν_0 для внешнего магнитного поля B :

$$\nu_0 = g\mu_N B / (2\pi\hbar)$$

Подставим в это выражение числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$\nu_0 = 5,58 \cdot 5,05 \cdot 10^{-27} \cdot 1 / (2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34}) \text{ Гц} = 4,27 \cdot 10^7 \text{ Гц}$$

или

$$\nu_0 = 42,7 \text{ МГц}$$

Задачи

Магнитный резонанс

1. Определить гиромагнитное отношение γ для свободного электрона.
2. Свободный электрон находится в постоянном магнитном поле ($B_0 = 1 \text{ Тл}$). Определить частоту ν_0 переменного магнитного поля, при которой происходит резонансное поглощение энергией электроном (g -фактор для свободного электрона равен 2).
3. Определить отношение $\omega_{\text{ЭПР}} / \omega_{\text{цикл}}$ резонансной частоты электронного парамагнитного резонанса к циклотронной частоте (g -фактор равен 2,00232).
4. Стандартные спектрометры для наблюдения электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) имеют на одном из диапазонов фиксированную частоту $\nu_0 = 9,9 \text{ ГГц}$. Определить магнитную индукцию поля B_0 , при которой происходит резонансное поглощение энергии радиочастотного поля свободным электроном (g -фактор равен 2).
5. Определить гиромагнитное отношение γ для свободного протона.
6. Свободный протон находится в постоянном магнитном поле ($B_0 = 1 \text{ Тл}$). Определить частоту ν_0 переменного магнитного поля, при котором происходит резонансное поглощение энергии протоном (g -фактор равен 5,58).
7. В опытах по изучению магнитным резонансным методом магнитных свойств атомов ^{25}Mg в основном состоянии обнаружено резонансное поглощение энергии при магнитной индукции B_0 поля, равной 0,54 Тл, и частотой ν_0 переменного магнитного поля, равной 1,4 МГц. Определить ядерный g -фактор.

8. Методом магнитного резонанса определяют магнитный момент нейрона. Резонансное поглощение наблюдается при магнитной индукции B_0 поля, равной 0,682Тл, и частоте ν_0 переменного поля, равной 1969МГц. Вычислить ядерный g – фактор и магнитный момент μ_0 нейрона. Известно, что направления спинового механического и магнитного моментов противоположны. Спин нейрона $I=1/2$.

9. Для молекулы HD, находящейся в основном состоянии, ядерный магнитный резонанс наблюдается: 1) для протона ($I=1/2$) в постоянном магнитном поле ($B_0=94$ мТл) при частоте ν_0 переменного магнитного поля, равной 4МГц; 2) для дейтонов ($I=1$) соответственно при $B_0=0,37$ Тл и частоте $\nu_0=2,42$ МГц. Определить по этим данным g – фактор и магнитный момент μ_p и μ_d протона и дейтона (в единицах μ_N).

10. При какой частоте ν_0 переменного поля будет наблюдаться ЯМР ядер ^{19}P ($I=1/2$; $\mu_1=2,63\mu_N$), если магнитная индукция B_0 постоянного поля равна 2,35Тл?

ОТВЕТЫ

1. $1,76 \cdot 10^{11} \text{ (Тл}\cdot\text{с)}^{-1}$.

2. $\nu_0 = g\mu_B B_0 / (2\pi\hbar) = 28 \text{ ГГц}$.

3. $\omega_{\text{ЭПР}} / \omega_{\text{цикл}} = g/2 = 1,00116$.

4. $B_0 = \frac{2\pi\hbar}{2\mu_B} \nu_0 = 0,353 \text{ Тл}$.

5. $2,68 \cdot 10^8 \text{ (Тл}\cdot\text{с)}^{-1}$.

6. $\nu_0 = \gamma B_0 / (2\pi) = 42,6 \text{ МГц}$.

7. $g = 2\pi\hbar\nu_0 / (\mu_N B_0) = 0,34$.

8. $-3,82; -1,91\mu_N$.

9. Для протона $g = 5,58$, $\mu_p = 2,79\mu_N$; для дейтона $g = 0,86$, $\mu_n = 0,86\mu_N$.

10. $\nu_0 = \frac{\mu_1}{2\pi\hbar} B_0 = 94 \text{ МГц}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2.

Магнитные свойства вещества

• Намагниченность \mathbf{J} — величина, равная отношению магнитного момента малого объема ΔV вещества к этому объему:

$$I = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N \mu_{Mi},$$

где μ_{Mi} — магнитный момент отдельной (i -й) молекулы; N — число молекул в объеме ΔV .

• Намагниченность \mathbf{J} в изотропном магнетике пропорциональна напряженности магнитного поля \mathbf{H} :

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H},$$

где χ — магнитная восприимчивость (безразмерна).

• Удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением

$$\chi_{уд} = \chi / \rho,$$

где ρ — плотность вещества.

• Молярная магнитная восприимчивость χ_m связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением

$$\chi_m = \frac{\mu}{\rho} \chi.$$

• Магнетон Бора μ_B — элементарный магнитный момент — определяется формулой

$$\mu_B = e\hbar / (2m_e),$$

где e — элементарный заряд; m_e — масса электрона.

• Магнитная индукция \mathbf{B} , напряженность \mathbf{H} и намагниченность \mathbf{J} в изотропном магнетике связаны соотношением

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{J}), \text{ где } \mu_0 \text{ — магнитная постоянная.}$$

• Намагниченность изотропного парамагнетика (по Ланжевону)

$$J = n\mu_M L(a),$$

где n — концентрация молекул; μ_M — магнитный момент отдельной молекулы; $L(a)$ — функция Ланжевона.

• Функция Ланжевона

$$L(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a}, \text{ где } a = \mu_M B / (kT).$$

Приближенное значение функции Ланжевона можно представить в виде знакочередующегося ряда

$$L(a) = \frac{1}{3}a - \frac{1}{45}a^3 + \frac{2}{945}a^5 - \dots$$

При $a \ll 1$ ($\mu_M B \ll kT$) $L(a) \approx \frac{1}{3}$ и намагниченность

$$J = \frac{n\mu_M}{3kT} B, \text{ ИЛИ } J = \mu_0 \frac{n\mu_M^2}{3kT}.$$

- Магнитная восприимчивость парамагнитных веществ при $\mu_M B \ll kT$

$$\chi = \mu_0 \frac{n\mu_M^2}{3kT}.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную восприимчивость χ_m висмута, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1,3 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Решение. Магнитная восприимчивость χ определяется соотношением

$$\chi = J/H,$$

где J — намагниченность, H — напряженность магнитного поля.

Намагниченность J , в свою очередь, определяется следующей формулой:

$$J = \mathbf{J} = \sum \mu_{Mi} / V$$

где $\sum \mu_{Mi}$ — суммарный магнитный момент всех молекул в объеме V (магнетик предполагается однородным).

Соответственно

$$\chi_m = J_m/H; J_m = \sum \mu_{Mi} / \nu,$$

где ν — количество вещества (число молей данного вещества), и

$$\chi_{уд} = J_{уд}/H; J_{уд} = \sum \mu_{Mi} / m,$$

где m — масса вещества.

1. Для определения удельной магнитной восприимчивости найдем отношение

$$\chi/\chi_{уд} = J/J_{уд} = m/V = \rho \text{ откуда}$$

$$\chi = \rho \chi_{уд},$$

где ρ — плотность.

Убедимся, в том, что правая часть равенства, так же как и χ , — величина безразмерная (неименованная):

$$[\rho][\chi_{уд}] = 1 \text{ кг/м}^3 \cdot 1 \text{ м}^3/\text{кг} = 1.$$

Произведем вычисления, выписав из табл. 9 плотность висмута ($\rho = 9,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$):

$$\chi = 9,8 \cdot 10^3 \cdot (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -1,3 \cdot 10^{-5}.$$

2. Для определения молярной магнитной восприимчивости найдем отношение

$$\chi_m/\chi_{уд} = J_m/J_{уд} = m/V = M.$$

где M — молярная масса.

Тогда

$$\chi_m = M \chi_{уд}.$$

Убедимся в том, что правая часть этого равенства дает единицу молярной магнитной восприимчивости ($\text{м}^3/\text{моль}$):

$$[M][\chi_{уд}] = 1 \text{ кг/моль} \cdot 1 \text{ м}^3/\text{кг} =$$

$$= 1 \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Найдем сначала относительную молекулярную массу висмута: $M_r=209$. Так как относительная молекулярная масса численно равна молярной массе M , выраженной в г/моль, то $M=209 \text{ г/моль}=0,209 \text{ кг/моль}$, что соответствует выражению молярной массы в СИ.

Произведем вычисления:

$$\chi_m=0,209 \cdot (-1,3 \cdot 10^{-9}) \approx -2,7 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}.$$

Пример 2. Определим частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в однородном магнитном поле ($B=1 \text{ Тл}$).

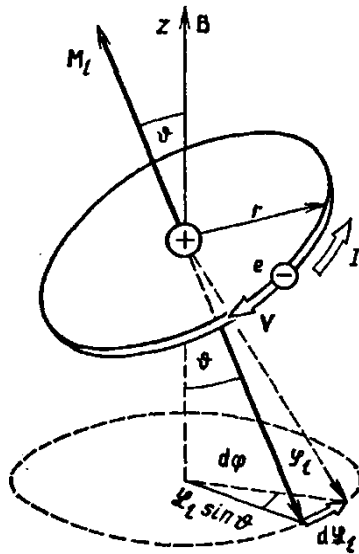


Рис. 27.1

Решение. Пусть электрон движется со скоростью v по круговой орбите радиусом r в направлении, указанном стрелкой на рис. 27.1. Момент импульса \vec{L}_l орбитального движения электрона в соответствии с правилом винта направлен перпендикулярно плоскости орбиты так, как это отмечено на рисунке.

Орбитальный магнитный момент \vec{M}_l будет противоположен вектору \vec{L}_l . Под действием внешнего магнитного поля (\mathbf{B}), возбужденного вдоль оси Oz , на электронную орбиту будет действовать момент силы $\mathbf{M}=[\vec{M}_l, \mathbf{B}]$, направление которого перпендикулярно плоскости, содержащей векторы \vec{M}_l и \mathbf{B} . Под действием этого момента вектор \vec{L}_l получит приращение $d\vec{L}_l=\mathbf{M}dt$ в направлении, совпадающем с \mathbf{M} , в результате чего плоскость, содержащая векторы \vec{M}_l и \mathbf{B} , повернется на угол $d\varphi$. Из рис. 27.1 видно, что

$$d\varphi = \frac{dL_l}{L_l \sin \vartheta}.$$

Тогда угловая скорость прецессии (ларморова частота)

$$\omega_l = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL_l}{L_l \sin \vartheta dt}$$

Так как $dL_l=Mdt$, а $M=M_l B \sin \vartheta$, то
$$\omega_l = \frac{M_l B \sin \vartheta dt}{L_l \sin \vartheta dt} = \frac{M_l}{L_l} B.$$

Воспользовавшись гиромагнитным отношением $M_l/L_l=1/2 |e| \hbar / m$, получим

$$\omega_l = \frac{1}{2} \frac{|e| \hbar}{m} B.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу угловой скорости (с^{-1}):

$$\frac{[e][\hbar]}{[m]} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Дж}}{1 \text{ кг}} = \frac{1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ Н}}{1 \text{ кг} \cdot 1 \text{ А} \cdot \text{м}} = \frac{1 \text{ Н} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг} \cdot \text{м}} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}}{1 \text{ кг} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}} = 1 \text{ с}^{-1}$$

Произведем вычисления:

$$\omega_l = \frac{1}{2} \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \cdot 1 \text{ с}^{-1} = 8,8 \cdot 10^{-1} \text{ с}^{-1}$$

Пример 3. Молекула NO имеет магнитный момент $M_l=1,8 \mu_B$. Определить удельную парамагнитную восприимчивость $\chi_{уд}$ газообразного оксида азота при нормальных условиях.

Решение. По теории Ланжевена, магнитная восприимчивость парамагнитного вещества определяется выражением

$$\chi = \mu_0 \frac{nM_J}{3kT}, \quad (1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная ($\mu_0=4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м); n — концентрация молекул (число молекул в единице объема); M_J — магнитный момент атома; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

Удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ связана с магнитной восприимчивостью χ соотношением

$$\chi_{уд} = \chi / \rho.$$

Заменив в этом выражении χ согласно (1), получим

$$\chi_{уд} = \mu_0 \frac{M_J^2 n}{3kT \rho}.$$

Заметим, что концентрацию молекул и плотность газа можно выразить следующим образом:

$$n = N_A / V_m \text{ и } \rho = M / V_m$$

где N_A — постоянная Авогадро; M — молярная масса; V_m — молярный объем.

Тогда $n/\rho = N_A/M$ и

$$\chi_{уд} = \mu_0 \frac{N_A M_J^2}{3kTM}.$$

Убедимся в том, что правая часть равенства дает единицу удельной магнитной восприимчивости ($\text{м}^3/\text{кг}$):

$$\frac{[\mu_0][N_A][M_J^2]}{[k][T][M]} = \frac{1 \text{ Гн} / \text{м} \cdot 1 \text{ моль}^{-1} \cdot 1 \text{ А}^2 \cdot \text{м}^4}{1 \text{ Дж} / \text{К} \cdot 1 \text{ К} \cdot 1 \text{ кг} / \text{моль}} = \frac{1 \text{ Гн} \cdot 1 \text{ А}^2 \cdot \text{м}^3}{1 \text{ Дж} \cdot \text{кг}} = 1 \text{ м}^3 / \text{кг}.$$

Произведем вычисления (учтем, что $1 \mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ и $M = 30 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$):

$$\chi_{уд} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot (1,8 \cdot 9,27 \cdot 10^{-24})^2 \cdot \text{м}^3}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273 \cdot 30 \cdot 10^{-3} \text{ кг}} = 6,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 / \text{кг}.$$

Задачи

Намагниченность. Магнитная восприимчивость

1. Определить намагниченность J тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора μ_B и концентрация атомов $6 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$.

2. Магнитная восприимчивость χ марганца равна $1,21 \cdot 10^{-4}$. Вычислить намагниченность J , удельную намагниченность $J_{уд}$ и молярную намагниченность J_m марганца в магнитном поле напряженностью $H=100 \text{ кА/м}$. Плотность марганца считать известной.

