МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра биомедицинской инженерии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«__1__» __03__ 2018 г.

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы для аспирантов направлений подготовки 09.06.01и 12.06.01

Курск 2018

УДК 004.93:61

Составитель: С.А. Филист.

Рецензент
Доктор технических наук, профессор А.Ф. Рыбочкин

МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ : Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: С.А. Филист. - Курск, 2018. - 38 с.

Методические указания по структуре, содержанию и стилю изложения материала соответствуют требованиям, предъявляемым к учебным и методическим пособиям.

Предназначены для аспирантов, обучающихся по направлениям подготовки 12.06.01 «Фотоника, приборостроение, оптические и системы и изделия медицинского назначения» (специализация - «Приборы, системы и аппараты медицинского назначения») и 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (специализация – «Системный анализ, управление и обработка информации(технические и медицинские системы)»)

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 1.03.18. Формат 60x84 1/16.
Усл.печ.л. 1,2. Уч.-изд.л. 1,6 Тираж 100 экз. Заказ: 1427. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

Самостоятельная работа №1
Фрактальная геометрия

Теоретические сведения

Классификация фракталов

1. Геометрические фракталы.

Фракталы этого класса самые наглядные. В двухмерном случае их получают с помощью ломаной (или поверхности в трехмерном случае), называемой генератором. За один шаг алгоритма каждый из отрезков, составляющих ломаную, заменяется на ломаную-генератор в соответствующем масштабе. В результате бесконечного повторения этой процедуры получается геометрический фрактал.

Рассмотрим на примере один из таких фрактальных объектов – триадную кривую Коха.

Построение триадной кривой Коха.

Возьмем прямолинейный отрезок длины 1. Назовем его затравкой. Разобьем затравку на три равные части длиной в 1/3, отбросим среднюю часть и заменим ее ломаной из двух звеньев длиной 1/3.

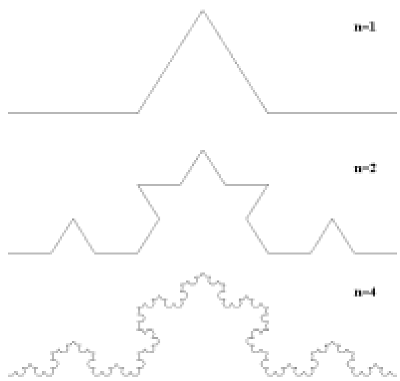


Рисунок 1 - Построение триадной кривой Коха

Мы получим ломаную, состоящую из 4 звеньев с общей длиной 4/3 , - так называем первое поколение. Для того чтобы перейти к следующему поколению кривой Коха, надо у каждого звена отбросить и заменить среднюю часть. Соответственно длина второго поколения будет 16/9, третьего – 64/27. если продолжить этот процесс до бесконечности, то в результате получится

Особенности триадной кривой Коха:

Во-первых, эта кривая не имеет длины – с числом поколений ее длина стремится к бесконечности.

Во-вторых, к этой кривой невозможно построить касательную – каждая ее точка является точкой перегиба, в которой производная не существует, - эта кривая не гладкая.

В-третьих, к триадной кривой Коха традиционные методы геометрического анализа оказались неприменимы.

2. Алгебраические фракталы

Это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах. Наиболее изучены двухмерные процессы. В качестве примера рассмотрим множество Мандельброта.

Математическое описание модели следующее: на комплексной плоскости в неком интервале для каждой точки ***c*** вычисляется рекурсивная функция $Z=Z^2+c$. В модели Мандельброта изменяющимся фактором является начальная точка ***c,*** а параметр ***z,*** является зависимым.

Графическая реализация: начальная точка модели равна нулю. Графически она соответствует центру тела “груши”. Через N шагов заполнятся все тело груши и в том месте, где закончилась последняя итерация, начинает образовываться “голова” фрактала. “Голова” фрактала будет ровно в четыре раза меньше тела, так как математическая формула фрактала представляет из себя квадратный полином. Затем опять через N итераций у “тела” начинает образовываться “почка” (справа и слева от “тела”). И так далее. Чем больше задано числе итераций N, тем более детальным получится изображение фрактала, тем больше будет у него различных отростков. Схематическое изображение стадий роста фрактала Мандельброта представлено на рисунке 2:

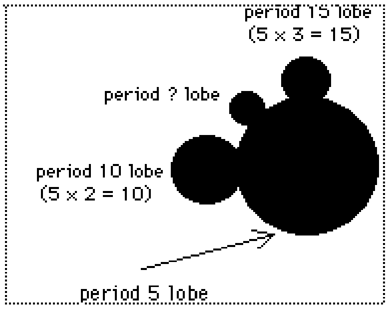


Рисунок 2 - Схема образования фрактала Мандельброта

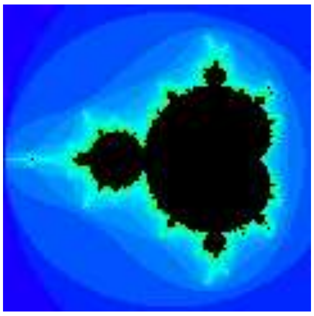


Рисунок 3 - компьютерное изображение фрактала Мандельброта

Модель Джулии (Julia set)

Модель фрактала Джулии имеет то же уравнение, что и модель Мандельброта: $\boldsymbol{Z=Z^2+c}$, только здесь переменным параметром является не ***c***, а ***z.***
Соответственно, меняется вся структура фрактала, так как теперь на начальное положение не накладывается никаких ограничений.

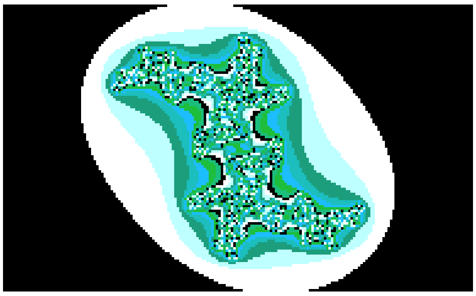


Рисунок 4 - Компьютерное изображение фрактала Джулии

3. Стохастические (случайные) фракталы

Еще одним известным классом фракталов являются стохастические фракталы, которые получаются в том случае, если в итерационном процессе хаотически менять какие-либо его параметры. При этом получаются объекты очень похожие на природные - несимметричные деревья, изрезанные береговые линии и т.д. Двумерные стохастические фракталы используются при моделировании рельефа местности и поверхности моря. Примерами стохастических фракталов являются фрактальные кривые, возникающие в критических двумерных моделях статистической механики, траектория броуновского движения на плоскости и в пространстве, плазма.

Примеры фракталов

КОВЕР СЕРПИНСКОГО

Ковер Серпинского считается еще одной моделью фрактала. Строится он следующим образом: берется квадрат, делится на девять квадратов, вырезается центральный квадрат. Затем с каждым из восьми оставшихся квадратов проделывается подобная процедура. И так до бесконечности. В результате вместо целого квадрата мы получаем ковер со своеобразным симметричным рисунком. Впервые данную модель предложил математик Серпинский, в честь которого он и получил свое название.

