МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
______ О.Г. Локтионова
«25» ______ 2022 г.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ: МЕТОДЫ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Методические указания к лабораторным и практическим занятиям для
студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01
Информатика и вычислительная техника

Курск 2022

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Т.Н. Конаныхина*

Численные методы одномерной минимизации: методы нулевого порядка: методические указания к лабораторным и практическим занятиям для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 Информатика и вычислительная техника/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2022. – 16 с.: ил.17. – Библиогр.: с. 16.

Описывается алгоритмы численного поиска минимума функции одной переменной методами нулевого порядка (прямого поиска). Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 2022. Формат **60 × 84 1/16**.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучение численных алгоритмов одномерной минимизации методами нулевого порядка и получение практических навыков численного решения задач одномерной минимизации.

2. Постановка задачи

Как нам уже известно, что в точках, где функция $f(x)$ достигает максимума или минимума, ее производная $f'(x)$ равна нулю. Мы также знаем, как, пользуясь производной первого порядка, можно установить, что имеет функция $f(x)$ в данной точке $x = x_*$ (стационарной) максимум, минимум или перегиб. Для этого приходится нам вычислять $f'(x)$ при значениях x, близких к x_*, справа и слева от x_*.

Мы знаем также другой метод, при котором к решению задачи привлекается вторая, третья и т.д. производные функции $f(x)$.

Важно отметить, что задача о нахождении того значения x, при котором данная функция $f(x)$ достигает максимума, эквивалентна задаче нахождения минимума функции $-f(x)$.

То есть для этого достаточно поменять знак функции $f(x)$ на противоположный. Поэтому далее мы будем рассматривать только задачи нахождения минимума $f(x)$.

Пусть требуется найти минимум функции $f(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$. Обычно для этого применяют численные методы, при которых решение задачи находится с заданной точностью в результате вычисления конечного числа значений $f(x)$ и ее производных в некоторых точках внутри заданного отрезка $[a_0, b_0]$. Этот интервал называется интервалом неопределенности.

Такие методы делятся на несколько классов. Фактически все эти методы основаны на предположении, что $f(x)$ на отрезке $[a_0, b_0]$ является **унимодальной**. Определение **унимодальности** $f(x)$ дадим чуть позже.

Мы начнем с изучения численных методов одномерной минимизации, в которых используются только значения функции в некоторых точках заданного отрезка $[a, b]$ и не требуются вычисления ее производных. Такие методы носят название **прямых методов** или **методов нулевого порядка**.

Определение. Функция $f(x)$ называется унимодальной на интервале $[a_0, b_0]$, если она достигает глобального минимума на $[a_0, b_0]$ в единственной точке x_*. Причем слева от x_* функция $f(x)$ строго убывает, а справа от x_* — строго возрастает.