3. Найти магнитную восприимчивость χ AgBr, если его молярная магнитная восприимчивость $\chi_m = 7,5 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{моль}$.

4. Определить магнитную восприимчивость χ и молярную магнитную восприимчивость χ_m платины, если удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = 1,30 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$.

5. Магнитная восприимчивость χ алюминия равна $2,1 \cdot 10^{-5}$. Определить его удельную магнитную $\chi_{уд}$ и молярную χ_m восприимчивости.

6. Висмутовый шарик радиусом $R=1$ см помещен в однородное магнитное поле ($B_0=0,5$ Тл). Определить магнитный момент p_m приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость χ висмута равна $-1,5 \cdot 10^{-4}$.

7. Напряженность H магнитного поля в меди равна 1 МА/м. Определить намагниченность J меди и магнитную индукцию B , если известно, что удельная магнитная восприимчивость $\chi_{уд} = -1,1 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Диа- и парамагнетизм

8. Определить частоту ω_L ларморовой прецессии электронной орбиты в атоме, находящемся в магнитном поле Земли ($B=50$ мкТл).

9. Атом водорода находится в магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Вычислить магнитный момент μ_M , обусловленный прецессией электронной орбиты. Принять, что среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона от ядра равно $2/3 r_1^2$ (r_1 — радиус первой боровской орбиты).

10. Молярная магнитная восприимчивость χ_m оксида хрома CrO_3 равна $5,8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3/\text{моль}$. Определить магнитный момент μ_M молекулы Cr_2O_3 (в магнетонах Бора), если температура $T=300$ К.

11. Удельная парамагнитная восприимчивость $\chi_{уд}$ трехоксида ванадия (V_2O_3) при $t=17$ °С равна $1,89 \cdot 10^{-1} \text{ м}^3/\text{кг}$. Определить магнитный момент μ_M (в магнетонах Бора), приходящийся на молекулу V_2O_3 , если плотность ρ трехоксида ванадия равна $4,87 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

12. Молекула кислорода имеет магнитный момент $\mu_M=2,8 \mu_B$ (где μ_B — магнетон Бора). Определить намагниченность J газообразного кислорода при нормальных условиях в слабом магнитном поле ($B_0=10$ мТл) и в очень сильном поле.

13. Определить, при каком наибольшем значении магнитной индукции B уже следует пользоваться не приближенным выражением функции Ланжевена $L(a) \approx a/3$, а точным, чтобы погрешность вычислений не превышала 1 %. Для расчетов принять магнитный момент молекул равным магнетону Бора. Температура $T=300$ К.

14. Определить наибольшее значение величины a , при котором погрешность, вызванная заменой точного выражения функции Ланжевена приближенным $L(a) \approx a/3$, не превышает 1 %.

15. Определить температуру T , при которой вероятность того, что данная молекула имеет отрицательную проекцию магнитного момента на направление внешнего магнитного поля, будет равна 10^{-3} . Магнитный момент молекулы считать равным одному магнетону Бора, а магнитную индукцию B поля — равной 8 Тл.

16. Определить, во сколько раз число молекул, имеющих положительные проекции магнитного момента на направление вектора магнитной индукции внешнего поля ($B=1$ Тл), больше числа молекул, имеющих отрицательную проекцию, в двух случаях: 1) $T_1=300$ К; 2) $T_2=1$ К. Магнитный момент молекулы принять равным магнетону Бора.

17. При температуре $T_1=300$ К и магнитной индукции $B_1=0,5$, Тл была достигнута определенная намагниченность J парамагнетика. Определить магнитную индукцию B_2 , при которой сохранится та же намагниченность, если температуру повысить до $T_2=450$ К.

Ферромагнетизм

18. Кусок стали внесли в магнитное поле напряженностью $H=1600$ А/м. Определить намагниченность J стали.

Указание. Необходимо воспользоваться графиком на рис. 24.1 (с. 288).

19. Прямоугольный ферромагнитный брусок объемом $V=10$ см³ приобрел в магнитном поле напряженностью $H=800$ А/м магнитный момент $p_m=0,8$ А·м². Определить магнитную проницаемость μ ферромагнетика.

20. Вычислить среднее число $\langle n \rangle$ магнетонов Бора, приходящихся на один атом железа, если при насыщении намагниченность железа равна 1,84 МА/м.

21. На один атом железа в незаполненной 3 d -оболочке приходится четыре неспаренных электрона. Определить теоретическое значение намагниченности $J_{нас}$ железа при насыщении.

ОТВЕТЫ

1. 556 кА/м.
2. 12,1 А/м; 1,66 мА·м²/кг; 91 мкА·м³/моль.
3. $-7,3 \cdot 10^{-5}$.
4. 10^{-5} ; 10^{-10} м³/моль.
5. $7,8 \cdot 10^{-9}$ м³/кг. $2,1 \cdot 10^{-10}$ м³/моль.
6. $\frac{4}{3}\pi\chi B_0 R^3 / \mu_0 = 250$ мкА·м².
7. 9,8 А/м; 1,26 Тл.
8. $4,4 \cdot 10^6$ с⁻¹.
9. $1,31 \cdot 10^{-29}$ А·м².
10. $3,34\mu_B$.
11. $2,24\mu_B$.
12. 15,9 мА/м; 695 А/м.
13. $B \leq 54$ Тл.
14. $a \leq 0,387$.
15. 0,78 К.
16. 1) В 1,0022 раза; 2) В 1,91 раза.
17. 0,75 Тл.

18. 991 $\kappa\text{A}/\text{m}$.

19. 101.

20. $2,36\mu_B$.

21. 3,13 MA/m .

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

Свойства диэлектриков

Основные формулы

• Диполь есть система двух точечных электрических зарядов равных по размеру и противоположных по знаку, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния r от центра диполя до точек наблюдения.

Вектор \mathbf{l} проведенный от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду, называется плечом диполя.

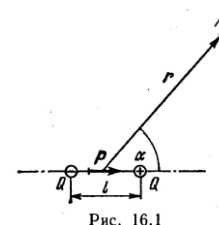
Произведение заряда $|Q|$ диполя на его плечо \mathbf{l} называется электрическим моментом диполя:

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l}.$$

- Напряженность поля диполя

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}$$

где p - электрический момент диполя; r - модуль радиуса-вектора, проведенного от центра диполя к точке, напряженность поля в которой нас интересует; α - угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и плечом \mathbf{l} диполя (рис. 16.1).



Напряженность поля диполя в точке, лежащей на оси диполя ($\alpha=0$),

$$E = \frac{p}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3}$$

и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восставленном из его

середины ($\alpha = \frac{\pi}{2}$),

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}.$$

Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos \alpha..$$

Потенциал поля диполя в точке, лежащей на оси диполя ($\alpha=0$),

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$$

и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восставленном из его середины ($\alpha = \pi/2$), $\varphi = 0$.

- Механический момент, действующий на диполь с электрическим моментом \mathbf{p} , помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью

- $\mathbf{E}, \mathbf{M}=[\mathbf{pE}]$, или $M=pE \sin \alpha$,

где α - угол между направлениями векторов \mathbf{p} и \mathbf{E} .

В неоднородном электрическом поле кроме механического момента (пары сил) на диполь действует еще некоторая сила. В случае поля, обладающего симметрией относительно оси x , сила выражается соотношением

$$F_x = p \frac{\partial E}{\partial x} \cos \alpha,$$

где $\frac{\partial E}{\partial x}$ - частная производная напряженности поля, характеризующая

степень неоднородности поля в направлении оси x .

При $\alpha > \pi/2$ сила F_x положительна. Это значит, что под действием ее диполь втягивается в область сильного поля.

- Поляризованность (при однородной поляризации)

$$P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N p_i,$$

где p_i - электрический момент отдельной (i -й) молекулы (или атома); N - число молекул, содержащихся в объеме ΔV .

- Связь поляризованности с напряженностью E среднего макроскопического поля в диэлектрике

$$P = \alpha \varepsilon_0 E$$

где α - диэлектрическая восприимчивость; ε_0 - электрическая постоянная.

- Связь диэлектрической проницаемости ε с диэлектрической восприимчивостью

$$\varepsilon = 1 + \alpha$$

- Напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике связана с напряженностью E_0 внешнего поля соотношениями

$$E = E_0 / \varepsilon \text{ и } E = E_0 - P / \varepsilon_0.$$

- Напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии выражается формулами

$$E_{\text{лок}} = E + \frac{1}{3} \frac{P}{\varepsilon_0} \text{ и } E_{\text{лок}} = \frac{\varepsilon + 2}{3\varepsilon} E_0.$$

- Индуцированный электрический момент молекулы

$$p = \alpha \varepsilon_0 E_{\text{лок}},$$

где α - поляризуемость молекулы ($\alpha_e + \alpha_a$, где α_e - электронная поляризуемость; α_a - атомная поляризуемость).

- Связь диэлектрической восприимчивости с поляризуемостью молекулы

$$\alpha / (\alpha + 3) = \alpha n / 3$$

где n - концентрация молекул.

- Уравнение Клаузиуса - Мосотти

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n, \text{ или } \frac{M}{\rho} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha N_A,$$

где M - молярная масса вещества; ρ - плотность вещества.

- Формула Лоренц-Лорентца

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e n, \text{ или } \frac{M}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e N_A,$$

где n - показатель преломления диэлектрика; α_e - электронная поляризуемость атома или молекулы. Ориентационная поляризуемость молекулы

$$\alpha_{op} = p^2 / (3\varepsilon_0 kT),$$

где p - электрический момент молекулы; k - постоянная Больцмана; T - термодинамическая температура.

- Формула Дебая - Ланжевена

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT} \right) n \text{ или } \frac{M}{\rho} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \left(\alpha + \frac{p^2}{3\varepsilon_0 kT} \right) N_A.$$

Примеры решения задач

Пример 1. Диполь с электрическим моментом $p=2$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=30$ кВ/м. Вектор \mathbf{p} составляет угол $\alpha=60^\circ$ с направлением силовых линий поля.

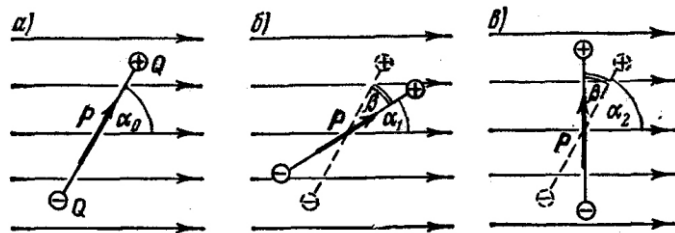


Рис. 16.2

Определить произведенную внешними силами работу A поворота диполя на угол $\beta=30^\circ$.

Решение. Из исходного положения (рис. 16.2, а) диполь можно повернуть на угол $\beta=30^\circ=\pi/6$ двумя способами: или по часовой стрелке до угла $\alpha_1=\alpha_0-\beta=\pi/3-\pi/6=\pi/6$ (рис. 16.2, б), или против часовой стрелки до угла $\alpha_2=\alpha_0+\beta=\pi/3+\pi/6=\pi/2$ (рис. 16.2, в).

В первом случае диполь будет поворачиваться под действием сил поля. Следовательно, работа внешних сил при этом отрицательна. Во втором случае поворот может быть произведен только под действием внешних сил, и, следовательно, работа внешних сил при этом положительна.

Работу, совершаемую при повороте диполя, можно вычислять двумя способами: 1) непосредственно интегрированием выражения элементарной работы; 2) с помощью соотношения между работой и изменением потенциальной энергии диполя в электрическом поле.

1-й способ. Элементарная работа при повороте диполя на угол α $dA = M d\alpha = pE \sin \alpha d\alpha$, а полная работа при повороте на угол от α_0 до α

$$A = \int_{\alpha_0}^{\alpha} pE \sin \alpha d\alpha = pE \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin \alpha d\alpha.$$

Произведя интегрирование, получим

$$A = -pE(\cos \alpha - \cos \alpha_0) = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (1)$$

Работа внешних сил при повороте диполя по часовой стрелке

$$A_1 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_1) = -21.9 \text{ мкДж},$$

против часовой стрелки

$$A_2 = pE(\cos \alpha_0 - \cos \alpha_2) = 30 \text{ мкДж}.$$

2-й способ. Работа A внешних сил связана с изменением потенциальной энергии $\Delta\Pi$ соотношением $A = \Delta\Pi = \Pi_2 - \Pi_1$, где Π_1 и Π_2 - потенциальные энергии системы соответственно в начальном и конечном состояниях. Так как потенциальная энергия диполя в электрическом поле выражается формулой $\Pi = -pE \cos \alpha$, то

$$A = pE (\cos \alpha_0 - \cos \alpha), \quad (2)$$

что совпадает с формулой (1), полученной первым способом.

Пример 2. Три точечных заряда Q_1 , Q_2 и Q_3 образуют электрически нейтральную систему, причем $Q_1 = Q_2 = 10$ нКл. Заряды расположены в вершинах равностороннего треугольника. Определить максимальные значения напряженности E_{\max} и потенциала ϕ_{\max} поля, создаваемого этой системой зарядов, на расстоянии $r = 1$ м от центра треугольника, длина a стороны которого равна 10 см.

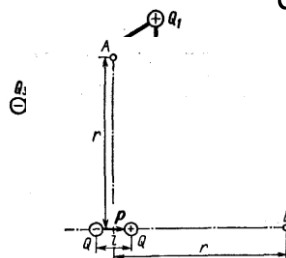


Рис. 16.4

Решение. Нейтральную систему, состоящую из трех точечных зарядов, можно представить в виде диполя. Действительно, "центр тяжести" зарядов Q_1 и Q_2 лежит на середине отрезка прямой, соединяющей эти заряды (рис. 16.3). В этой точке можно считать сосредоточенным заряд $Q = Q_1 + Q_2 = 2Q_1$. А так как система зарядов нейтральная ($Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$), то $Q_3 = -(Q_1 + Q_2) = -Q$.

Так как расстояние l между зарядами Q_3 и $-Q_1$, равными по значению, много меньше r ($l \ll r$) (рис. 16.4), то систему этих двух зарядов можно считать диполем с электрическим моментом

$$p = |Q|l,$$

где l - плечо диполя, равное по модулю $a\sqrt{3}/2$ (см. рис. 16.3). Так как $|Q| = 2Q_1$, то электрический момент такого точечного диполя $p = Q_1 a \sqrt{3}$.

