

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 28.08.2023 16:08:20

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf754943df4a4851fda56d089

## МИНОБРАЗОВАНИЯ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра космического приборостроения и систем связи

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
О.Г. Локтионова  
« 8 » 08 2023 г.

### ВРЕМЕННАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ВОССТАНОВЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ (ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА)

Методические указания  
по выполнению лабораторной работы  
для студентов, обучающихся по направлению подготовки  
11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»  
по дисциплине «Общая теория связи»

Курск 2023

УДК 621.391 (075)

Составители: Д.С. Коптев

Рецензент

Доктор технических наук, старший научный сотрудник,  
заведующий кафедрой космического приборостроения и систем связи  
*В. Г. Андронов*

**Временная дискретизация и восстановление непрерывных сигналов (теорема Котельникова):** методические указания по выполнению лабораторной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Д.С. Коптев. Курск, 2023. – 12 с.:

Методические указания по выполнению лабораторной работы содержат краткие теоретические сведения о временной дискретизации и восстановлении непрерывных сигналов, лабораторной установке и порядке выполнения лабораторной работы.

Методические указания соответствуют учебному плану по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», а также рабочей программе дисциплины «Общая теория связи».

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 11.03.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи» очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 08.08.2023. Формат 60x841/16.  
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. 0,63. Тираж 100 экз. Заказ 707. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

## 1 Цель работы

- исследование процессов дискретизации и восстановления непрерывных сигналов.

## 2 Краткая характеристика исследуемых цепей и сигналов

Исследуемое устройство (рисунок 1) размещено на сменном блоке ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА и представляет собой дискретизатор (обозначенный на макете как перемножитель сигналов) и набор из трех фильтров – восстановителей с разными частотами среза. Источники исследуемых сигналов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  находятся в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ, а сами сигналы представляют собой суммы гармоник с частотами 2, 4 и 6 кГц. (При необходимости исследуемый сигнал может быть усложнен добавлением еще одного гармонического сигнала с частотой 1кГц с помощью сумматора стенда).

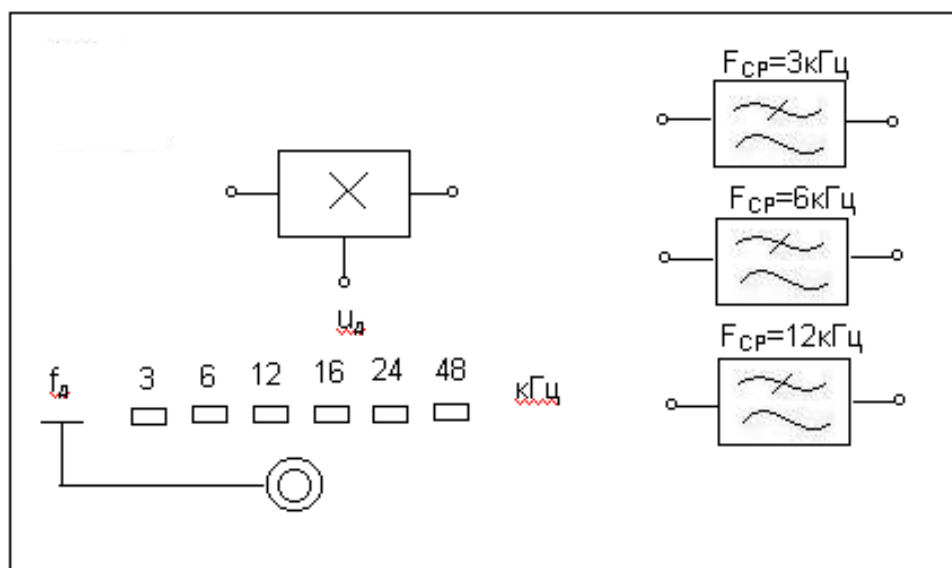


Рисунок 1 – Передняя панель сменного блока ТЕОРЕМА КОТЕЛЬНИКОВА

Дискретизатор, формирующий отсчеты  $s(k\Delta t)$  непрерывного сигнала  $s(t)$ , выполняет функцию перемножителя этого сигнала на короткие импульсы напряжения дискретизации  $u_{\text{дискр}}$ . В данном случае дискретизатор выполнен по схеме аналогового коммутатора, пропускающего входной сигнал  $s(t)$  на выход в течение короткого