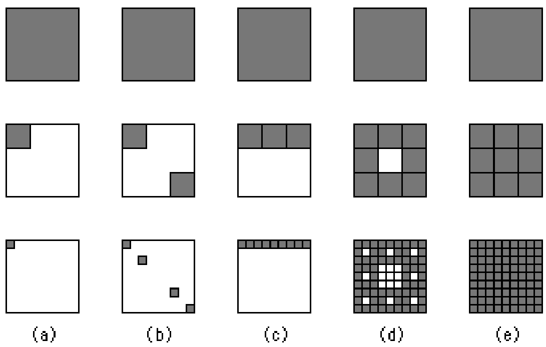


Рисунок 5 - Ковер Серпинского

РЕШЕТКА СЕРПИНСКОГО

Это один из фракталов, с которыми экспериментировал Мандельброт, когда разрабатывал концепции фрактальных размерностей и итераций. Треугольники, сформированные соединением средних точек большего треугольника вырезаны из главного треугольника, образовывая треугольник, с большим количеством дырочек. В этом случае инициатор - большой треугольник а шаблон - операция вырезания треугольников, подобных большему. Так же можно получить и трехмерную версию треугольника, используя обыкновенный тетраэдр и вырезая маленькие тетраэдры.

Рисунок 6 - Решетка Серпинского

ФРАКТАЛЫ ЗВЕЗДА И СНЕЖИНКА

Фракталы получаются из фигуры, сформированной соединением средних точек сторон со средними точками противолежащих сторон в правильном шестиугольнике.

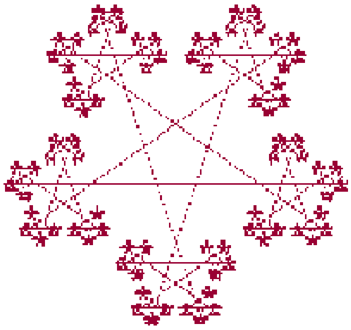


Рисунок 7 - фрактал звезда

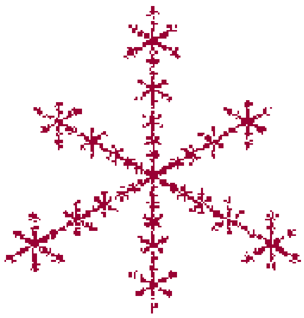


Рисунок 8 - Фрактал Снежинка

ПЯТИУГОЛЬНИК ДАРЕРА

Фрактал выглядит как связка пятиугольников, сжатых вместе. Фактически он образован при использовании пятиугольника в качестве инициатора и равнобедренных треугольников, отношение большей стороны к меньшей в которых в точности равно так называемой золотой пропорции (1.618033989 или 1/(2cos72)) в качестве генератора. Эти треугольники вырезаются из середины каждого пятиугольника, в результате чего получается фигура, похожая на 5 маленьких пятиугольников, приклеенных к одному большому.

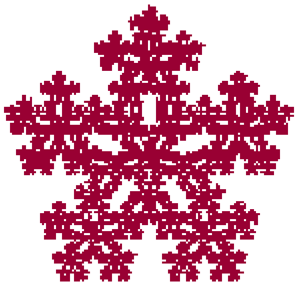


Рисунок 9 - Пятиугольник Дарера

КРИВАЯ ГИЛЬБЕРТА

Этот фрактал очень похож на Фрактал Лабиринт, но при бесконечном количестве итераций, этот фрактал займет всю плоскость.

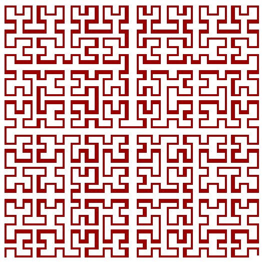


Рисунок 10 - Кривая Гилберта

ФРАКТАЛ КОРОБКА

Это очень простой детерминированный фрактал, который образуется при прибавлении квадратов к вершинам других квадратов.

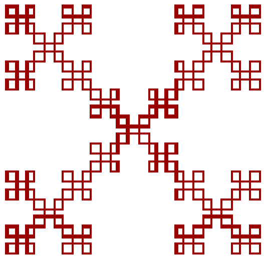


Рисунок 11 - Фрактал коробка

О применении фракталов

Фракталы - область удивительного математического искусства, когда с помощью простейших формул и алгоритмов получаются картины необычайной красоты и сложности! В контурах построенных изображений нередко угадываются листья, деревья и цветы.

Одни из наиболее мощных приложений фракталов лежат в компьютерной графике. Во-первых, это фрактальное сжатие изображений, и во-вторых построение ландшафтов, деревьев, растений и генерирование фрактальных текстур.

Достоинства алгоритмов *фрактального сжатия изображений* - очень маленький размер упакованного файла и малое время восстановления картинки. Фрактально упакованные картинки можно масштабировать без появления пикселизации. Но процесс сжатия занимает продолжительное время и иногда длится часами. Алгоритм фрактальной упаковки с потерей качества позволяет задать степень сжатия, аналогично формату **jpeg**. В основе алгоритма лежит поиск больших кусков изображения подобных некоторым маленьким кусочкам. И в выходной файл записывается только какой кусочек какому подобен. При сжатии обычно используют квадратную сетку (кусочки - квадраты), что приводит к небольшой угловатости при восстановлении картинки, шестиугольная сетка лишена такого недостатка. Новый формат позволяет создавать изображения с возможностью последующего высококачественного масштабирования, причем объем графических файлов составляет 15-20% от объема несжатых изображений.

Склонность фракталов походить на горы, цветы и деревья эксплуатируется некоторыми графическими редакторами, например фрактальные облака из *3D studio MAX*, фрактальные горы в *World Builder*. Фрактальные деревья, горы и целые пейзажи задаются простыми формулами, легко программируются и не распадаются на отдельные треугольники и кубики при приближении.

Фрактальная *монотипия*, или *стохатипия* — направления в изобразительном искусстве, состоящие в получении изображения случайного фрактала.

Последнее время Фракталы стали популярны у «*трейдеров*» для анализа курса фондовых бирж, валютных и торговых рынков.

В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п.

Фракталы используются при моделировании пористых материалов, например, в нефтехимии.

В биологии они применяются для моделирования популяций и для описания систем внутренних органов (система кровеносных сосудов).

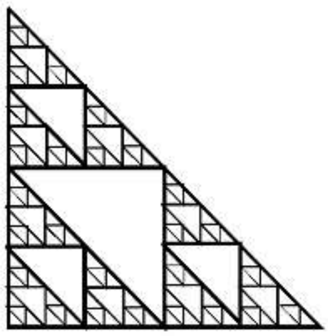
И, конечно же, фракталы применяются непосредственно в самой математике.

Контрольные вопросы

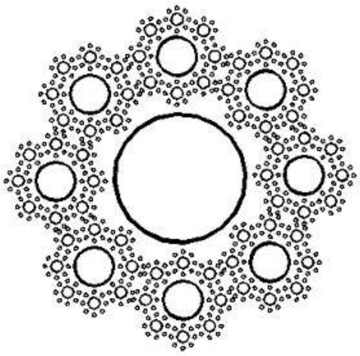
1. Что такое Фрактал?
2. Как классифицируются фракталы?
3. Какие фракталы называются геометрическими?
4. Как строится триадная кривая Коха?
5. Математическое описание модели множества Мандельброта.
6. Какие фракталы называются стохастическими?
7. Примеры известных фракталов.
8. Как фракталы применяются в жизни человека?

Задание

Задание 1. Построить фрактал Серпинского на основе рекурсии.