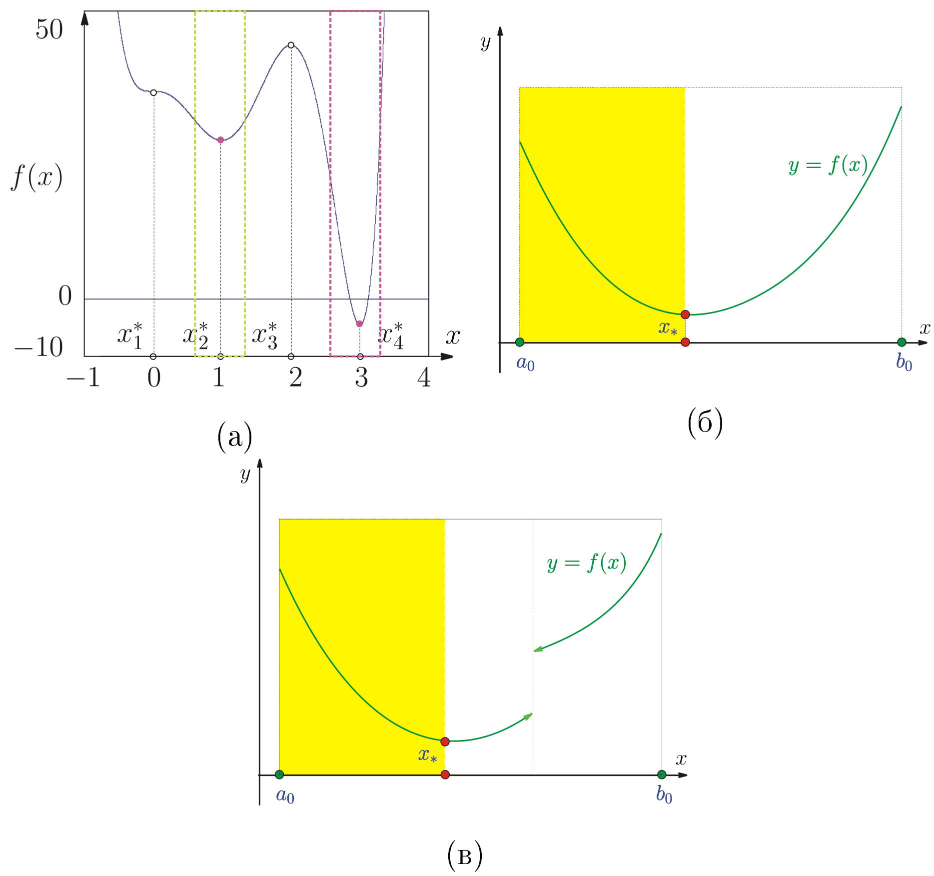


Рис. 1. (а) Функция, содержащая несколько локальных экстремумов и не являющаяся унимодальной. (б),(в) Унимодальные функции

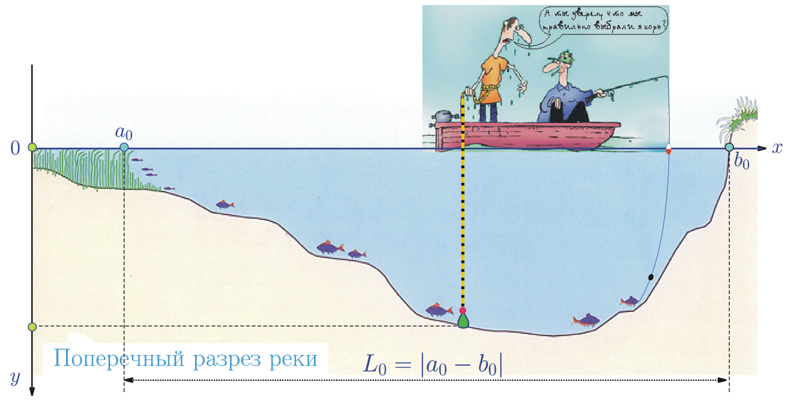
2.1. Основные этапы численного решения задачи

- Выбор начального интервала неопределенности $[a_0, b_0]$. Границы a_0 и b_0 должны быть такими, чтобы функция $f(x)$ была унимодальной.

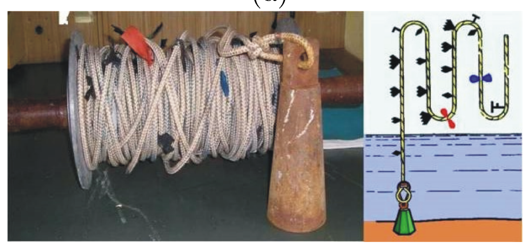
- Уменьшение интервала неопределенности, на котором реализуется конечная последовательность преобразований исходного интервала с тем, чтобы уменьшить его длину до заранее установленной величины.

- Проверка условия окончания поиска. Поиск заканчивается, когда, например, длина $|a_k - b_k|$, $k = 1, 2, \ldots.$ текущего интервала неопределенности $[a_k, b_k]$ оказывается меньше установленной величины.

- Заметим, что выбор критерия останова очень сложен, в особенности для плохо масштабированных задач. В полном объеме этот вопрос требует отдельного обсуждения.



(а)



(б)

Рис. 2. (а) Определение наибольшей глубины в поперечном сечении реки бросанием ручного лота. (б) Ручной лот

2.2. Пример. Определение наибольшей глубины водоема ручным лотом

Простейшим методом решения задачи является **метод перебора**. Разобьем отрезок $[a_0, b_0]$ на N равных частей точками деления

$$x_k = a_0 + \frac{L_0}{N} \cdot k, \quad k = 0, 1, ...N, \quad L_0 = b_0 - a_0 = |a_0 - b_0|.$$

Выполним N измерений бросанием лота в точках x_k и найдем точку для которой глубина наибольшая. Заметим, что погрешность определения наибольшей глубины не превосходит величины

$$\varepsilon = \frac{L_0}{N}.$$

Число измерений (экспериментов) определяется величиной ε. При малых ε, число измерений N может достигать асторномических величин.

Как уменьшить число экспериментов? Рассмотрим далее методы, позволяющие уменьшить число экспериментов.