времени существования импульсов дискретизации. Временной интервал между соседними отсчетами дискретизированного сигнала  $s(k\Delta t)$  зависит от выбора частоты дискретизации  $f_d$ :

$$\Delta t = 1/f_d.$$

Эта частота может изменяться дискретно при нажатии кнопки  $f_d$ , при этом выбранное значение этой частоты индицируется светодиодом ( $f_d = 3, 6, 12, 16, 24$  и  $48$  кГц). Все упомянутые выше частоты (частоты дискретизации и частоты гармоник исследуемых сигналов) жестко синхронизированы, что упрощает наблюдение процессов на осциллографе.

В качестве фильтров – восстановителей используются три активных ФНЧ четвертого порядка с частотами среза 3, 6 и 12 кГц. Для снятия импульсных характеристик фильтров используется генератор коротких импульсов  $\delta$  – функций (гнезда  $\delta(t)$  в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ).

В соответствии с теоремой Котельникова отсчеты, следующие через интервалы времени  $\Delta t = 1/2F_v$ , где  $F_v$  – верхняя частота сигнала, могут быть преобразованы в исходный сигнал после прохождения через идеальный ФНЧ с частотой среза  $F_{cp} = F_v$ . В работе используются реальные ФНЧ с недостаточно крутыми спадами АЧХ после частоты среза. Поэтому на практике выбирают  $\Delta t$  несколько меньше (а иногда и в несколько раз меньше), чем требуется в теореме Котельникова с тем, чтобы реальный ФНЧ с АЧХ трапецевидной формы позволял выделить спектр исходного сигнала из спектра дискретизированного сигнала, что гарантирует отсутствие искажений при обратном преобразовании (восстановлении) сигнала.

В качестве измерительных приборов используются двухлучевой осциллограф и ПК, работающий в режимах осциллографа и анализатора спектра.

### 3 Домашнее задание

Изучить раздел «Дискретизация непрерывных сигналов во времени» по конспекту лекций и литературе:

- Бабанин И.Г., Коптев Д.С. Общая теория связи. Сигналы и аналоговые системы передачи информации: учеб. пособие / Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск, 2018. – 110 с.

- Коптев Д.С., Бабанин И.Г., Довбня В.Г. Теория радиотехнических сигналов: учеб. пособие / Юго-Зап. гос. ун-т. – Курск, 2019. – 240 с.

#### 4 Основы теории

В соответствии с теоремой Котельникова сигнал, описываемый непрерывной функцией  $s(t)$  с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями  $s(n\Delta t)$ , отсчитанными через интервалы времени  $\Delta t = 1/(2F_B)$ , где  $F_B$  – верхняя частота сигнала (ширина спектра сигнала).

Реальные сигналы конечной длительности имеют бесконечные частотные спектры. Практически ширину спектра исходного сигнала ограничивают некоторой верхней частотой  $F_B$  так, чтобы в диапазоне частот от 0 до  $F_B$  была сосредоточена более 90% его энергии. Эту полосу частот принято называть практической шириной спектра  $\Delta f_{\text{пр}} = F_B$ , а спектральными составляющими сигнала с частотами  $f > F_B$  пренебрегают.

В основе математического описания временной дискретизации непрерывных сигналов лежит периодическая последовательность  $\delta$  – импульсов с периодом  $T = \Delta t = 1/(2F_B)$ . Взятие отсчетов исходного сигнала эквивалентно умножению его временной функции на последовательность  $\delta$  – импульсов. Дискретизированная функция передаваемого сигнала будет представлять собой сигнал с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ).

Отсчеты исходного сигнала могут быть переданы на противоположную сторону любым способом. На приёмной стороне системы связи осуществляется восстановление исходного сообщения по принимаемой последовательности отсчётов.

В соответствии с рядом Котельникова непрерывная функция является разложением её в ряд по ортогональной системе функций отсчета вида  $(\sin x)/x$ :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin \Omega_B(t - n\Delta t)}{\Omega_B(t - n\Delta t)}.$$

Представление заданной функции  $s(t)$  рядом Котельникова иллюстрируется рисунке 2.

