МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_____________ О.Г. Локтионова
«___» ______________ 2016 г.

ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВ ТЕОРИИ БИФУРКАЦИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Математические основы теории бифуркаций электронных схем» для студентов направления подготовки 09.03.01

Курск 2016

УДК 621.396.4

Составитель: Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Доктор технических наук, профессор *С.А. Филист*

Изучение основ теории бифуркаций динамических систем: методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Математические основы теории бифуркаций электронных схем» / Юго-Западный гос. ун-т; сост.: Ж.Т. Жусубалиев. Курск, 2016. – 11 с.: ил. 2. –Библиогр.: с. 11.

Рассматриваются методы бифуркационного анализа динамических систем, описываемых дискретными отображениями. Приведены задачи для лабораторных работ.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 30.12.16. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л 0,4. Тираж 100 экз. Заказ 128С. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

$$z_k = \begin{cases} 0, & \varphi_{k-1} \le 0; \\ \dfrac{\alpha\Omega}{P}\varphi_{k-1}, & 0 \le \varphi_{k-1} \le \dfrac{P}{\alpha\Omega}; \\ 1, & \varphi_{k-1} \ge \dfrac{P}{\alpha\Omega}, \end{cases}$$

$$\varphi_{k-1} = x_{k-1} - \vartheta y_{k-1} + \frac{q}{\Omega} \quad (0 \le z_k \le 1)$$

рассчитайте численно границу бифуркации Неймарка-Саккера на плоскости параметров (α, Ω). Параметры: $q = 17{,}8$, $P = 2q$, $\lambda_1 \approx -0{,}977$, $\lambda_2 \approx -0{,}232$, $2 < \alpha < 30$, $2 < \Omega < 20$.

5. Напишите программу расчета линии бифуркации Неймарка-Саккера на плоскости параметров (α, Ω) для модели двухуровневого преобразователя напряжения

$$\begin{cases} x_k = e^{\lambda_1} x_{k-1} + s_k \left\{ e^{\lambda_1(1-z_k)/2} - e^{\lambda_1(1+z_k)/2} \right\}; \\ y_k = e^{\lambda_2} y_{k-1} + s_k \left\{ e^{\lambda_2(1-z_k)/2} - e^{\lambda_2(1+z_k)/2} \right\}, \end{cases}$$

$$s_k = \begin{cases} 1, & \varphi_{k-1} \ge 0; \\ 0, & \varphi_{k-1} < 0, \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha\Omega}{P}\varphi_{k-1}, & |\varphi_{k-1}| < \dfrac{P}{\alpha\Omega}; \\ 1, & |\varphi_{k-1}| \ge \dfrac{P}{\alpha\Omega}, \end{cases}$$

где $\varphi_{k-1} = x_{k-1} - \vartheta y_{k-1} + \dfrac{q}{\Omega}$. Параметры: $q = 17{,}8$, $P = 2q$, $\lambda_1 \approx -0{,}977$, $\lambda_2 \approx -0{,}232$, $2 < \alpha < 30$, $2 < \Omega < 20$.

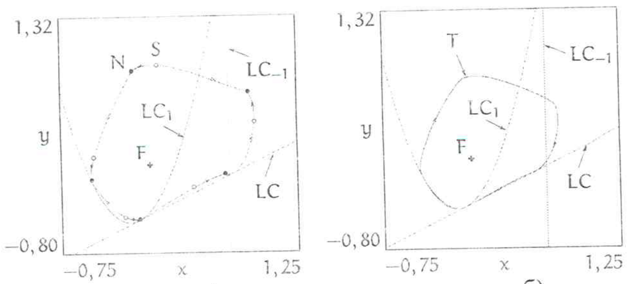
Библиографический список

1. Постнов, Д.Э. Введение в динамику итерируемых отображений / Д. Э. Постнов. Саратов.: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 160 с.