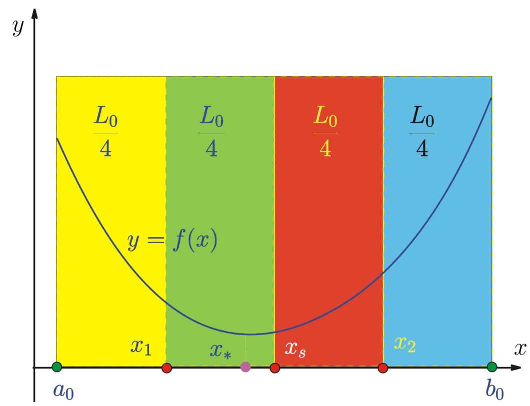


Рис. 3. Выбор пробных точек: $L_0 = |a_0 - b_0|$— длина интервала неопределенности; x_1, x_2, x_s — пробные точки

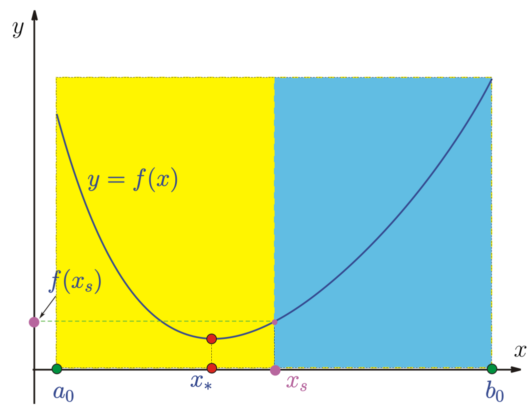


Рис. 4.

2.3. Метод деления интервала пополам

Метод позволяет исключить половину текущего интервала неопределенности на каждой итерации. Иногда этот метод называют **трехточечным поиском на равных интервалах**, поскольку реализация метода основана на выборе трех пробных точек x_1, x_2 и x_s, равномерно распределенных в интервале поиска.

- Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$ и требуемую точность $\varepsilon > 0$ определения точки минимума x_* функции $f(x)$.

- Шаг 2. Вычислить среднюю точку $x_s = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ и длину интервала неопределенности $L_0 = |a_0 - b_0|$. Вычислить значение функции в средней точке, т.е. $f(x_s)$ (рис. 4).

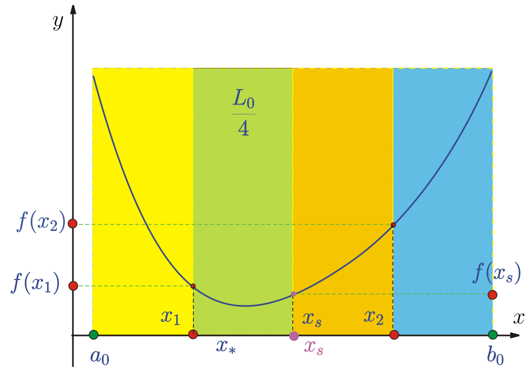
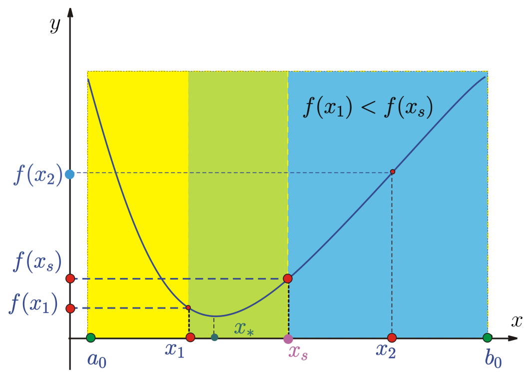
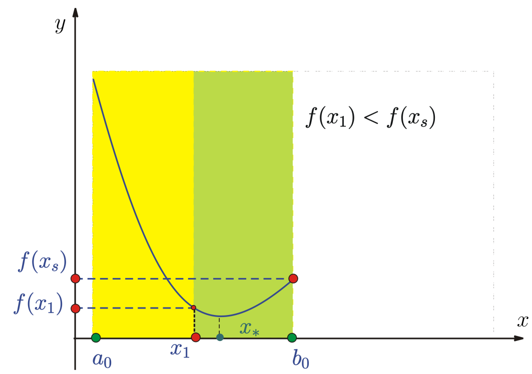


Рис. 5.



(а)



(б)

Рис. 6.

- Шаг 3. Вычислить две пробные точки:

$$x_1 = a_0 + \frac{L_0}{4}; \quad x_2 = b_0 - \frac{L_0}{4}.$$

- Шаг 4. Вычислить значения функции $f(x)$ в пробных точках, т.е. $f(x_1)$, $f(x_2)$ (рис. 5). Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_s)$.

  4.1. Если $f(x_1) < f(x_s)$, то исключить отрезок $[x_s, b_0]$, положив $b_0 \leftarrow x_s$. Средней точкой нового интервала становится x_1: $x_s \leftarrow x_1$ (рис. 6). Перейти к шагу 6.

  4.2. Если $f(x_1) \geqslant f(x_s)$, то перейти к шагу 5.

- Шаг 5. Сравнить $f(x_2)$ и $f(x_s)$.

  5.1. Если $f(x_2) < f(x_s)$, то исключить отрезок $[a_0, x_s]$, положив $a_0 \leftarrow x_s$ и $x_s \leftarrow x_2$ (рис. 7). Перейти к шагу 6.