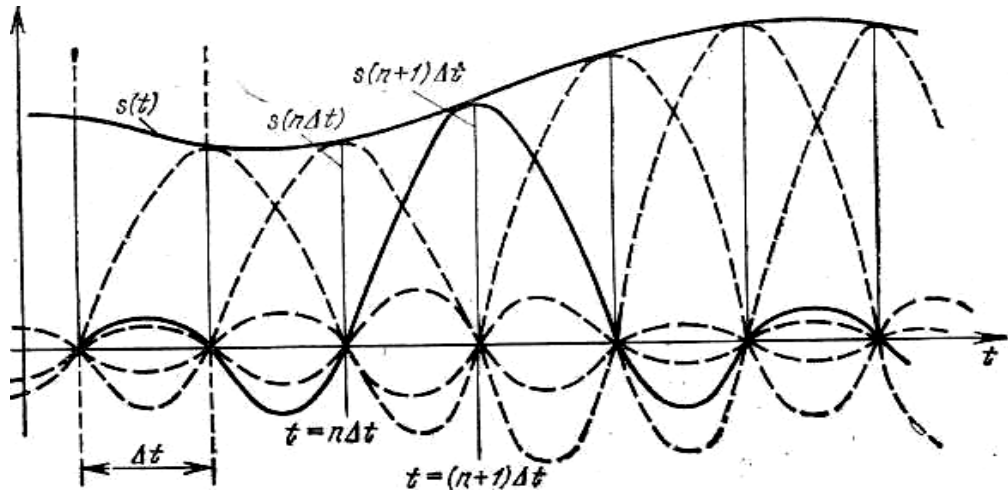


Рисунок 2 – Представление сигнала рядом Котельникова

Таким образом, ряд Котельникова указывает на способ восстановления исходного сигнала по последовательности отсчетов путем формирования для каждого отсчета  $s(n\Delta t)$  функции  $\varphi_n(t) = \sin \Omega_B(t - n\Delta t) / \Omega_B(t - n\Delta t)$  с соответствующей амплитудой и последующим суммированием всех функций. Техническим устройством, формирующим отклик вида  $(\sin x)/x$  при воздействии  $\delta$  – импульса, является идеальный фильтр нижних частот (ФНЧ) с полосой пропускания, равной  $F_B$ .

Процесс восстановления исходной функции по последовательности отсчетов на приёмной стороне показан на рисунке 3. На вход ФНЧ через интервалы времени  $\Delta t$  поступают короткие импульсы с амплитудами, соответствующими (пропорциональными) отсчетам  $s(n\Delta t)$ . Напряжение на выходе ФНЧ будет представлять собой сумму его откликов на каждый из входных импульсов. В моменты времени  $n\Delta t$  только один из откликов (на данный импульс) не равен нулю и максимален, а отклики от всех других импульсов отсчета равны нулю. В остальные промежуточные моменты времени  $(n - 1)\Delta t < t < (n + 1)\Delta t$  суммируется бесконечное количество откликов.