2. Жусубалиев, Ж. Т. Бифуркации в широтно-импульсных системах автоматического управления/ Ж.Т. Жусубалиев, В.С. Титов. Курск: КурскГТУ, 2007. 100 с.

3. Кузнецов, А. П. Нелинейность: от колебаний к хаосу (задачи и учебные программы) / А.П. Кузнецов. М.-Ижевск: ННИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 188 с.

4. Кузнецов, А. П. Введение в физику нелинейных отображений /А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина. Саратов: изд-во «Научная книга», 2010. 134 с.



а) б)

Рис. 2. Замкнутая инвариантная кривая T, отвечающая квазипериодическому режиму ($p/q-$ иррационально) (а) и резонансная замкнутая инвариантная кривая с числом вращения $p/q = 1/5$ (б)

4. Задачи для лабораторных занятий

1. Для логистического отображения с задержкой

$$x_k = y_{k-1},\quad y_k = \lambda x_{k-1}\left(1 - x_{k-1}^2\right) + \varepsilon$$

найдите неподвижные точки, матрицу монодроми, а также ее след и определитель как функции параметров λ и ε. Найдите линии бифуркации седло-узел, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Саккера и нанесите их на плоскость (λ, ε).

2. Для двумерного необратимого отображения

$$x_k = y_{k-1},$$

$$y_k = by_{k-1} - cx_{k-1} + x_{k-1}^2$$

найдите неподвижные точки, матрицу монодроми, а также ее след и определитель как функции параметров b и c. Найдите линии бифуркации седло-узел, бифуркации удвоения периода и бифуркации Неймарка-Саккера и нанесите их на плоскость (b, c).

3. Для двумерного отображения

$$x_k = ax_{k-1} + y_{k-1},\quad y_k = bx_{k-1} + x_{k-1}^3$$

постройте области устойчивости неподвижных точек на плоскости параметров (a, b).

4. Для модели стабилизатора постоянного напряжения

$$x_k = e^{\lambda_1} x_{k-1} + e^{\lambda_1 (1 - z_k)} - e^{\lambda_1};\qquad (9)$$

$$y_k = e^{\lambda_2} y_{k-1} + e^{\lambda_2 (1 - z_k)} - e^{\lambda_2} \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

30

1. Цель работы

Изучение методов бифуркационного анализа дискретных моделей.

После получения уравнений для неподвижных точек и соответствующего характеристического уравнения необходимо решить весьма трудоемкую задачу, связанную с построением области устойчивости в пространстве параметров динамической системы. Бифуркационным ситуациям соответствует нарушение устойчивости неподвижных точек. Последнее происходит, когда абсолютное значение одного из корней характеристического уравнения становится равным единице.

2. Введение

Объект той или иной физической природы, в котором реализуется колебательный процесс, называется *колебательной системой*. О величинах, изменение которых во времени (динамика) составляет содержание колебательного процесса, говорят как о динамических переменных.

Наряду с динамическими переменными при рассмотрении колебательных систем приходится иметь дело также с параметрами. Это величины, которые считаются постоянными во времени, от значений которых зависит характер реализующегося в системе движения. В зависимости от параметров можно наблюдать разные по характеру динамические режимы: стационарные состояния, периодические режимы, квазипериодические и хаотические колебания. Смена установившихся движений, которая происходит в результате изменения какого-нибудь параметра рассматриваемой системы при его переходе через некоторое значение, называется *бифуркацией*. Если при этом смена установившихся движений происходит скачкообразно, то говорят о «жестком возникновении нового режима». В противном случае возникновение нового режима называется «мягким».

Обычно полагают, что изменение параметров происходит квазистатически – настолько медленно, что при исследовании уравнений движения параметры всякий раз считают постоянными величинами. Процесс изменения параметров можно рассматривать как движение по определенной траектории в пространстве, где по осям координат отложены параметры системы.

