МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
____________ О.Г. Локтионова
«__19__» __01______ 2022 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания к практическим занятиям
по дисциплине «Математический анализ»
для всех направлений подготовки

Курск 2022

УДК 51

Составители: В.И. Дмитриев

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор
кафедры высшей математики *Н.А. Хохлов*

Математический анализ: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Математический анализ» для всех направлений подготовки / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: В.И. Дмитриев – Курск, 2022. – 15с.

Излагаются методические рекомендации к практическим занятиям по математическому анализу. Содержатся примеры типовых задач с разбором методов их решения.

Методические указания соответствуют требованиям Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования для всех направлений подготовки.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 17.01.22. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 0,7. Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 77. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Практические занятия по математическому анализу – один из самых важных инструментов для достижения компетенции ОПК-3 «Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности».

1. Множества, отображения множеств

Цель занятия: освоить базовые понятия математики – понятия множества и отображения (функции).

Типовая задача. f – отображение множества R_+ всех положительных чисел, в множество N_0 целых неотрицательных чисел, определяемое условием: если $x \in R_+$, то f(x) – наименьшее целое число, большее $\sqrt{x}$. Найдите образ интервала (0; 100) при этом отображении.

2. Операция предельного перехода для последовательностей и функций. Непрерывность

Цель занятия: 1) овладеть основной операцией математического анализа – операцией предельного перехода;

2) изучить основные свойства непрерывных функций.

Типовые задачи

1) Перечислите свойства метрики, лежащие в основе операции предельного перехода.

2) Сформулируйте определение предела последовательности, функции.

3) Найдите расстояние Хемминга между двоичными последовательностями (0111011) и (1100101).

4) Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

5) Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.

Решение задачи 4

Имеем дело с неопределенностью вида (1^∞). Такую неопределенность можно раскрыть по нижеследующей схеме:

$$\lim_{x\to a}(u(x))^{v(x)} = (1^\infty) = e^p,$$

где $p = \lim\limits_{x \to a} \left(u(x) - 1\right) \cdot v(x)$ − вспомогательный предел.

В нашей задаче $p = \lim\limits_{x \to 0} \left(\cos x - 1\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = -2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{1}{2}$$

(Мы воспользовались 1-м замечательным пределом $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k$).

В итоге искомый предел равен $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. Производная. Техника дифференцирования

***Цель занятия*:** изучить правила дифференцирования и овладеть техникой отыскания производных элементарных функций.

Типовая задача. Найдите производную функции $y = \ln^2(\arcsin 2x)$.

Решение. Действуем по цепному правилу: на каждом шаге дифференцируем текущую внешнюю функцию:

$$y' = 2\ln(\arcsin 2x) \cdot (\ln(\arcsin 2x))' = 2\ln(\arcsin 2x) \cdot \frac{1}{(\arcsin 2x)} \cdot (\arcsin 2x)' =$$

$$= \frac{2\ln(\arcsin 2x)}{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \frac{4\ln(\arcsin 2x)}{\sqrt{1-4x^2} \cdot \arcsin 2x}.$$

4. Исследование функций одной переменной средствами дифференциального исчисления

***Цель занятия*:** изучить методы исследования функций стандартными методами дифференциального исчисления.

Типовые задачи

1) Найдите промежутки монотонности функции $y = xe^{-x}$.

2) Укажите промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = 2\sqrt{x} + x^2$.

3) Найдите наибольшее значение функции $y = x^2\sqrt{1-x}$ на отрезке [0; 1].

4) Составьте разложение по целым положительным степеням x функции $\dfrac{x}{e^x - 1}$ до члена с x^4 (формула Тейлора).

5) Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ (правило Лопиталя).

6) Постройте график функции $y = \dfrac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

5. Методы неопределенного интегрирования

***Цель занятия*: освоить основные методы отыскания первообразных: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям, интегрирование рациональных функций.