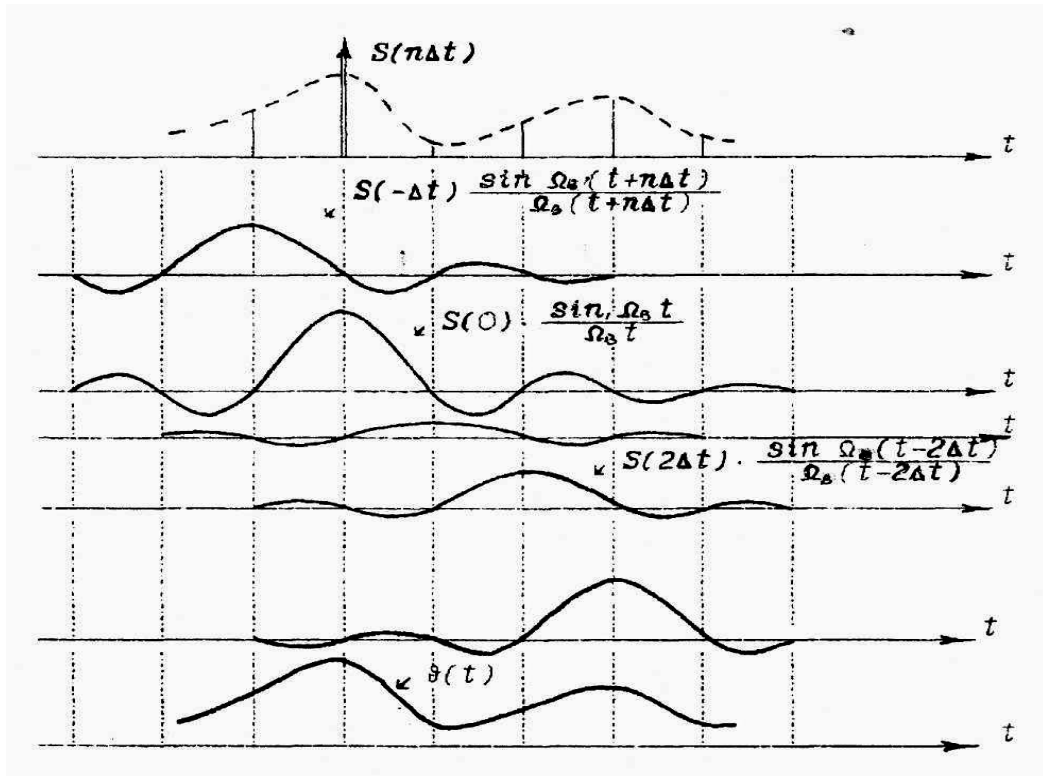


Рисунок 3 – Восстановления исходной функции по последовательности отсчётов

При практическом использовании теоремы и ряда Котельникова для восстановления непрерывного сигнала по дискретным отсчётам неизбежно будут возникать погрешности восстановления, обуславливающие отличие принятого сигнала  $v(t)$  от передаваемого  $u(t)$ . Наиболее важной причиной этого является отличие характеристик реальных ФНЧ от идеального.

1) У идеального ФНЧ АЧХ  $K(\omega)$  имеет прямоугольную форму, т. е.:

$$K_{\text{иф}}(\omega) = \begin{cases} K_0 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_B \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_B \end{cases}, \quad (1)$$

а ФЧХ  $\varphi_{\text{иф}}(\omega) = \omega t$  – линейна. То есть идеальный ФНЧ с одинаковым коэффициентом передачи пропускает все частотные составляющие спектра входного сигнала в пределах полосы пропускания  $\Delta\omega_{\text{пр}} = \omega_B$  и полностью отфильтровывает (подавляет) составляющие с частотами  $\omega > \Delta\omega_{\text{пр}}$ .

Реализовать ФНЧ с АЧХ (1) практически невозможно. У реальных ФНЧ АЧХ не обеспечивает резкого ограничения спектра на граничной частоте среза фильтра  $f_{\text{ср}} = F_{\text{в}}$ , а имеет наклонный участок определенной крутизны. Следовательно, в полосу пропускания фильтра будут попадать и внеполосные спектральные составляющие дискретизированного сигнала. Кроме того, реальные ФНЧ в пределах полосы пропускания имеют определённую неравномерность АЧХ. Все это приведет к искажению формы сигнала на выходе ФНЧ, т. е. к увеличению ошибки восстановления.

2) Неидеальность АЧХ и ФЧХ реальных ФНЧ будут вызывать и неполное совпадение их импульсной характеристики:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\omega) e^{-j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega \quad (2)$$

с функцией вида  $\sin \Omega_{\text{в}}(t - n\Delta t) / \Omega_{\text{в}}(t - n\Delta t)$  в моменты времени  $n\Delta t$ . Это приводит к тому, что сигнал на выходе фильтра в моменты времени  $n\Delta t$  определяется не одним отсчетом, а всеми (многими) предшествующими.

3) Реальные фильтры имеют конечную «память» (конечное время запаздывания сигнала на выходе относительно входного  $\delta$  – импульса) и, следовательно, будут суммировать одновременно конечное число отсчетов (вместо бесконечного в случае идеального ФНЧ). Это является причиной увеличения ошибки восстановления.