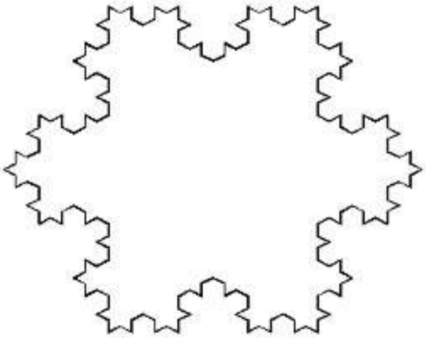


Задание 2. Построить фрактал на основе окружности.



Задание 3. Построить снежинку Коха.

Подфракталом является равносторонний треугольник (с длиной стороны 1/3), основание которого расположено в середине единичного интервала. Базовой фигурой является квадрат.



Оформление отчета

1. Титульный лист;
2. Тема, цель, задание согласно варианту, исходное изображение;
3. Краткая теоретическая справка по формулам перевода изображений в заданные форматы, а также по индивидуальному преобразованию изображения.
4. Экранные формы (компьютерная распечатка работ);

5. Выводы;

Самостоятельная работа №2
Фрактальное исчисление

Теоретические сведения

Самоподобие

Разделим отрезок прямой на N равных частей. Тогда каждую часть можно считать копией всего отрезка, уменьшенного в 1/r раз. Очевидно, N и r связаны отношением Nr = 1 Если квадрат разбить на N равных квадратов (с площадью, в $1/r^2$ раз меньше площади исходного), то соотношение запишется как $Nr^2 = 1$. Соответственно, общая формула соотношения запишется в виде:

$Nr^d = 1$. (2.1)

Множества, построенные выше, обладают целой размерностью. Зададимся вопросом, возможно ли такое построение, при котором показатель d в равенстве (2.1) НЕ является целым, то есть такое, что при разбиении исходного множества на N непересекающихся подмножеств, полученных масштабированием оригинала с коэффициентом r, значение d не будет выражаться целым числом. Ответ - решительное да! Такое множество называется *самоподобным фракталом.* Величину d называют *фрактальной (дробной) размерностью* или *размерностью подобия.* Явное выражение для d через N и r находится логарифмированием обеих частей (2.1):

$$d = \frac{\log N}{\log 1/r}, \qquad (2.2)$$

Логарифм можно взять по любому основанию, отличному от единицы, например по основанию 10 или по основанию e ~ 2,7183.

Снежинка Коха

Граница *снежинки,* придуманной Гельгом фон Кохом в 1904 году (рисунок 2. 1), описывается кривой, составленной их трех одинаковых фракталов размерности d ~ 1,2618. Каждая треть снежинки строится итеративно, начиная с одной из сторон равностороннего треугольника. Пусть K_o - начальный отрезок. Уберем среднюю треть и добавим два новых отрезка такой же длины, как показано на рисунок 2.2. Назовем полученное множество K_1 . Повторим данную процедуру многократно, на каждом шаге заменяя среднюю треть двумя новыми отрезками. Обозначим через K_n фигуру, полученную после n-го шага.

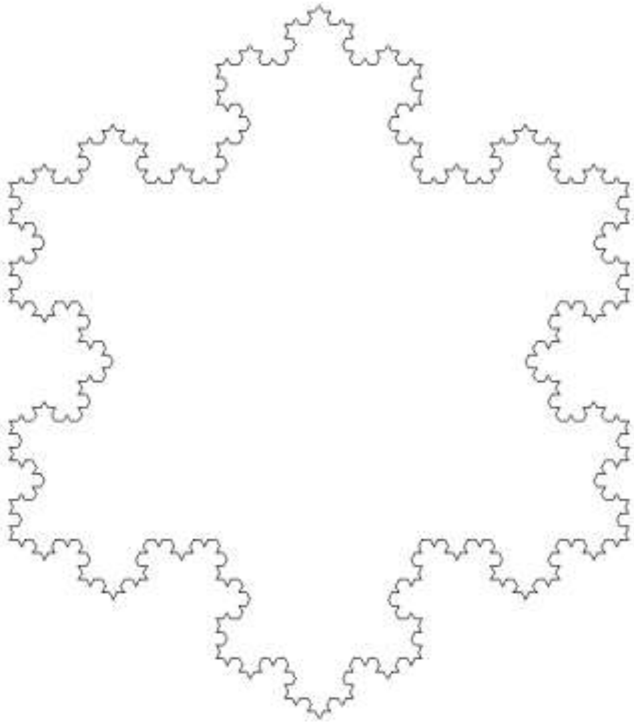


Рисунок 2.1 - Снежинка Коха

Интуитивно ясно, что последовательность кривых K_n при n стремящемся к бесконечности сходится к некоторой предельной кривой К. Рассмотрим некоторые свойства этой кривой.

Рисунок 2.2 - Построение снежинки Коха

Если взять копию К, уменьшенную в три раза (r = 1/3), То всё множество К можно составить из N = 4 таких копий. Следовательно, отношение самоподобия (2.1) выполняется при указанных N и r, а размерность фрактала будет:

d = log(4)/log(3) ~ 1,2618

Еще одно важное свойство, которым обладает граница снежинки Коха - ее бесконечная длина. Это может показаться удивительным, потому что мы привыкли иметь дело с кривыми из курса математического анализа. Обычно гладкие или хотя бы кусочно-гладкие кривые всегда имеют конечную длину (в чем можно убедиться интегрированием). Мандельброт в этой связи опубликовал ряд увлекательных работ, в которых исследуется вопрос об измерении длины береговой линии Великобритании. В качестве модели он использовал фрактальную кривую, напоминающую границу снежинки за тем исключением, что в нее введен элемент случайности, учитывающий случайность в природе. В результате оказалось, что кривая, описывающая береговую линию, имеет бесконечную длину.

Ковер Серпинского

Еще один пример простого самоподобного фрактала - *ковер Серпинского* (рисунок 2.3.), придуманный польским математиком Вацлавом Серпинским в 1915 году. Сам термин *ковер* (gasket) принадлежит Мандельброту. В способе построения, следующем ниже, мы начинаем с некоторой области и последовательно выбрасываем внутренние подобласти. Позднее мы рассмотрим и другие способы, в частности с использованием L-систем, а также на основе итерированных функций.

