

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 10.11.2022 16:45:15
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«15» 02 2021 г.



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПУНККАРЕ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Математическое моделирование нелинейных импульсных систем методом точечных отображений Пуанкаре: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 23 с.: ил.5. – Библиогр.: с. 23.

Описываются методы математического моделирования импульсных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать XX.XX.2021. Формат 60 × 84^{1/16}.
Усл. печ. л. 1,34. Уч.-изд. л. 1,2. Тираж 50 экз. Заказ 455. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучение методов математического моделирования нелинейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать два класса нелинейных импульсных систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями с разрывными правыми частями.

Начнем с математических моделей в виде дифференциальных уравнений с аддитивно входящими в правую часть обобщенными функциями в виде слагаемых[1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_k \delta(t - t_k), \quad \mathbf{x}, \mathbf{f}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$. В теории обобщенных функций $\delta(t) = \eta'(t)$, где η — функция Хевисайда:

$$\eta(t) = 0 \quad (t < 0), \quad \eta(t) = 1 \quad (t > 0).$$

Все решения уравнения (1) — это функции, которые в промежутках $t_k < t < t_{k+1}$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

а в точках $t = t_k$ имеют скачки, равные

$$\mathbf{x}(t_k^+) - \mathbf{x}(t_k^-) = \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{x}(t_k^\pm) = \lim_{t \rightarrow t_k^\pm} \mathbf{x}(t). \quad (2)$$

Доказательство условия (15) приводится ниже.

3. Математическая модель гибридной системы управления

3.1. Математическая с непрерывным временем

Рассмотрим в качестве примера систему управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией первого рода [2-5], поведение которой опи-

сывается скалярным уравнением вида:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k), \quad f(x) = -\lambda x, \quad \lambda > 0. \quad (3)$$

Моменты импульсации t_k в (3) определяются [2-5]

$$t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\Phi(x)$ — неубывающая функция (частотная модуляционная характеристика).

Величины b_k в правой части (3) находятся как [2-5]

$$b_k = F(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(x)$ — невозрастающая функция (амплитудная модуляционная характеристика).

Функции Φ , F являются ограниченными и принимают положительные значения. В качестве модуляционных функций Φ , F в [2-5] выбрана функция Хилла:

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p},$$

где $p = 1, 2, \dots$ — показатель функции Хилла, определяющая крутизну модуляционных характеристик; k_1, k_2, k_3, k_4, r — параметры, которые принимают положительные значения. На рис. 1 показаны примеры функций $\Phi(x)$, $F(x)$ при разных значениях p .

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (3) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках t_k , $k \geq 0$ (см. рис. 2).

Предложение 1. *Величины скачков в точках разрыва $t = t_k$ определяются выражением*

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Доказательство. В области $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ уравнение (3) записывается в форме

$$\dot{x} = -\lambda x + b_k \delta(t - t_k). \quad (4)$$

Решение уравнения (4) в промежутке $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \quad (5)$$

где $x_{\pm}(t)$ — непрерывные функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ и удовлетворяющие уравнению $\dot{x} = -\lambda x$.

Подставляя (5) в (4) и учитывая что $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$, имеем

$$\begin{aligned} \dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t - t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) = \\ = -\lambda x_-(t) - \lambda[x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k\delta(t - t_k). \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{x}_{\pm}(t) = -\lambda x_{\pm}(t)$, то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^{\pm}) = \lim_{t \rightarrow t_k \pm 0} x_{\pm}(t).$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Прежде чем продолжить, сделаем небольшое отступление. Трехмерный вариант математической модели (3) был предложен в [2] для описания регуляции тестостерона в мужском организме.

Известно, что в регуляции уровня *тестостерона* (Te) в мужском организме основную роль играют *лютеинизирующий гормон* (LH, luteinizing hormone) и *гонадотропин релизинг гормон* (GnRH, gonadotropin-releasing hormone). В отличие от Te, который генерируется в мужских половых органах (тестикулах), LH и GnRH генерируются в отделах головного мозга, соответственно в гипофизе и гипоталамусе. Поэтому динамика LH и GnRH тесно связана с динамикой нейронов мозга. При этом GnRH стимулирует секрецию LH, в свою очередь LH стимулирует секрецию Te, а Te подавляет секрецию GnRH и LH [3].

Как отмечается в [3], с точки зрения импульсной теории управления клетки гипоталамуса, генерирующие GnRH, можно рассматривать как импульсный элемент (импульсный модулятор), осуществляющий амплитудно-частотную модуляцию. При этом уровень Te выступает в качестве модулирующего сигнала, а уровень GnRH — в качестве модулированного импульсного сигнала. С увеличением уровня Te импульсы появляются реже, а их амплитуда (или площадь) уменьшается. Что касается наблюдаемого импульсного процесса секреции LH, то его можно рассматривать как реакцию непрерывной части системы на импульсный сигнал, поступающий от гипоталамуса [3].

В работах [2-5] исследуется трехмерная модель

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = -b_1x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_2x_2 + g_1x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = -b_3x_3 + g_2x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