Тот же результат можно получить другим способом. Систему из трех зарядов представим как два диполя с электрическими моментами p_1 и p_2 (рис. 16.5), равными по модулю: $p_1 = |p_1| = Q_1 a$; $p_2 = |p_2| = Q_2 a$. Электрический момент p системы зарядов найдем как векторную сумму p_1 и p_2 , т.е. $p = p_1 + p_2$. Как это следует из рис. 16.5, имеем $p = 2p_1 \cos(\beta/2)$. Так как $p_1 = Q_1 a$ и $\beta = \pi/3$, то $p = 2Q_1 a \sqrt{3}/2 = Q_1 a \sqrt{3}$, что совпадает с найденным ранее значением.

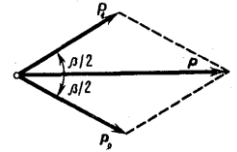


Рис. 16.5

Напряженность E и потенциал φ поля диполя выражаются формулами

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}; \quad \varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha,$$

где α - угол между векторами p и r (см. рис. 16.1).

Напряженность и потенциал будут иметь максимальные значения при $\alpha = 0$; следовательно,

$$E_{\max} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \quad \varphi_{\max} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Так как $p = Q_1 a \sqrt{3}$, то

$$E_{\max} = \frac{2Q_1 a}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3}; \quad \varphi_{\max} = \frac{Q_1 a}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{3}.$$

Вычисления дают следующие значения:

$$E_{\max} = 3,12 \text{ В/м}; \quad \varphi_{\max} = 1,56 \text{ В}.$$

Пример 3. В атоме йода, находящемся на расстоянии $r = 1$ нм от альфа-частицы, индуцирован электрический момент $p = 1,5 \cdot 10^{-32}$ Кл·м. Определить поляризуемость α атома йода.

Решение. По определению поляризуемости, она может быть выражена по формуле $\alpha = p / \epsilon_0 E_{\text{лок}}$, где p - индуцированный электрический момент атома; $E_{\text{лок}}$ напряженность локального поля, в котором этот атом находится.

В данном случае таким полем является поле, созданное α -частицей. Напряженность этого поля определяется выражением

$$E_{\text{лок}} = E = \frac{2|e|}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Подставив выражение $E_{\text{лок}}$ из равенства (2) в формулу (1), найдем

$$\alpha = 2\pi r^2 p / |e|.$$

Произведя вычисления по этой формуле, получим $\alpha = 5,9 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$.

Пример 4. Криптон находится под давлением $p = 10 \text{ МПа}$ при температуре $T = 200 \text{ К}$, Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ε криптона; 2) его поляризованность P , если напряженность E_0 внешнего электрического поля равна 1 МВ/м . Поляризуемость α криптона равна $4,5 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$,

Решение. 1. Для определения диэлектрической проницаемости криптона воспользуемся уравнением Клаузиуса - Мосотти, записанным в виде

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n$$

где n - концентрация атомов криптона. Выразим из этой формулы диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon = \frac{1 + 2/3 \alpha n}{1 - 1/3 \alpha n}$$

Так как концентрация молекул (атомов) связана с давлением и температурой соотношением $n = p / (\kappa T)$, то

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{2 \alpha p}{3 \kappa T}}{1 - \frac{1 \alpha p}{3 \kappa T}}$$

Выразив все величины, входящие в эту формулу, в единицах СИ ($\alpha = 4,5 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$, $p = 10 \text{ МПа} = 10^7 \text{ Па}$, $\kappa = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$, $T = 200 \text{ К}$) и произведя вычисления, получим $\varepsilon = 1,17$

2. По определению, поляризованность

$$\vec{P} = \frac{1}{\Delta V} \sum \vec{p}_i,$$

где \vec{p}_i - электрический дипольный момент, индуцированный в i -м атоме; N - число атомов в объеме ΔV . В однородном электрическом поле все \vec{p}_i совпадают по модулю и направлению, поэтому геометрическую сумму можно заменить на арифметическую. Обозначив $|\vec{p}_i| = p$, получим

$$P = \frac{Np}{\Delta V}$$

Отношение числа N атомов к объему ΔV есть концентрация n атомов. Тогда

$$P = np.$$

Так как электрический дипольный момент атома пропорционален напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля ($p = \alpha \varepsilon_0 E_{\text{лок}}$), то поляризованность

$$P = \alpha \varepsilon_0 n E_{\text{лок}}$$

Выразив $E_{\text{лок}}$ через напряженность E_0 внешнего поля ($E_{\text{лок}}=3\varepsilon E_0/(\varepsilon+2)$) и n через давление p и температуру T ($n=p/\kappa T$), получим

$$P = \frac{3\alpha\varepsilon_0\varepsilon p}{(\varepsilon + 2)\kappa T} E_0.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления (при этом воспользуемся значением $\varepsilon=1,17$ найденным в п. 1 данного примера):

$$P=1,60 \cdot 10^{-6} \text{ Кл/м}^2 = 1,60 \text{ мкКл/м}^2.$$

Пример 5. Жидкий бензол имеет плотность $\rho=899 \text{ кг/м}^3$ и показатель преломления $n=1,50$. Определить: 1) электронную поляризуемость α_e молекул бензола; 2) диэлектрическую проницаемость ε паров бензола при нормальных условиях.

Решение. 1. Для определения электронной поляризуемости воспользуемся формулой Лоренц -Лорентца:

$$\frac{M}{\rho} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{1}{3} \alpha_e N_A,$$

откуда

$$\alpha_e = \frac{3M(n^2 - 1)}{\rho N_A (n^2 + 2)}. \quad (1)$$

В полученное выражение входит молярная масса M бензола. Найдем ее. Так как химическая формула бензола C_6H_6 , то относительная молекулярная масса $M_r=6 \cdot 12 + 6 \cdot 1=78$. Следовательно, молярная масса

$$M=78 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}.$$

Подставим в формулу (1) числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$\alpha_e = \frac{3 * 78 * 10^{-3} [(1.50)^2 - 1]}{899 * 6.02 * 10^{23} [(1.50)^2 + 2]} \text{ м}^3 = 1,27 * 10^{-28} \text{ м}^3.$$

2. Диэлектрическую проницаемость паров бензола найдем, воспользовавшись уравнением Клаузиуса - Мосотти:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{3} \alpha n, \quad (2)$$

где n - концентрация молекул бензола.

Заметим, что молекулы бензола неполярны и поэтому обладают только двумя типами поляризации: электронной и атомной, причем атомная поляризация мала и ею можно пренебречь, считая $\alpha \approx \alpha_e$. Кроме того, при нормальных условиях ε мало отличается от единицы и приближенно можно считать $\varepsilon+2 \approx 3$. Учитывая эти соображения, формулу (2) можно упростить: $\varepsilon - 1 \approx \alpha_e n$, откуда $\varepsilon = 1 + \alpha_e n$.

При нормальных условиях концентрация n молекул известна и равна числу Лошмидта ($n_L=2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$). Выразим концентрацию молекул бензола в СИ ($n=2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$) и произведем вычисления:

$$\varepsilon = 1 + 1,27 \cdot 10^{-28} \cdot 2,69 \cdot 10^{25} = 1,00342.$$

Задачи

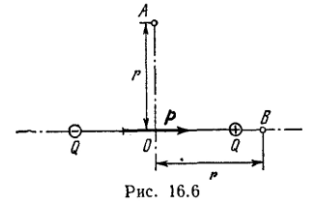
Напряженность и потенциал поля диполя.

Электрический момент диполя

1. Вычислить электрический момент p диполя, если его заряд $Q = 10$ нКл, плечо $l = 0,5$ см.

2. Расстояние l между зарядами $Q = \pm 3,2$ нКл диполя равно 12 см. Найти напряженность E и потенциал ϕ поля созданного диполем в точке, удаленной на $r = 8$ см как от первого, так и от второго заряда.

3. Диполь с электрическим моментом $p = 0,12$ нКл·м образован двумя точечными зарядами $Q = \pm 1$ нКл. Найти напряженность E и потенциал ϕ электрического поля в точках A и B (рис. 16.6), находящихся на расстоянии $r = 8$ см от центра диполя.



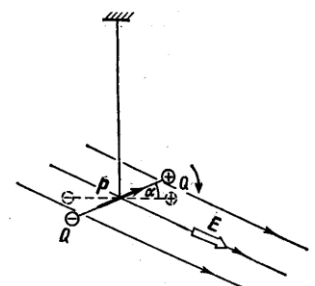
4. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, созданного диполем в точках A и B (рис. 16.6). Его электрический момент $p = 1$ пКл·м, а расстояние, от точек A и B до центра диполя равно 10 см.

5. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 4$ пКл·м на расстоянии $r = 10$ см от центра диполя, в направлении, составляющем угол $\alpha = 60^\circ$ с вектором электрического момента.

6. Диполь с электрическим моментом $p = 1$ пКл·м равномерно вращается с частотой $n = 10^3$ с⁻¹ относительно оси, проходящей через центр диполя и перпендикулярной его плечу. Вывести закон изменения потенциала как функцию времени в некоторой точке, отстоящей от центра диполя на $r = 1$ см и лежащей в плоскости вращения диполя. Принять, что в начальный момент времени потенциал ϕ_0 интересующей нас точки равен нулю. Построить график зависимости $\phi(t)$.

7. Диполь с электрическим моментом $p = 1$ пКл·м равномерно с вращается с угловой скоростью $\omega = 10^4$ рад/с относительно оси, перпендикулярной плечу диполя и проходящей через его центр. Определить среднюю потенциальную энергию $\langle \Pi \rangle$ заряда $Q = 1$ нКл, находящегося на расстоянии $r = 2$ см от центра диполя и лежащего в плоскости вращения, за время, равное: 1) полупериоду (от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/2$); 2) в течение времени $t \gg T$. В начальный момент считать $\Pi = 0$.

8. Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 1$ пКл·м и $p_2 = 4$ пКл·м находятся на расстоянии $r = 2$ см друг от друга. Найти силу их взаимодействия, если оси диполей лежат на одной прямой.



9. Два диполя с электрическими моментами $p_1 = 20$ пКл·м и $p_2 = 50$ пКл·м находятся на расстоянии $r = 10$ см друг от друга, так что их оси лежат на одной прямой. Вычислить взаимную потенциальную энергию диполей, соответствующую их устойчивому равновесию.

Диполь в электрическом поле

10. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м прикреплен к упругой нити (рис. 16.7). Когда в пространстве, где находится диполь, было создано электрическое поле напряженностью $E=3$ кВ/м перпендикулярно плечу диполя и нити, диполь повернулся на угол $\alpha=30^\circ$. Определить постоянную кручения C нити.

11. В условиях предыдущей задачи диполь под действием поля поворачивается на малый угол. Определить постоянную кручения C нити.

12. Диполь с электрическим моментом $p=20$ нКл·м находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=50$ кВ/м. Вектор электрического момента составляет угол $\alpha=60^\circ$ с линиями поля. Какова потенциальная энергия Π диполя?

Указание. За нулевую потенциальную энергию принять энергию, соответствующую такому расположению диполя, когда вектор электрического момента диполя перпендикулярен линиям поля.

13. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м свободно устанавливается в однородном электрическом поле напряженностью $E=150$ кВ/м. Вычислить работу A , необходимую для того, чтобы повернуть диполь на угол $\alpha=180^\circ$.

14. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м Свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E=10$ кВ/м. Определить изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ диполя при повороте его на угол $\alpha=60^\circ$.

15. Перпендикулярно плечу диполя с электрическим моментом $p=12$ пКл·м возбуждено однородное электрическое поле напряженностью $E=300$ кВ/м. Под действием сил поля диполь начинает поворачиваться относительно оси, проходящей через его центр. Найти угловую скорость ω диполя в момент прохождения им положения равновесия. Момент инерции J диполя относительно оси, перпендикулярной плечу и проходящей через его центр, равен $2 \cdot 10^{-11}$ кг·м².

16. Диполь с электрическим моментом $p=100$ пКл·м свободно установился в однородном электрическом поле напряженностью $E=9$ МВ/м. Диполь повернули на малый угол и предоставили самому себе. Определить частоту ν собственных колебаний диполя в электрическом поле. Момент инерции J диполя относительно оси, проходящей через центр диполя, равен $4 \cdot 10^{-12}$ кг·м².

17. Диполь с электрическим моментом $p=200$ пКл·м находится в неоднородном электрическом поле. Степень неоднородности поля характеризуется величиной $\frac{dE}{dx}=1$ МВ/м², взятой в направлении оси диполя. Вычислить силу F , действующую на диполь в этом направлении.

18. Диполь с электрическим моментом $p=5$ пКл·м свободно установился в поле точечного заряда $Q=100$ нКл на расстоянии $r=10$ см от него. Определить для этой точки величину $|dE/dr|$, характеризующую степень

неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу F , действующую на диполь.

19. Диполь с электрическим моментом $p=4$ Км·м свободно установился в поле, созданном бесконечной прямой нитью, заряженной с линейной плотностью $\tau =500$ нКл/м на расстоянии $r =10$ см от нее. Определить в этой точке величину $|dE/dr|$, характеризующую степень неоднородности поля в направлении силовой линии, и силу F , действующую на диполь.

Поляризация диэлектриков

20. Указать, какими типами поляризации (электронной - e , атомной - a , ориентационной - o) обладают следующие атомы и молекулы: 1) H; 2) He; 3) O₂; 4) HCl; 5) H₂O; 6) CO; 7) CO₂; 8) CH₃; 9) CCl₄.

21. Молекула HF обладает электрическим моментом $p= 6,4 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. Межъядерное расстояние $d=92$ пм. Найти заряд Q такого диполя и объяснить, почему найденное значение Q существенно отличается от значения элементарного заряда $|e|$.

22. Расстояние d между пластинами плоского конденсатора равно 2 мм, разность потенциалов $U=1,8$ кВ. Диэлектрик - стекло. Определить диэлектрическую восприимчивость χ стекла и поверхностную плотность σ' поляризационных (связанных) зарядов на поверхности стекла.

23. Металлический шар радиусом $R=5$ см окружен равномерно слоем фарфора толщиной $d=2$ см. Определить поверхностные плотности σ'_1 и σ'_2 связанных зарядов соответственно на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика. Заряд Q шара равен 10 нКл.