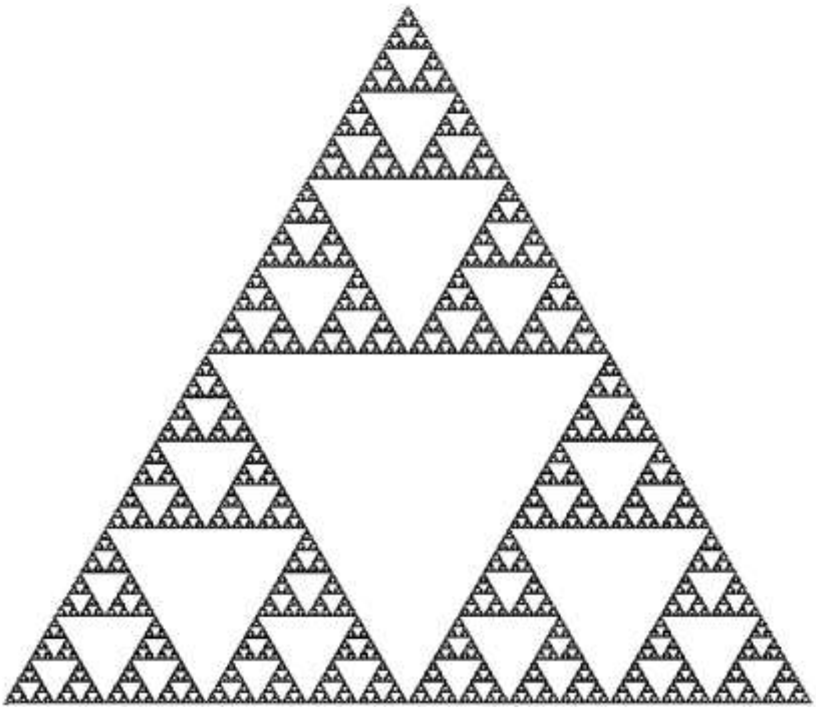


Рисунок 2.3 - Ковер Серпинского

Пусть начальное множество S_0 - равносторонний треугольник вместе с областью, которую он замыкает. Разобьем S_0 на четыре меньшие треугольные области, соединив отрезками середины сторон исходного треугольника. Удалим внутренность маленькой центральной треугольной области. Назовем оставшееся множество S_1 (рисунок 2.4). Затем повторим процесс для каждого из трех оставшихся маленьких треугольников и получим следующее приближение S_2. Продолжая таким образом, получим последовательность вложенных множеств S_n, чье пересечение образует ковер S.

Из построения видно, что весь ковер представляет собой объединение N = 3 существенно не пересекающихся уменьшенных в два раза копий; коэффициент подобия r = S (как по горизонтали, так и по вертикали). Следовательно, S - самоподобный фрактал с размерностью:

d = log(3)/log(2) ~ 1,5850.

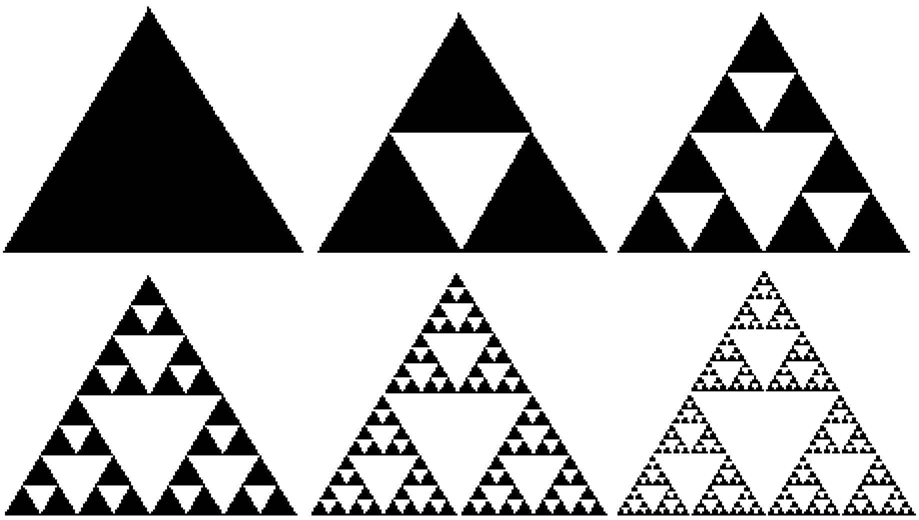


Рисунок 2.4 - Построение ковра Серпинского

Очевидно, что суммарная площадь частей, выкинутых при построении, в точности равна площади исходного треугольника. На первом шаге мы выбросили j часть площади. На следующем шаге мы выбросили три треугольника, причем площадь каждого равна j ^{2} площади исходного. Рассуждая таким образом, мы убеждаемся, что полная доля выкинутой площади составила:

$1/4 + 3*(1/4^2) + 3^2*(1/4^3) + \ldots + 3^{n-1}*(1/4^n) + \ldots$.

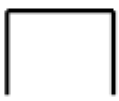
Эта сумма равна 1. Следовательно, мы можем утверждать, что оставшееся множество S, то есть ковер, имеет площадь меры нуль. Это выделяет множество S в разряд «совершенного», в том смысле, что оно разбивает свое дополнение на бесконечное число треугольных областей, обладая при этом нулевой толщиной.

Контрольные вопросы

1. Определения фракталов
2. Самоподобие
3. Дробные размерности
4. Пыль Кантора, кривая Пиано, снежинка Коха, дракон Хэйгена
5. Классификация фракталов
6. Фракталы Мандельброта и Жюлиа
7. Кривая Мандельброта-Гивена

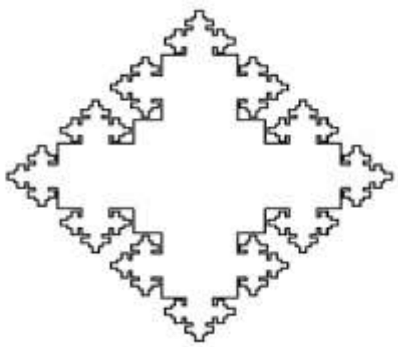
Задание

Задание 1. Построить фрактал на основе кривой Гилберта.

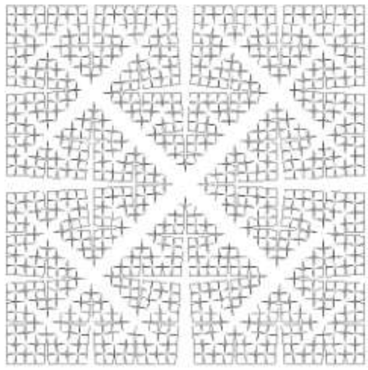
Исходный подфрактал: 

Выполняемые линейные преобразования:

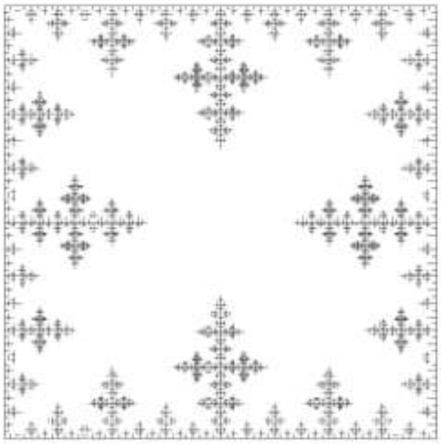
$$\begin{cases} X' = xCos\varphi + ySin\varphi \\ Y' = xSin\varphi + yCos\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} X' = c(x - x_0) - dy + x_0 \\ Y' = d(x - x_0) + cy \end{cases}$$



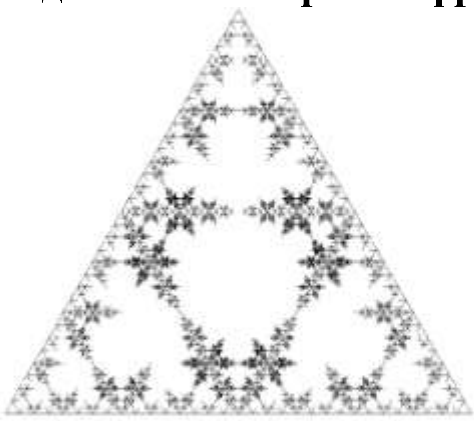
Задание 2. Построить фрактал резаный квадрат.



Задание 3. Построить фрактал ледовый квадрат.



Задание 4. Построить фрактал ледовый треугольник.