  5.2. Если $f(x_2) \geqslant f(x_s)$, то исключить отрезки $[a_0, x_1]$ и $[b_0, x_2]$, положив $a_0 \leftarrow x_1$ и $b_0 \leftarrow x_2$, x_s — средняя точка (рис. 8). Перейти к шагу 6.

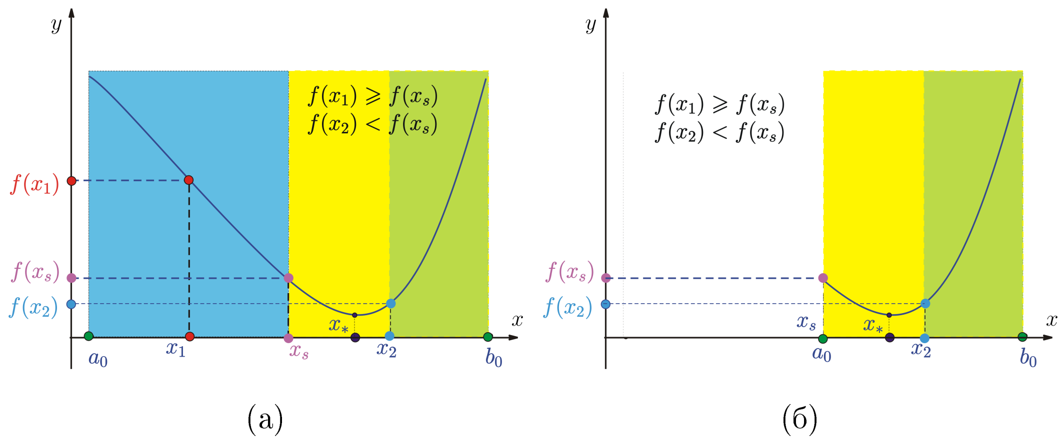


Рис. 7.

- Шаг 6. Вычислить длину текущего интервала неопределенности:

$$L_0 = |a_0 - b_0|.$$

  Если $L_0 < \varepsilon$, то закончить поиск. В качестве приближенного решения задачи можно взять середину последнего интервала поиска. В противном случае вернуться к шагу 3.

- **ЗАМЕЧАНИЕ.** Средняя точка последовательно получаемых интервалов всегда совпадает с одной из пробных точек x_1 и x_2 или x_s, найденных на предыдущей итерации. Следовательно, на каждой итерации требуется не более двух вычислений значения функции.

- Число итераций, необходимое для определения точки минимума x_* с точностью ε находится из неравенства:

$$\frac{L_0}{2^k} \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

  Отсюда

$$k \geqslant \frac{\ln(L_0/\varepsilon)}{\ln 2}.$$

  Здесь L_0 — длина начального интервала неопределенности.

3. Метод дихотомии

Алгоритм метода опирается на анализ значений функции в двух точках. Для нахождения этих точек текущий интервал неопределенности делится