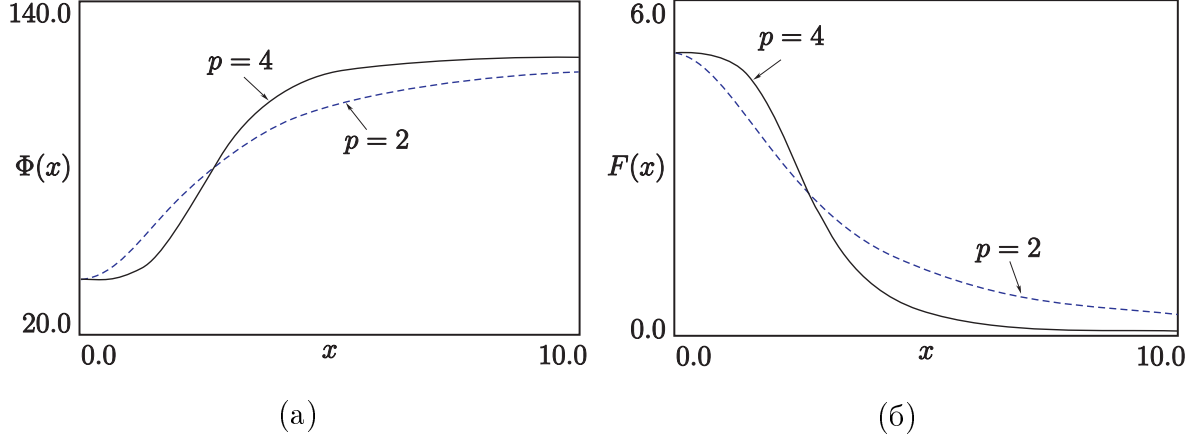


Рис. 1. Модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$ при разных значениях показателей p функции Хилла: (а) — частотная модуляционная характеристика $\Phi(x)$; (б) амплитудная модуляционная характеристика $F(x)$

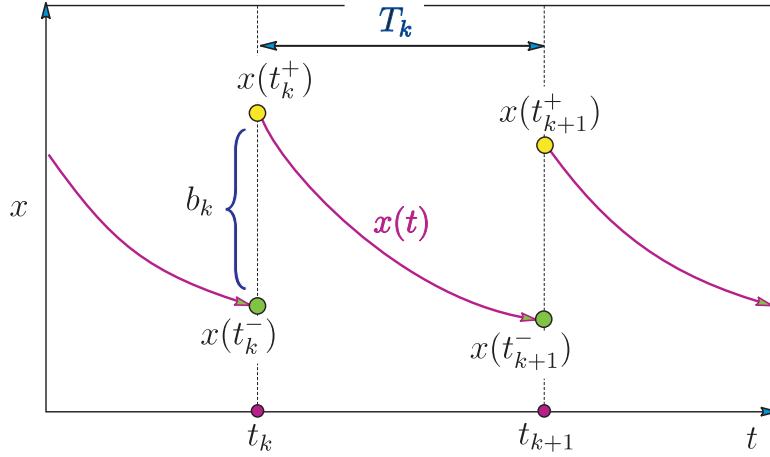


Рис. 2. Решение уравнения (7), где t_k и t_{k+1} — точки разрывов

Здесь x_1 — концентрация GnRH; x_2 , x_3 — концентрации LH и Te, соответственно. Переменная $x_1(t)$ претерпевает скачки в моменты времени t_k , $k \geq 0$

$$x_1(t_k^+) = x_1(t_k^-) + \lambda_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad \lambda_k = F(x_3(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x_3(t_k^-)).$$

Уравнение(3) является скалярной версией модели (6).

3.2. Отображение Пуанкаре

Запишем уравнение (3) в эквивалентной форме [6]

$$\dot{x} = -\lambda x. \tag{7}$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени t_k , $k \geq 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)).$$

В дальнейшем будем предполагать непрерывность $x(t)$ слева от точек разрыва $t = t_k$. В промежутках между точками разрыва (в интервалах непрерывности)

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

уравнение (7) имеет вид

$$\dot{x} = -\lambda x,$$

решение которого с начальным условием $x(t_k) = x(t_k^+)$ находится

$$x(t) = e^{-\lambda(t-t_k^+)} x(t_k^+).$$

Отсюда для $t = t_{k+1}^+$

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda(t_{k+1}-t_k^+)} x(t_k^+) \quad (8)$$

или

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda T_k} x(t_k^+), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)),$$

где $x(t_k^+)$ (см. рис. 2):

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)).$$

Подставляя выражение для $x(t_k^+)$ в (8), получим

$$x(t_{k+1}^-) = e^{-\lambda T_k} (x(t_k^-) + b_k), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)), \quad b_k = F(x(t_k^-)). \quad (9)$$

Обозначим $x_k = x(t_k^-)$. Тогда отображение Пуанкаре, порождаемое уравнением (7), записывается [6]

$$x_{k+1} = e^{-\lambda T_k} (x_k + b_k), \quad T_k = \Phi(x_k), \quad b_k = F(x_k), \quad (10)$$

$$\Phi(x_k) = k_1 + k_2 \frac{(x_k/r)^p}{1 + (x_k/r)^p}, \quad F(x_k) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x_k/r)^p}.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение (3) с разрывным решением сводится к гладкому отображению (10).

4. Системы Филиппова

В этом разделе рассмотрим математические модели, относящиеся к системам Филиппова [1].

В качестве иллюстративного примера рассмотрим математическую модель системы управления с широтно-импульсной модуляцией, непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\mathcal{K}}{T \cdot s + 1}. \quad (11)$$

4.1. Математическая модель с непрерывным временем

Состояние системы с передаточной функцией (11), описывается дифференциальным уравнением с разрывной правой частью

$$T \frac{dy}{dt} + y = \mathcal{K} \cdot K_F(\xi), \quad (12)$$

где T , \mathcal{K} – постоянная времени и коэффициент передачи объекта; $K_F(\xi)$, ξ – выходной и входной сигналы модулятора, соответственно.

Импульсы K_F формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода (ШИМ-1):

$$K_F(\xi) = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\xi)],$$

$$\xi = \alpha(V_3 - \beta y(k \cdot a)) - V_0(t/a - [t/a]), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где a – период модуляции, $[\cdot]$ – функция, выделяющая целую часть аргумента, V_3 – сигнал задания, α – коэффициент усиления, β – чувствительность датчика обратной связи, V_0 – опорный сигнал модулятора.