Не следует путать пространство параметров с фазовым пространством. Движение изображающей точки по траектории в фазовом пространстве – это результат собственной динамики системы. Траектория же в пространстве параметров задается исследователем, желающим изучить, как изменяется динамическое поведение системы при изменении параметров. Мы изучим основные типы локальных бифуркаций.

3. Бифуркации неподвижных точек

Слово *бифуркация* обозначает раздвоение, ветвление (от фр. *la bifurcation* – раздвоение).

Суть бифуркации лучше всего иллюстрирует задача об изгибе балки. Представим себе балку прямоугольного сечения, на которую положен груз. Кладем сверху гирьки, увеличиваем нагрузку P, балка сжимается, но остается прямолинейной. Но, начиная с некоторого критического значения нагрузки P_*, она уже не может оставаться в этом положении и прогибается вправо или влево. Ей приходится «выбирать», куда прогнуться под действием случайных воздействий. При $P < P_*$ у балки есть единственная равновесная форма. При $P > P_*$ их три: прямолинейная форма, которая стала неустойчивой, и две устойчивые (одна соответствует прогибу вправо, а другая – влево). Если построить зависимость максимального прогиба балки от величины нагрузки P, то получается картинка, которую называют *бифуркационной диаграммой*. При $P = P_*$ изменяется число состояний равновесия и их устойчивость.

Изменение числа и устойчивости установившихся движений (циклов, неподвижных точек, состояний равновесия) при изменении параметров называется *ветвлением*, или *бифуркацией движений*.

Значения параметров, при которых происходит смена установившихся движений, называются *точками ветвления*, или *точками бифуркаций*.

Понятие бифуркации связано с понятием *структурной устойчивости*, или *грубости*. Это понятие было введено в качественную теорию дифференциальных уравнений Андроновым и Понтрягиным. Оно, фактически, было призвано способствовать выяснению физической важности тех или иных решений динамической системы. Решение, которое можно сопоставить с физически наблюдаемым динамическим процессом, не должно качественно менять своих свойств при малых изменениях параметров. Известно, что непрерывная функция обладает таким свойством: если она положительна при каком-то значении аргумента, то и при малых изменениях аргумента она остается положительной. Поэтому свойство положительности (или отрицательности) – грубое, а вот свойство функции быть равной нулю – негрубое. Аналогично устойчивость или неустойчивость – грубые свойства движений, а нейтральная устойчивость или состояние бифуркации является негрубой. Например, если ламинарный поток устойчив при некотором числе Рейнольдса, то он устойчив и при достаточно малом изменении этого числа.

Следующее понятие – это *гиперболичность*. Рассмотрим дискретное отображение, зависящее от параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$:

$$X_k = \Phi(\alpha, X_{k-1}) \quad (k = 1,2,\ldots). \qquad (1)$$

Пусть X_0 – неподвижная точка отображения (1), то есть $X_0 = \Phi(\alpha, X_0)$. Обозначим через r_-, r_0, r_+ число мультипликаторов неподвижной точки,

3.2. Логистическое отображение с задержкой. Бифуркация Неймарка-Саккера

Ряд задач из биологии и экологии может быть сведен к анализу логистического отображения с задержкой:

$$x_k = \alpha x_{k-1}(1 - y_{k-1});$$
$$y_k = x_{k-1}, \quad x_k > 0, \quad y_k > 0.$$

Отображение имеет неподвижную точку $(0,0)$ для всех значений параметра α. При $\alpha > 1$ возникает нетривиальная неподвижная точка с координатами

$$x = y = 1 - \alpha^{-1}.$$

Матрица Якоби, вычисленная в нетривиальной неподвижной точке, имеет вид

$$J(x, y, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 1 & 1-\alpha \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Собственные значения матрицы Якоби определяются выражением

$$\rho_{1,2}(\alpha) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{5} - \alpha}.$$