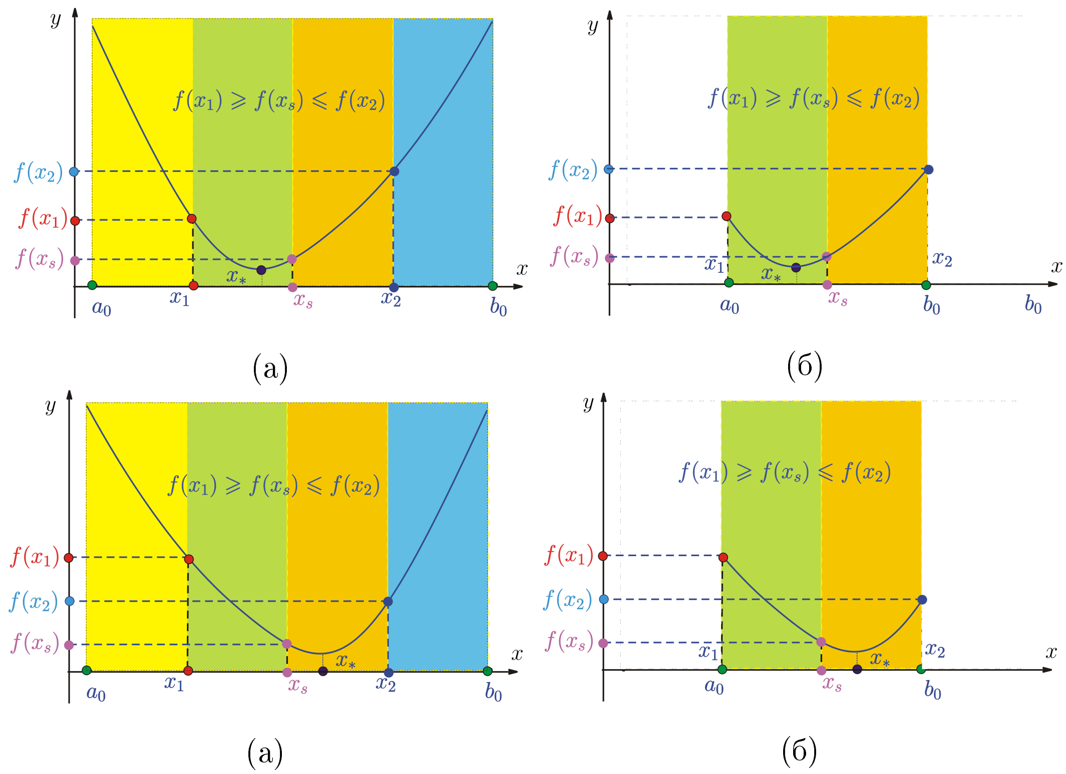


Рис. 8.

пополам, и в обе стороны от середины откладывается отрезок длиной $\dfrac{\delta}{2}$, где δ — малое положительное число.

Условия окончания процесса поиска стандартные: поиск заканчивается, когда длина текущего интервала неопределенности оказывается меньше установленной величины.

Алгоритм включает следующие шаги.

- Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$, требуемую точность $\varepsilon > 0$ определения точки минимума x_* и $\delta > 0$ — малое число.

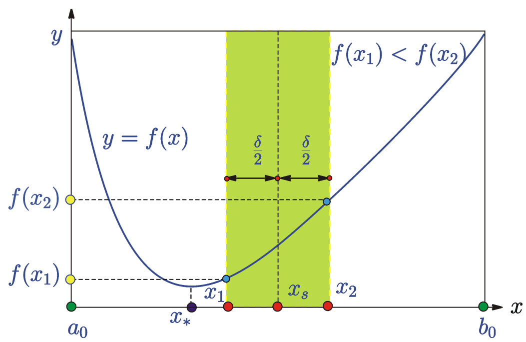
- Шаг 2. Вычислить две пробные точки:

  $$x_1 = \frac{a_0 + b_0 - \delta}{2}; \quad x_2 = \frac{a_0 + b_0 + \delta}{2}$$

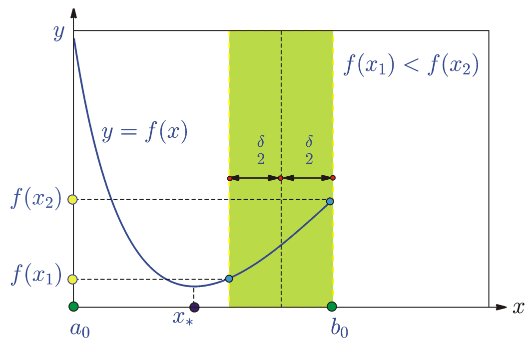
  Вычислить значения функции $f(x)$ в пробных точках, т.е. $f(x_1)$, $f(x_2)$ (см. рис. 9(а)).

- Шаг 3. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

  3.1. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то исключить отрезок $[x_2, b_0]$, положив $b_0 \leftarrow x_2$ (рис. 9(б)). Перейти к шагу 4.

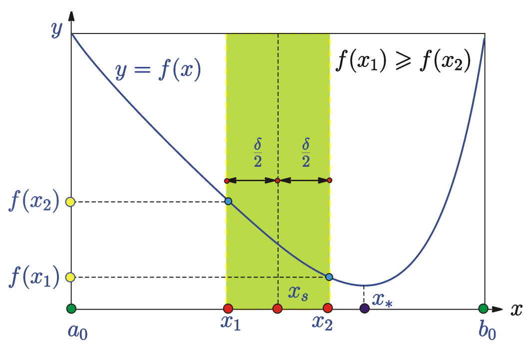


(а)

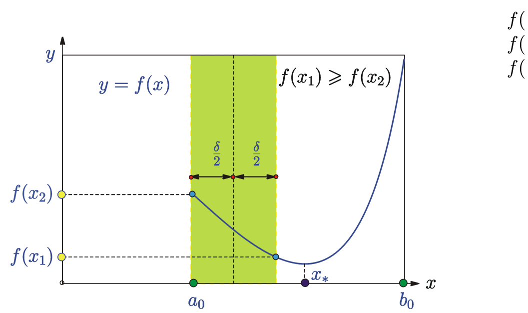


(б)

Рис. 9.



(а)



(б)

Рис. 10.

3.2. Если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то исключить отрезок $[a_0, x_1]$, положив $a_0 \leftarrow x_1$ (рис. 10). Перейти к шагу 4..