Параметры: $T = 10^{-4}$ с; $a = 2 \cdot 10^{-5}$ с; $V_3 = 4.0$ В; $V_0 = 4$ В; $4 < \mathcal{K} < 10$ А; $\beta = 1.0$ В/А; $\alpha > 0$.

Введем обозначения безразмерное время $\tau = t/a$ и безразмерную динамическую переменную $x = \frac{y}{\mathcal{K}}$. Тогда уравнение движения (12) можно записать в форме

$$\dot{x} = \lambda(x - K_F), \quad K_F = \frac{1}{2}[1 + \text{sign}(\varphi(\tau)|_{\tau=[\tau]} - \eta(\tau))], \quad (13)$$

$$[\tau] = k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \varphi(\tau) = q - x(\tau),$$

$$\eta(\tau) = \frac{P}{\alpha}(\tau - [\tau]), \quad \lambda = -\frac{a}{T}, \quad q = \frac{V_3}{\beta \cdot \mathcal{K}}, \quad P = \frac{V_0}{V_3}q.$$

4.2. Получение дискретного отображения

Исследование динамической системы (13) можно свести к стробоскопическому отображению Пуанкаре.

В пределах интервала $k < \tau < k + 1$

$$K_F = \begin{cases} 1, & k < \tau < \tau_k; \\ 0, & \tau_k < \tau < k + 1, \end{cases}$$

где τ_k – момент переключения, который при ШИМ-1 определяется как:

$$\tau_k = \begin{cases} k, & q - x_k < 0; \\ k + 1, & q - x_k > \frac{P}{\alpha}; \\ \frac{\alpha(q - x_k)}{P} + k, & 0 < q - x_k < \frac{P}{\alpha}. \end{cases} \quad (14)$$

Пусть $k < \tau < \tau_k$, тогда $K_F = 1$ и уравнение (13) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda(x - 1).$$

Решение этого уравнения с условием $x(k) = x_k$:

$$x(t) = e^{\lambda(\tau-k)} \left(x_k - \lambda \int_k^\tau e^{-\lambda(s-ka)} ds \right). \quad (15)$$

Найдем

$$\int_k^\tau e^{-\lambda(s-ka)} ds = \frac{1 - e^{-\lambda(\tau-k)}}{\lambda}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (15), получим

$$x(\tau) = 1 + e^{\lambda(\tau-k)}(x_k - 1).$$

Отсюда для $\tau = \tau_k$ имеем:

$$x(\tau_k) = 1 + e^{\lambda(\tau_k-k)}(x_k - 1).$$

В интервале $\tau_k < \tau < k + 1$ сигнал на выходе модулятора $K_F = 0$ и уравнение (13) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(\tau_k) = 1 + e^{\lambda(\tau_k-k)}(x_k - 1), \quad (17)$$

решение которого

$$x(\tau) = x(\tau_k)e^{\lambda(\tau-\tau_k)}.$$

Подставляя выражение для $x(\tau_k)$, получаем

$$x(\tau) = e^{\lambda(\tau-k)}(x_k - 1) + e^{\lambda(\tau-\tau_k)}.$$

Для момента времени $\tau = k + 1$ имеем:

$$x_{k+1} = e^{a\lambda}(x_k - 1) + e^{\lambda(k+1-\tau_k)}. \quad (18)$$

Введем обозначение

$$z_k = \tau_k - k,$$

где z_k – относительная длительность импульса (коэффициент заполнения).

Покажем, что $0 \leq z_k \leq 1$.

Действительно, из неравенства $k \leq \tau_k \leq k + 1$ следует, что

$$k \leq \tau_k \leq k + 1.$$

Отсюда

$$0 \leq \tau_k - k \leq (k + 1) - k$$

и

$$0 \leq \tau_k - k \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq z_k \leq 1.$$

Окончательно отображение, порождаемое уравнением движения (13), принимает вид:

$$x_{k+1} = e^\lambda(x_k - 1) + e^{\lambda(1-z_k)} \equiv Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Коэффициент заполнения импульсов z_k определяется в соответствии с алгоритмом (14):

$$z_k = \begin{cases} 0, & x_k > q, \\ 1, & x_k < q - P/\alpha, \\ \frac{\alpha(q - x_k)}{P}, & q - P/\alpha \leq x_k \leq q. \end{cases} \quad (20)$$

Итерация отображения (19) осуществляется в два шага:

- сначала по x_k вычисляется z_k в соответствии с алгоритмом (20);
- затем полученный z_k подставляется в (19) для расчета x_{k+1} .

Отображение (19) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = e^\lambda x + 1 - e^\lambda, & x \leq s^-, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = e^\lambda x - e^\lambda + e^{\lambda(1-z)}, & s^- < x < s^+, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = e^\lambda x, & x \geq s^+, \end{cases}$$

где $z = \frac{\alpha}{P} \cdot (q - x)$, $s^- = q - P/\alpha$, $s^+ = q$.

Как мы видим, в отличие от (10) отображение (19) является кусочно-гладким и непрерывным.

5. Бифуркационный анализ

Теперь мы переходим к решению задач бифуркационного анализа.

5.1. Неподвижные точки и циклы дискретных отображений

Рассмотрим одномерное дискретное отображение

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

где $Q()$ — гладкая функция. Точку x_{k+1} называют *образом* ранга 1 (rank-1 image) точки x_k , а x_k — *прообразом* (preimage) x_{k+1} .

Орбитой дискретной системы (21) называется последовательность точек $x_0, x_1 = Q(x_0), \dots, x_k = Q(x_{k-1}), \dots$

Точка x^0 называется *неподвижной*, если

$$x^0 = Q(x^0), \quad (22)$$

т.е. удовлетворяет уравнению

$$x = Q(x).$$

В дискретной системе (21) *периодической орбитой* или *циклом* периода m называется конечное множество точек

$$x_0, \quad Q(x_0), \quad Q^2(x_0), \dots, Q^m(x_0) = x_0. \quad (23)$$

Каждая точка этого множества является неподвижной точкой m -й итерации Q^m функции Q , т.е. удовлетворяет уравнению:

$$Q^m(x) = x, \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x) \dots))}_{m \text{ раз}} \quad (24)$$

5.2. Устойчивость неподвижных точек и циклов

Начнем с анализа устойчивости неподвижной точки x^0 .