24. Эбонитовая плоскопараллельная пластина помещена в однородное электрическое поле напряженностью $E_0=2$ МВ/м. Грани пластины перпендикулярны линиям напряженности. Определить поверхностную плотность σ' связанных зарядов на гранях пластины.

Электрическое поле в диэлектрике

25. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, молекулы которого можно рассматривать как жесткие диполи с электрическим моментом $\mu_M=2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

Концентрация n диполей равна 10^{26} м⁻³. Определить напряженность E среднего макроскопического поля в таком диэлектрике, если при отсутствии диэлектрика напряженность E_0 поля между пластинами конденсатора была равна 100 МВ/м. Дезориентирующим действием теплового движения молекул пренебречь.

26. В электрическое поле напряженностью $E_0= 1$ МВ/м внесли пластину диэлектрика ($\epsilon =3$). Определить напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля, действующего на отдельную молекулу в диэлектрике, полагая, что внутреннее поле является полем Лоренца.

27. Во сколько раз напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля в кристалле кубической сингонии больше напряженности E среднего макроскопического поля? Диэлектрическая проницаемость ϵ кристалла равна 2,5.

28. При какой максимальной диэлектрической проницаемости ϵ погрешность при замене напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля напряженностью E_0 внешнего поля не превысит 1 %?

29. Определить относительную погрешность, которая будет допущена, если вместо напряженности $E_{\text{лок}}$ локального поля брать напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике. Расчеты выполнить для двух случаев: 1) $\epsilon = 1,003$; 2) $\epsilon = 2$.

Поляризованность диэлектрика

30. При какой поляризованности P диэлектрика ($\epsilon=5$) напряженность $E_{\text{лок}}$ локального поля равна 10 МВ/м?

31. Определить, при какой напряженности E среднего макроскопического поля в диэлектрике ($\epsilon=3$) поляризованность P достигнет значения, равного 200 мкКл/м².

32. Определить поляризованность p стекла, помещенного во внешнее электрическое поле напряженностью $E_0=5$ МВ/м.

33. Диэлектрик поместили в электрическое поле напряженностью $E_0=20$ кВ/м. Чему равна поляризованность p диэлектрика, если напряженность E среднего макроскопического поля в диэлектрике оказалась равной 4 кВ/м?

34. Во внешнем электрическом поле напряженностью $E_0=40$ МВ/м поляризованность P жидкого азота оказалась равной 109 мкКл/м². Определить: 1) диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого азота; 2) индуцированный электрический момент p одной молекулы. плотность ρ жидкого азота принять равной 804 кг/м³.

Электронная и атомная поляризации

35. Связь поляризуемости α с диэлектрической восприимчивостью χ для неполярных жидкостей и кристаллов кубической сингонии задается выражением $\chi/(\chi+3)=\alpha n/3$, где n - концентрация молекул. При каком наибольшем значении χ погрешность в вычислении α не будет превышать 1 % , если воспользоваться приближенной формулой $\chi \approx \alpha n$?

36. При каком наибольшем значении произведения αn формула Клаузиуса - Мосотти $(\epsilon-1)/(\epsilon+2)=\alpha n/3$ Может быть заменена более простой $\epsilon = 1 + \alpha n$ при условии, что погрешность в вычислении ϵ не превысит 1% ?

37. Определить поляризуемость α молекул азота, если диэлектрическая проницаемость ϵ жидкого азота равна 1,445 и его плотность $\rho=804$ кг/м³.

38. Поляризуемость α молекулы водорода можно принять равной $1,0 \cdot 10^{-29}$ м³. Определить диэлектрическую восприимчивость χ водорода для двух состояний: 1) газообразного при нормальных условиях; 2) жидкого, плотность ρ которого равна 70,8 кг/м³.

39. Диэлектрическая восприимчивость χ газообразного аргона при нормальных условиях равна $5,54 \cdot 10^{-4}$. Определить диэлектрические проницаемости ϵ_1 и ϵ_2 жидкого ($\rho_1 = 1,40$ г/см³) и твердого ($\rho_2 = 1,65$ г/см³) аргона.

40. Система состоит из двух одинаковых по значению и противоположных по знаку зарядов $|Q|=0.1$ нКл, связанных квазиупругими силами. Коэффициент k упругости системы зарядов равен 1 мН/м. Определить поляризуемость α системы.

41. Вычислить поляризуемость α атома водорода и диэлектрическую проницаемость ϵ атомарного водорода при нормальных условиях. Радиус r электронной орбиты принять равным 53 пм.

42. Атом водорода находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=100$ кВ/м. Определить электрический момент P и плечо l индуцированного диполя. Радиус r электронной орбиты равен 53 пм.

43. Диэлектрическая проницаемость ϵ аргона при нормальных условиях равна $1,00055$. Определить поляризуемость α атома аргона.

44. Атом ксенона (поляризуемость $\alpha=5,2 \cdot 10^{-29}$ м³) находится на расстоянии $r=1$ нм от протона. Определить индуцированный в атоме ксенона электрический момент p .

45. Какой максимальный электрический момент P_{\max} будет, индуцирован у атома неона, находящегося на расстоянии $r=1$ нм от молекулы воды? Электрический момент p молекулы воды равен $6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, поляризуемость α атома неона равна $4,7 \cdot 10^{-30}$ м³.

46. Криптон при нормальных условиях находится в однородном электрическом поле напряженностью $E=2$ МВ/м. Определить объемную плотность энергии ω поляризованного криптона, если поляризуемость α атома криптона равна $4,5 \cdot 10^{-29}$ м³.

47. Определить поляризуемость α атомов углерода в алмазе. Диэлектрическая проницаемость ϵ алмаза равна $5,6$, плотность $\rho = 3,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

48. Показатель преломления n газообразного кислорода при нормальных условиях равен $1,000272$. Определить электронную поляризуемость α_e молекулы кислорода.

49. Показатель преломления n газообразного хлора при нормальных условиях равен $1,000768$. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого хлора, плотность ρ которого равна $1,56 \cdot 10^3$ кг/м³.

50. При нормальных условиях показатель преломления n углекислого газа CO_2 равен $1,000450$. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ жидкого CO_2 , если его плотность $\rho=1,19 \cdot 10^3$ кг/м³.

51. Показатель преломления n жидкого сероуглерода CS_2 равен $1,62$. Определить электронную поляризуемость α_e молекул сероуглерода, зная его плотность.

52. Поляризуемость α атома аргона равна $2,03 \cdot 10^{-29}$ м³. Определить диэлектрическую проницаемость ϵ и показатель преломления n жидкого аргона, плотность ρ которого равна $1,44 \cdot 10^3$ кг/м³.

53. Определить показатель преломления n_1 жидкого кислорода, если показатель преломления n_2 газообразного кислорода при нормальных

условиях равен 1,000272. Плотность ρ_1 жидкого кислорода равна $1,19 \cdot 10^3$ кг/м³.

Ориентационная поляризация

54. Вычислить ориентационную поляризуемость $\alpha_{ор}$ молекул воды при температуре $t=27$ °С, если электрический момент p молекулы воды равен $6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.

55. Зная, что показатель преломления n водяных паров при нормальных условиях равен 1,000252 и что молекула воды обладает электрическим моментом $p=6,1 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, определить, какую долю от общей поляризуемости (электронной и ориентационной) составляет электронная поляризуемость молекулы.

56. Электрический момент p молекул диэлектрика равен $5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м. диэлектрик ($\epsilon=2$) помещен в электрическое поле напряженностью $E_{лок}=100$ МВ/м. Определить температуру T , при которой среднее значение проекции $\langle p_E \rangle$ электрического момента на направление вектора $E_{лок}$ будет равно $p/2$.

57. Диэлектрик, молекулы которого обладают электрическим моментом $p=5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м, находится при температуре $T=300$ К в электрическом поле напряженностью $E_{лок}=100$ МВ/м. Определить, во сколько раз число молекул, ориентированных «по полю» ($0 \leq \vartheta \leq 1^\circ$); больше числа молекул, ориентированных «против поля» ($179^\circ \leq \vartheta \leq 180^\circ$). Угол ϑ образован векторами \mathbf{p} и $\mathbf{E}_{лок}$.

ОТВЕТЫ

1. 50 нКлм.

2. 6,75 кВ/м.

3. $E_A = 1,08$ кВ/м; $\varphi_0 = 0$; $E_B = 22$ кВ/м; $\varphi_B = 386$ В.

4. $E_A = 9$ кВ/м; $\varphi_A = 0$; $E_B = 18$ кВ/м; $\varphi_B = 0,9$ В/м;

5. 47,6 В/м; 1,8 В.

6. $\varphi = A \sin \omega t$, где $A = 90$ В, $\omega = 6,28 \cdot 10^3$ с⁻¹.

7. $\langle \Pi \rangle = \frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 r^2} \langle \sin \omega t \rangle$; 1) $\langle \Pi \rangle = \frac{Qp}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \sin \frac{2\pi}{T} t dt = 14,3$ нДж; 2) при

$t \geq T \langle \sin \omega t \rangle \rightarrow 0$ и $\langle \Pi \rangle = 0$.

8. $F = 3p_1 p_2 / (2\pi\epsilon_0 r^4) = 1,35$ мкН.

9. $\Pi = p_1 p_2 / (2\pi\epsilon_0 r^3) = 18$ нДж.

10. $C = pE \sin \alpha / \alpha = 286$ нНм/рад.

11. $C = pE = 300$ нНм/рад.

12. $\Pi = -pE \cos \alpha = -500$ мкДж.

13. $A = 2pE = 30$ мкДж.

14. $\Delta \Pi = pE(1 - \cos \alpha) = 0,5$ мкДж.

15. $\omega = \sqrt{2pE/J} = 6$ рад/с.

16. $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{pE/J} = 239$ Гц.

17. $F = p dE/dx = 0,2$ мН.

18. $\frac{dE}{dr} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 1,8$ МВ/м²; $F = \frac{Qp}{2\pi\epsilon_0 r^3} = 9$ мкН.

19. $\frac{dE}{dr} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r^2} = 0,9$ МВ/м²; $F = p \frac{dE}{dr} = 3,9$ мкН.

20. 1) е; 2) е; 3) е; 4) е, а, о; 5) е, а, о; 6) е, а, о; 7) е, а; 8) е, а, о, е; 9) е,

а,

21. $0,695 \cdot 10^{-19}$ Кл; электронное облако вблизи протона лишь частично смещается к ядру атома фтора.

22. 6; $47,7$ мкКл/м².

23. $\sigma'_1 = -\frac{Q}{4\pi R^2} \frac{\epsilon-1}{\epsilon} = 0,255$ мкКл/м²; $\sigma'_2 = -\frac{Q}{4\pi(R+d)^2} \frac{\epsilon-1}{\epsilon} = 0,130$ мкКл/м².

24. $\pm 11,8$ мкКл/м².

25. $77,4$ МВ/м.

26. 555 кВ/м.

27. В 1,5 раза.

28. 1,015.

29. 1) 0,1%; 2) 25%.

30. $P = \frac{3(\epsilon-1)}{\epsilon+2} \epsilon_0 E_{\text{лок}} = 152$ мкКл/м².

31. $11,3$ МВ/м.

32. $P = (\epsilon-1)\epsilon_0 E_0/\epsilon = 37,9$ мкКл/м².

33. 142 кНл/м².

34. 1) 1,44; 2) $6,3 \cdot 10^{-4}$ Клм.

35. 0,03.

36. $\alpha n \leq 0,183$.

37. $\alpha = 3M(\epsilon-1)/[\rho N_A (\epsilon+2)] = 2,24 \cdot 10^{-29}$ м³.

38. 1) $\chi = \alpha n = 2,7 \cdot 10^{-4}$. 2) $\chi = 3\rho N_A \alpha / (3M - \rho N_A \alpha) = 0,23$.

39. $\epsilon = (3M - 2\chi\rho V_{\text{ом}})/(3M - \chi\rho V_{\text{ом}})$; $\epsilon_1 = 1,51$; $\epsilon_2 = 1,61$.

40. $1,13$ см³.

41. $1,87 \cdot 10^{-30}$ м³; $\epsilon = 1 + \alpha n = 1,00005$.

42. $1,65 \cdot 10^{-36}$ Клм; $1,03 \cdot 10^{-17}$ м.

43. $2,0 \cdot 10^{-29}$ м³.

44. $5,1 \cdot 10^{-31}$ Клм.

45. $4 \cdot 10^{-33}$ Клм.

46. $11,7$ мДж/м³.

47. $1,04 \cdot 10^{-29}$ м³.

48. $2,02 \cdot 10^{-29}$ м³.

49. $\epsilon = \frac{3M + 2\rho(n^2 - 1)V_{\text{ом}}}{3M - \rho(n^2 - 1)V_{\text{ом}}} = 2,02$.

50. 2,14.

51. $\alpha_\epsilon = 3M(n^2 - 1)/[\rho N_A (n^2 + 2)] = 1,05 \cdot 10^{-28}$ м³.

52. $\epsilon = (1 + 2\beta)/(1 - \beta) = 1,52$, где $\beta = \alpha\rho N_A/(3M)$; $n = \sqrt{\epsilon} = 1,23$.

53. $n = \sqrt{\frac{1+2\beta}{1-\beta}} = 1,20$, где $\beta = \frac{n_2^2 - 1}{n_2^2 + 2} \frac{RT}{M_p} \rho_1$.

54. $3,38 \cdot 10^{-28} \text{ м}^3$.

55. 0,046.

56. 326 К.

57. В 1,27 раза.

ЭЛЕМЕНТЫ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

- Молярный объем кристалла

$$V_m = M/\rho,$$

где M — молярная масса вещества; ρ — плотность кристалла. Объем V элементарной ячейки в кристаллах:

а) при кубической сингонии $V = a^3$;

б) при гексагональной сингонии $v = \sqrt{3}a^2c/2$. Здесь a и c — параметры решетки.

Если для гексагональной решетки принять теоретическое значение

$$c = \sqrt{8/3}a, \text{ то } v = \sqrt{2}a^3.$$

- Число Z_m элементарных ячеек в одном моле кристалла

$$Z_m = V_m/V, \text{ или } Z_m = kN_A/n,$$

где k — число одинаковых атомов в химической формуле соединения (например, в кристалле $AgBr$ число одинаковых атомов Ag или Br в химической формуле соединения равно единице); N_A — постоянная Авогадро; n — число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку. На рис. 49.1 представлена структура $NaCl$; аналогичную структуру имеют соединения KBr , $AgBr$, MnO и др.

