МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«___» ______________2016 г.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМ С КЛЮЧЕВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Методические указания к лабораторной работе
по дисциплине «Математические основы теории
бифуркаций электронных схем» для студентов
направления подготовки 09.03.01

Курск 2016

УДК 531

Составитель: Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Доктор технических наук, профессор *С.А. Филист*

Расчет электронных схем с ключевыми элементами: методические указания к лабораторной работе по дисциплине «Математические методы расчета электронных схем / Юго-Западный гос. ун-т; сост.: Ж.Т. Жусубалиев. Курск, 2016. – 7 с.

Рассматриваются методы моделирования и расчета электронных схем с ключевыми элементами во временной области.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника».

Предназначены для студентов направления подготовки 09.03.01.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 30.12.16. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 0,4. Уч.-изд. л 0,3. Тираж 50 экз. Заказ 1281.
Бесплатно. Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

2.4. Нахождение периодического решения

Сначала определим вектор начальных условий Q для периодического решения. Для этого найдем значение вектора $W(t)$ при $t = a$:

$$W(a) = e^{\Lambda a}(Q - H) + (2e^{\Lambda a(1-z)} - E)H$$

Учитывая условие периодичности $W(a) = Q$, получим

$$Q = e^{\Lambda a}(Q - H) + (2e^{\Lambda a(1-z)} - E)H.$$

Отсюда находим

$$Q = (E - e^{\Lambda a})^{-1}(2e^{\Lambda a(1-z)} - e^{\Lambda a} - E)H. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получим выражение для периодического решения

$$W(t,Q) = \begin{cases} e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(Q - H) + H, & (k-1)a < t < t_k; \\ e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(Q - H) + (2e^{\Lambda(t-a(z+k-1))} - E)H, \\ t_k < t < ka, \quad k = 1,2,\dots \end{cases} \qquad (12)$$

Здесь

$$Q = (E - e^{\Lambda a})^{-1}(2e^{\Lambda a(1-z)} - e^{\Lambda a} - E)H.$$

<u>Замечания.</u>

1. Для того, чтобы воспользоваться полученными формулами (12), мы должны знать экспоненциальную матрицу. Для простых канонических систем вида (5) экспоненциальная матрица определяется по формулам:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} \end{bmatrix} \text{ для } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix};$$

$$e^{\Lambda t} = e^{\lambda_r t}\begin{bmatrix} \cos(\lambda_i t) & -\sin(\lambda_i t) \\ \sin(\lambda_i t) & \cos(\lambda_i t) \end{bmatrix} \text{ для } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_r & -\lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_r \end{bmatrix}.$$

2. Численная схема для расчета периодического решения:

$$\begin{cases} W_i = e^{\Lambda h}(W_{i-1} + H_i) - H_i; \\ X_i = -SDW_i. \end{cases}$$

Здесь $W_i = W(t_i)$; $X_i = X(t_i)$; $W_0 = Q$; $t_i = ih$, $i = 1,2,\dots,N$; $h = a/250$; $N = 250k$, $k = 1,2,\dots$; $H_i = \begin{cases} -H, & K_F = 1; \\ H, & K_F = -1. \end{cases}$

В соответствии с конфигурацией коммутационной функции K_F (2) в области $(k-1)a < t < t_k$ система (5) имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = \Lambda(W - H), \; W(t_0) = W_0 .$$

Решение такой системы с условием $W_0 = W((k-1)a) = W_{k-1}$ записывается

$$W(t) = e^{\Lambda(t-(k-1)a)}\{W_{k-1} - \Lambda \int_{(k-1)a}^{t} e^{-\Lambda(\tau-(k-1)a)} H d\tau\}$$

После интегрирования получим

$$W(t) = e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(W_{k-1} - H) + H . \quad (6)$$

Вектор-функция (6) описывает движение системы (5) до момента времени $t = t_k$, когда изменяется значение коммутационной функции.

В момент $t = t_k$

$$W(t_k) = e^{\Lambda(t_k-(k-1)a)}(W_{k-1} - H) + H . \quad (7)$$

Учитывая, что $t_k = a(z + k - 1)$, $k = 1,2,...$, получим

$$W(t_k) = e^{\Lambda az}(W_{k-1} - H) + H . \quad (8)$$

В области $(k-1)a < t < t_k$ система (5) принимает вид

$$\frac{dW}{dt} = \Lambda(W + H), \; W_0 = W(t_k) .$$

Решение такой системы легко находится

$$W(t) = e^{\Lambda(t-t_k)}(W(t_k) + H) - H . \quad (9)$$

Подставляя (7) в (9), получим

$$W(t) = e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(W_{k-1} - H) + (2e^{\Lambda(t-t_k)} - E)H$$

или с учетом (8) имеем

$$W(t) = e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(W_{k-1} - H) + (2e^{\Lambda(t-a(z+k-1))} - E)H$$

Таким образом решение задачи Коши для системы (5) записывается

$$W(t) = \begin{cases} e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(W_{k-1} - H) + H, & (k-1)a < t < t_k; \\ e^{\Lambda(t-(k-1)a)}(W_{k-1} - H) + (2e^{\Lambda(t-a(z+k-1))} - E)H, & \\ t_k < t < ka, \quad k = 1,2,.... & \end{cases} \quad (10)$$

1. Постановка задачи

Рассмотреть схему замещения ключевого преобразователя напряжения с двумя накопителями энергии (L , C).