Введем малое отклонение (возмущение) от неподвижной точки x^0 : $x_k = x^0 + \varepsilon_k$, где ε_k — малое число.

Тогда возмущенное движение в окрестности x^0 описывается уравнением

$$x^0 + \varepsilon_{k+1} = Q(x^0 + \varepsilon_k).$$

После разложения $Q(x)$ в ряд Тейлора в окрестности x^0 получим:

$$x^0 + \varepsilon_{k+1} = Q(x^0) + \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \varepsilon_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q(x^0)}{\partial x^2} \varepsilon_k^2 + \dots \quad (25)$$

Отбросив нелинейные члены ряда, задачу можно свести к исследованию линеаризованного отображения

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \varepsilon_k. \quad (26)$$

Неподвижная точка x^0 называется *гиперболической*, если $\left| \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} \right| \neq 1$. Ко-

эффициент $\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}$ называется мультипликатором неподвижной точки.

Для гиперболических неподвижных точек отображений существует теорема *Хартмана-Гробмана*:

Теорема Хартмана-Гробмана. Пусть $\mathbf{Q} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет непрерывную первую производную. Тогда в некоторой окрестности \mathcal{D} гиперболической неподвижной точки \mathbf{x}^0 ($\mathbf{x}^0 = \mathbf{Q}(\mathbf{x}^0)$, $\mathbf{x}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$) существует гомеоморфизм φ , взаимно однозначно отображающий траектории исходной системы на траекторию линеаризованной системы.

Таким образом, для гиперболических неподвижных точек отображений устойчивость по отношению к бесконечно малым и малым конечным возмущениям $\varepsilon = x - x^0$ определяется свойствами линеаризованного отображения (26).

Неподвижная точка x^0 устойчива, когда

$$|\rho| < 1, \quad \text{т.е.} \quad -1 < \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} < 1.$$

В этом случае в малой окрестности точки x^0 по теореме Хартмана-Гробмана траектория отображения (21) эквивалентна траектории линейного отображения

$$x_{k+1} - x^0 = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} (x_k - x^0) \Rightarrow x_{k+1} = \rho x_k + c, \quad c = (1 - \rho)x^0.$$

Это означает, что поведение последовательности $\varepsilon_k = x_k - x^0$ в малой окрестности x^0 соответствует сходящейся геометрической прогрессии

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^0,$$

если $|\rho| < 1$.

Неподвижная точка x^0 неустойчива при $|\rho| > 1$, когда геометрическая прогрессия оказывается расходящейся.

Неподвижная точка теряет устойчивость, когда $\frac{\partial Q(x^0)}{\partial x} = \pm 1$.

Понятие гиперболичности и теорема *Хартмана-Гробмана* естественным образом обобщается на на цикл любого конечного периода m .

Цикл периода m устойчив, когда мультипликатор ρ_m

$$\rho_m = \left| \prod_{k=1}^m \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x} \right| < 1$$

Как мы отмечали ранее, этому циклу отвечает m устойчивых неподвижных точек $x_1, x_2, x_3, \dots, x_m$ отображения

$$x_{k+1} = Q^m(x_k), \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x)\dots))}_{m \text{ раз}}. \quad (27)$$

Порядок анализа устойчивости Рассмотрим задачу об устойчивости неподвижной точки и цикла.

1. Найти неподвижные точки из решения уравнения

$$x = Q(x). \quad (28)$$

Для цикла периода m :

$$x = Q^m(x), \quad Q^m(x) = \underbrace{Q(Q(\dots Q(x)\dots))}_{m \text{ раз}}. \quad (29)$$

Уравнения (28), (29) решаются численно.

2. Пусть x^0 — неподвижная точка, то есть корень уравнения (28). Вычислить мультипликатор $\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}$ неподвижной точки x^0 .

3. Проверить выполнение неравенства $|\rho| < 1$: если $|\rho| < 1$, то x^0 — устойчива; если $|\rho| > 1$, то x^0 — неустойчива.

4. Для цикла достаточно найти одну неподвижную точку отображения (27), т.е. один корень уравнения (29). Тогда мультипликатор ρ_m цикла периода m

$$\rho_m = \prod_{k=1}^m \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x}$$

рассчитывается по алгоритму:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Q(x_k), \\ \rho_{k+1} = \frac{\partial Q(x_k)}{\partial x} \rho_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad x_0 = x^*, \quad \rho_0 = 1. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь x^* — корень уравнения (29). Орбита $x_1, x_2, \dots, x_m = x_0$, рассчитанная рекуррентно по (30) при $x_0 = x^*$ — это и есть цикл периода m .

Пример

Найти неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = (\lambda - 1)x_k - \lambda x_k^3 \equiv Q(\lambda, x_k),$$

$$0 < \lambda < 4, \quad -1 < x_k < 1$$

и исследуйте их устойчивость в зависимости от параметра λ .

В этом примере мы рассматриваем задачу об устойчивости неподвижной точки, допускающей аналитическое решение.

Решение

1. Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x = (\lambda - 1)x - \lambda x^3 \equiv Q(\lambda, x)$$

или

$$x = Q(\lambda, x), \quad \lambda x^3 - (\lambda - 2)x = 0.$$

Это уравнение имеет три корня: $x_1^0 = 0$, $x_{2,3}^0 = \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\lambda}}$.