Типовые задачи

1) Найдите $\int x^2(5-x)^7\,dx$.

2) Найдите $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$ (подведение под знак дифференциала).

3) Найдите $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx$ (замена переменной).

4) Найдите $\int \mathrm{arctg}x\,dx$ (интегрирование по частям).

5) Найдите $\int \dfrac{3x^2 - 3x + 5}{(x-1)(x^2+1)}dx$ (интеграл от рациональной функции. Указание: разложите подынтегральную дробь в сумму простейших дробей $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$).

6. Вычисление определенного интеграла. Приложения

Цель занятия**:** изучить основные формулы для вычисления определенного интеграла и освоить его стандартные приложения в геометрии и физике.

Типовые задачи

1) Вычислите $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) Вычислите $\int\limits_0^1 x(2-x^2)^{12}dx$.

3) Вычислите $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$.

4) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y + x = 2$.

5) Найдите площадь, ограниченную циклоидой $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, и $y = 0$.

6) Найдите длину дуги кривой $y = x^{3/2}$, $0 \le x \le 4$.

7) Площадь сечения тела плоскостью x = c выражается формулой $S(c) = \frac{1}{\cos^2 c}$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$. Найдите объем этого тела.

Решение задачи 6

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int\limits_0^4 \sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \int\limits_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx =$$

$$= \frac{4}{9}\int\limits_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,d\left(\frac{9}{4}x+1\right) = \left[1+\frac{9}{4}x = t\right] = \frac{4}{9}\int\limits_1^{10}\sqrt{t}\,dt = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^{10} =$$

$$= \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

7. Исследование числовых рядов

Цель занятия**:** изучить основные методы исследования числовых рядов.

Типовые задачи

1) Вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n}$.

Решение.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} - \frac{1}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2} - \frac{5}{3} = \frac{5}{6}.$$

Мы воспользовались формулой для суммы сходящейся геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \qquad (|q| < 1)$$

2) Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ на сходимость, т.е. выясните, конечна или бесконечна сумма этого ряда.

Указание: примените признак Даламбера.

3) Докажите, что знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ сходится.

Указание: примените признак Лейбница.

4) Вычислите сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n! \cdot 2^n}$ с точностью до 0,001.

Указание: вычисляя последовательно члены ряда, найдите первый член, который меньше 0,001 (по модулю); сумма всех предыдущих членов даст требуемый ответ.

8. Исследование степенных рядов

Цель занятия**:** освоить основные факты теории степенных рядов и научиться их использованию.

Типовые задачи

1) Определите радиус и интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

2) Напишите разложение в степенной ряд по степеням x функции $f(x)=e^{-x^2}$.

Решение. Исходим из стандартного разложения $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, справедливого при всех x. Заменим в этом разложении x на $-x^2$, получим требуемое: $e^{-x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}$.

3) Используя предыдущее разложение, разложите в степенной ряд неэлементарную функцию Лапласа $\Phi(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$.

Решение. $\Phi(x)=\int\limits_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}dt=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_0^x t^{2n}dt=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cdot\left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}.$$

Степенной ряд можно интегрировать почленно, что было сделано.

4) Найдите решение дифференциального уравнения $y'=x^2+y^2(x)$ с начальным условием $y(0) = 1$ в виде степенного ряда.

Решение. Условие задачи требует представить решение $y = y(x)$ данной задачи Коши как сумму степенного ряда (ряда Маклорена)

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Тем самым задача сводится к отысканию производных $y^{(n)}(0)$. По условию $y(0) = 1$. Возьмем $x = 0$ в равенстве $y'(x)=x^2+y^2(x)$ и найдем $y'(0): y'(0)=0^2+y^2(0)=1$. Чтобы найти

$y''(0)$, продифференцируем равенство $y' = x^2 + y^2$: $y'' = 2x + 2y \cdot y'$, − и возьмем $x = 0$:
$y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot y(0) \cdot y'(0) = 2$. Далее описанную процедуру следует продолжить: $y''' = 2 + 2y'^2 + 2y \cdot y''$ и $x = 0$: $y'''(0) = 8$. И т.д.

