

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 20.01.2021 15:07:07
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники



ПРЕДСТАВИТЕЛЬСТВО
ПРОВЕРЯЮ
ПОДПИСАЮ
ПОДТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

« *октябрь* » 2016 г.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

Методические указания к выполнению лабораторной работы для студентов
направления подготовки 09.03.01 по дисциплине
"Основы теории цепей и сигналов»

Курск 2016

УДК 621.396.4

Составители: В.И. Иванов, М.В. Бобырь

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Пиккиев В.А.*

Спектральный анализ периодических сигналов: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Основы теории цепей и сигналов» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.И. Иванов, М.В. Бобырь. - Курск: ЮЗГУ, 2016. - 16 с. ил. 5, табл. 6. - Библиогр.: с. 16.

Описывается методика спектрального анализа периодических импульсных сигналов с помощью тригонометрического ряда Фурье. Изложены рекомендации по применению программы для моделирования процессов анализа и синтеза сигналов.

Методические указания соответствуют Федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, учебному плану направления подготовки 09.03.01 Информатика и вычислительная техника, одобренному Ученым советом университета (протокол № 7 «29» февраля 2016 г.).

Предназначены для студентов направления подготовки 09.03.01 очной и заочной формы обучения

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать *12.10.16* . Формат 60*84 1/16.
Усл. печ.л. *0,4* . Уч.-изд.л. *0,6* Тираж 100 экз. Заказ *962* Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

1. Цель работы

Изучение возможности представления периодических сигналов с помощью многочлена Фурье по ортогональной системе тригонометрических функций; исследование влияния числа гармонических составляющих на погрешность аппроксимации сигнала.

2. Основные теоретические положения и расчетные формулы

Периодическую функцию времени $s(t)$ с периодом T можно представить рядом Фурье в системе тригонометрических функций кратных аргументов. В вещественной форме ряд Фурье имеет вид

$$s(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k), \quad (1)$$

где ω_1 – круговая частота, соответствующая частоте сигнала: $\omega_1 = 2\pi/T = 2\pi F_1$.

Ряд (1) описывает периодический сигнал $s(t)$ в виде суммы постоянной составляющей c_0 и гармонических колебаний (косинусоид) с частотами $k\omega_1$, кратными основной частоте ω_1 , с амплитудами c_k и начальными фазами φ_k .

Постоянная составляющая c_0 равна среднему значению сигнала за период

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt. \quad (2)$$

Для того, чтобы определить амплитуду c_k и начальную фазу φ_k каждой гармоники с частотой $k\omega_1$ (k -ой гармоники), представим ее парой гармонических колебаний – косинусоидой и синусоидой той же частоты:

$$c_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) = a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t, \quad (3)$$

где $a_k = c_k \cos \varphi_k$; $b_k = -c_k \sin \varphi_k$.

В синус-косинусной форме ряд Фурье имеет вид

$$s(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t)\}. \quad (4)$$

Значения a_k и b_k для $k = 0, 1, 2, \dots$ можно найти по формулам

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \cos k\omega_1 t dt; \quad (5)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cdot \sin k\omega_1 t dt. \quad (6)$$

После этого вычисляем постоянную составляющую c_0 , амплитуды c_k и начальные фазы φ_k всех гармоник:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}; \quad c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad \varphi_k = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b_k}{a_k}\right), k = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

В табл. 1 указаны диапазоны значений начальной фазы φ_k в зависимости от знака a_k и b_k .

Таблица 1

Знак a_k	Знак b_k	Пределы фазового угла φ_k , град.	Значение фазового угла φ_k , радиан
+	+	$-90 \div 0$	$-\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$
+	-	$0 \div +90$	$-\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}$
-	+	$-180 \div -90$	$-\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} + \pi$
-	-	$+90 \div +180$	$-\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k} + \pi$

Из таблицы видно, что формула для вычисления фазового угла φ_k зависит от знака a_k .

Совокупность амплитуд гармонических составляющих различных частот называют амплитудно-частотным спектром сигнала, а совокупность начальных фаз – фазочастотным спектром. У большинства реальных сигналов частотный спектр бесконечен, но с ростом номера гармоники амплитуда c_k заметно убывает, и ряд (1) можно ограничить конечным числом слагаемых. При этом будет наблюдаться погрешность аппроксимации исходного сигнала $s(t)$ конечным рядом Фурье.