Оформление отчета

1. Титульный лист;
2. Тема, цель, задание согласно варианту, исходное изображение;
3. Краткая теоретическая справка по формулам перевода изображений в заданные форматы, а также по индивидуальному преобразованию изображения.
4. Экранные формы (компьютерная распечатка работ);
5. Выводы;

Самостоятельная работа №3
Мультифрактальные меры
Теоретические сведения

Определения фрактала и мультифрактала

Фракталами называются геометрические объекты: линии, поверхности, пространственные тела, имеющие сильно изрезанную форму и обладающие свойством самоподобия.

При описании свойств фрактала важную роль играет такая его характеристика как фрактальная размерность. Дадим общее определение этой величины. Пусть d – обычная Евклидова размерность пространства, в котором находится наш фрактальный объект (d =1 – линия, d = 2 – плоскость, d = 3 – трехмерное пространство). Покроем теперь этот объект целиком d - мерными "шарами" радиуса l . Предположим, что нам потребовалось для этого не менее, чем (lN) шаров. Тогда, если при достаточно малых l величина (lN) меняется с l по степенному закону:

$$N(l) \sim 1/l^D, \qquad (1)$$

то D – называется размерностью Хаусдорфа-Безиковича или фрактальной размерностью этого объекта.

Используя понятие фрактальной размерности, Мандельброт дал более строгое, чем приведенное выше, определение фрактала. Согласно этому определению фрактал представляет собой объект, размерность Хаусдорфа-Безиковича которого больше его топологической размерности (0 – для россыпи точек, 1 – для кривой, 2 – для поверхности и т. д.).

Формулу (2) можно переписать также в виде:

$$D = -\lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln l}, \qquad (2)$$

Это и служит общим определением фрактальной размерности D . В соответствии с ним величина D является локальной характеристикой данного объекта.

Мультифракталы – это неоднородные фрактальные объекты, для полного описания которых, в отличие от регулярных фракталов, недостаточно введения всего лишь одной величины, фрактальной размерности D , а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно. Причина этого заключается в том, что наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D , такие фракталы обладают и некоторыми статистическими свойствами.

Мультифрактальный анализ сигналов

Идея мультифрактального анализа состоит в разложении исследуемого множества со сложной статистикой по множествам однородных фракталов с четко выраженной фрактальной размерностью. Рассмотрим упрощенный способ мультифрактального анализа, основанный на оценке скейлинговых свойств обобщенной структурной функции

$$S_{m,q} = E\left[\left|X_{k+m} - X_k\right|^q\right] = \frac{1}{K-m}\sum_{k=1}^{K-m}\left|X_{k+m} - X_k\right|^q \qquad (3)$$

где q – любое положительное число.

При проведении мультифрактального анализа используется следующее соотношение:

$$S_{m,q} \sim m^{\tau(q)+1} \qquad (4)$$

являющиеся обобщением (4) на мультифрактальные сигналы. Величина τ (q) называется скейлинговой экспонентой. Если сигнал подчиняется модели ОБД, то τ (q) связана с параметром Херста H соотношением:

$$\tau \cdot (q) = Hq - 1, \qquad (5)$$

По известной зависимости τ (q) определяют обобщенные фрактальные размерности

$D_q = \dfrac{\tau(q)}{q-1}$ (размерности Реньи) и спектр сингулярностей (функция мультифрактального спектра) D (h) = qh (q) −τ (q), Где $h = \frac{d\tau}{dq}$ – локальный параметр Херста. Величины

$D_{q=1} = D_1$ и $D_{q=2} = D_2$ называют информационной и корреляционной размерностью

соответственно. Их можно определить по формулам:

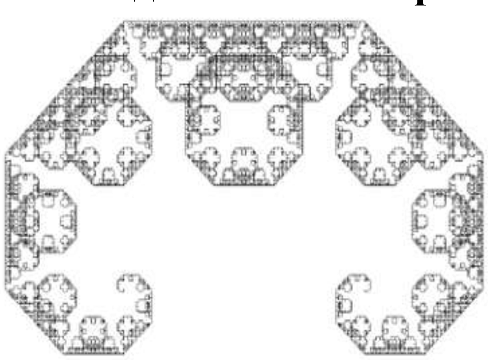
$$D_1 = D(h(1)) \ \text{и} \ D_2 = 2h(2) - D(h(2)), \qquad (6)$$

Контрольные вопросы

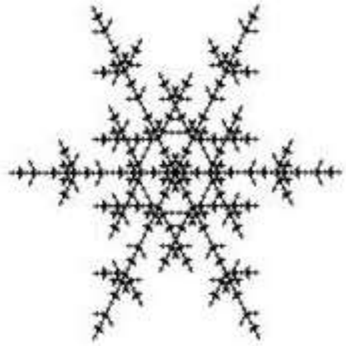
1. Дайте определение фрактала.
2. Сформулируйте определение мультифрактала.
3. В каких пределах меняется фрактальная размерность сигналов?
4. В каких пределах меняется параметр Херста сигналов?
5. В чем состоит физический смысл параметра Херста сигналов?
6. Как определяется структурная функция сигнала?
7. Чем отличаются персистентные и антиперсистентные сигналы?
8. В чем состоит идея мультифрактального анализа?
9. Как определяются размерности Реньи?
10. Как определяются величины информационной и корреляционной размерностей?

Задание

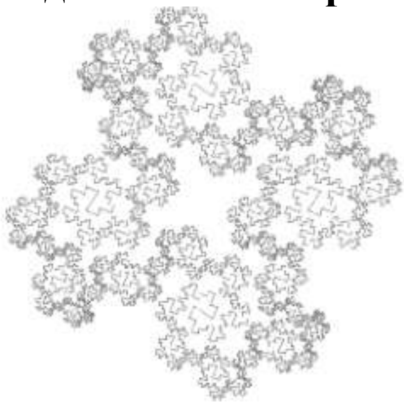
Задание 25. Построить фрактал Леви.



Задание 20. Построить фрактал.



Задание 21. Построить фрактал «остров фьордов».



Оформление отчета

1. Титульный лист;
2. Тема, цель, задание согласно варианту, исходное изображение;
3. Краткая теоретическая справка по формулам перевода изображений в заданные форматы, а также по индивидуальному преобразованию изображения.
4. Экранные формы (компьютерная распечатка работ);
5. Выводы;

Самостоятельная работа №4
Фрактальные временные ряды

Теоретические сведения

К настоящему времени разработаны различные методы, позволяющие проводить численное исследование сложных режимов колебаний. С этой целью может использоваться, например, спектральный анализ. Однако, расчет спектров не дает возможности отличать хаотическую динамику в системах с малым числом степеней свободы от динамики многомерных систем. Визуально очень похожие спектры могут быть получены как для детерминированных хаотических колебаний, так и для случайных процессов.

Определенные преимущества имеет исследование траекторий в фазовом пространстве с помощью сечений Пуанкаре. Но при этом удается получать только качественную информацию, причем, для наглядного представления о геометрии анализируемых объектов размерность фазового пространства не должна быть больше трех.

Образом хаотического режима колебаний в фазовом пространстве является странный аттрактор - геометрически очень сложный объект. Особенности его геометрии можно количественно охарактеризовать с помощью фрактальных размерностей.