Получить дифференциальные уравнения (уравнения состояния) для тока $i_L = x_1$ в катушке индуктивности L и напряжения $U_C = x_2$ на конденсаторе C. Рассчитать зависимости $x_1(t), x_2(t)$ в установившемся (периодическом) режиме.

2. Порядок выполнения работы

1. Получить уравнения состояния электронной схемы.
2. Преобразовать уравнения движения к канонической форме.
3. Используя результат, полученный в п.2, найти решение задачи Коши.
4. Найти периодическое решение в аналитической форме.
5. Написать программу для расчета зависимостей $x_1(t), x_2(t)$, отвечающих периодическому режиму работы электронной схемы.

2.1. Уравнения состояния

Порядок выполнения задания продемонстрируем на примере схемы замещения транзисторного преобразователя постоянного напряжения. Пусть математическая модель такого преобразователя представляется в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{dX}{dt} = AX + BK_F ; \quad (1)$$

$$X = \begin{bmatrix} i_L \\ U_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}; \; A = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & -1/(CR_H) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 / L \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$K_F = \begin{cases} 1, (k-1)a < t < t_k \\ -1, t_k < t < ka \end{cases}, \quad t_k = a(z + k - 1), \quad k = 1,2,\dots \quad (2)$$

2.2. Преобразование уравнений к канонической форме

Пусть А- действительная матрица 2×2-матрица. Тогда существует действительная неособая матрица S такая, что

$$A = S\Lambda S^{-1}. \quad (3)$$

Матрица Λ называется жордановой формой матрицы А.

Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы А, т.е. корни характеристического уравнения:

$\chi(\lambda) = \mathbf{det}(A - \lambda E) = 0$. $\chi(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$,

$\lambda_1 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) - \sqrt{\Delta}$; $\lambda_2 = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) + \sqrt{\Delta}$;

$$\Delta = \frac{(a_{11} + a_{22})^2}{4} - \mathbf{det}(A).$$

Жорданова форма Λ зависит от вида собственных чисел λ_1, λ_2, являются ли они действительными различными ($\Delta > 0$), действительными совпадающими ($\Delta = 0$) или комплексными ($\Delta < 0$).

В дальнейшем мы ограничимся случаями, когда $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$.

Если λ_1, λ_2 - действительные числа, то

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Если λ_1, λ_2 являются комплексными, т.е. $\lambda_{1,2} = \lambda_r \pm j\lambda_j$, то

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_r & -\lambda_j \\ \lambda_j & \lambda_r \end{bmatrix}.$$

Матрица S удовлетворяет матричному уравнению

$AS = S\Lambda$.

Отсюда легко получить

$S = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{12} \\ \lambda_1 - a_{11} & \lambda_2 - a_{11} \end{bmatrix}$, если λ_1, λ_2 – действительные числа и

$S = \begin{bmatrix} \lambda_j & a_{11} - \lambda_r \\ 0 & a_{21} \end{bmatrix}$, если $\lambda_{1,2} = \lambda_r \pm j\lambda_j$.

Используя преобразование (3), получим

$$\frac{dX}{dt} = S\Lambda S^{-1}X + BK_F$$

или

$$\frac{d}{dt}(S^{-1}X) = \Lambda S^{-1}X + S^{-1}BK_F$$

Обозначим $Y = S^{-1}X$. Тогда

$$\frac{dY}{dt} = \Lambda Y + Y_S K_F,$$

(4)

$Y = (y_1, y_2)^T$; $Y_S = S^{-1}B$, $Y_S = (y_{S1}, y_{S2})^T$.

(Выражения для y_{S1}, y_{S2} необходимо выписать в явном виде).

Произведя замену $W = -DY$, преобразуем уравнение (2) ***к каноническому виду***

$$\frac{dW}{dt} = \Lambda(W - HK_F), \; W = (w_1, w_2)^T, \; H = (1,1)^T. \quad (5)$$

Здесь матрица D выбирается из условия перестановочности с Λ: $D\Lambda = \Lambda D$.

Матрицу D можно найти из уравнений $D^{-1}H = \Lambda^{-1}Y_S$,

где $D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & -d_2 \\ d_2 & d_1 \end{bmatrix}$, если $\lambda_{1,2} = \lambda_r \pm j\lambda_j$;

$D^{-1} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}$, если λ_1, λ_2-действительные числа.

Используя соотношения $X = SY$ и $W = -DY$, получим зависимость X от W:

$X = -SDW$

(Выписать выражения для x_1, x_2 как функции от w_1, w_2).

2.3. Решение задачи Коши

Найдем решение задачи Коши для линейной системы дифференциальных уравнений (5).