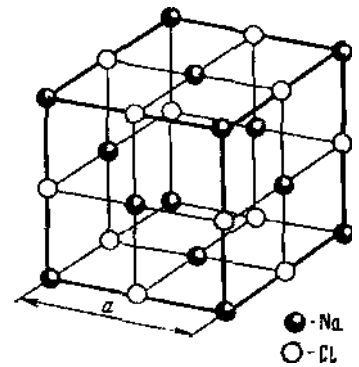


Рис. 49.2

Число Z элементарных ячеек в единице объема

кристалла

$$Z = Z_m/V_m$$

или в общем случае

$$Z = \rho \frac{k N_A}{n M}$$

Рис. 49.1

для кристалла, состоящего из одинаковых атомов ($k = 1$),

Рис.

$$Z = \rho \frac{N_A}{nM}$$

- Параметр a кубической решетки

$$a = \sqrt[3]{nM/(k\rho N_A)}$$

Расстояние d между соседними атомами в кубической решетке:

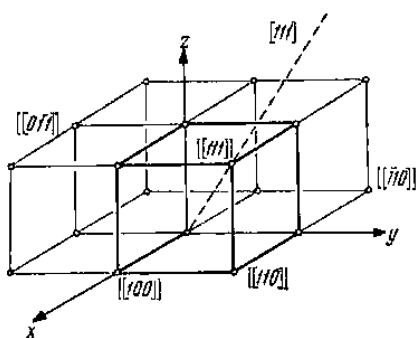
а) в гранецентрированной $d = a/\sqrt{2}$,

б) в объемно центрированной

$$d = \sqrt{3}a/2$$

• Для обозначения узлов, направлений и плоскостей в решетке вводятся специальные индексы.

Индексы узлов записывают в двойных квадратных скобках $[[mnp]]$. Для отрицательных индексов над буквой



ставится знак минус, например \bar{m} (рис. 49.2).

- Индексы направлений записываются в одинарных квадратных скобках $[mnp]$. Индекс направления совпадает с индексом узла, через который проходит прямая, если эта прямая одновременно проходит и через начало координат $[[000]]$ (рис. 49.2).

Индексы направления задают не одну прямую в кристалле, а семейство параллельных прямых. Изменение всех индексов на обратные по знаку $[\bar{m}\bar{n}\bar{p}]$ означает то же самое направление в кристалле.

- Период идентичности вдоль прямой, заданной индексами $[mnp]$, в кубической решетке выражается соотношением

$$l = a\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

где a — параметр решетки.

- Угол φ между прямыми $[m_1n_1p_1]$ и $[m_2n_2p_2]$ в кубической решетке выражается формулой

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

- Индексы плоскости (индексы Миллера) записывают в круглых скобках (hkl) . Изменение всех индексов на обратные $(\bar{h} \bar{k} \bar{l})$ отвечает тому же семейству плоскостей.

Индексы Миллера связаны с минимальными отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат.

- Для нахождения отрезков следует взять обратные величины индексов Миллера $(1/h; 1/k; 1/l)$ и привести их к наименьшему целому, кратному каждому из полученных чисел. Полученные значения и есть наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью (hkl) на осях координат. Рис. 49.3

Если известны отрезки, отсекаемые на осях координат, то индексы Миллера находятся аналогичным путем (см. пример 4). Индексы Миллера пропорциональны направляющим косинусам вектора нормали к данной плоскости. Поэтому индексы Миллера для некоторого семейства плоскостей совпадают с индексами направлений нормали к этим плоскостям.

- Угол между плоскостями $(h_1k_1l_1)$ и $(h_2k_2l_2)$ определяется из формулы

$$\cos \varphi = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2} \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}$$

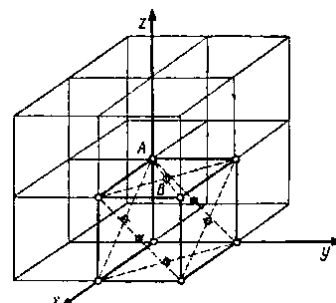
а между прямой $[mnp]$ и плоскостью (hkl) — из формулы

$$\cos \varphi = \frac{hm + kn + lp}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Примеры решения задач

Пример 1. Определить число n узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной кубической решетке.

Решение. Выделим элементарную ячейку в



кубической решетке (рис. 49.3) и определим, скольким соседним элементарным ячейкам принадлежит тот или иной узел выделенной ячейки. В этой ячейке имеются узлы двух типов: A (находящиеся в вершинах куба) и B (находящиеся на гранях куба в точке пересечения диагоналей).

Узел A принадлежит одновременно восьми элементарным ячейкам. Следовательно, в данную ячейку узел A входит с долей $1/8$. Узел B входит одновременно только в две ячейки и, следовательно, в данную ячейку узел B входит с долей $1/2$. Если учесть, что число узлов типа A в ячейке равно восьми, а число узлов типа B равно шести, т. е. числу граней, то общее число узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной решетке,

$$n = (1/8) \cdot 8 + (1/2) \cdot 6 = 1 + 3 = 4 \text{ узла.}$$

Так как число узлов равно числу атомов, то в соответствующей структуре на элементарную ячейку приходится четыре атома.

Пример 2. Определить параметр a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла кальция (решетка гранецентрированная кубической сингонии). Плотность ρ кристалла кальция равна $1,55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Параметр a кубической решетки связан с объемом элементарной ячейки соотношением $V = a^3$. С другой стороны, объем элементарной ячейки равен отношению молярного объема к числу элементарных ячеек в одном моле кристалла: $V = V_m/Z_m$. Приравняв правые части приведенных выражений для V найдем

$$a^3 = V_m/Z_m \quad (1)$$

Молярный объем кальция $V_m = M/\rho$, где ρ — плотность кальция; M — его молярная масса. Число элементарных ячеек в одном моле

$$Z_m = N_A/n,$$

где n — число атомов, приходящихся на одну ячейку. Подставив в формулу (1) приведенные выражения для V_m и Z_m , получим

$$a^3 = nM/(\rho N_A)$$

Отсюда

$$a = \sqrt[3]{nM/(\rho N_A)} \quad (2)$$

Подставим значения величин n , M , ρ и N_A в формулу (2), учитывая, что $n = 4$ (см. предыдущий пример). Произведя вычисления, найдем

$$a = 556 \text{ пм.}$$

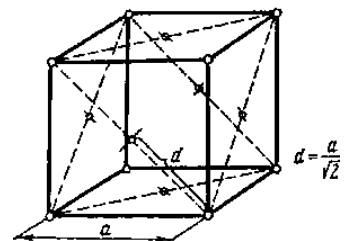
Расстояние d между ближайшими соседними атомами находится из простых геометрических соображений, ясных из рис. 49.4:

$$d = a/\sqrt{2}.$$

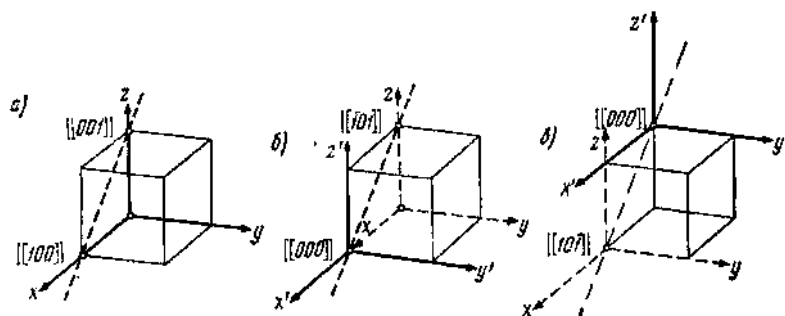
Подставив в это выражение найденное ранее значение a , получим $d = 393 \text{ пм.}$

Пример 3. Написать индексы направления прямой, проходящей через узлы $[[100]]$ и $[[001]]$ кубической примитивной решетки.

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами.



1-й способ. Изобразим кубическую примитивную ячейку, отметим на ней узлы с индексами $[[100]]$ и $[[001]]$ и проведем через эти узлы прямую



(рис. 49.5, а)

Если бы прямая проходила через начало координат, то индексы ее направления совпадали бы с индексами узла, ближайшего к началу координат, через который проходит прямая.

Рис. 49.6

Заданная прямая не проходит через начало координат. Но этого можно достигнуть, перенеся начало координат в один из узлов, через которые проходит прямая.

Если перенести начало координат в узел $[[100]]$ (рис. 49.5, б), то узел, лежащий на той же прямой и ближайший к выбранному началу координат, будет иметь индексы $[[101]]$, а искомое направление в этом случае определится индексами $[101]$.

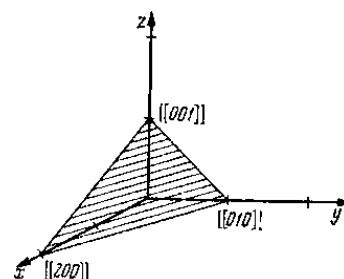
Если же начало координат перенести в узел $[[001]]$ (рис. 49.5, в), то соответственно индексы искомого направления будут $[101]$. Итак, индексы искомого направления в кристалле $[101]$ или $[10\bar{1}]$.

2-й способ. Не всегда бывает легко определить, как изменятся индексы узлов при переносе начала координат. Поэтому рассмотрим аналитический метод решения.

Напишем в общем виде уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве, с индексами узлов $[[m_1n_1p_1]]$ и $[[m_2n_2p_2]]$:

$$\frac{x - m_1}{m_2 - m_1} = \frac{y - n_1}{n_2 - n_1} = \frac{z - p_1}{p_2 - p_1}$$

Величины, стоящие в знаменателе, пропорциональны направляющим косинусам прямой. Но так как эти величины целочисленны, то они и будут являться индексами направления.



Подставив в знаменатель выражения (1) значения индексов узлов $m_1 = 1, n_1 = 0, p_1 = 0$ и $m_2 = 0, n_2 = 0, p_2 = 1$, получим:

$$m_2 - m_1 = 0 - 1 = -1$$

$$n_2 - n_1 = 0 - 0 = 0$$

$$p_2 - p_1 = 1 - 0 = 1$$

Таким образом, искомые индексы направления $[101]$.

Пример 4. Написать индексы Миллера для плоскости, содержащей

узлы с индексами $[[200]]$, $[[010]]$ и $[[001]]$. Решетка кубическая, примитивная.

Решение. Возможны два способа решения задачи.

1-й способ применим в тех случаях, когда узлы, принадлежащие плоскости, лежат одновременно и на осях координат (т. е. известны отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат).

В данном случае узлы, принадлежащие плоскости, лежат на осях координат, и отрезки (в единицах постоянной решетки), отсекаемые на осях координат этой плоскостью, соответственно будут (рис. 49.6) 2, 1, 1.

В соответствии с общим правилом нахождения индексов Миллера напишем обратные значения, полученных чисел $\frac{1}{2}; \frac{1}{1}; \frac{1}{1}$ и приведем их к наименьшему целому кратному этих чисел. Для этого умножим числа на два. Полученная совокупность значений, заключенная в круглые скобки, и есть искомые индексы Миллера (1, 2, 2).

2-й способ (аналитический) особенно удобен тогда, когда известные узлы не лежат на осях координат. Этот способ является общим и применим во всех случаях.

Известно, что индексы Миллера равны наименьшим целочисленным коэффициентам при переменных в уравнении плоскости. Поэтому решение задачи по определению индексов Миллера сводится, по существу, к отысканию уравнения плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $[[m_1n_1p_1]]$, $[[m_2n_2p_2]]$, $[[m_3n_3p_3]]$, дается определителем третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x - m_1 & y - n_1 & z - p_1 \\ m_2 - m_1 & n_2 - n_1 & p_2 - p_1 \\ m_3 - m_1 & n_3 - n_1 & p_3 - p_1 \end{vmatrix} = 0$$

В нашем случае: $m_1=2, n_1=0, p_1=0, m_2=0, n_2=1, p_2=0, m_3=0, n_3=0, p_3=0$ Подставляя значения индексов узлов в определитель, получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 1-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$x-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель второго порядка, получим $(x-2)(+1) - y/(-2) + z(+2) = 0$, или $x+2y+2z=2$.

Выписав коэффициенты при x, y, z и заключив их в круглые скобки, получим индексы Миллера

$$(1, 2, 2).$$

Эти значения индексов, как и следовало ожидать, совпадают со значениями, полученными первым способом.

Задачи

Элементарная ячейка. Параметры решетки

1. Сколько атомов приходится на одну элементарную ячейку 1)

примитивной решетки кубической сингонии; 2) объемно-центрированной решетки ромбической сингонии; 3) гранецентрированной решетки кубической сингонии; 4) базоцентрированной решетки ромбической сингонии; 5) примитивной решетки гексагональной сингонии; 6) гексагональной структуры с плотной упаковкой.

2. Определить число элементарных ячеек кристалла объемом $V=1 \text{ м}^3$: 1) хлористого цезия (решетка объемно-центрированная кубической сингонии); 2) меди (решетка гранецентрированная кубической сингонии); 3) кобальта, имеющего гексагональную структуру с плотной упаковкой.

3. Найти плотность ρ кристалла неона (при 20 К), если известно, что решетка гранецентрированная кубической сингонии. Постоянная a решетки при той же температуре равна 0,452 нм.

4. Найти плотность ρ кристалла стронция, если известно, что решетка гранецентрированная кубической сингонии, а расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,43 нм.

5. Определить относительную атомную массу A_r кристалла, если известно, что расстояние d между ближайшими соседними атомами равно 0,304 нм. Решетка объемноцентрированная кубической сингонии. Плотность ρ кристалла равна 534 кг/м^3 .

6. Найти постоянную a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла: 1) алюминия (решетка гранецентрированная кубической сингонии); 2) вольфрама (решетка объемно-центрированная кубической сингонии).

7. Используя метод упаковки шаров, найти отношение c/a параметров в гексагональной решетке с плотнейшей упаковкой. Указать причины отклонения этой величины в реальном кристалле от вычисленного.