Если $\alpha > 5/4$, то мультипликаторы комплексные: $\rho_{1,2} = \rho_r \pm j\rho_j$ и $|\rho_{1,2}|^2 = \rho_1\rho_2 = \alpha - 1$. Следовательно, в точке $\alpha = \alpha_0 = 2$ нетривиальная неподвижная точка теряет устойчивость, когда комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга. При этом из неподвижной точки рождается замкнутая инвариантная кривая. Мультипликаторы в бифуркационной точке равны

$$\rho_{1,2} = e^{\pm j\theta}, \quad \theta = \pi/3.$$

Движение на двумерном торе определяется *числом вращения* r:

$$r = \frac{\theta}{2\pi} \operatorname{mod} 1.$$

Когда оно иррационально, инвариантный тор (замкнутая кривая) всюду плотно заполняется траекториями (сечение Пуанкаре представляет собой гладкую замкнутую кривую T) и динамика квазипериодична (рис. 2, а). В случае, если $r = p/q$ – рациональное число, где p, q – целые числа, то говорят, что имеет место резонанс $p:q$, так как через q итераций траектория замыкается на поверхности тора (рис. 2, б).

$$\lim_{\alpha\to\pm 0} x^s = 1/(1-\beta); \quad \lim_{\alpha\to\pm 0} y^s = \beta/(1-\beta).$$

Отсюда решение уравнения (5), отвечающее устойчивой неподвижной точке, гладко зависит от параметров, тогда как решение, соответствующее неустойчивой неподвижной точке, терпит разрыв второго рода на линии $\alpha = 0$. Различие в характере зависимости устойчивой и неустойчивой неподвижных точек от параметров показано на рис.1, а. Зависимости мультипликаторов приведены на рис.1, б.

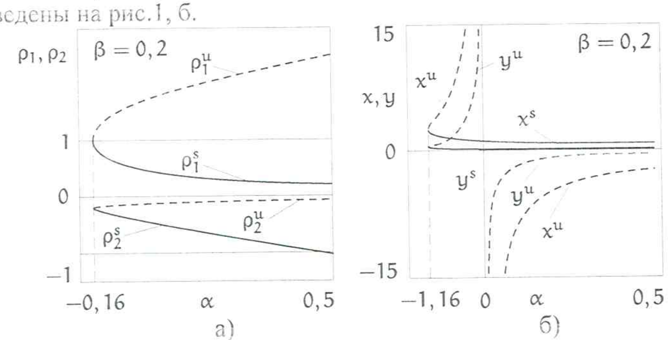


Рис. 1. Зависимости устойчивой и неустойчивой неподвижных точек от параметра α при переходе через значение $\alpha = 0$ (а) и зависимости мультипликаторов неподвижных точек от параметра α при седло-узловой бифуркации (б)}

Условие бифуркации удвоения периода записывается в виде

$$\chi(1,\alpha,\beta) = \det(J(x,y,\alpha,\beta) - E) = 0, \tag{8}$$

Комбинируя условие (8) с уравнением неподвижной точки (5), имеем

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (1-\beta)x - 1 = 0; \\ 1 - 2\alpha x - \beta = 0. \end{cases}$$

Исключая из этой системы переменную x, получим уравнение искомой бифуркационной кривой N_-:

$$N_- = \left\{(\alpha,\beta) : \alpha = \frac{3(\beta-1)^2}{4}\right\}.$$

При переходе через линию N_- в область значений $\alpha > \dfrac{3(\beta-1)^2}{4}$ неподвижная точка (цикл периода 1) теряет устойчивость и мягко возникает устойчивый цикл удвоенного периода.

Таким образом, область устойчивости неподвижной точки ограничена кривой седло-узловой бифуркации N_+ и кривой бифуркации удвоения N_-.

лежащих внутри, на и вне единичной окружности в комплексной плоскости $\{\rho \in \mathrm{C} : |\rho| = 1\}$ соответственно.