Для вычисления интегралов (2), (4), (5) необходимо иметь аналитические выражения, описывающие сигнал $s(t)$ на интервале времени от 0 до T . Импульсный сигнал характеризуется несколькими параметрами:

- частотой повторения F , или периодом $T = 1/F$;
- амплитудой A ;
- полярностью (знаком A);
- началом переднего фронта t_0 ;
- законом изменения переднего фронта;
- концом переднего фронта t_1 ;
- началом заднего фронта t_2 ;

- законом изменения заднего фронта;
- концом заднего фронта t_3 .

На рисунках 1 – 5 показаны импульсы положительной полярности с различной формой фронтов.

1) Трапецеидальные импульсы

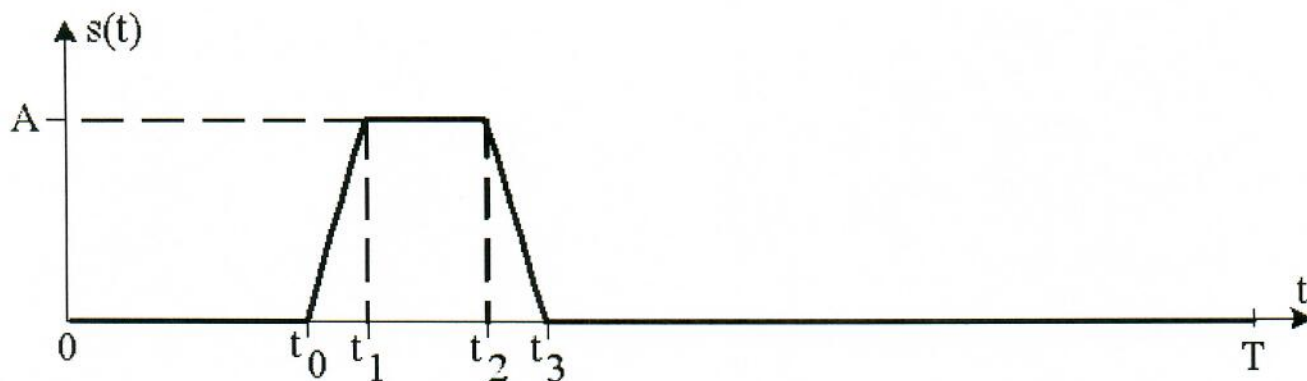


Рис.1. Импульс положительной полярности трапецеидальной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq t < t_0 \\ A \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} & \text{если } t_0 \leq t \leq t_1 \\ A & \text{если } t_1 < t < t_2 \\ A \frac{t_3 - t}{t_3 - t_2} & \text{если } t_2 \leq t \leq t_3 \\ 0 & \text{если } t_3 < t \leq T \end{cases} \quad (8)$$

2) Импульсы синусной формы

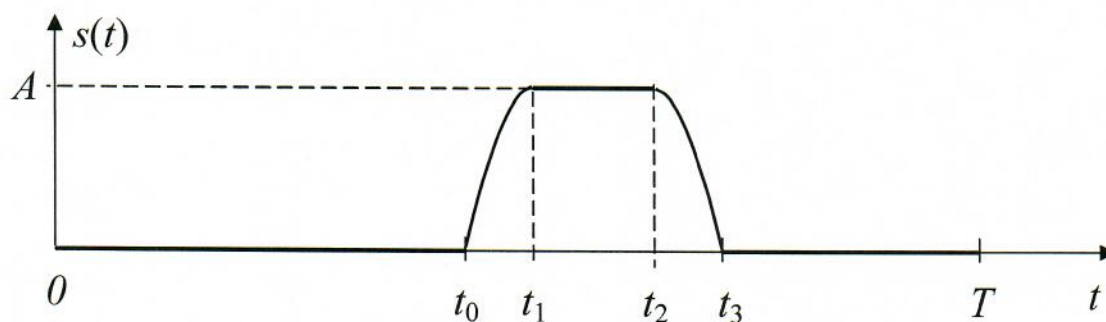


Рис.2. Импульс положительной полярности синусной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq t < t_0 \\ A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right) & \text{если } t_0 \leq t \leq t_1 \\ A & \text{если } t_1 < t < t_2 \\ A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t_3+t-2 \cdot t_2}{t_3-t_2}\right) & \text{если } t_2 \leq t \leq t_3 \\ 0 & \text{если } t_3 < t \leq T \end{cases} \quad (9)$$