- Шаг 4. Вычислить длину текущего интервала неопределености:

$$L_0 = |a_0 - b_0|.$$

Если $L_0 < \varepsilon$, то закончить поиск. В качестве приближенного решения задачи можно взять середину последнего интервала поиска. В противном случае вернуться к шагу 2.

Число δ выбирается на интервале $(0.0; 2\varepsilon)$.

4. Метод золотого сечения

Золотое сечение получило распространение в архитектуре и живописи с XV века, благодаря великому итальянскому ученому и художнику Леонардо да Винчи. Пусть дан отрезок AB. Говорят, что точка C выполняет золотое

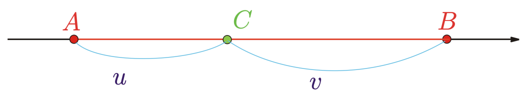


Рис. 11.

сечение AB, если

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}.$$

Определение *Золотым сечением отрезка AB называется такое его деление на две неравные части, при котором отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению большей части к длине меньшей.*

4.1. Некоторые свойства золотого сечения

Обозначим $AC = u$, $BC = v$ (см. рис. 11), а отношение $\Phi = v/u$ (от имени древнегреческого скульптора Фидия). Чему равно отношение Φ для золотого сечения?

Имеем

$$\frac{v}{u} = \frac{v+u}{v}.$$

отсюда

$$\frac{v}{u} = 1 + \frac{u}{v}$$

и

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

Нас интересуют только положительные корни этого уравнения, поэтому

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1.618034.$$

Причем, $1/\Phi = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618034.$

Кроме точки C, существует еще одна точка D, осуществляющая золотое сечение (см. рис. 12):

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AB}{AD}.$$

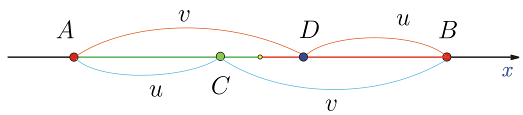


Рис. 12.

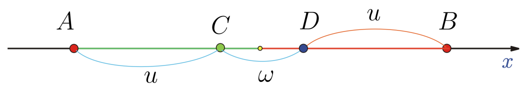


Рис. 13.

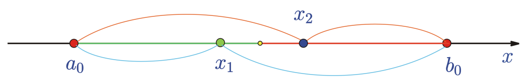


Рис. 14.

Очевидно, как и в предыдущем случае,

$$\frac{AD}{DB} = \Phi.$$

Таким образом, $\dfrac{CB}{AC} = \Phi, \quad \dfrac{AD}{DB} = \Phi$, что эквивалентно:

$$\frac{AB - AC}{AC} = \Phi, \quad \frac{AB - DB}{DB} = \Phi,$$

откуда $(1+\Phi)AC = AB, \quad (1+\Phi)DB = AB$

и значит $AC = DB$.

Утверждение. Точка C выполняет золотое сечение отрезка AD, а точка D – золотое сечение отрезка CB (см. рис. 13).

Доказательство.

Обозначим $AC = DB = u$, $CD = \omega$. По определению золотого сечения

$$\frac{u+\omega}{u} = \frac{2u+\omega}{u+\omega}$$

или $1 + \dfrac{\omega}{u} = 1 + \dfrac{u}{u+\omega}$, откуда $\dfrac{\omega}{u} = \dfrac{u}{u+\omega}$ и $\dfrac{u}{\omega} = \dfrac{u+\omega}{u}$. Отсюда и следует утверждение.

4.2. Алгоритм

- На первом шаге алгоритма рассматриваем начальный отрезок неопределенности $[a_0, b_0]$ и выбираем две пробные точки x_1 и x_2, выполняющие золотое сечение отрезка $[a_0, b_0]$. Эти точки расположены симметрично относительно середины отрезка (рис. 14): $x_1 = a_0 + \dfrac{2}{3+\sqrt{5}}(b_0 - a_0) =$

$a_0 + (2-\Phi)(b_0 - a_0)$;

$x_2 = a_0 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (\Phi - 1)(b_0 - a_0)$.

Здесь

$$\frac{b_0 - a_0}{b_0 - x_1} = \frac{b_0 - x_1}{x_1 - a_0} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; \quad \frac{b_0 - a_0}{x_2 - a_0} = \frac{x_2 - a_0}{b_0 - x_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, чтобы выполнить процедуру сокращения интервала неопределенности $[a_0, b_0]$ необходимо двумя внутренними точками x_1 и x_2 разделить текущий интервал неопределенности на три части.
Эти точки выбирают симметрично относительно середины отрезка $[a_0, b_0$ таким образом, чтобы каждая из них производила золотое сечение $[a_0, b_0$.
Пробные точки x_1 и x_2 находятся по формулам:

$$x_1 = a_0 + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (2-\Phi)(b_0 - a_0);$$
$$x_2 = a_0 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (\Phi - 1)(b_0 - a_0).$$

- Шаг 1. Задать начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$, требуемую точность $\varepsilon > 0$ определения точки минимума x_* целевой функции.