Количественно погрешность восстановления, характеризующую степень несоответствия восстановленного сигнала  $v(t)$  исходному переданному  $u(t)$ , оценивают величиной относительной среднеквадратической ошибки (СКО):

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{[u(t) - v(t)]^2}{u^2(t)} = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [u(t) - v(t)]^2 dt}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt}. \quad (4)$$



## 5 Лабораторное задание

5.1 Произвести дискретизацию одного из сложных сигналов ( $S_1$ ,  $S_2$  или  $S_3$ ).

5.2 Исследовать спектры исходного и дискретизированного сигналов.

5.3 Исследовать частотные и импульсные характеристики фильтров – восстановителей.

5.4 Исследовать процесс восстановления дискретизированных сигналов.

## 6 Методические указания

### 6.1 Дискретизация сигнала

6.1.1 Выберите один из трех сигналов (например,  $S_1$ ) в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ и подайте его на вход «А» ПК, работающего в режиме спектроанализатора (входы ПК находятся в нижней части стенда справа).

6.1.2 С помощью спектроанализатора ПК получите спектр сигнала и определите его верхнюю частоту ( $F_B$ ).

6.1.3 Рассчитайте требуемую частоту дискретизации  $f_d$  и установите её на макете кнопкой « $f_d$ ».

6.1.4 Соедините входы двухлучевого осциллографа со входом и выходом дискретизатора, установите режим внешней синхронизации осциллографа (от гнезда С1 блока ИСТОЧНИКИ). Вход спектроанализатора подключите к выходу дискретизатора.

6.1.5 Зафиксируйте в отчёте временные диаграммы в следующем порядке (с сохранением масштаба по оси времени):

- исследуемый сигнал  $S(t)$ ;
- сигнал дискретизации (гнездо нижнего входа перемножителя);
- выходной дискретизированный сигнал  $s(k\Delta t)$ .

С экрана монитора ПК зарисуйте спектры перечисленных выше сигналов.

6.1.6 Переключите кнопкой частоту дискретизации  $f_d$  на 1-2 шага выше и ниже выбранного значения  $f_d$ , при этом наблюдайте изменения в осциллограммах и спектрограммах сигнала на выходе дискретизатора. Наиболее характерные случаи зафиксируйте в отчёте.

## 6.2 Исследование фильтров

С целью выбора наилучшего из трех ФНЧ в качестве фильтра - восстановителя необходимо определить частоту среза каждого из них по АЧХ и по импульсной характеристике  $g(t)$ . Кроме того, АЧХ фильтров необходима для последующей коррекции  $f_d$ , а импульсная реакция  $g(t)$  нужна для объяснения процесса восстановления сигнала.

6.2.1 Снятие АЧХ фильтра проводится путем подачи на его вход гармонического сигнала с напряжением 1 В и с частотой 1 кГц от встроенного генератора в блоке ИСТОЧНИКИ СИГНАЛОВ. К выходу фильтра подключите встроенный цифровой вольтметр переменного напряжения или осциллограф. Плавно увеличивая частоту генератора, снимите частотную характеристику  $U_{\text{ВЫХ}} = \varphi(f)$  с шагом 1 – 2 кГц так, чтобы зафиксировать частоту среза  $f_{\text{ср}}$ , на которой  $U_{\text{ВЫХ}}$  окажется в  $\sqrt{2}$  раз меньше, чем на частоте 1 кГц, а также частоты, на которых  $U_{\text{ВЫХ}}$  уменьшится до 0,1 и 0,05 от  $U_{\text{ВЫХ}}$  (1 кГц). Постройте на одном графике АЧХ трёх фильтров и отметьте на них уточненные значения частот среза  $f_{\text{ср}}$ . Выберите лучший фильтр - восстановитель для исследуемого сигнала.

6.2.2 Снятие импульсной реакции ФНЧ производится путём подачи на вход фильтра коротких импульсов (с гнезда « $\delta(t)$ » блока ИСТОЧНИКИ). Осциллограмма выходного сигнала будет соответствовать импульсной реакции фильтра  $g(t)$ . Зарисуйте осциллограммы  $g(t)$  для трёх фильтров, фиксируя на них значения «нулей» (рис. 4) по шкале на экране осциллографа с учетом масштаба развёртки (мкс/дел). Определите  $\Delta t'$  для каждого ФНЧ и найдите частоты среза по формуле  $f_{\text{ср}} = 1/(2\Delta t')$ .