Есть несколько методов определения фрактальной размерности для временного ряда. Первое ñ это классический клеточный способ, когда график накрывают серией сеток и определяют фрактальную размерность точно так же, как и для геометрических фракталов. Второй способ для исследования фрактальных временных рядов был предложен Бенуа Мандельбротом и базируется на исследованиях проведенных английским исследователем Херстом и носит название R/S метода. Он построен на анализе размаха параметра (наибольшим и наименьшим значением на изучаемом отрезке) и среднеквадратичного отклонения. И третьим является способ, основанный на изменении длины кривой в зависимости от масштаба. Если кривая близка к фрактальной, то с уменьшением масштаба длина кривой будет возрастать степенным образом. Особое значение фрактального анализа временных рядов в том, что он учитывает поведение системы не только в период измерений, но и его предысторию. Что достаточно хорошо соответствует метафоре фрактальной копировальной машины.

Понятие фрактальной размерности

Существуют различные виды размерностей. Размерность фазового пространства (n) соответствует количеству переменных, определяющих состояние динамической системы (ДС). Если математическая модель ДС задана в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x}, \vec{\mu}), \ \ \vec{x} \in R^n, \vec{\mu} \in R^k, \qquad (1)$$

то n определяется числом данных уравнений. Чтобы охарактеризовать некоторое множество S в пространстве R^n, можно воспользоваться топологической размерностью d_T. Она равна минимальному количеству параметров, которое необходимо указать, чтобы обозначить положение точки на множестве S. Величина d_T (также как и n) принимает только положительные целые значения. Если речь идет о линии, то $d_T=1$; для поверхности $d_T=2$ и т.д.

Другое определение размерности было предложено Хаусдорфом. Пусть S - некоторое множество в пространстве R^n. Предположим, что мы покрываем данное множество кубиками $\{B_i\}$ с величиной ребра, не превышающей некоторое значение ϵ . При этом каждая точка множества S должна обязательно попасть в тот или иной кубик. Тогда мера Хаусдорфа l_δ вводится следующим образом:

$$l_\delta(S) = \lim_{e \to 0} \inf_{K(e)} \sum_{B_i \in K(e)} |B_i|^\delta \qquad (2)$$

Контрольные вопросы

1.Почему Мандельброт назвал фрактальную геометрию «геометрией природы»?

2.Приведите примеры квазифрактальности на молекулярном и субклеточном уровнях.

3.Что такое перколяция, перколяционный кластер, порог перколяции? Что исследует теория перколяции? Дайте описание клетки как перколяционного кластера.

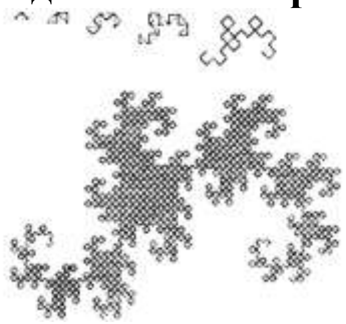
4.Каково практическое использование анализа фрактальной размерности и других нелинейных параметров морфологии клеток?

5.Опишите методологию и раскройте теоретическое значение анализа нелинейных параметров нейронов.

6.Какими морфологическими и функциональными особенностями может определяться фрактальная размерность нейрона?

Задание

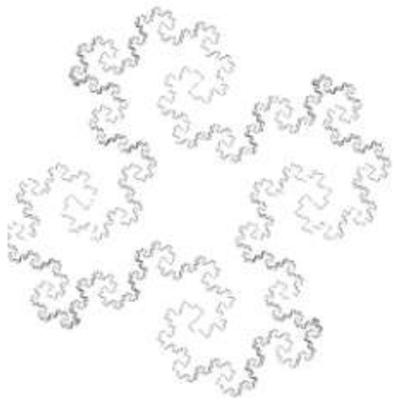
Задание 5. Построить "дракона" Хартера-Хейтуэя



Задание 6. Построить фрактал «лист папоротника».

Задание 7. Построить фрактал «елка».

Задание 8. Построить фрактал Минковского.



Оформление отчета

1. Титульный лист;
2. Тема, цель, задание согласно варианту, исходное изображение;
3. Краткая теоретическая справка по формулам перевода изображений в заданные форматы, а также по индивидуальному преобразованию изображения.
4. Экранные формы (компьютерная распечатка работ);
5. Выводы;

Самостоятельная работа №5
Фрактальные поверхности

Теоретические сведения

Фрактальная поверхность — поверхность, сгенерированная компьютером с использованием стохастического алгоритма, предназначенного для создания фрактального объекта, который имитирует внешний вид природной местности. Иными словами, фрактальная поверхность появляется не в результате жестко заданной процедуры, а, является, скорее, случайным объектом, обладающим свойствами фрактала.

Многие природные объекты обладают в той или иной форме свойством статистического самоподобия, которое может быть смоделировано с помощью фрактальных поверхностей. Кроме того, изменения текстуры поверхности содержат важную информацию об ориентации и наклонах поверхностей, а использование почти самоподобных объектов может помочь смоделировать природные визуальные эффекты. Моделирование участков земной поверхности со сложным рельефом с использованием фрактального броуновского движения впервые предложил французско-американский математик Бенуа Мандельброт.

Поскольку предполагаемым результатом компьютерного моделирования является создание поверхности, а не математической функции, в процессе моделирования в целях получения более внушительного результата часто используются средства, которые могут повлиять на стационарность и даже общее фрактальное поведение такой поверхности.

Компьютерная генерация фрактальных поверхностей

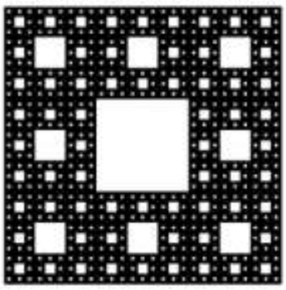
Для компьютерного моделирования фрактальной поверхности используется алгоритм Diamond-Square, который делит квадрат на четыре квадрата меньшей площади, затем случайным образом генерирует карту высот, упорядоченную в виде сетки из точек так, чтобы вся плоскость была покрыта квадратами. Процесс повторяется на четырёх новых квадратах, и так далее, пока желаемый уровень детализации не будет достигнут. Существует ряд алгоритмов генерации фрактальных объектов (например, объединение нескольких октав Simplex noise), способных создавать данные о поверхности, но наиболее распространённым является термин «фрактальная поверхность».

Контрольные вопросы

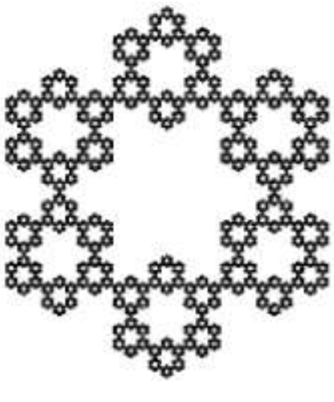
1. Фрактальные модели неравновесных динамических систем
2. Инвариантные преобразования поворота – сжатия – отражения и др.
3. Стохастические фракталы
4. Фрактальные поверхности
5. Фрактальные алгоритмы сжатия информации

Задание

Задание 10. Построить фрактал квадратный ковер Серпинского.



Задание 11. Построить фрактал шестиугольник Серпинского.



Задание 12. Построить фрактал.