- Шаг 2. Вычислить две пробные точки:

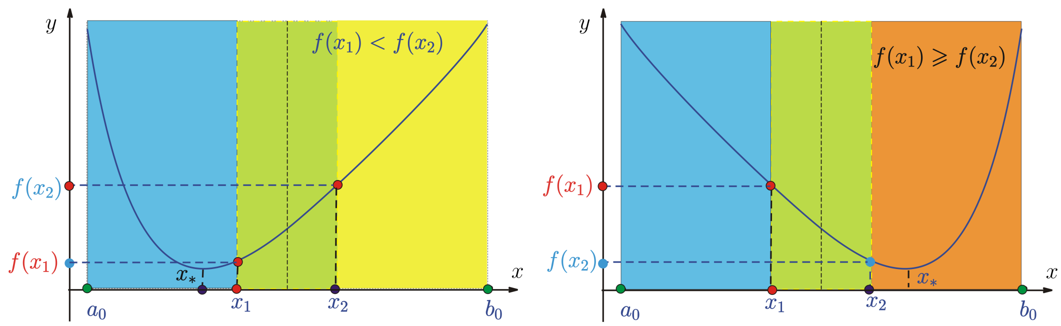
$$x_1 = a_0 + \frac{2}{3+\sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (2-\Phi)(b_0 - a_0);$$
$$x_2 = a_0 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}(b_0 - a_0) = a_0 + (\Phi - 1)(b_0 - a_0)$$

- Шаг 3. Вычислить значения целевой функции в этих пробных точках (рис. 15), т.е.

$$f(x_1), \quad f(x_2).$$

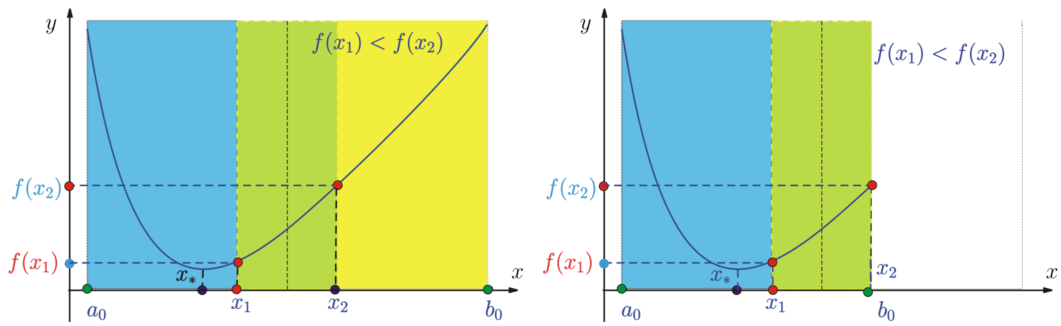
- Шаг 4. Сравнить $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

  4.1. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то исключить отрезок $[x_2, b_0]$, положив $b_0 \leftarrow x_2$, $x_2 \leftarrow x_1$; $f(x_2) \leftarrow f(x_1)$, $x_1 \leftarrow a_0 + \dfrac{2}{3+\sqrt{5}}(b_0 - a_0)$ (рис. 16). Перейти к шагу 5. Таким образом новый интервал неопределенности $[a_0, b_0] = [a_0, x_2]$. Нужно вычислить $x_1 = a_0 + \dfrac{2}{3+\sqrt{5}}(b_0 - a_0)$ и $f(x_1)$, а $f(x_2)$ уже известно.



(а) (б)

Рис. 15.



(а) (б)

Рис. 16.

4.2. Если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то исключить отрезок $[a_0, x_1]$, положив $a_0 \leftarrow x_1$; $x_1 \leftarrow x_2$; $f(x_1) \leftarrow f(x_2)$, $x_2 \leftarrow a_0 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}(b_0 - a_0)$ (рис. 17). Перейти к шагу 5.

Таким образом новый интервал неопределенности $[a_0, b_0] = [x_1, b_0]$. Нужно вычислить $x_2 = a_0 + \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}(b_0 - a_0)$ и $f(x_2)$, а $f(x_1)$ уже известно.

- Шаг 5. Вычислить длину текущего интервала неопределености:

$$L_0 = |a_0 - b_0|.$$

Если $L_0 < \varepsilon$, то закончить поиск. В качестве приближенного решения задачи можно взять середину последнего интервала поиска. В противном случае вернуться к шагу 3.