Определение 1. *Неподвижная точка называется гиперболической, если $r_0 = 0$, то есть нет мультипликаторов, лежащих на единичной окружности. Гиперболическая точка называется седловой, если $r_- r_+ \neq 0$.*

Понятие гиперболичности естественным образом обобщается на цикл любого конечного периода m. Поскольку гиперболические неподвижные точки или циклы являются грубыми, то кандидатами на точки бифуркации становятся те значения параметров, при которых неподвижная точка или цикл оказываются негиперболическими. Это дает эффективный инструмент для поиска точек бифуркаций.

Итак, *бифуркационным значением параметра, или точкой ветвления, называется значение параметра, при котором динамическая система является структурно неустойчивой.* Структурная устойчивость бывает локальной и глобальной. Поэтому выделяют локальные и глобальные бифуркации. Мы будем говорить только о локальных бифуркациях.

Обозначим через J матрицу Якоби, вычисленную в неподвижной точке X_0. Соответствующее этой неподвижной точке характеристическое уравнение в общем виде может быть записано

$$\chi(\rho,\alpha) = \det(J(\alpha) - \rho E) = 0. \tag{2}$$

Пусть при некоторой совокупности значений параметров неподвижная точка X_0 (или цикл) является гиперболической. В общем случае существуют три возможности нарушения условия гиперболичности при непрерывном изменении параметров. Это случаи, когда один из мультипликаторов, например ρ_1, обращается в $+1$, то есть $\rho_1 = +1$, или $\rho_1 = -1$, или комплексно-сопряженная пара мультипликаторов выходит на границу единичного круга: $\rho_{1,2} = e^{\pm j\theta}$, $0 < \theta_0 < \pi$. Соответствующие бифуркационные совокупности параметров α удовлетворяют уравнению (2) при подстановке в него бифуркационных значений ρ, а именно:

$$\chi(1,\alpha) = 0; \; \chi(-1,\alpha) = 0; \; \chi(e^{\pm j\theta},\alpha) = 0; \; (0 < \theta < \pi). \tag{3}$$

Границы области устойчивости рассматриваемой неподвижной точки (цикла) удовлетворяют уравнениям (3). Будем обозначать эти граничные поверхности пространства параметров через N_+, N_-, N_φ соответственно.

Определение 2. *Бифуркация, связанная с обращением мультипликатора ρ в $+1$, называется бифуркацией «седло-узел».*

При переходе через границу N_+ происходит слияние устойчивого цикла с неустойчивым с последующим их исчезновением. В этом случае по одну сторону бифуркационной поверхности N_+ расположена область существования двух периодических движений – устойчивого и неустойчивого, по другую сторону – область значений параметров, при которых рассматриваемых периодических движений не существует.

В особом случае той же бифуркационной ситуации $\rho_1 = +1$, когда устойчивое периодическое движение симметрично, оно переходит в неустойчивое с одновременным слиянием с парой неустойчивых либо рождением пары устойчивых симметричных движений того же периода.

Определение 3. *Бифуркация, связанная с обращением мультипликатора ρ в -1, называется бифуркацией удвоения периода.*

При пересечении границы N_- происходит удвоение периода колебаний. При этом исходное движение продолжает существовать, но становится неустойчивым. В момент бифуркации исходное движение либо сливается с неустойчивым удвоенного периода (субкритическая бифуркация удвоения периода), либо порождает устойчивое движение с удвоенным периодом (суперкритическая бифуркация удвоения периода).

Определение 4. *Бифуркация, связанная с появлением комплексно-сопряженной пары мультипликаторов, лежащих на единичной окружности, то есть $\rho_{1,2} = e^{\pm j\theta}$, $0 < \theta_0 < \pi$ называется бифуркацией Неймарка – Саккера.*

Бифуркация может быть супер– и субкритической. В зависимости от этого либо из устойчивого цикла рождается устойчивый двумерный тор, а сам цикл становится неустойчивым, либо устойчивый цикл сливается с неустойчивым тором. В результате этого цикл теряет устойчивость. В этом случае фазовые траектории динамической системы располагаются на двумерном торе, а само движение периодично или квазипериодично.