3) Синус-квадратные импульсы

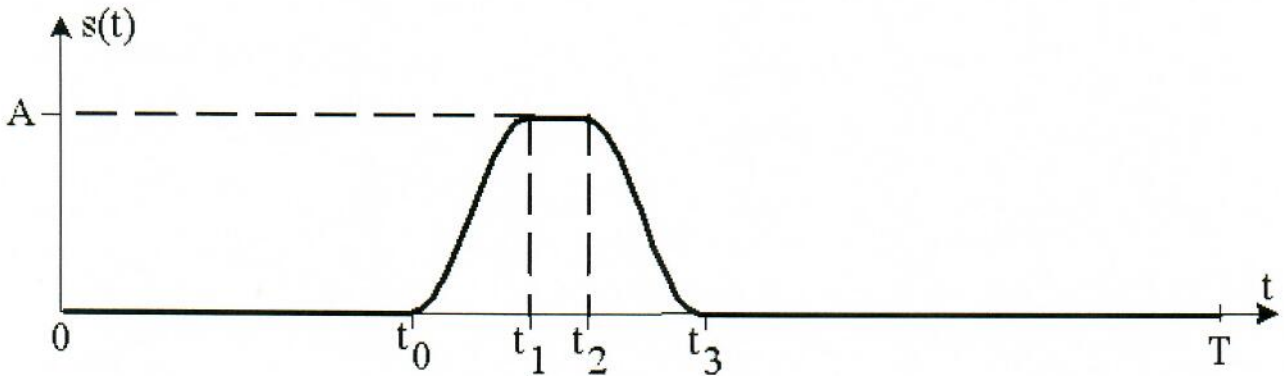


Рис.3. Импульс положительной полярности синус-квадратной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq t < t_0 \\ A \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right) \right)^2 & \text{если } t_0 \leq t \leq t_1 \\ A & \text{если } t_1 < t < t_2 \\ A \cdot \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t_3+t-2 \cdot t_2}{t_3-t_2}\right) \right)^2 & \text{если } t_2 \leq t \leq t_3 \\ 0 & \text{если } t_3 < t \leq T \end{cases} \quad (10)$$

4) Колоколообразные импульсы

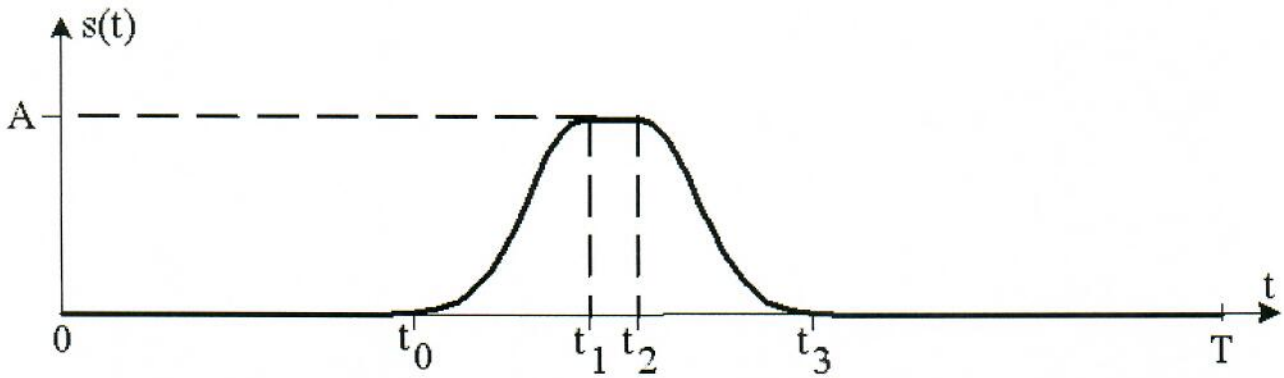


Рис.4. Импульс положительной полярности колоколообразной формы:

$$s(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\left(\frac{t-t_1}{\tau}\right)^2} & \text{если } 0 \leq t \leq t_1 \\ A & \text{если } t_1 < t < t_2 \\ A \cdot e^{-\left(\frac{t-t_2}{\tau}\right)^2} & \text{если } t_2 \leq t \leq T \end{cases} \quad (11)$$