5. Задания к лабораторным и практическим занятиям

- **1.** Напишите программу вычисления машинного эпсилона masheps. Введите счетчик, который позволит узнать в конце программы, какой сте-

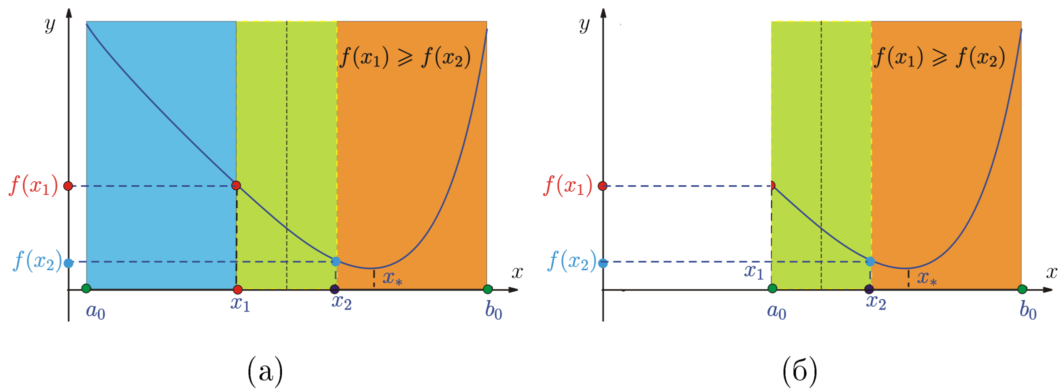


Рис. 17.

пенью двойки является masheps.

Указание. *Алгоритм может выглядеть следующим образом:*

$$masheps := 1$$
$$while \quad 1 + masheps > 1 \quad do$$
$$masheps := \frac{masheps}{2}$$

- **2.** Методами *деления интервала пополам*, *золотого сечения*, *дихотомии* решите задачу одномерной минимизации:

(1) $f(x) = x^3 - \sin x,\ L_0 = [0; 1]$;

(2) $f(x) = x^4 + x^2 + x + 1,\ L_0 = [-1; 0]$;

(3) $f(x) = x\sin(1/x),\ L_0 = [0.2; 1.0]$;

(4) $f(x) = x\sin x + 2\cos x,\ L_0 = [-6; -4]$.

(5) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2},\ L_0 = [1; 2]$;

(6) $f(x) = 10x\ln x - \dfrac{x^2}{2},\ L_0 = [0.1; 1.0]$;

(7) $f(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^3}{3} + 2x,\ L_0 = [-2.5; -1.0]$;

(8) $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x,\ L_0 = [-0.5; 1.0]$.

(9) $f(x) = (x-1)^2\sin x,\ L_0 = [-2.0; 3.0]$;

(10) $f(x) = x^4 + \mathrm{e}^x,\ L_0 = [0.0; 1.0]$.

(11) $f(x) = x^2 - 3x + x\ln x,\ L_0 = [1.0; 2.0]$.

(12) $f(x) = \ln(1 + x^2) - \sin x,\ L_0 = [0.0; \pi/4]$.

(13) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} + x^2 - 8x + 12,\ L_0 = [0.0; 2.0]$.

(14) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \sin x,\ L_0 = [0.0; 1.0]$.

(15) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \mathrm{e}^x,\ L_0 = [0.5; 1.5]$.

(16) $f(x) = x^2 + x + \sin x,\ L_0 = [-1.0; 0.0]$.

(17) $f(x) = x^2 + 3x(\ln x - 1),\ L_0 = [0.5; 1.0]$.

(18) $f(x) = (x+4)^4 - 2x^2,\ L_0 = [-3.0; -2.0]$.

(19) $f(x) = \mathrm{tg} x - \sin x,\ L_0 = [0.0; \pi/4]$.

(20) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 5x + x\ln x,\ L_0 = [1.5; 2.0]$.

(21) $f(x) = x^2 - 2x - 2\cos x,\ L_0 = [0.5; 1.0]$.

(22) $f(x) = \sqrt{1+x^2} - \mathrm{e}^{-2x},\ L_0 = [0.0; 1.0]$.

- Для каждого реализованного метода оценить число итераций, необходимое для определения точки минимума x_* с заданной точностью. ε ($\varepsilon \approx \sqrt{masheps}$). Проведите сравнение методов.

Библиографический список

1. *Аттетков, А. В.* Введение в методы оптимизации [Текст]: учебное пособие / А. В. Аттетков, В. С. Зарубин, А. Н. Канатников. - М. : Финансы и статистика, 2008. - 272 с.

2. *Гончаров, В. А.* Методы оптимизации [Текст] : учебное пособие / В. А. Гончаров. - М. : Юрайт, 2010. - 191 с.

3. *Пантелеев, А. В.* Методы оптимизации в примерах и задачах [Текст] : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. - 2-е изд., испр. - М. : Высшая школа, 2005. - 544 с.