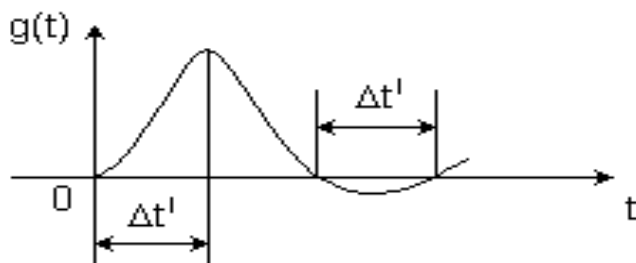


Рисунок 4 – Импульсная характеристика реального ФНЧ

6.2.3 По пунктам 6.2.1 или 6.2.2 выберите фильтр, наиболее пригодный для восстановления дискретизированного сигнала.

### 6.3 Восстановление дискретизированного сигнала

6.3.1 Сопоставьте спектры, снятые по п. 6.1.6 с АЧХ выбранного фильтра – восстановителя и скорректируйте частоту дискретизации, увеличив её на 1 - 2 шага от расчетного значения с тем, чтобы спектр исходного сигнала  $s(t)$  можно было выделить из спектра дискретизированного сигнала с помощью выбранного реального ФНЧ.

6.3.2 Соедините выход дискретизатора со входом выбранного ФНЧ, установите на макете уточненное в п. 6.3.1. значение  $f_d$ . Подключите один из входов осциллографа ко входу дискретизатора, а второй – к выходу ФНЧ и зафиксируйте в отчёте осциллограммы исходного и восстановленного сигнала.

6.3.3 Изменяя частоту дискретизации на 1 - 2 шага от скорректированного значения  $f_d$ , зафиксируйте наиболее характерные осциллограммы восстановленных сигналов. В отчёте приведите заключение о том, допустимо ли изменять интервал между отсчетами дискретизированного сигнала  $\Delta t$ .

6.3.4 Установите прежнее значение  $f_d$ , замените выбранный ФНЧ на другой, а затем и на третий фильтр. Зафиксируйте в отчёте осциллограммы восстановленных сигналов с указанием  $f_{cp}$  ФНЧ.

6.3.5 Соедините вход дискретизатора с источником периодической последовательности прямоугольных импульсов, в качестве которого используется КОДЕР-1. Установите тумблерами КОДЕРА-1 любую комбинацию из одной единицы и четырех нулей. При этом на выходе КОДЕРА-1 формируются прямоугольные импульсы длительностью 450 мкс с периодом 7650 мкс. Проведя анализ спектра этого сигнала, выберите  $f_d$  и фильтр восстановитель. Зафиксируйте осциллограммы и спектры входного, дискретизированного и восстановленного сигналов.

## 7 Контрольные вопросы

- 1) Каков практический смысл в дискретизации аналоговых сигналов?
- 2) Сформулируйте теорему Котельникова.
- 3) При каких условиях теорема Котельникова гарантирует двойное преобразование сигналов (дискретизация и восстановление) без искажений?

- 4) Могут ли быть дискретизированы и затем восстановлены импульсы прямоугольной формы?
- 5) Каков алгоритм восстановления дискретизированного сигнала?
- 6) Какова роль ряда Котельникова в объяснении процесса восстановления сигнала?
- 7) Какую функцию выполняет ФНЧ?
- 8) С какой целью в работе исследовались спектры исходного и дискретизированного сигналов?
- 9) Можно ли произвольно увеличивать или уменьшать  $\Delta t$  между отсчетами? К чему это может привести?
- 10) В чем отличие идеального и реального ФНЧ?
- 11) С чем связана необходимость корректировать значение частоты дискретизации?
- 12) Какие функциональные узлы необходимы для дискретизации непрерывного сигнала?
- 13) Все ли аналоговые сигналы могут быть:
  - дискретизированы во времени;
  - восстановлены после дискретизации.
- 14) Назовите причины, вызывающие искажения при восстановлении дискретизированных сигналов.