5) Экспоненциальные импульсы

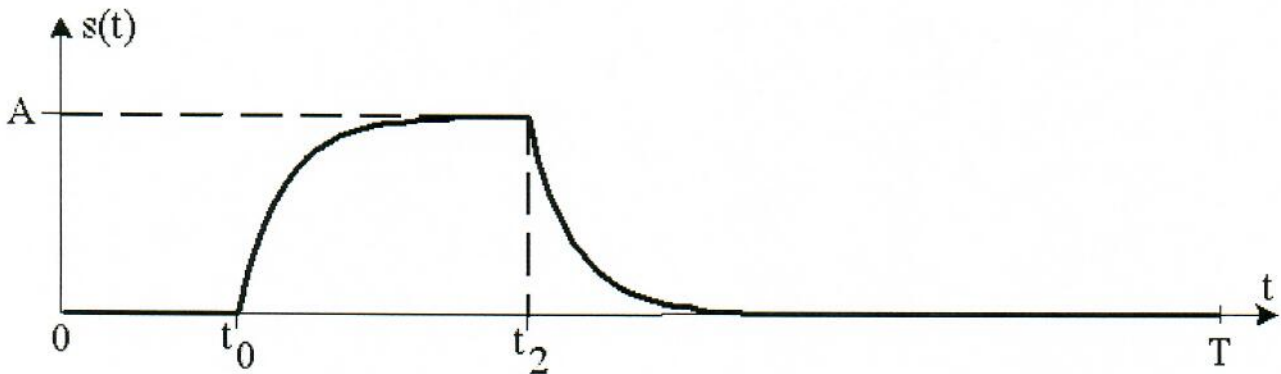


Рис.5. Импульс положительной полярности экспоненциальной формы:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } 0 \leq t < t_0 \\ A \cdot \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right) & \text{если } t_0 \leq t \leq t_2 \\ s(t_2) \cdot e^{-\frac{t-t_2}{\tau}} & \text{если } t_2 < t \leq T \end{cases} \quad (12)$$

Импульсы каждой из перечисленных выше форм могут иметь как положительную, так и отрицательную полярность. Во время отрицательного импульса значения сигнала будут принимать отрицательные значения.

Вычисление постоянной составляющей c_0 , амплитуд гармоник, c_1, c_2, c_3, \dots (**амплитудного спектра сигнала**) и набора значений $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ (**фазового**

спектра) требует сложных операций интегрирования по формулам (2), (5), (6). Процедуры интегрирования непрерывного сигнала можно заменить операциями суммирования дискретизированного, т. е. представленного отдельными точками, сигнала.

Спектральный анализ заданного периодического сигнала можно выполнить с помощью математического пакета MathCad. Весь интервал времени $t = [0; T]$ представим $(N + 1)$ точками, а непрерывный сигнал $s(t)$ – последовательностью значений s_n , где $n = [0; N]: \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_N\}$

Число точек N должно быть достаточно большим – около 100. Число N должно быть «удобным» для вычислений. Например, для $T = 1250$ мкс подходит $N = 125$, а для $T = 800$ мкс удобно $N = 80$.

В формулах (7) ... (11) необходимо произвести замены:

$$t_0 \rightarrow n_0 = \frac{t_0 N}{T}; \quad t_1 \rightarrow n_1 = \frac{t_1 N}{T}; \quad t_2 \rightarrow n_2 = \frac{t_2 N}{T}; \quad t_3 \rightarrow n_3 = \frac{t_3 N}{T}; \quad T \rightarrow N.$$

Максимальное количество гармоник, которые можно определить для дискретного сигнала по его $(N + 1)$ отсчетам, равно $\frac{N}{2}$.

3. Программа исследований и порядок работы

3.1. Исследование спектра периодического сигнала

Для спектрального анализа в каждом варианте заданы форма и параметры периодической последовательности импульсов.

Варианты задания

Таблица 2

Импульсы трапецеидальной формы [рис. 1, формула (8)]

Параметры импульсов	№ варианта					
	1	6	11	16	21	26
A	1,5	-1	1	-0,75	2	-1,5
Полярность	+	-	+	-	+	-
T, мкс	1000	1250	800	1000	800	1250
t ₀ , мкс	400	350	500	250	200	550
t ₁ , мкс	450	420	550	320	300	630
t ₂ , мкс	550	500	650	370	400	700
t ₃ , мкс	600	570	700	440	500	780

Таблица 3

Импульсы синусной формы [рис. 2, формула (9)]