2. Найдем производную

$$\frac{\partial Q(\lambda, x)}{\partial x} = \lambda - 1 - 3\lambda x^2. \tag{31}$$

2.1. Подставив $x_1^0 = 0$ в (31), получим мультипликатор ρ_1 первой неподвижной точки x_1^0 : $\rho_1 = \lambda - 1$.

Из неравенства

$$|\rho_1| < 1$$

находим область устойчивости x_1^0 : $0 < \lambda < 2$.

2.2. Неподвижные точки $x_{2,3}^0$ существуют только при $\lambda \leq 2$. Мультипликаторы $\rho_{2,3}$:

$$\rho_2 = \rho_3 = \lambda - 1 - 3\lambda x^2 \Big|_{x=x_{2,3}^0} = -2\lambda + 5$$

Из условия $|\rho_{2,3}| < 1$ находим область устойчивости $x_{2,3}^0$: $2 < \lambda < 3$.

6. Бифуркационные условия

Пусть отображение зависящее от параметра λ вида

$$x_{k+1} = Q(\lambda, x_k)$$

имеет при $\lambda = \lambda_0 = 0$ неподвижную точку $x^0 = 0$. Здесь $Q(\lambda, x)$ — гладкая по x функция.

Строгое доказательство приводимых далее бифуркационных условий можно найти в специальной литературе (см., например, [7]).

А. Касательная бифуркация (fold or tangent bifurcation)

- Пусть при $\lambda = \lambda_0 = 0$

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и выполнены условия

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial f^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место касательная бифуркация [7].

Б. Транскритическая бифуркация (transcritical bifurcation)

- Пусть

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место транскритическая бифуркация.

В. Вилообразная бифуркация (pitchfork bifurcation)

- Пусть

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = +1$$

и

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial f^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{\partial Q^3(\lambda_0, x^0)}{\partial x^3} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место вилообразная бифуркация.

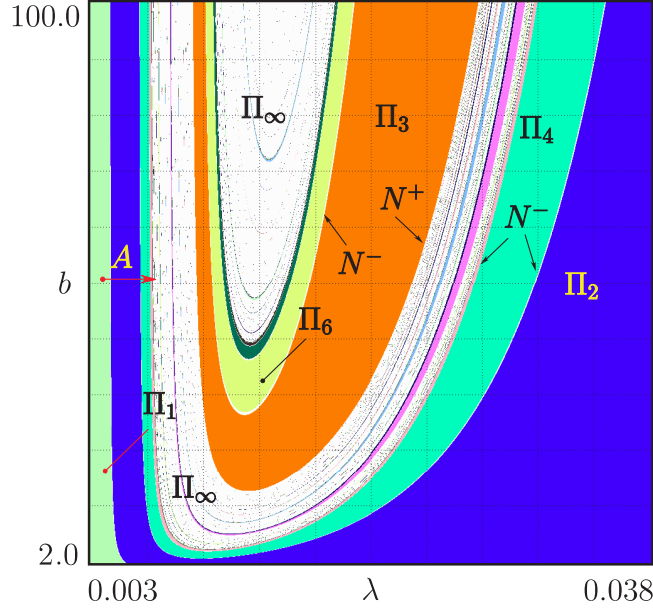


Рис. 3. Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости (λ, b) при $p = 4$ [6]. Здесь Π_i , $i = 1, 2, 3, 4, 6$ — области устойчивости циклов периода i и Π_∞ — области хаотической динамики, где N^+ , N^- — линии касательной (fold, tangent) бифуркации и бифуркации удвоения периода, соответственно

Г. Бифуркация удвоения периода (flip or period-doubling bifurcation)

- Пусть при $\lambda = \lambda_0$

$$\frac{\partial Q(\lambda_0, x^0)}{\partial x} = -1.$$

и пусть

$$\frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x \partial \lambda} \neq 0, \quad \frac{1}{2} \left[\frac{\partial Q^2(\lambda_0, x^0)}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{1}{3} \frac{\partial Q^3(\lambda_0, x^0)}{\partial x^3} \neq 0.$$

Тогда при $\lambda = \lambda_0$ имеет место бифуркация удвоения периода [7].

7. Пример бифуркационного анализа

В этом раздел мы опишем бифуркационные явления в системе управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией. Настоящий раздел написан по материалам нашей публикации [6].

Рассмотрим дискретное отображение (10)

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p}.$$

Пусть параметры динамической системы (10) имеют следующие значения: $k_1 = 40$, $k_2 = 80$, $k_3 = 0.0001b$, $k_4 = 5b$, где $2 < b < 100$, $r = 2.7$, $p = 4$, $0.003 < \lambda < 0.038$. В качестве варьируемых выберем λ и b .

Неподвижные точки удовлетворяют уравнению

$$x = Q(x)$$

или

$$x = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

которое решалось численно.

Пусть x^0 — неподвижная точка отображения (10). Мультипликатор неподвижной точки

$$\rho = \frac{\partial Q(x^0)}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q(x)}{\partial x} = -\lambda\Phi'(x)e^{-\lambda\Phi(x)}(x + F(x)) + e^{-\lambda\Phi(x)}(1 + F'(x)).$$

На рис. 3 изображена двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (λ, b) , построенная численно [6]. Через Π_k , $k = 1, 2, 3, 4, 6$, обозначены области устойчивости цикла периода k , а через Π_∞ — области с хаотической динамикой. Области Π_k $k = 1, 2, 4$ разделены бифуркационными кривыми удвоения периода N^- (flip). Бифуркационные линии N^- сгущаются и существуют трансверсальные им линии, вдоль которых происходят каскады бифуркации удвоения периода. Область Π_3 снаружи ограничена кривой касательной бифуркации (fold) N^+ .