8. Определить постоянное a и c решетки кристалла магния, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Плотность ρ кристаллического магния равна $1,74 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

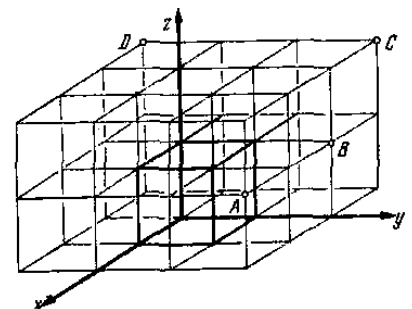
9. Вычислить постоянную a решетки кристалла бериллия, который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Параметр a решетки равен 0,359 нм. Плотность ρ кристалла бериллия равна $1,82 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

10. Найти плотность ρ кристалла гелия (при температуре $T=2 \text{ К}$), который представляет собой гексагональную структуру с плотной упаковкой. Постоянная a решетки, определенная при той же температуре, равна 0,357, нм.

Индексы узлов, направлений и плоскостей

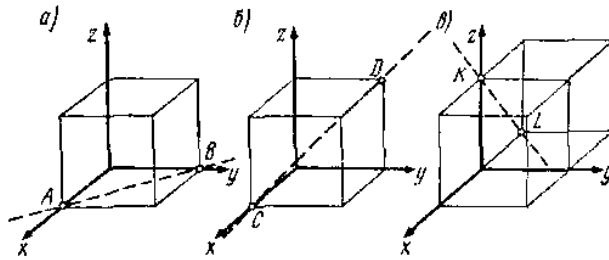
11. Определить индексы узлов, отмеченных на рис. 49.7 буквами A, B, C, D .

12. Написать индексы направления прямой, проходящей в кубической решетке через начало координат и узел с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) $[[242]]$; 2) $[[112]]$.



13. Найти индексы направлений прямых AB , CD , KL , изображенных на рис. 49.8, a , b , $в$.

14. Написать индексы направления прямой, проходящей через два узла

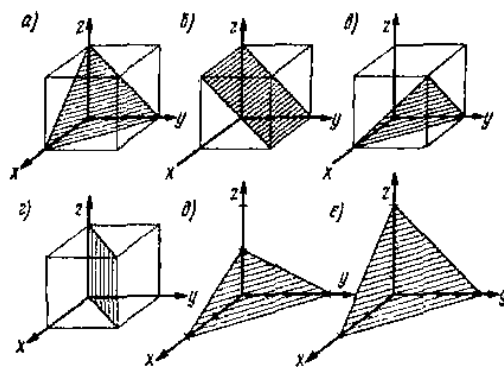


с кристаллографическими индексами (в двух случаях): 1) $[[123]]$ и $[[321]]$; 2) $[[121]]$ и $[[201]]$.

15. Вычислить период l идентичности вдоль прямой $[111]$ в решетке кристалла NaCl , если плотность ρ кристалла равна $2,17 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

16. Вычислить угол ϕ между двумя направлениями в кубической решетке кристалла, которые заданы кристаллографическими индексами $[110]$ и $[111]$.

17. Написать индексы Миллера для плоскостей в примитивной



кубической решетке, изображенных на рис. 49.9, a — e .

18. Плоскость проходит через узлы $[[1001]]$, $[[010]]$, $[[001]]$ кубической решетки. Написать индексы Миллера для этой плоскости.

19. Система плоскостей в примитивной кубической решетке задана индексами Миллера (221) . Найти наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат, и изобразить эту плоскую графически.

20. Направление нормали к некоторой плоскости в кубической решетке задано индексами $[110]$. Написать индексы Миллера для этой плоскости и указать наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью на осях.

21. Написать индексы Миллера для плоскостей, содержащих узлы с кристаллографическими индексами, в двух случаях: 1) $[[111]]$, $[[112]]$, $[[101]]$; 2) $[[111]]$, $[[010]]$, $[[111]]$. Найти отрезки, отсекаемые этими плоскостями на осях координат.

22. Система плоскостей примитивной кубической решетки задана индексами (111) . Определить расстояние d между соседними плоскостями, если параметр a решетки равен $0,3 \text{ нм}$.

23. Определить параметр a примитивной кубической решетки, если

межплоскостное расстояние d для системы плоскостей, заданных индексами Миллера (212) при рентгеноструктурном измерении, оказалось равным 0,12 нм.

24. Три системы плоскостей в примитивной кубической решетке заданы индексами Миллера: а) (111); б) (110); в) (100). Указать, для какой системы межплоскостные расстояния d минимальны и для какой системы — максимальны. Определить отношения межплоскостных расстояний $d_{111} : d_{110} : d_{100}$.

25. Вычислить угол φ между нормальными к плоскостям (в кубической решетке), заданных индексами Миллера (111) и (111).

26. Две плоскости в кубической решетке заданы индексами Миллера (010) и (011). Определить угол φ между плоскостями.

27. В кубической решетке направление прямой задано индексами [011]. Определить угол φ между этой прямой и плоскостью (111).

28. Определить в кубической решетке угол φ между прямой [111] и плоскостью (111).

29. Плоскость в кубической решетке задана индексами Миллера (011), направление прямой — индексами [111]. Определить угол φ между прямой и плоскостью

ОТВЕТЫ

1. 1) 1; 2) 2; 3) 4; 4) 2; 5) 1; 6) 2.
2. 1) $1,44 \cdot 10^{11}$; 2) $2,1 \cdot 10^{28}$; 3) $4,54 \cdot 10^{23}$.
3. $1,46 \cdot 10^3$ кг/м³.
4. $2,6 \cdot 10^3$ кг/м³.
5. 0,95 (литий)
6. 1) 0,404 нм; 0,286 нм; 2) 0,316 нм; 0,274 ум.
7. 1,63. Отклонение обусловлено тем, что в реальном кристалле атомы не обладают сферической симметрией.
8. 0,320 нм, 0,521 нм.
9. 0,23 нм.
10. 207 кг/м³.
11. А[[221]]; В[[021]]; С[[$\bar{1}$ 22]]; D[[$\bar{1}$ $\bar{1}$ 2]].
12. 1) [121]; 2) [112].
13. [$\bar{1}$ 10]; [$\bar{1}$ 11]; [101].
14. 1) [111]; 2) [$\bar{1}$ 2 $\bar{2}$] или [$1\bar{2}\bar{2}$].
15. 0,975 нм.
16. 35° 15'.
17. а) (111); б) (011); в) (11 $\bar{1}$); г) (1 $\bar{1}$ 0); д) (112); е) (111).
18. (111).
19. Отрезки, отсекаемые на осях x , y , z , соответственно равны 1, 1, 2 (рис. 32).
20. (110), отрезки на осях 1, 1, ∞ .

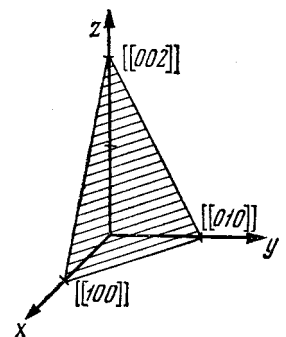


Рис. 32

21. 1) $(\bar{1}24)$; отрезки на осях 4, 2, 1 2) (012); отрезки на осях ∞ , 2, 1.

22. 0,173 нм.

23. 0,36 нм.

24. Минимальные для (111), максимальные для (100); $d_{111}:d_{110}:d_{100} =$
 $= \frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1.$

25. $70^\circ 20'$.

26. $\pi/4$.

27. 0 (прямая лежит в плоскости).

28. $\pi/2$.

29. $54^\circ 40'$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.

- Коротковолновая граница λ_{\min} сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U}$$

где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке; \hbar — постоянная Планка.

- Закон Мозли:

а) в общем случае

$$\omega = CR(Z-\sigma)^2$$

где ω — частота линий рентгеновского спектра; Z — атомный номер элемента, излучающего этот спектр; R — постоянная Ридберга ($R = 2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$); σ — постоянная экранирования; C — постоянная;

б) для K_{α} -линий ($\sigma=1$, $C=3/4$)

$$\omega_{K\alpha} = \frac{3}{4} R(Z-1)^2 \text{ или } 1/\lambda_{K\alpha} = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2,$$

где R' — штрихованная постоянная Ридберга ($R' = 1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$);

$1/\lambda = \omega/(2\pi c)$ — волновое число *.

- Энергия фотона K_{α} -линии рентгеновского излучения

$$\epsilon_{K\alpha} = \frac{3}{4} E_i(Z-1)^2,$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить длину волны $\lambda_{K\alpha}$ и энергию $\epsilon_{K\alpha}$ фотона K_{α} -линии рентгеновского спектра, излучаемого вольфрамом при бомбардировке его быстрыми электронами.

Решение. При бомбардировке вольфрама быстрыми электронами возникает рентгеновское излучение, имеющее линейчатый спектр. Быстрые электроны, проникая внутрь электронной оболочки атома, выбивают электроны, принадлежащие электронным слоям.

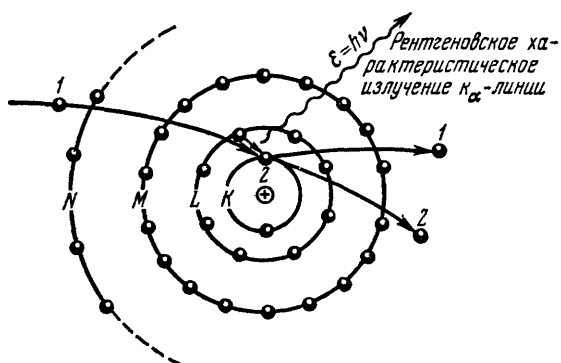


Рис. 39.1

Ближайший к ядру электронный слой (K-слой) содержит два электрона. Если один из этих электронов оказывается выбитым за пределы атома, то на освободившееся место переходит электрон из вышележащих слоев (L, M, N). При этом возникает соответствующая линия K-серии. При переходе электрона с L-слоя на K-слой излучается наиболее интенсивная K_{α} -линия

рентгеновского спектра (рис. 39.1).

Длина волны этой линии определяется по закону Мозли:

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2$$

откуда

$$\lambda_{K\alpha} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2}$$

Подставив сюда значения Z (для вольфрама $Z=74$) и R' , найдем

$$\lambda_{K\alpha} = 2,28 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 22,8 \text{ пм.}$$

Зная длину волны, определим энергию фотона по формуле

$$\epsilon_{K\alpha} = 2\pi\hbar c / \lambda.$$

Подставив в эту формулу значения \hbar , c , $\lambda_{K\alpha}$ и произведя вычисления, найдем

$$\epsilon_{K\alpha} = 54,4 \text{ кэВ.}$$

Заметим, что энергию фотона α -линии К-серии рентгеновского излучения можно определить также непосредственно по формуле

$$\epsilon_{K\alpha} = \frac{3}{4} E_i(Z-1)^2, \text{ приведенной в начале параграфа.}$$

Пример 2. Определить напряжение U , под которым работает рентгеновская трубка, если коротковолновая граница λ_{\min} в спектре тормозного рентгеновского излучения оказалась равной 15,5 пм.

Решение. Тормозное рентгеновское излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении. В рентгеновской трубке электрон приобретает кинетическую энергию T , которая связана с ускоряющей разностью потенциалов U соотношением

$$T = |e|U, \tag{1}$$

где e — заряд электрона.

В соответствии с законом сохранения энергии энергия фотона не может превысить кинетической энергии электрона ($\hbar\omega \leq T$). Максимальная энергия фотона в этом случае определяется равенством

$$\hbar\omega = T = |e|U. \tag{2}$$

Так как максимальная угловая частота ω_{\max} связана с минимальной длиной волны λ_{\min} соотношением

$$\lambda_{\min} = 2\pi c / \omega_{\max}$$

то из выражений (1) и (2) находим

$$U = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U}$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 1,55 \cdot 10^{-11}} \text{ В} = 7,98 \cdot 10^4 \text{ В} = 79,8 \text{ кВ.}$$

Задачи

1. Определить скорость v электронов, падающих на антикатод рентгеновской трубки, если минимальная длина волны λ_{\min} в сплошном спектре рентгеновского излучения равна 1 нм.

2. Определить коротковолновую границу λ_{\min} сплошного спектра рентгеновского излучения, если рентгеновская трубка работает под напряжением $U=30$ кВ.
3. Вычислить наибольшую длину волны λ_{\max} в К-серии характеристического рентгеновского спектра скандия.
4. При исследовании линейчатого рентгеновского спектра некоторого элемента было найдено, что длина волны λ линии K_{α} равна 76 пм. Какой это элемент?
5. Какую наименьшую разность потенциалов U_{\min} нужно приложить к рентгеновской трубке, антикатод которой покрыт ванадием ($Z=23$), чтобы в спектре рентгеновского излучения появились все линии К-серии ванадия? Граница К-серии ванадия $\lambda=226$ пм.
6. Определить энергию ε фотона, соответствующего линии K_{α} в характеристическом спектре марганца ($Z=25$).
7. В атоме вольфрама электрон перешел с М-слоя на L-слой. Принимая постоянную экранирования σ равной 5,5, определить длину волны λ испущенного фотона.
8. Рентгеновская трубка работает под напряжением $U=1$ МВ. Определить наименьшую длину волны λ_{\min} рентгеновского излучения.
9. Вычислить длину волны λ и энергию ε фотона, принадлежащего K_{α} -линии в спектре характеристического рентгеновского излучения платины.
10. При каком наименьшем напряжении U_{\min} рентгеновской трубке начинают появляться линии серии K_{α} , меди?

ОТВЕТЫ

1. 21 Мм/с.
2. 41 пм.
3. 304 пм.
4. Ниобий ($Z = 41$).
5. 5,5 кВ.
6. 5,9 кэВ.
7. 0,14 пм.
8. 1,21 мм.
9. 20,5 нм; 60,5 кВ.
10. 8,00 кВ.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

СТАТИСТИКА РАВНОВЕСНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА, ОСОБЕННОСТИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ КОНЦЕНТРАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

Примеры решения задач

Пример 1. Найти, чему равна собственная концентрация свободных носителей заряда в кремнии (Si), германии (Ge), арсениде галлия (GaAs) и антимониде индия (InSb) при комнатной температуре $T = 300\text{K}$ и температуре жидкого азота $T = 77\text{K}$.