Параметры импульсов	№ варианта					
	2	7	12	17	22	27
A	-1	0,8	-1,5	1,2	-2	1,5
Полярность	-	+	-	+	-	+
T, мкс	800	1000	1250	800	1000	800
t ₀ , мкс	500	250	550	200	400	100
t ₁ , мкс	550	320	630	300	450	170
t ₂ , мкс	650	370	700	400	550	250
t ₃ , мкс	700	440	780	500	600	320

Таблица 4

Импульсы синус-квадратной формы [рис. 3, формула (10)]

Параметры импульсов	№ варианта					
	3	8	13	18	23	28
A	1,5	-1,2	0,8	-0,5	1	-2
Полярность	+	-	+	-	+	-
T, мкс	800	1250	1000	1250	800	1000
t ₀ , мкс	100	350	250	350	500	400
t ₁ , мкс	170	430	320	420	550	450
t ₂ , мкс	250	600	370	500	650	550
t ₃ , мкс	320	680	440	570	700	600

Таблица 5

Импульсы колоколообразной формы [рис. 4, формула (11)]

Параметры импульсов	№ варианта					
	4	9	14	19	24	29
A	-1	0,8	-1,5	1,2	-2	1,5
Полярность	-	+	-	+	-	+
T, мкс	800	1000	1250	1250	1000	800
t ₁ , мкс	550	320	630	600	450	170
t ₂ , мкс	650	370	700	680	550	250
τ, мкс	60	70	80	100	80	70

Таблица 6

Импульсы экспоненциальной формы [рис. 5, формула (12)]

Параметры импульсов	№ варианта					
	5	10	15	20	25	30
A	1,5	-1	1	-0,75	2	-1,5
Полярность	+	-	+	-	+	-
T, мкс	1000	1250	800	1000	800	1250
t ₀ , мкс	200	150	200	300	100	350
t ₂ , мкс	600	550	550	650	450	700
τ, мкс	80	100	70	60	50	70

С помощью программы вычислить по формулам (2), (5) и (6) коэффициенты a_k и b_k ($k = 0, \dots, N/2$) синус-косинусной формы ряда Фурье (4). Затем по формулам (7) определить амплитуды гармоник c_k и начальные фазы гармоник φ_k для вещественной формы ряда Фурье (1).

Результаты вычислений коэффициентов a_k и b_k , амплитуд c_k и начальных фаз первых двадцати гармоник φ_k представить в табличной форме.

Построить диаграмму амплитудно-частотного спектра исследуемого периодического сигнала.

3.2. Синтез периодического сигнала конечным рядом Фурье

Представить заданную периодическую последовательность импульсов как конечную сумму гармонических колебаний в форме (1) ряда Фурье.

Количество используемых составляющих K должно соответствовать номеру старшей гармоники, амплитуда которой c_K не превышает заданного уровня первой гармоники c_1 .

Исследовать искажения представления импульсного сигнала усеченным рядом Фурье, если ограничить число K составляющих колебаний номером старшей гармоники, уровень c_K которой не превышает 10 % и 2 % от уровня первой гармоники c_1 .

Временные диаграммы восстановленных по Фурье сигналов привести в отчете.

4. Методические указания

Все процедуры спектрального анализа и гармонического синтеза периодического импульсного сигнала рассмотрим на примере.

Задан периодический импульсный сигнал отрицательной полярности с **синусоидальными фронтами** типа (9).

Параметры импульсов:

амплитуда $A = -1$ В; период $T = 1000$ мкс; $t_0 = 300$ мкс; $t_1 = 370$ мкс;

$t_2 = 430$ мкс; $t_3 = 500$ мкс.

1) Записываем в окне программы исходные данные:

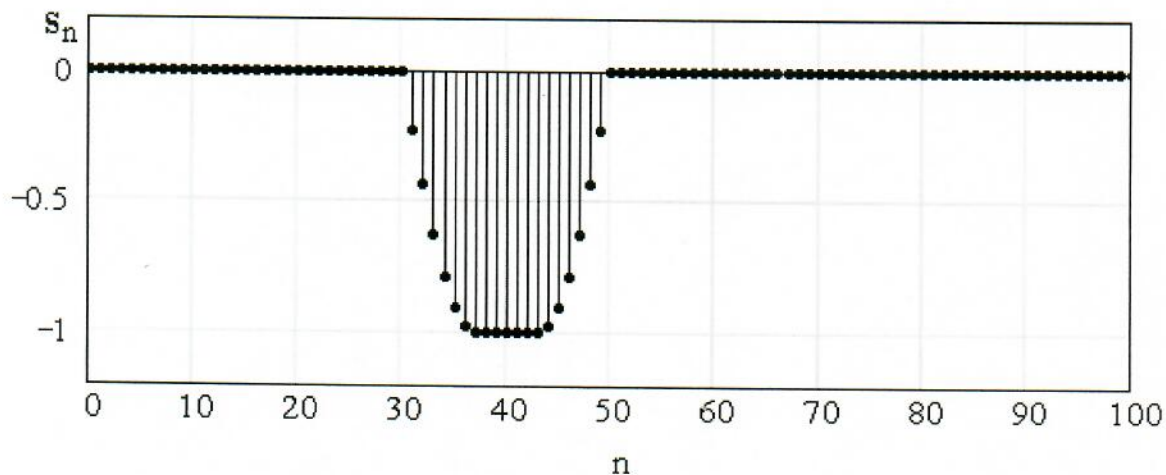
$A := -1$ $N := 100$ $n_0 := 30$ $n_1 := 37$ $n_2 := 43$ $n_3 := 50$

и формулу дискретного сигнала:

$n := 0..N$

$$s_n := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq n < n_0 \\ A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n - n_0}{n_1 - n_0}\right) & \text{if } n_0 \leq n \leq n_1 \\ A & \text{if } n_1 < n < n_2 \\ A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{n_3 + n - 2 \cdot n_2}{n_3 - n_2}\right) & \text{if } n_2 \leq n \leq n_3 \\ 0 & \text{if } n_3 < n \leq N \end{cases}$$

2) С помощью клавиш “ Shift + 2 “ строим график дискретного сигнала:



3) Записываем формулы для вычисления амплитудно-частотного и фазочастотного спектров (суммирование вместо интегрирования):

$$k := 0.. \frac{N}{2}$$

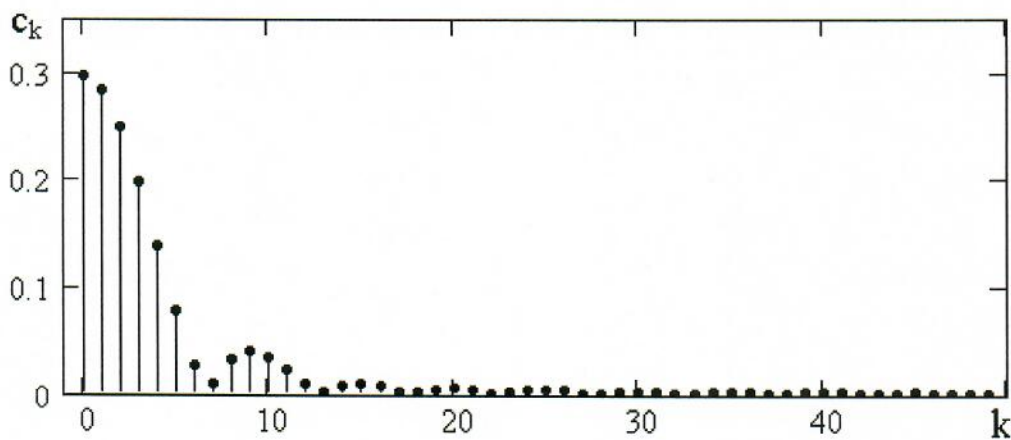
$$a_k := \frac{2}{N} \cdot \sum_{n=0}^N s_n \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot k \cdot n\right) \quad b_k := \frac{2}{N} \cdot \sum_{n=0}^N s_n \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{N} \cdot k \cdot n\right)$$

$$k:=0 \quad c_k := \frac{a_k}{2} \quad k:=1.. \frac{N}{2}$$

$$c_k := \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2} \quad \phi_k := \begin{cases} -\operatorname{atan}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) & \text{if } a_k > 0 \\ -\operatorname{atan}\left(\frac{b_k}{a_k}\right) + \pi & \text{if } a_k < 0 \end{cases}$$

$$k:=0.. \frac{N}{2}$$

4) С помощью клавиш “Shift + 2” строим график амплитудного спектра сигнала c_k :



Спектральная диаграмма имеет «лепестковую» форму. Первый лепесток содержит постоянную составляющую и наиболее мощные гармоники от 1-й до 6-й. Во втором лепестке находятся более слабые гармоники от 8-й до 12-й, еще более слабые гармоники от 14-й до 16-й в третьем лепестке, от 18-й до 21-й – в четвертом лепестке и т. д.