Оформление отчета

1. Титульный лист;
2. Тема, цель, задание согласно варианту, исходное изображение;
3. Краткая теоретическая справка по формулам перевода изображений в заданные форматы, а также по индивидуальному преобразованию изображения.
4. Экранные формы (компьютерная распечатка работ);
5. Выводы;

Самостоятельная работа №6
Фрактальный анализ изображений

Теоретические сведения

Фрактальное сжатие изображений.

Первым и очевидным применением фрактальных алгоритмов стало так называемое ***фрактальное сжатие изображений.Фрактальное сжатие изображений*** — алгоритм сжатия изображений с потерями, основанный на применении ***систем итерируемых функций*** к изображениям. (Системы итерируемых функций или просто СИФ - представляет собой систему функций из некоторого фиксированного класса функций, отображающих одно многомерное множество на другое.) Данный алгоритм известен тем, что в некоторых случаях позволяет получить очень высокие коэффициенты сжатия (лучшие примеры — до 1000 раз (при приемлемом визуальном качестве) для реальных фотографий природных объектов, что недоступно для других алгоритмов сжатия изображений в принципе.

Основа метода ***фрактального кодирования*** — это обнаружение самоподобных участков в изображении. Впервые возможность применения теории систем итерируемых функций к проблеме сжатия изображения была исследована Майклом Барнсли (англ. Michael Barnsley и Аланом Слоуном (англ. Alan Sloan).

Один шаг Машины состоит в построении с помощью проецирования по исходному изображению нового. Утверждается, что на некотором шаге изображение перестанет изменяться. Оно будет зависеть только от расположения и характеристик линз и не будет зависеть от исходной картинки. Это изображение называется неподвижной точкой или аттрактором данной СИФ. Collage Theorem (один из принципов фрактального сжатия) гарантирует наличие ровно одной неподвижной точки для каждой СИФ. Поскольку отображение линз является сжимающим, каждая линза в явном виде задает самоподобные области в нашем изображении. Благодаря самоподобию мы получаем сложную структуру изображения при любом увеличении.

Наиболее известны два изображения, полученных с помощью СИФ: треугольник Серпинского и папоротник Барнсли. Первое задается тремя, а второе - пятью аффинными преобразованиями (или,

в нашей терминологии, линзами). Каждое преобразование задается буквально считанными байтами, в то время, как изображение, построенное с их помощью, может занимать и несколько мегабайт.
Папоротник Барнсли (слева) и треугольник Серпинского (справа).

Становится понятно, как работает архиватор, и почему ему требуется так много времени. Фактически, фрактальная компрессия - это поиск самоподобных областей в изображении и определение для них параметров аффинных преобразований.

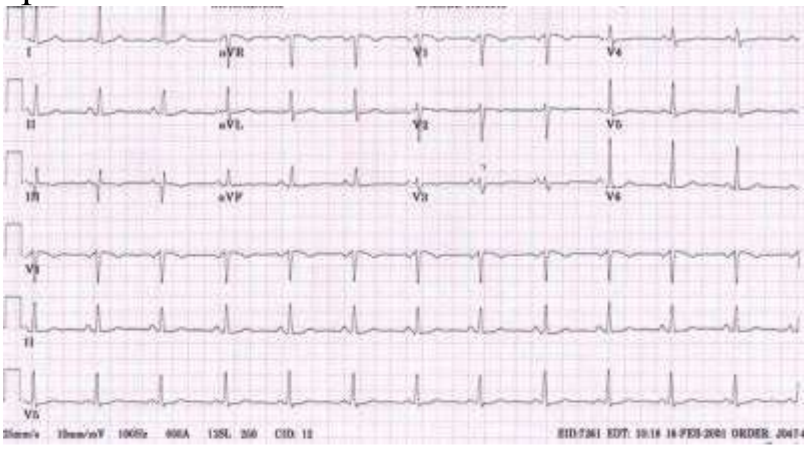
В худшем случае, если не будет применяться оптимизирующий алгоритм, потребуется перебор и сравнение всех возможных фрагментов изображения разного размера. Даже для небольших изображений при учете дискретности мы получим астрономическое число перебираемых вариантов. Даже резкое сужение классов преобразований, например, за счет масштабирования только в определенное число раз, не позволит добиться приемлемого времени. Кроме того, при этом теряется качество изображения. Подавляющее большинство исследований в области фрактальной компрессии сейчас направлены на уменьшение времени архивации, необходимого для получения качественного изображения.

Применение фракталов в медицине.

На данное время фракталы находят и вероятно будут находить применение в медицине. Сам по себе человеческий организм состоит из множества фракталоподобных структур: кровеносная система, мышцы, бронхи и т.д.

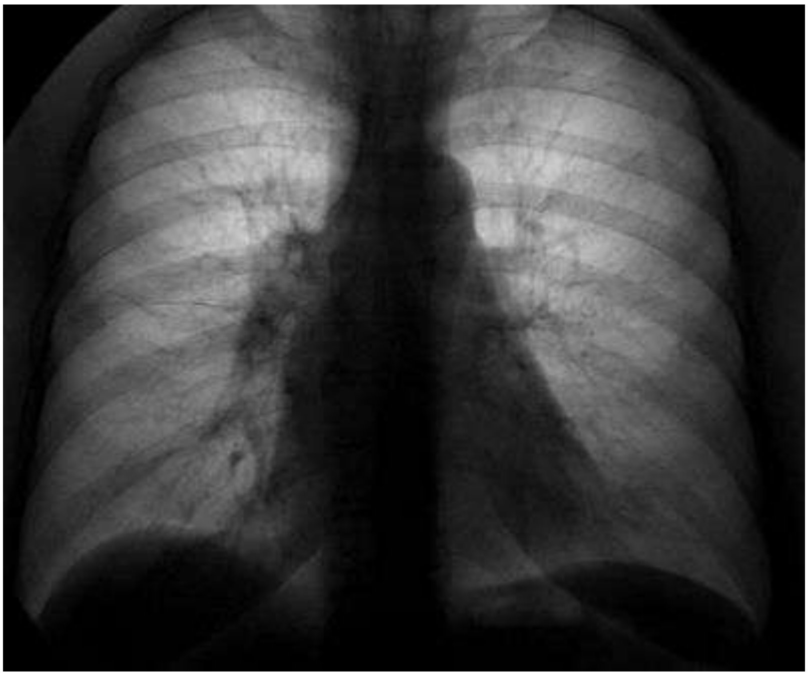
Примеры фракталоподобных структур в организме человека: бронхи, сосуды, мышцы.

Поэтому учёные задумались можно ли применять фрактальные алгоритмы для диагностики или лечения каких-либо заболеваний? Оказывается возможно. Например теория фракталов может применятся для анализа электрокардиограмм. В последние годы в развитых странах, несмотря на очевидные успехи в разработке новых лабораторных и инструментальных методов диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний, продолжается их рост. Периоды биоритмов , и, в частности, сердечного ритма, длительностью порядка часа, суток и более, можно изучать традиционными методами гистограммного или спектрального анализа. Однако оценка хроноструктуры величины и ритмов фрактальной размерности, индексов Херста позволяют на более ранней стадии и с большей точностью и информативностью судить о нарушениях гомеостазиса и развитии конкретных заболеваний.



Пример кардиограммы.

Также фракталы могут использоваться (пока на стадии успешных экспериментов) в обработке медицинских рентгеновских изображений.



Пример рентгеновского снимка.