Решение:

Концентрация свободных носителей заряда n_i имеет сильную температурную зависимость и определяется как

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right),$$

где эффективная плотность состояний в C - и V -зонах $N_{C,V}$ также зависит от температуры T и эффективной массы носителей заряда в зоне m^* :

$$N_{C,V} = 2 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{m^* kT}{h^2}\right)^{3/2} = 2,5 \cdot 10^{19} \cdot \left(\frac{m^*}{m_0}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{T}{300}\right)^{3/2}, \tilde{m}^{-3}.$$

Ширина запрещенной зоны (E_g) имеет слабую зависимость от температуры типа $E_g = E_{g0} - \alpha T$.

Si

T, K	$\frac{m_n^*}{m_0} (d)$	$\frac{m_p^*}{m_0} (d)$	$E_{g0}, \text{эВ}$	$\alpha, \text{эВ/К}$	$N_C, \text{см}^{-3}$	$N_V, \text{см}^{-3}$	$n_i, \text{см}^{-3}$
300	1,08	0,56	1,21	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{19}$	$1,13 \cdot 10^{19}$	$1,6 \cdot 10^{10}$
77					$3,6 \cdot 10^{18}$	$1,4 \cdot 10^{18}$	$2,9 \cdot 10^{-20}$

Ge

T, K	$\frac{m_n^*}{m_0}$	$\frac{m_p^*}{m_0}$	$E_{g0}, \text{эВ}$	$\alpha, \text{эВ/К}$	$N_C, \text{см}^{-3}$	$N_V, \text{см}^{-3}$	$n_i, \text{см}^{-3}$
300	0,56	0,35	0,80	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$1,04 \cdot 10^{19}$	$6,11 \cdot 10^{18}$	$1,5 \cdot 10^{12}$
77					$1,4 \cdot 10^{18}$	$7,3 \cdot 10^{17}$	$1,8 \cdot 10^{-11}$

GaAs

T, K	$\frac{m_n^*}{m_0}$	$\frac{m_p^*}{m_0}$	E_{g0}, eV	$\alpha, eV/K$	N_C, cm^{-3}	N_V, cm^{-3}	n_i, cm^{-3}
300	0,068	0,45	1,56	$4,3 \cdot 10^{-4}$	$4,7 \cdot 10^{17}$	$7,0 \cdot 10^{18}$	$1,1 \cdot 10^7$
77					$5,8 \cdot 10^{16}$	$1,25 \cdot 10^{17}$	$4,1 \cdot 10^{-33}$

InSb

T, K	$\frac{m_n^*}{m_0}$	$\frac{m_p^*}{m_0}$	E_{g0}, eV	$\alpha, eV/K$	N_C, cm^{-3}	N_V, cm^{-3}	n_i, cm^{-3}
300	0,013	0,6	0,235	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{16}$	$1,16 \cdot 10^{19}$	$2 \cdot 10^{16}$
77					$4,8 \cdot 10^{15}$	$1,5 \cdot 10^{18}$	$2,6 \cdot 10^9$

Пример 2. Кремний (Si) и арсенид галлия (GaAs) легированы донорной примесью до концентрации $N_d = 10^{17} cm^{-3}$. Считая примесь полностью ионизованной, найти концентрацию основных и неосновных носителей заряда при температуре $T = 300K$.

Решение:

Примесь полностью ионизована, когда концентрация равновесных электронов равна концентрации легирующей примеси $n_{n0} = N_d$. Из основного соотношения для полупроводников: $n_0 \cdot p_0 = n_i^2$ найдем концентрацию неосновных носителей заряда: $p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_{n0}}$.

$$\text{Для Si: } p_{n0}(Si) = \frac{(1,6 \cdot 10^{10})^2}{10^{17}} \approx 2,6 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}.$$

$$\text{Для GaAs: } p_{n0}(GaAs) = \frac{(1,1 \cdot 10^7)^2}{10^{17}} \approx 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-3}.$$

Пример 3. Рассчитать объемное положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны φ_0 в собственных полупроводниках – кремнии (Si) и антимониде индия (InSb) при температурах $T_1 = 300 K$ и $T_2 = 77 K$ (с учетом различных значений эффективных масс электронов и дырок).

Решение:

В собственном полупроводнике $n_0 = p_0$, и положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны полупроводника φ_0 можно рассчитать как

$$\varphi_{0i} = \frac{kT}{2} \ln \frac{N_V}{N_C} = \frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_n^*}{m_p^*} \right),$$

$$N_{C,V} = 2 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{m^* kT}{h^2} \right)^{3/2} = 2,5 \cdot 10^{19} \cdot \left(\frac{m^*}{m_0} \right)^{3/2} \cdot \left(\frac{T}{300} \right)^{3/2}.$$

T, K		300	77
$\varphi_0, \text{эВ}$	Si	-0,0124	-0,0032
	InSb	0,074	0,019

Таким образом, в кремнии уровень Ферми лежит ниже, а в антимониде индия – выше середины запрещенной зоны полупроводника E_i .

Пример 4. Найти удельное сопротивление ρ электронного и дырочного кремния (Si) с легирующей примесью $N_{d,a} = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ при комнатной температуре.

Решение:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = q\mu_n n + q\mu_p p;$$

$$\sigma_n = \frac{1}{\rho_n} \approx q\mu_n n = q\mu_n N_{d,a}; \quad \sigma_p = \frac{1}{\rho_p} \approx q\mu_p p = q\mu_p N_{a,i};$$

$$\rho_{n,p} = \frac{1}{q\mu_{n,p} N_{d,a}};$$

$$\rho_n = \frac{1}{q\mu_n N_{d,a}} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1500 \cdot 10^{16}} = 0,42 \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1}$$

$$\rho_p = \frac{1}{q\mu_p N_{a,i}} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 600 \cdot 10^{16}} = 1,04 \text{ Ом} \cdot \text{м}^{-1}$$

Задачи

1. Вычислить собственную концентрацию носителей заряда в кремнии при $T=300\text{K}$, если ширина его запрещенной зоны $E_g=1,12\text{eV}$, а эффективные массы носителей заряда $m_n=1,05m_0$, $m_p=0,56m_0$, где m_0 – масса свободного электрона.

2. Уровень Ферми в кремнии при 300 К расположен на 0,2 эВ ниже дна зоны проводимости. Рассчитайте равновесную концентрацию электронов и дырок в этом полупроводнике, если ширина его запрещенной зоны = 1,12 эВ, а эффективные массы носителей заряда $m_n=1,05m_0$, $m_p=0,56m_0$, где m_0 – масса свободного электрона.

3. При исследовании температурной зависимости концентрации носителей заряда для чистого кремния в области собственной электропроводности получены следующие результаты: $T_1=463 \text{ K}$ собственная концентрация $n_{i1}=10^{20} \text{ м}^{-3}$, а при $T_2=781 \text{ K}$ $n_{i2}=10^{23} \text{ м}^{-3}$. На основании этих данных рассчитать ширину запрещенной зоны при $T=300 \text{ K}$, если коэффициент ее температурного изменения $b=-2,84 \cdot 10^{-4} \text{ эВ/К}$.

4. Образец собственного кремния имеет удельное сопротивление $2000 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ при комнатной температуре и концентрацию электронов проводимости $n_i=1,4 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Определить удельное сопротивление образца легированного акцепторной примесью с концентрацией 10^{21} и 10^{23} м^{-3} . Предположите, что подвижность дырок остается одинаковой как для собственного, так и для примесного кремния и равной $\mu_p = 0,25\mu_n$.

5. Определить при какой концентрации примесей удельная проводимость при температуре 300 К имеет наименьшее значение. Найти отношение собственной удельной проводимости к минимальной при той же температуре. Собственная концентрация носителей при этой температуре $n_i = 2,1 \cdot 10^{19}\text{ м}^{-3}$, подвижность электронов $\mu_n = 0,39\text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, подвижность дырок $\mu_p = 0,19\text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.
6. Вычислить время жизни неосновных носителей заряда в полупроводнике, если их установившаяся концентрация при воздействии источника возбуждения составляет 10^{20} м^{-3} , а начальная скорость уменьшения избыточной концентрации при отключении источника $7,1 \cdot 10^{23}\text{ м}^{-3}\text{ с}^{-1}$. Найти избыточную концентрацию Δn через время $t = 2\text{ мс}$ после выключения источника возбуждения.
7. В толстом образце германия равномерно по объему генерируются электронно-дырочные пары. Найти скорость поверхностной рекомбинации, если концентрация неравновесных дырок на поверхности образца в 4 раза меньше, чем в объеме; $L_p = 0,2\text{ см}$, $\tau_p = 10^{-3}\text{ с}$.
8. Найти объемное положение уровня Ферми φ_0 в германии (Ge) марки ГДА–10 при температуре $T = 300\text{ К}$.
9. Рассчитать объемное положение уровня Ферми φ_0 относительно середины запрещенной зоны в электронном и дырочном антимониде индия InSb при азотной температуре $T = 77\text{ К}$ и концентрации легирующей примеси $N_d = N_a = 10^{15}\text{ см}^{-3}$.
10. Рассчитать положение уровня Ферми φ_0 в приближении полностью ионизированной примеси в кремнии марки КЭФ–4,5 при температурах $T_1 = 300\text{ К}$ и $T_2 = 77\text{ К}$.
11. Рассчитать собственное удельное сопротивление ρ_i монокристаллов кремния (Si), германия (Ge), арсенида галлия (GaAs) и антимонида индия (InSb) при комнатной температуре.
12. Найти концентрацию легирующей акцепторной примеси для кремния (Si) и германия (Ge), при которой наступает вырождение концентрации свободных носителей заряда при комнатной температуре $T = 300\text{ К}$.
13. Найти, как изменится объемное положение уровня Ферми φ_0 в электронном арсениде галлия (GaAs) с $\rho = 1\text{ Ом} \cdot \text{см}$ при изменении температуры от $T = 300\text{ К}$ до $T = 77\text{ К}$.
14. Полупроводники кремний (Si), германий (Ge), арсенид галлия (GaAs) и антимонид индия (InSb) легированы донорной примесью до концентрации $N_d = 10^{15}\text{ см}^{-3}$. Найти граничную температуру $T_{гр}$, при которой собственная концентрация носителей заряда n_i еще ниже концентрации основных носителей заряда n_0 .
15. Качественно представить на графике зависимость концентрации электронов $\ln(n)$ в частично компенсированном полупроводнике ($N_d > N_a$) от

$\frac{1}{T}$. Оценить границы области температур, в которых $n \approx N_d - N_a$ для кремния, легированного мышьяком $E_d = E_c - 0,05$ эВ.

ОТВЕТЫ

1. $n_i = 6,45 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, $N_c = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $N_v = 1,05 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$.
2. $N_c = 2,69 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$, $n = 1,17 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $p = 3,55 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}$.
3. $\Delta = 2,0227 \text{ эВ}$, $E_g = 2,1 \text{ эВ}$.
4. $\mu_n = 0,178$, $\mu_p = 0,0445$, $\rho_l = 13,5 \text{ Ом}\cdot\text{м}$.
5. $\sigma_i = 1,95 \text{ См/м}$, $\sigma = 1,83 \text{ См/м}$, $\sigma_i / \sigma = 1,07$, $p = 3 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.
6. $\tau_n = 140 \text{ нс}$, $\Delta n = 8,7 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.
7. $s = 600 \text{ см/с}$.
8. $\varphi_0 = -0,067 \text{ эВ}$, знак «-» означает, что уровень Ферми лежит ниже уровня Ферми в собственном полупроводнике.
9. $\varphi_{0,n} = 0,104 \text{ эВ}$; $\varphi_{0,p} = -0,066 \text{ эВ}$
10. $\varphi_0(T=300 \text{ К}) = 0,284 \text{ эВ}$; $\varphi_0(T=77 \text{ К}) = 0,52 \text{ эВ}$.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 7

ЭФФЕКТ ХОЛЛА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

Электроны в металле (по квантовой статистике)

- Распределение Ферми по энергиям для свободных электронов в металле:

$$\text{при } T \neq 0 \quad dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{\exp[(\varepsilon - \varepsilon_f)/(kT)] + 1};$$

$$\text{при } T \neq 0 \quad dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad \text{при } (\varepsilon < \varepsilon_f),$$

где $dn(\varepsilon)$ -концентрация электронов, энергия которых заключена в интервале, значений от ε до $\varepsilon+d\varepsilon$; m и ε - масса и энергия электрона; ε_f - уровень (или энергия) Ферми.

- Уровень Ферми в металле при $T=0$

$$\varepsilon_f = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}.$$

- Температура $T_{кр}$ вырождения

$$T_{кр} = \frac{2\pi\hbar^2}{km} n^{2/3}.$$

Полупроводники

- Удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = en(b_n + b_p),$$

где e - заряд электрона; n - концентрация носителей заряда (электронов и дырок); b_n и b_p - подвижности электронов и дырок.

Напряжение U_H на гранях образца при эффекте Холла

$$U_H = R_H B j \ell, \quad \text{где } R_H - \text{Постоянная Холла; } B - \text{индукция магнитного поля;}$$

ℓ - ширина пластины; j - плотность тока.

- Постоянная Холла для полупроводников типа алмаза, кремния; германия и др., обладающих носителями заряда одного вида (n или p),

$$R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en},$$

где n - концентрация носителей заряда.

Примеры решения задач

Пример 1. Кусок металла объёма $V=20 \text{ см}^3$ находится при температуре $T=0$. Определить число ΔN свободных электронов, импульсы которых отличаются от максимального импульса p_{\max} не более чем на $0,1 p_{\max}$. Энергия Ферми $\varepsilon_f=5 \text{ эВ}$.