Амплитуды 20 гармоник можно увидеть в таблице (матрице). Для построения матрицы v размерностью в 21 строку и 4 столбца задаем ее описание:

$$k:=0..20 \quad v_{k,0}:=a_k \quad v_{k,1}:=b_k \quad v_{k,2}:=c_k \quad v_{k,3}:=\phi_k$$

После этого по команде “ v = ” появляется изображение матрицы.

	0	1	2	3
0	-0.298	0	0.298	3.142
1	0.231	-0.168	0.285	0.628
2	-0.077	0.238	0.251	4.398
3	-0.062	-0.19	0.199	1.885
4	0.113	0.082	0.139	-0.628
5	-0.079	0	0.079	3.142
6	0.022	-0.016	0.027	0.628
7	$3.516 \cdot 10^{-3}$	-0.011	0.011	1.257
8	0.01	0.032	0.034	-1.257
9	-0.033	-0.024	0.041	2.513
10	0.036	0	0.036	0
11	-0.019	0.014	0.024	3.77
12	$2.954 \cdot 10^{-3}$	$-9.091 \cdot 10^{-3}$	$9.559 \cdot 10^{-3}$	1.257
13	$-6.775 \cdot 10^{-4}$	$-2.085 \cdot 10^{-3}$	$2.192 \cdot 10^{-3}$	1.885
14	$7.4 \cdot 10^{-3}$	$5.376 \cdot 10^{-3}$	$9.147 \cdot 10^{-3}$	-0.628
15	-0.011	0	0.011	3.142
16	$6.423 \cdot 10^{-3}$	$-4.667 \cdot 10^{-3}$	$7.939 \cdot 10^{-3}$	0.628
17	$-8.951 \cdot 10^{-4}$	$2.755 \cdot 10^{-3}$	$2.897 \cdot 10^{-3}$	4.398
18	$6.633 \cdot 10^{-4}$	$2.041 \cdot 10^{-3}$	$2.147 \cdot 10^{-3}$	-1.257
19	$-4.381 \cdot 10^{-3}$	$-3.183 \cdot 10^{-3}$	$5.416 \cdot 10^{-3}$	2.513
20	$6.074 \cdot 10^{-3}$	0	$6.074 \cdot 10^{-3}$	$1.279 \cdot 10^{-15}$

v =

5) Для синтеза сигнала с помощью ряда Фурье ограничимся некоторым числом гармоник K . Рассмотрим два случая:

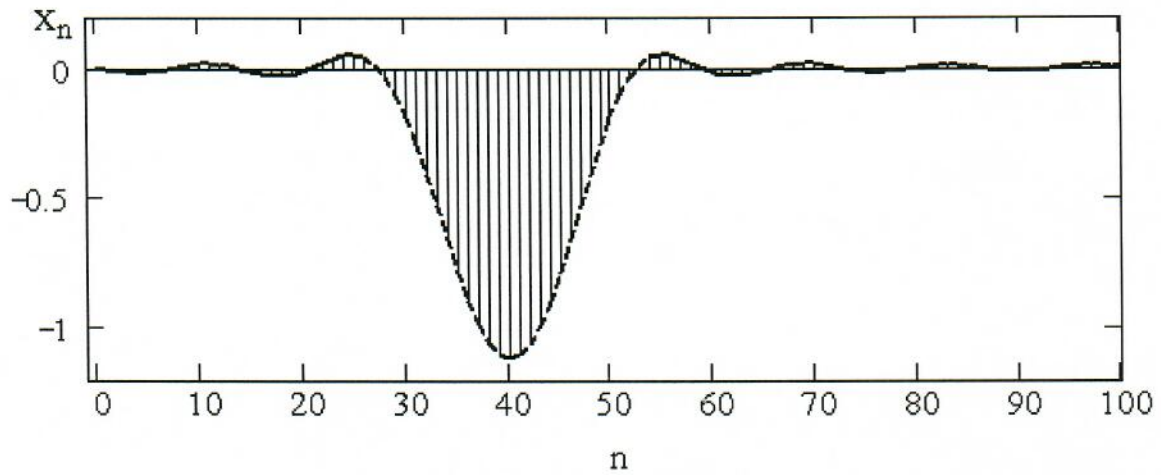
$K = 11$, при этом мы отбрасываем гармоники с амплитудами ниже 10% от 1-й гармоники (среди них самая большая – 9-я гармоника), и