На рис. 4(а) приведена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода. Такую диаграмму довольно просто построить на компьютере. Для этого надо рассчитать несколько тысяч итераций отображения. Первые 1000—5000 значений x_k оставить в «тени», а остальные, например 1500—2000 значений, отложить на плоскости (λ, x) . Первые члены следует отбросить с тем, чтобы исключить переходный процесс. Циклу периода 1 (неподвижной точке) будет соответствовать одна точка, циклу периода 2 — две точки на одной вертикали, циклу периода 4 — четыре и т.д.

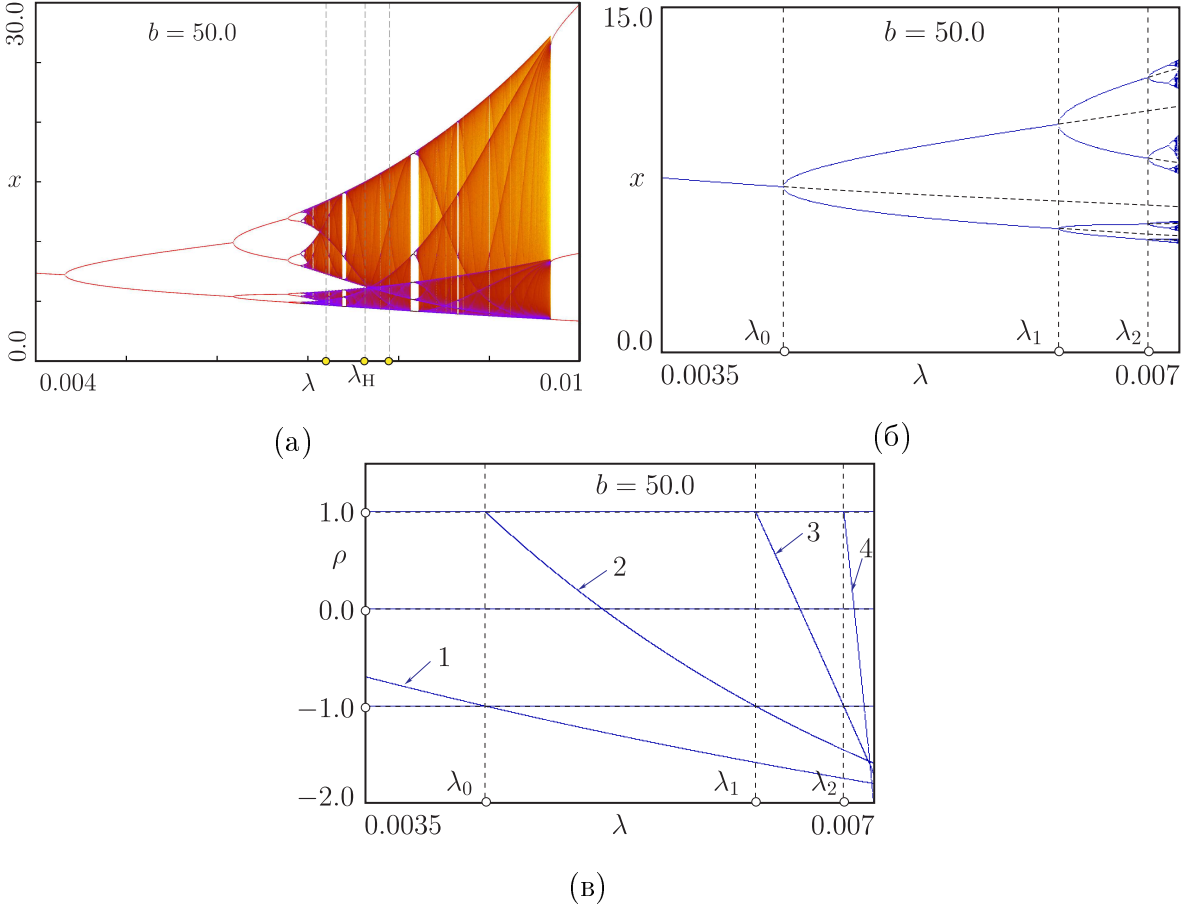


Рис. 4. (а) Переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода. (б) Последовательность четырех бифуркаций удвоения периода [6]. Пунктирные линии соответствуют неустойчивым циклам. (в) Зависимости мультипликаторов циклов периода m , $m = 1, 2, 4, 8$. Цифрами 1, 2, 3, 4 обозначены мультипликаторы 1-, 2-, 4-, и 8-циклов, соответственно [6]

На рис. 4(б), приведены результаты численных расчетов устойчивых и неустойчивых 1-, 2-, 4- и 8-циклов [6]. Пунктирные линии бифуркационной диаграммы отвечают неустойчивым циклам. На рис. 4(в), приведены зависимости мультипликаторов 1-, 2-, 4- и 8-циклов от параметра λ , обозначенные цифрами 1, 2, 3, 4, соответственно, при бифуркациях удвоения периода. Как можно видеть из рис. 4(б), переходе через точку λ_0 , когда мультипликатор обращается в -1 ($\rho = -1$) при $\lambda = \lambda_0$, неподвижная точка (или 1-цикл) теряет устойчивость. В результате этого мягко возникает устойчивый 2-цикл, а 1-цикл продолжает существовать, но становится неустойчивым. Родившийся цикл периода 2 при дальнейшем увеличении λ теряет устойчивость через бифуркацию удвоения периода в точке λ_1 и возникает цикл периода 4. Изменяя далее значение параметра λ , можно увидеть циклы периода 8, 16, 32, 64 и т.д. При этом каждый раз цикл теряет устойчивость, когда мультиплика-