Рентгеновские снимки обработанные с помощью фрактальных алгоритмов дают более качественную картинку а соответственно и более качественную диагностику.

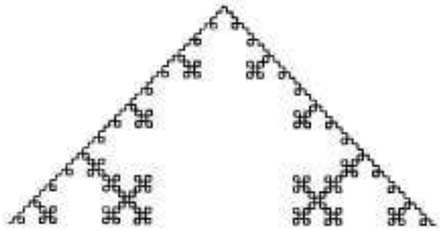
Еще одна область в медицине где активно могут применятся фракталы - это гастроэнтерология. До настоящего времени и зачастую по сей день для диагностики заболеваний ЖКТ используются зондовые методы, которые связаны с необходимостью введения различной толщины зондов, что неприятно как для больного, так и для медперсонала. Кроме того, подобная техника проведения исследований значительно сужает объем их применения ввиду невозможности использования у соматически тяжелых больных, у больных в раннем послеоперационном периоде и т.п. Именно этой причиной объясняется не прекращающийся интерес физиологов и клиницистов к изучению моторно-эвакуаторной деятельности желудка и кишечника, а также к разработке новых методов, позволяющих адекватно, не только качественно, но и количественно оценивать интенсивность и характер моторной активности различных отделов ЖКТ. В качестве дополнительных методов исследования МЭФ применяются методы, основанные на измерении электрической активности органов. Исследования биоэлектрической активности органов ЖКТ положили начало созданию нового метода исследования в медицине, получившего название электрогастроэнтерография. Электрогастроэнтерография — метод исследования, позволяющий оценить биоэлектрическую активность желудка, двенадцатиперстной кишки и других отделов ЖКТ.

Контрольные вопросы

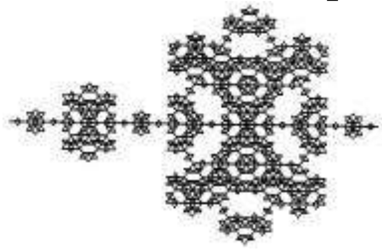
1. Системы итерированных функции
2. Топология и фрактальная размерность
3. Размерность береговой линии, размерность геометрических фракталов
4. Формула Хаусдорфа-Базекевича и др.
5. Фрактальная размерность природных обьектов
6. Подобие и геометрические преобразования фракталов
7. Подобие и скейлинг, размерность подобия
8. Инвариантность

Задание

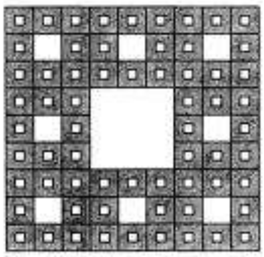
Задание 13. Построить фрактал.



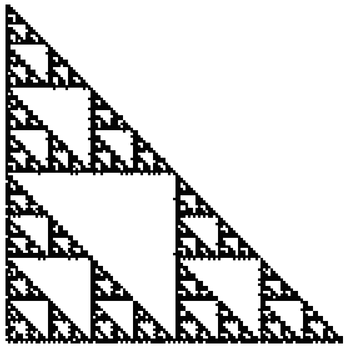
Задание 14. Построить фрактал.



Задание 15. Построить фрактал.



Задание 16. Построить фрактал «губка Менгера».



Оформление отчета

1. Титульный лист;
2. Тема, цель, задание согласно варианту, исходное изображение;
3. Краткая теоретическая справка по формулам перевода изображений в заданные форматы, а также по индивидуальному преобразованию изображения.
4. Экранные формы (компьютерная распечатка работ);
5. Выводы;

2 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

2.1 Основная и дополнительная учебная литература

а) Основная учебная литература

1. Найфэ, А. Введение в методы возмущений : Пер. с англ. / А. Найфэ .- Москва : Мир, 1984 .- 535 с
2. Ф.Мун. "Хаотические колебания", Москва,"Мир" 1990
3. С.П. Кузнецов Динамический хаос
4. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование, 2005

б) Дополнительная учебная литература

5. Дмитриев А.С. Хаос, Фракталы и информация. "Наука и жизнь" № 5, 2001 г
6. Дмитриев А.С, Детерминированный хаос и информационные технологии – журнал "Компьютерра" № 47, 1998. Журнал «Наука и жизнь» № 6, 2006 г.
7. Левкович-Маслюк Л., На кромке хАоса и хаОса -журнал "Компьютерра" № 47, 1998.
8. Никулин Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики- СПб.:БХВ- Петербург, 2003.-560 с.: ил.
9. Пайтген Х, Рихтер П. Красота фракталов- М.: «Мир», 1993.
10. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. — М.: изд-во МГУ, 1993.
11. Федер Е. Фракталы. — М: «Мир», 1991.
12. Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. — М.: «Мир», 1988.

2.2 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной системы Интернет

1. http://www.lib.swsu.ru/ - Электронная библиотека ЮЗГУ

2. http://window.edu.ru/library - Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам»
3. http://www.biblioclub.ru - Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online»
4. www.statsoft.ru - Сайт инновационной компании Statsoft
5. www.exponenta.ru/soft/Statist/Statist.asp - Статистический портал Statistica
6. http://www.statsoft.ru/resources/statistica_text_book.php - Электронный учебник по статистике «StatSoft»
7. http://www.physionet.org/- Исследовательский ресурс для сложных физиологических сигналов «PhysioNet»
8. http://www.intuit.ru – Сайт Национального Открытого Университете «ИНТУИТ»
9. http://videouroki.net – Видео-уроки для учителей
10. http://wordexpert.ru – Сайт профессиональной работы с текстом «WordExpert»
11. http://www.pcweek.ru – Сайт корпоративных информационные технологии и решения «PCweek»
12. http://www.rmj.ru/internet.htm - Русский медицинский журнал «Клиническая офтальмология»

3 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

При самостоятельном изучении дисциплины используются следующие формы обучения: конспектирование учебной литературы и лекции, составление словарей понятий и терминов и т. п.

В процессе обучения преподаватели используют активные формы работы со студентами: чтение лекций, привлечение студентов к творческому процессу на лекциях, промежуточный контроль путем отработки студентами пропущенных лекций, участие в групповых и индивидуальных консультациях (собеседовании). Эти формы способствуют выработке у студентов умения работать с учебником и литературой. Изучение литературы составляет значительную часть самостоятельной работы студента. Это большой труд, требующий усилий и желания студента. В самом начале работы над книгой важно определить цель и направление этой работы. Прочитанное следует закрепить в памяти. Одним из приемов закрепления освоенного материала является конспектирование, без которого немыслима серьезная работа над литературой. Систематическое конспектирование помогает научиться правильно, кратко и четко излагать своими словами прочитанный материал.

Самостоятельную работу следует начинать с первых занятий. От занятия к занятию нужно регулярно прочитывать конспект лекций, знакомиться с соответствующими разделами учебника, читать и конспектировать литературу по каждой теме дисциплины. Самостоятельная работа дает студентам возможность равномерно распределить нагрузку, способствует более глубокому и качественному усвоению учебного материала. В случае необходимости студенты обращаются за консультацией к преподавателю по вопросам дисциплины с целью усвоения и закрепления компетенций.

Основная цель самостоятельной работы студента при изучении дисциплины - закрепить теоретические знания, полученные в процессе лекционных занятий, а также сформировать практические навыки самостоятельного анализа особенностей дисциплины.