9. Ряды Фурье, гармонический анализ

***Цель занятия*:** изучить стандартные методы гармонического анализа функций.

Типовые задачи

1) Проверьте, что функция $\sin x$ и $\cos x$ ортогональны друг другу на промежутке $[-\pi; \pi]$.

2) Разложите в ряд Фурье 2π − периодическую функцию f, заданную на промежутке $[-\pi; \pi]$ формулой $f(x) = x^2$.

3) Найдите сумму ряда Фурье 2π − периодической функции, заданной на основном периоде $[-\pi; \pi]$ формулой $f(x) = x + 2^x$ в точке $x_0 = \pi$.

Указание: в точке x_0 функция f терпит разрыв.

10. Частные производные, градиент, производные по направлению функции многих переменных

***Цель занятия*:** изучить основной технический аппарат дифференциального исчисления функций многих переменных.

Типовые задачи

1) $z = x^y$. Найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2) Найдите направление наибыстрейшего возрастания функции $f(x, y, z) = x + y^2 - 2xyz^3$ в точке P(1,–2,–1).

Решение. Направление наискорейшего роста функции f в точке P указывает вектор $\operatorname{grad} f(P)$, координатами которого являются частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}(P)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(P)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(P)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 2yz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P) = 1 - 2 \cdot (-2) \cdot (-1)^3 = -3;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2xz^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P) = -2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -6xyz^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 12.$$

Ответ: вектор $(-3,-2,12)$.

11. Исследование функций многих переменных средствами дифференциального исчисления

Цель занятия: освоить стандартные методы исследования поведения функций многих переменных.

Типовая задача

Точка $P(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z = z(x, y)$. Известна матрица частных производных второго порядка функции x в точке P: $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Определите, является ли точка P точкой экстремума функции z; если является, то – какого именно: максимума или минимума.

12. Вычисление кратных интегралов

Цель занятия: освоить методы сведения кратного интегрирования к повторным интегрированиям.

Типовая задача

Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D xy dx dy$, где D – область плоскости Oxy, ограниченная линиями $y = 0$, $y = 2x - x^2$.

13. Приложения кратных интегралов

Цель занятия: познакомиться с основными схемами применения кратных интегралов.

Типовые задачи.

1) Область D на плоскости Oxy ограничена линиями $y = x$ и $y = \sqrt{x}$. D представляет собой материальную пластинку переменной плотности $\rho(x, y) = x + y^2$. Какова масса этой пластинки?

Решение. Масса есть двойной интеграл от плотности:

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D (x + y^2)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{\sqrt{x}} (x + y^2)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{1}{3}y^3 \right)\Bigg|_x^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{1}{3}x\sqrt{x} - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{12}x^4 \right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{7}{60}$$

2) Имеется материальная плоская пластинка $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 1 \le y \le 5\}$, причем плоскость в точке (x, y) задается формулой $\rho(x, y) = xy$. Найдите координаты центра масс пластинки.

14. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель занятия: освоить элементарные методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Типовые задачи

1) Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$y' = \frac{\ln x}{y^2 + 1}.$$

Указание: это уравнение с разделяющимися переменными.

2) Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{y}{x} = x \cos x$$

на интервале $(0, \infty)$.

Указание: это линейное уравнение первого порядка, можно решать методом Бернулли: $y = u \cdot v$.

3) Найдите общее решение дифференциального уравнения
$$y'' - 6y' - 16y = e^{2x}.$$

Указание: это линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

15. Ряды и интегралы в комплексной области

Цель занятия: освоить понятие аналитической функции, познакомиться с теоремами Коши.