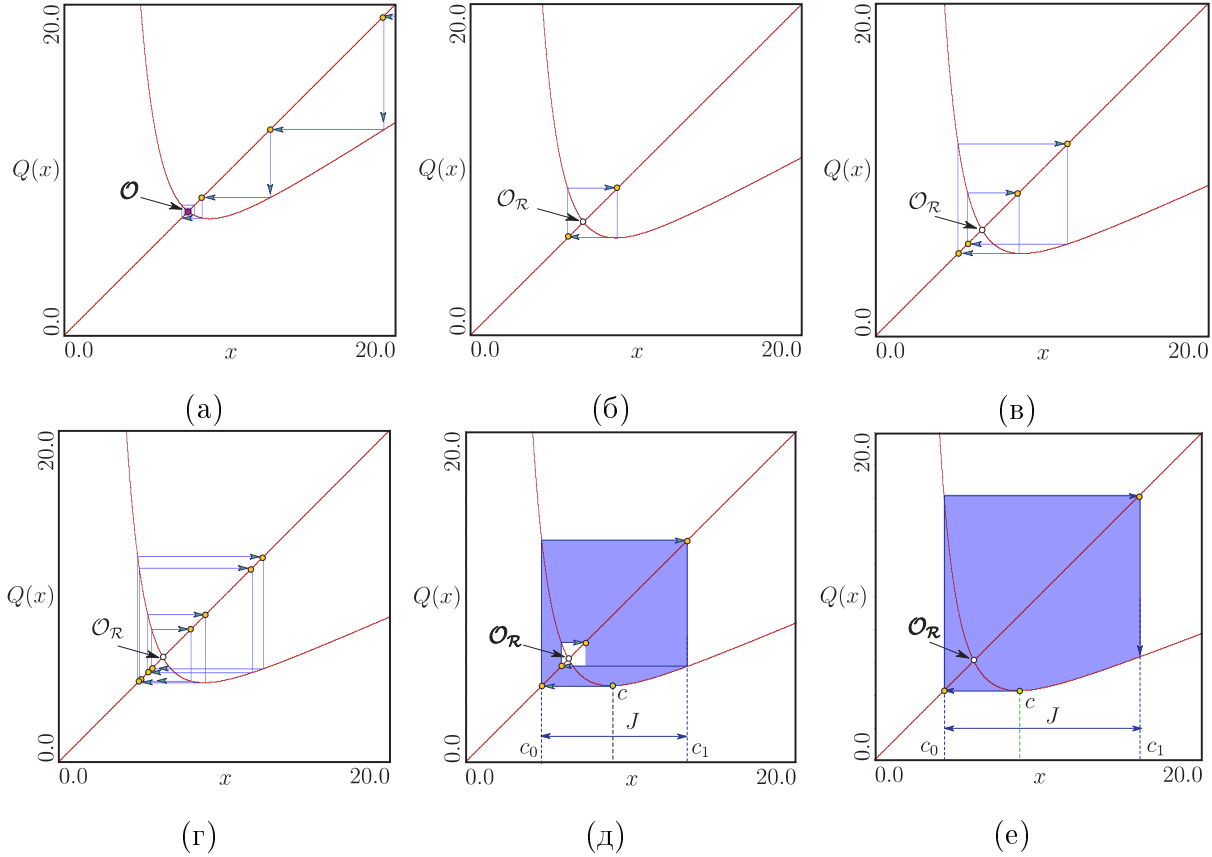


Рис. 5. Итерационные диаграммы: (а) — устойчивая неподвижная точка (цикл периода 1); (б)–(г) — устойчивые 2-, 4- и 8- циклы, соответственно; (д), (е) — однополосный и двухполосный хаотические аттракторы. Здесь O , O_R — устойчивая и неустойчивая неподвижные точки

тор цикла обращается в -1 . Потеря устойчивости приводит к возникновению устойчивого цикла удвоенного периода. Наконец, при некотором значении параметра динамика становится хаотичной [6].

На рис. 5 (а) приведена итерационная диаграмма в области значений λ , когда мультипликатор устойчивой неподвижной точки меняет знак с «+» ($0 < \rho < 1$) на «-» ($-1 < \rho < 0$) перед бифуркацией удвоения периода в точке $\lambda = \lambda_0$. а На рис. 5 (б)-(г) изображены итерационные диаграммы 2-, 4-, 8-циклов, соответственно, а на рис. 5 (д),(е) — хаотических аттракторов.

Точка c на рис. 5 (д),(е) — называется *критической точкой*, определяемая условием $Q'(x) = 0$. Для (10) точка c — точка локального экстремума (минимума) функции $Q(x)$. Точка $c_0 = Q(c)$ называется образом ранга 1 критической точки c , а точки $c_1 = Q^2(c)$, $c_2 = Q^3(c)$ — соответственно образами ранга 2 и 3. Мы не будем обсуждать роль критических точек в бифуркационных переходах, а ограничимся лишь краткими комментариями. За подробностями отсылаем к специальным источникам (см., например, [8]).

Точки c_0, c_1 — определяют «размеры» хаотических аттракторов, изображенных на рис. 5 (д),(е). Область J на рис. 5 (д),(е) называется поглощающим инвариантным интервалом (invariant absorbing interval) $Q(J) = J$ [8]. Переход от двухполосного хаотического аттрактора (рис. 5 (д)) к однополостному (рис. 5 (е)) происходит через гомоклиническую бифуркацию [9] в точке λ_H на рис. 4(а), когда $Q^3(c) = \mathcal{O}_R$. В точке $\lambda = \lambda_H$ возникает так называемая *критическая гомоклиническая орбита* (critical homoclinic orbit) неподвижной точки \mathcal{O}_R [8].

Лабораторные работы

Лабораторная работа №1.

Бифуркации дискретных отображений

Для для отображений

$$x_{k+1} = ax_k - x_k^3, \quad x_{k+1} = \frac{(1+a)x_k}{1+ax_k}, \quad x_{k+1} = ax_k e^{-x_k} :$$

1. найдите неподвижные точки аналитически как функции параметра a ;
2. определите мультипликаторы в форме явной зависимости от параметра a ;
3. определите значения параметра a , отвечающие возможным бифуркациям;
4. проверьте выполнение бифуркационных условий;
5. подтвердите результаты аналитических исследований численными расчетами бифуркационных и итерационных диаграмм.