$K = 21$, когда пренебрегаем гармониками ниже 2% от уровня 1-й гармоники.

$$K:=11$$

$$x_n := c_0 + \sum_{k=1}^K c_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{N} + \varphi_k\right)$$

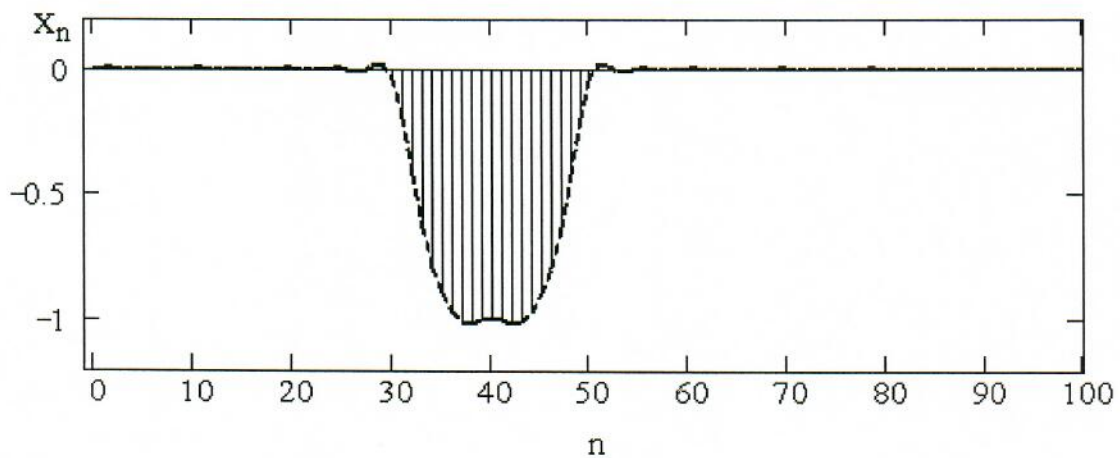
Вид импульса, синтезированного с помощью 11 гармоник



$$K := 21$$

$$x_n := c_0 + \sum_{k=1}^K c_k \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot n}{N} + \varphi_k\right)$$

Вид импульса, синтезированного с помощью 21 гармоники



Как видно, при использовании только одиннадцати низкочастотных гармоник наблюдаются заметные искажения формы исходного импульса: передний и задний фронты затянуты, искажены плоские части сигнала (вершина и нулевая дорожка). Чем больше гармонических составляющих используются для воспроизведения сигнала, тем меньше заметны искажения.

5. Контрольные вопросы

1. Что такое “гармонический” анализ периодических сигналов?
2. Как определяются коэффициенты ряда Фурье в синус-косинусной форме?
3. Как определяются амплитуды и начальные фазы гармоник ряда Фурье в вещественной форме?
4. Какими свойствами обладают спектры периодических сигналов?
5. Как влияет форма сигнала (длительность импульса и период повторения) на спектр периодической последовательности видеоимпульсов?
6. Как изменится спектр периодического сигнала, если период повторения увеличить и устремить к бесконечности?
7. Как оценить реальную полосу частот (ширину спектра) периодического импульсного сигнала?
8. У какого из периодических импульсных сигналов: с короткими или длинными фронтами, – шире спектр? Чем это объяснить?
9. От чего зависит точность аппроксимации периодического сигнала с помощью тригонометрического ряда Фурье?

6. Содержание отчёта

Отчёт должен содержать:

- 1) титульный лист;
- 2) наименование работы и цель исследований;
- 3) результаты моделирования дискретизированной периодической последовательности импульсных сигналов заданной формы;
- 4) таблицу результатов спектрального анализа периодической последовательности импульсов и график спектральной диаграммы сигнала;
- 5) временные диаграммы импульсов, синтезированных с использованием разного числа гармоник в синус-косинусной и вещественной форме ряда Фурье.

Литература

1. Баскаков, С.И. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]: учебник для вузов / С.И. Баскаков. 4-е изд. М.: Высш. шк., 2003. 462 с.
2. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы [Текст]: учебник для вузов / И.С. Гоноровский. 4-е изд. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
3. Иванов, В.И. Основы теории цепей и сигналов [Текст]: учеб. пособие / В.И. Иванов, В.С. Титов. Курск: Курск. гос. техн. ун-т., 2001. 159 с.