3.1. Пример бифуркационного анализа. Отображение Хенона. Бифуркации седло-узел и удвоения периода

В качестве первого примера рассмотрим отображение Хенона:

$$x_k = 1 - \alpha x_{k-1}^2 + y_{k-1};\quad y_k = \beta x_{k-1},\quad |\beta| < 1,\ -1 < \alpha < 3. \qquad (4)$$

где α – коэффициент нелинейности; β – коэффициент диссипации.

Отображение (4) было введено французским астрофизиком М. Хеноном (в другой транскрипции – М. Энон) в качестве отображения Пуанкаре для трехмерной дифференциальной системы. С тех пор оно интенсивно изучалось многими авторами, как численно, так и с более теоретической точки зрения, с различными целями.

Неподвижные точки могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} x = 1 - \alpha x^2 + y; \\ y = \beta x. \end{cases}$$

Исключая из этих уравнений y, получим

$$\alpha x^2 + (1-\beta)x - 1 = 0 \qquad (5)$$

Таким образом, отображение (4) имеет не более двух неподвижных точек:

$$x_{1,2} = \frac{\beta - 1 \pm \sqrt{(1-\beta)^2 + 4a}}{2a};\quad y_{1,2} = \beta x_{1,2}.$$

Найдем матрицу Якоби

$$J(x, y, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} -2\alpha x & 1 \\ \beta & 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Для седло-узловой бифуркации имеем

$$\chi(1, \alpha, \beta) = \det(J(x, y, \alpha, \beta) - E) = 0,$$

где x, y – координаты неподвижной точки.

Это условие эквивалентно

$$1 + 2\alpha x - \beta = 0.$$

Уравнение кривой седло-узловой бифуркации N_+ можно найти из уравнения неподвижной точки (5) и бифуркационного условия (6).

$$\begin{cases} \alpha x^2 + (1-\beta)x - 1 = 0; \\ 1 + 2\alpha x - \beta = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

Исключая из системы (7) переменную x, получим уравнение кривой N_+ в форме явной зависимости между параметрами α и β:

$$N_+ = \left\{(\alpha, \beta) : \alpha = -\frac{(\beta-1)^2}{4}\right\}.$$

Вдоль этой кривой отображение имеет неподвижную точку с мультипликатором $\rho_1 = +1$.

Прежде чем продолжить, обсудим более детально поведение динамической системы (4) в окрестности кривой N_+. При $-1 < \alpha < -(\beta-1)^2/4$ уравнение (5) не имеет действительных корней. На кривой N_+ уравнение (5) принимает вид

$$\left(x - \frac{2}{1-\beta}\right)^2 = 0$$

и имеет кратный корень. При движении по параметрам в плоскости (α, β) в область значений $\alpha > -(\beta-1)^2/4$ $(-1 < \beta < 1)$ от этого решения непрерывно ответвляются два действительных корня: один из них отвечает устойчивой, а другой – неустойчивой неподвижной точке. При переходе от значений $\alpha < -(\beta-1)^2/4$ к значениям $\alpha > -(\beta-1)^2/4$ возникает пара неподвижных точек через седло-узловую бифуркацию. При обратном переходе устойчивая неподвижная точка исчезает, сливаясь с неустойчивой.

Проследим теперь за эволюцией устойчивой и неустойчивой неподвижных точек при изменении α от отрицательных значений к положительным при переходе через $\alpha = 0$. Обозначим через (x^s, y^s) и (x^u, y^u) решения уравнения (5), соответствующие устойчивой и неустойчивой неподвижным точкам. При $\alpha = 0$ уравнение (5) имеет единственное решение

$$x = 1/(1-\beta);\quad y = \beta/(1-\beta).$$

Очевидно, что