Для расчета итерационных диаграмм можно использовать программу <http://math.colgate.edu/math312/Spring1999/iterate.html>.

Указание: *Чтобы применить бифуркационные условия, приведенные в разделе 6., надо переписать отображения, поместив точку бифуркации (бифуркационное значение параметра) и неподвижную точку в начало координат.*

Лабораторная работа №2.

Дискретные модели гибридных систем

1. Рассмотрите уравнение

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1.1. Постройте отображение в форме

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^+), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{т.е. } x(t_{k+1}^+) = Q(x(t_k^+)), \quad x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)).$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для $p = 4$, $b = 50.0$ и $0.0042 < \lambda < 0.0086$. Сравните с диаграммой, приведенной на рис. 4(а). Объясните, будут ли различия в динамике.

1.3. Составить алгоритм численного расчета неподвижной точки и анализа ее локальной устойчивости. Постройте итерационные диаграммы для ситуаций $0 < \rho < 1$, $-1 < \rho < 0$, $\rho < -1$. Объясните наблюдаемую динамику.

2. Исследовательская задача.

Лабораторная работа №3.

Исследование бифуркаций в гибридных и импульсных системах

1. Рассмотрите отображение

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad Q(x) = e^{-\lambda\Phi(x)} (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p}.$$

1.2. Рассчитайте бифуркационную диаграмму для $p = 3$, $b = 40.0$ и $0.003 < \lambda < 0.03$. Объясните наблюдаемую динамику.

1.3. Составить алгоритм численного расчета цикла периода-1 и анализа локальной устойчивости. Найдите численно порог рождения 2-цикла через бифуркацию удвоения периода. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

2. Исследовательская задача.

Лабораторная работа №4.

Кусочно-гладкие дискретные модели импульсных систем

Рассмотрите модель системы управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией

$$\dot{x} = -\lambda x.$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени t_k , $k \geq 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b \cdot F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)),$$

где $F(x)$, $\Phi(x)$ кусочно-линейные функции [3]:

$$F(x) = \begin{cases} F_1, & 0 \leq x < \Delta_1, \\ -a_F x + b_F, & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ F_2, & x > \Delta_2, \end{cases} \quad \Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1, & 0 \leq x < \Delta_1, \\ -a_\Phi x + b_\Phi, & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ \Phi_2, & x > \Delta_2. \end{cases}$$

$$a_F = \frac{F_2 - F_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad a_\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad b_F = \frac{F_1 \Delta_2 - F_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}, \quad b_\Phi = \frac{\Phi_1 \Delta_2 - \Phi_2 \Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}.$$

Параметры: $\Delta_1 = 1.5$; $\Delta_2 = 4$; $F_1 = 3.0$; $F_2 = 5.0$; $\Phi_1 = 60.0$; $\Phi_2 = 100.0$; $1 < b < 10$; $0.003 < \lambda < 0.038$.

1. Постройте математическую модель в форме кусочно-гладкого отображения [9,10].

$$x_{k+1} = Q(x_k), \quad x_k = x(t_k^-), \quad Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x), & 0 \leq x < \Delta_1, \\ Q_{\mathcal{M}}(x), & \Delta_1 \leq x < \Delta_2, \\ Q_{\mathcal{R}}(x), & x > \Delta_2, \end{cases}$$

где $Q_{\mathcal{L}}$, $Q_{\mathcal{M}}$, $Q_{\mathcal{R}}$ — гладкие функции.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде.

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде.

4. Определите характер потери устойчивости. Проиллюстрируйте решение задачи на итерационных диаграммах.

5. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации λ . Объясните, что происходит при насыщении модулятора.

Лабораторная работа №5.

Дискретные модели широтно-импульсных систем

1. Постройте стробоскопическое отображение для математической модели системы управления с широтно-импульсной модуляцией второго рода (ШИМ-2), непрерывная линейная часть которой описывается передаточной функцией (11). Описание ШИМ-2 и методика получения отображения приведены в [9,10]. Параметры те же самые, что и для модели (12) системы с ШИМ-1.

2. Составьте алгоритм расчета периодического режима с одним импульсом на периоде (1-цикла или неподвижной точки отображения).

3. Составьте алгоритм исследования локальной устойчивости периодического режима с одним импульсом на периоде. Рассчитайте область устойчивости 1-цикла по коэффициенту усиления α .

4. Рассчитайте бифуркационную диаграмму при вариации коэффициента усиления α . Определите, как меняется динамика при потере устойчивости 1-цикла. Проиллюстрируйте переход на итерационных диаграммах.

Библиографический список

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука.

2. *Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A.* Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback//Automatica. 2008. Vol. 45(1). P. 78 – 85.

3. *Медведев А.В., Чурилов А.Н., Шепелявый А.И.* Математические модели регуляции тестостерона// Стохастическая оптимизация в информатике. 2006. Том 2. С. 147 – 158.

4. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation//Chaos. 2012. Vol. 22(1). P. 013121-1 – 013121-11.

5. *Churilov A.N., Medvedev F. Zhusubaliyev Zh.T.* Impulsive Goodwin oscillator with large delay: Periodic oscillations, bistability, and attractors// Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2016. Vol. 21. P. 171 – 183.

6. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Complex dynamics and chaos in a scalar linear continuous system with impulsive feedback//Proceedings of the American Control Conference (ACC2012). 2012. P.2419 – 2424.

7. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer-Verlag, 2004.

8. *Avrutin V., Schenke B., Gardini L.* Calculation of homoclinic and heteroclinic orbits in 1D maps//Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2015. V.22. P.1201 – 1214 (статья в открытом доступе согласно лицензии BY-NC-ND: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/>).

9. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

10. *Жусубалиев Ж. Т.* Бифуркации и хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2017. - 143 с.