Типовая задача. Вычислите интеграл $\int\limits_L \frac{e^z}{z-1} dz$, где L – 1) окружность $|z| = \frac{1}{2}$, 2) окружность $|z| = 2$.

Решение. 1) Так как функция $\frac{e^z}{z-1}$ аналитична в круге $|z| < 1$, то по теореме Коши данный интеграл равен 0. 2) Функция $f(z) = e^z$ аналитична на всей комплексной плоскости, точка z_0 лежит внутри окружности $|z| = 2$; по интегральной формуле Коши
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^z}{z-1} dz = f(1) = e, \text{ т.е. } \int\limits_L \frac{e^z}{z-1} dz = 2\pi e i.$$

21. Особые точки аналитических функций. Вычеты

Цель занятия: познакомиться с теоремой Коши о вычетах - сведение глобальной величины (интеграла) к величинам локальным (вычетам).

Типовая задача. Вычислите интеграл $\int\limits_L \frac{dz}{(z^2+1)\sin z}$, где L - окружность с центром $\frac{i}{2}$ радиуса 1.

Указание: внутри контура L лежит две особые точки $z_0 = 0$ и $z_1 = i$. Это полюсы первого порядка. Вычеты в этих точках равны соответственно 1 и $\frac{1}{2i\sin i}$.

16. Методы операционного исчисления

Цель занятия: изучить основные схемы применения операционного исчисления.

Типовые задачи.

1) Найдите изображение оригинала $t^n e^{\lambda t}$.

2) По заданному изображению $\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$ найдите оригинал. (Ответ: t cos wt).

3) Опишите схему применения операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

4) Решите задачу Коши $x''' + 3x'' - 4x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$ операционным методом. (Ответ: $\frac{2}{9}e^t - \frac{2}{3}te^{-2t} - \frac{2}{9}e^{-2t}$).

Указание. Изображение решения имеет вид $\frac{2}{(p-1)(p+2)^2}$. Оригинал можно восстановить, разложив эту дробь в сумму простейших дробей.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин, В. А. Высшая математика [Текст] : учебник / В. А. Ильин, А. В. Куркина ; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Проспект, 2011. – 608 с.
2. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. – М. : Физматлит, 2009. –Ч. 2. – 432 с.
3. Сборник задач по математике для втузов [Текст] : учебное пособие / под ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. –М. : Физматлит, 2009. – Ч. 3. – 544 с.
4. Протасов, Ю.М. Математический анализ. [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ю.М. Протасов. − М.: Флинта, 2012. − 165с. – Режим доступа: http: //biblioclub.ru/.
5. Магазинников, Л.И. Высшая математика: Дифференциальное исчисление [Электронный ресурс] : учебное пособие / Магазинников, Л.И., Магазинников А.Л.; Министерство образования и науки Российской Федерации, Томский Государственный Университет Систем Управления и Радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2017. – 188 с. Режим доступа http://biblioclub.ru/
6. Бугров, Я. С. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Краткие интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного [Текст] : учебник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. - 3-е изд., испр. – М. : Наука, 1989. – 464 с.
7. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст] : учебное пособие / Н. С. Пискунов. - изд., стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. – Т. 1. – 416 с.
8. Туганбаев, А.А. Математический анализ. Ряды. [Электронный ресурс]: учебное пособие / А.А.Туганбаев. – 3-е изд., доп. − М.: Флинта, 2012. − 48с. // Режим доступа − http: //biblioclub.ru/.
9. Тютюнов, Д. Н. Неопределённый интеграл. Техника интегрирования [Текст] : [учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств", "Автоматизация технологических процессов и

производств"] / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина. - Старый Оскол: ТНТ, 2016. – 115 с.

10. Тютюнов, Д.Н. Функции нескольких переменных. [Текст]: учебное пособие / Д. Н. Тютюнов, Л. И. Студеникина, Е.В.Скрипкина. – Курск: ЗАО «Университетская книга», 2016. – 158 с.