Решение. Для того чтобы установить распределение свободных электронов в металле по импульсам, воспользуемся распределением Ферми для свободных электронов при $T=0$:

$$dn(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon \quad (1)$$

Так как $dn(\varepsilon)$ есть число электронов в единице объема, энергии которых заключены в интервале значений от ε до $\varepsilon+d\varepsilon$ ($\varepsilon < \varepsilon_f$), то оно должно быть равно числу электронов $dn(p)$ в единице объема, заключённых в интервале значений импульса от p до $p+dp$, т. е.

$$dn(p) = dn(\varepsilon). \quad (2)$$

При этом должно соблюдаться следующее условие. Данной энергии ε соответствует определенный импульс $p(\varepsilon = p^2/(2m))$ и интервалу энергий $d\varepsilon$ отвечает соответствующий ему интервал импульсов

$$dp \left(d\varepsilon = \frac{p}{m} dp \right)$$

Заметив, что $\varepsilon^{1/2} = p/(2m)^{1/2}$, подставим в правую часть равенства

(2) вместо $dn(\varepsilon)$ выражение (1) с заменой ε на p и

$d\varepsilon$ на dp в соответствии с полученными соотношениями, т. е.

$$dn(p) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{p}{(2m)^{1/2}} \cdot \frac{p}{m} dp.$$

После сокращений получим искомое распределение свободных электронов в металле по импульсам при $T=0$:

$$dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^3 dp.$$

Число электронов в единице объема, импульсы которых заключены в интервале от $p_{\max} - 0,1 p_{\max}$ до p_{\max} , найдем интегрированием в соответствующих пределах:

$$\Delta n = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \int_{0,9 p_{\max}}^{p_{\max}} p^3 dp = \frac{1}{3\pi^2 \hbar^3} p_{\max}^3 [1 - (0,9)^3], \text{ или } \Delta n = \frac{0,271}{3\pi^2} \frac{p_{\max}^3}{\hbar^2}.$$

Учитывая, что максимальный импульс p_{\max} и максимальная энергия ε электронов в металле (при $T=0$) связаны соотношением $p_{\max}^2 = 2m\varepsilon_f$, найдём искомое число ΔN свободных электронов в металле:

$$\Delta N = \frac{0,271}{3\pi^2 \hbar^3} (2m\varepsilon_f)^{3/2} V, \text{ или } \Delta N = \frac{0,271}{3\pi^2} \left(\frac{2m\varepsilon_f}{\hbar^2}\right)^{3/2} V,$$

Подставив значения величин π , m , ε_f , \hbar и V и произведя вычисления ($5\text{эВ} = 8 \cdot 10^{-19} \text{Дж}$), получим $\Delta N = 2,9 \cdot 10^{23}$ электронов.

Пример 2. Образец из германия n-типа в виде пластины длиной $L=10\text{см}$ и шириной $l=3\text{мм}$ помещен в однородное магнитное поле ($B=0,1\text{Тл}$) перпендикулярно линиям магнитной индукции. При напряжении $U=250\text{В}$, приложенном к концам пластины, возникает холловская разность потенциалов $U_H=8,8\text{мВ}$. Определить: 1) постоянную Холла R_H ; 2) концентрацию n носителей тока. Удельную проводимость γ германия принять равной 80см/м .

Решение. 1. При помещении полупроводника в магнитное поле, как показано на рисунке, носители тока (в полупроводнике n-типа это электроны), перемещающиеся под действием приложенной к нему разности потенциалов U , будут отклоняться в Поперечном направлении. Это отклонение, вызванное

силой Лоренца, приведёт к "накоплению" заряда на боковых поверхностях образца, причем создаваемое в результате этого напряжение U_H (холловская разность потенциалов) действием своим будет уравнивать силу Лоренца. Холловская разность потенциалов определяется соотношением

$$U_H = R_H B j l$$

откуда постоянная Холла

$$R_H = \frac{U_H L}{B j l} \quad (1)$$

Плотность тока j найдем, воспользовавшись законом Ома в дифференциальной форме:

$j = \gamma E$, где E - напряженность поля в образце.

Считая поле в образце однородным, можно написать $E = U/L$ и тогда

$$j = \gamma U/L.$$

Подставив плотность тока в выражение (1) получим

$$R_H = \frac{U_H L}{B U \gamma l} \quad (2)$$

Убедимся в том, что правая часть равенства (2) дает единицу постоянной Холла ($\text{м}^3/\text{Кл}$):

$$\frac{[U_H][L]}{[B][U][\gamma][l]} = \frac{1\text{В} \cdot 1\text{м}}{1\text{Тл} \cdot 1\text{В} \cdot 1\text{См}/\text{м} \cdot 1\text{м}} = \frac{1\text{м}}{1\text{Тл} \cdot 1\text{См}} = \frac{1\text{А} \cdot 1\text{м} \cdot 1\text{м} \cdot 1\text{В}}{1\text{Н} \cdot 1\text{А}} = \frac{1\text{Дж} \cdot 1\text{м}^2}{1\text{Н} \cdot 1\text{Кл}} = 1\text{м}^3 / \text{Кл}.$$

Выразим все величины в единицах СИ ($U_H = 8,8 \cdot 10^{-3}\text{В}$, $L = 0,1\text{м}$, $B = 0,1\text{Тл}$, $U = 250\text{В}$, $\gamma = 80\text{См}/\text{м}$, $l = 6 \cdot 10^{-3}\text{м}$) и произведем вычисления:

$$R_H = \frac{8,8 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1}{0,1 \cdot 250 \cdot 80 \cdot 6 \cdot 10^{-3}} \text{м}^3 / \text{Кл} = 7,33 \cdot 10^{-5} \text{м}^3 / \text{Кл}.$$

2. Концентрацию n носителей тока в полупроводнике одного типа (в нашем случае n -типа) можно найти из соотношения $R_H = \frac{3\pi}{8} \frac{1}{en}$, где e - элементарный

заряд. Отсюда

$$n = \frac{3\pi}{8R_H e}.$$

Произведя вычисления, получим $n = 10^{23}$ электронов/ м^3 .

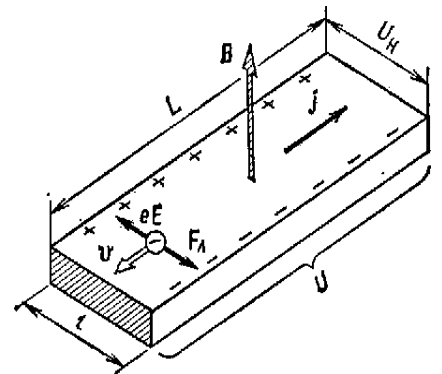
Задачи

Электроны в металле. Распределение Ферми-Дирака

1. Определить концентрацию n свободных электронов в металле при температуре $T=0\text{К}$. Энергию Ферми ϵ принять равной 1эВ .

2. Определить отношение концентраций n_1/n_2 свободных электронов при $T=0$ в литии и цезии, если известно, что уровни Ферми в этих металлах соответственно равны $\epsilon_{f,1} = 4,72\text{эВ}$, $\epsilon_{f,2} = 1,53\text{эВ}$.

3. Определить число свободных электронов, которое приходится на один атом натрия при температуре $T=0\text{К}$. Уровень Ферми ϵ_f для Натрия



равен 3,1эВ. Плотность ρ натрия равна 970кг/м³.

4. Во сколько раз число свободных электронов, приходящихся на один атом металла при $T=0$, больше в алюминий, чем в меди, если уровни Ферми соответственно равны $\varepsilon_{f,1}=11,7\text{эВ}$, $\varepsilon_{f,2}=7,0\text{эВ}$?

5. Определить вероятность того, что электрон в металле займет энергетическое состояние, находящееся в интервале $\Delta\varepsilon=0,05\text{эВ}$ ниже уровня Ферми и выше уровня Ферми, для двух температур: 1) $T_1=290\text{К}$; 2) $T_2=58\text{К}$.

6. Вычислить среднюю кинетическую энергию $\langle\varepsilon\rangle$ электронов в металле при температуре $T=0\text{К}$, если уровень Ферми $\varepsilon_f=7\text{эВ}$.

7. Металл находится при температуре $T=0\text{К}$. Определить, во сколько раз число электронов с кинетической энергией от $\varepsilon_f/2$ до ε_f больше числа электронов с энергией от 0 до $\varepsilon_f/2$.

8. Электроны в металле находятся при температуре $T=0\text{К}$. Найти относительное число $\Delta N/N$ свободных электронов, кинетическая энергия которых отличается от энергий Ферми не более чем на 2 %.

9. Оценить температуру $T_{\text{кр}}$ вырождения для калия, если принять, что на каждый атом приходится по одному свободному электрону. Плотность ρ калия 860 кг/м³.

10. Определить отношение концентрации n_{max} электронов в металле (при $T=0\text{К}$), энергия которых отличается от максимальной не более чем на $\Delta\varepsilon$, к концентраций n_{min} электронов, энергий которых не превышают значения $\varepsilon=\Delta\varepsilon$; $\Delta\varepsilon$ принять равным $0,01\varepsilon$.

11. Зная распределение $dn(\varepsilon)$ электронов в металле по энергиям, установить распределение $dn(p)$ электронов по импульсам. Найти частный случай распределения при $T=0\text{К}$.

12. По функций распределения $dn(p)$ электронов в металле по импульсам установить распределение $dn(v)$ по скоростям: 1) при любой температуре T ; 2) при $T=0\text{К}$.

13. Определить максимальную скорость v_{max} электронов в металле при $T=0\text{К}$, если уровень Ферми $\varepsilon=5\text{эВ}$.

14. Выразить среднюю скорость $\langle v \rangle$ электронов в металле при $T=0\text{К}$ через максимальную скорость U_{max} . Вычислить $\langle v \rangle$ для металла, уровень Ферми ε которого при $T=0\text{К}$ равен 6эВ.

15. Металл находится при температуре $T=0\text{К}$. Определить, во сколько раз число электронов со скоростями от $U_{\text{max}}/2$ до U_{max} больше числа электронов со скоростями от 0 до $U_{\text{max}}/2$.

16. Выразить среднюю квадратичную скорость $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ электронов в металле при $T=0\text{К}$ через максимальную скорость U_{max} электронов. Функцию распределения электронов по скоростям считать известной.

17. Зная распределение $dn(v)$ электронов в металле по скоростям, выразить $\langle 1/v \rangle$ через максимальную скорость U_{max} электронов в металле. Металл находится при $T=0\text{К}$.

Полупроводники. Эффект Холла

18. Определить уровень Ферми ε_f в собственном полупроводнике, если энергия ΔE_0 активации равна 0,1эВ. За нулевой уровень отсчета кинетической энергий электронов принять низший уровень зоны проводимости.

19. Собственный полупроводник (германий) имеет при некоторой температуре удельное сопротивление $\rho=0,480\text{м}\cdot\text{м}$. Определить концентрацию n носителей заряда, если подвижности b_n и b_p электронов и дырок соответственно равны 0,36 и 0,16 $\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$.

20. Удельная проводимость γ кремния с примесями равна 112См/м. Определить подвижность b_p дырок и их концентрацию n_p , если постоянная Холла $R_H=3,66\cdot 10^{-4}\text{м}^3/\text{Кл}$. Принять, что полупроводник обладает только дырочной проводимостью.

21. В германий часть атомов замещена атомами сурьмы. Рассматривая дополнительный электрон примесного атома по модели Бора, оценить его энергию E связи и радиус r орбиты. Диэлектрическая проницаемость ε германия равна 16.

22. Полупроводник в виде тонкой пластины шириной $l=1\text{см}$ и длиной $L=10\text{см}$ помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B=0,2\text{Тл}$. Вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости пластины. К концам пластины (по направлению L) приложено постоянное напряжение $U=300\text{В}$. Определить холловскую разность потенциалов U_H на гранях пластины, если постоянная Холла $R_H=0,1\text{м}^3/\text{Кл}$, удельное сопротивление $\rho=0,50\text{м}\cdot\text{м}$.

23. Тонкая пластина из кремния шириной $l=2\text{см}$ помещена перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля ($B=0,5\text{Тл}$). При плотности тока $j=2\text{мкА}/\text{мм}^2$, направленного вдоль пластины, холловская разность потенциалов U_H оказалась равной 2,8В. Определить концентрацию n носителей заряда.

6. ОТВЕТЫ

1. $4,57\cdot 10^{27}\text{ м}^{-3}$.

2. 5,41.

3. 0,9.

4. В 3 раза.

5. 1) 0,893 и $-0,119$; 2) 0,999955 и $4,5\cdot 10^{-5}$.

6. $\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{5}\varepsilon_f = 4,2\text{ эВ}$.

7. В 1,83 раза.

8. 0,03.

9. 31,2 кК.

10. В 14,9 раза.

11. $dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2 dp}{\exp\left(\frac{p^2/2m - \varepsilon_f}{kT}\right)}$ (при $T \neq 0\text{ К}$); $dn(p) = \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp$ (при $T = 0\text{ К}$).

12. $dn(v) = \frac{m}{\pi^2 \hbar^3} \frac{v^2 dv}{\exp\left(\frac{mv^2 - 2\varepsilon_f}{2kT}\right)}$ (при $T \neq 0$ К); $dn(v) = \frac{m}{\pi^2 \hbar^2} v^2 dv$ (при $T = 0$ К).

13. $v_{max} = \sqrt{2\varepsilon_f/m} = 1,32$ ММ/с.

14. $\langle v \rangle = \frac{3}{4}v_{max} = 1,09$ ММс.

15. В 7 раз.

16. $\langle v_{max} \rangle = \sqrt{3/5} v_{max}$.

17. $\left\langle \frac{1}{v} \right\rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{v_{max}}$.

18. $-0,05$.

19. $2,5 \cdot 10^{19}$ М⁻³.

20. $3,5 \cdot 10^{-2}$ М²/(В·с); $2 \cdot 10^{22}$ М⁻³.

21. 0,053 эВ; 0,85 нМ.

22. 1,2 В.

23. $5,25 \cdot 10^{16}$ М⁻³.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

ОСНОВНЫЕ ИСТОЧНИКИ

1. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике: Учеб. Пособие для втузов. – 7-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003. – 640 с.
2. Байков Ю. А., Кузнецов В. М., Физика конденсированного состояния. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011, 294 с.
3. В. А. Гольдаде, Л. С. Пинчук, Физика конденсированного состояния. «Беларуская Навука», 2009, 658 с.
4. В. Л. Матухин, В. Л. Ермаков, Физика твердого тела. «Лань», 2010, 224 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Василевский А.С., Физика твердого тела – Москва, «Дрофа», 2010, 206 с.
2. Гуртов В. А., Осауленко Р. Н., Физика твердого тела для инженеров, Москва: «Техносфера», 2007, 520 с.
3. А. И. Ансельм. Введение в теорию полупроводников. «Лань», Санкт-Петербург, 2008, 624 с.
4. Ашкрофт Н., Мермин Н. Физика твердого тела. т. 2, Москва, Мир, 1983, 422 с.
5. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. Москва, «Наука», 1978. 792 с.
6. Займан Дж. Принципы теории твердого тела. М.: Мир, 1974. 416 с.
7. Савельев И.В. Курс физики: Учеб.: В 3-х т. Т. 3: Квантовая оптика. Атомная физика. Физика твердого тела. Физика атомного ядра и элементарных частиц.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 304 с.