МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_________ О.Г. Локтионова
« » _____________ 2022 г.

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01, 09.04.01, 09.06.01, 15.04.04, 15.04.06, 27.04.04

Курск 2022

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Т.Н. Конаныхина*

Бифуркационный анализ импульсных систем: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01, 09.06.01, 15.04.04, 15.04.06, 27.04.04/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2022. – 26 с.: ил.11. – Библиогр.: с. 26.

Описывается методы бифуркационного анализа импульсных систем. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01, 09.06.01, 15.04.04, 15.04.06, 27.04.04 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ 1189. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучение методов бифуркационного анализа импульсных систем.

2. Постановка задачи

Начнем с рассмотрения так называемых гибридных систем, поведение которых описываются дифференциальными уравнениями с аддитивно входящими в правую часть обобщенными функциями в виде слагаемых [1]:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{b}_k \delta(t - t_k), \quad \mathbf{x},\ \mathbf{f},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Здесь δ — дельта-функция Дирака, $\dot{\mathbf{x}} = \dfrac{d\mathbf{x}}{dt}$. В теории обобщенных функций $\delta(t) = \eta'(t)$, где η — функция Хевисайда:

$$\eta(t) = 0 \quad (t < 0), \quad \eta(t) = 1 \quad (t > 0).$$

Все решения уравнения (1) — это функции, которые в промежутках $t_k < t < t_{k+1}$ абсолютно непрерывны и удовлетворяют уравнению

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

а в точках $t = t_k$ имеют скачки, равные

$$\mathbf{x}(t_k^+) - \mathbf{x}(t_k^-) = \mathbf{b}_k, \quad \mathbf{x}(t_k^{\pm}) = \lim_{t \to t_k \pm 0} \mathbf{x}(t). \tag{2}$$

Доказательство условия (14) приводится ниже.

3. Математическая модель гибридной системы

3.1. Математическая с непрерывным временем

Рассмотрим в качестве первого примера систему управления с амплитудно-частотно-импульсной модуляцией первого рода [2-5], поведение которой описывается скалярным уравнением вида:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \delta(t - t_k), \quad f(x) = -\lambda\, x, \quad \lambda > 0. \tag{3}$$

Моменты импульсации t_k в (3) определяются [2-5]

$$t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где $\Phi(x)$ — неубывающая функция (частотная модуляционная характеристика).

Величины b_k в правой части (3) находятся как [2-5]

$$b_k = F(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где $F(x)$ — невозрастающая функция (амплитудная модуляционная характеристика).

Функции Φ, F являются ограниченными и принимают положительные значения. В качестве модуляционных функций Φ, F в [2-5] выбрана функция Хилла:

$$\Phi(x) = k_1 + k_2 \frac{(x/r)^p}{1 + (x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1 + (x/r)^p},$$

где $p = 1, 2, ...$ — показатель функции Хилла, определяющая крутизну модуляционных характеристик; k_1, k_2, k_3, k_4, r — параметры, которые принимают положительные значения. Примеры функций $\Phi(x)$ и $F(x)$ показаны на рис. 1.

Как мы отмечали ранее, решение уравнения (3) кусочно-непрерывно с конечными разрывами в точках t_k, $k \geqslant 0$ (см. рис. 2).

Предложение 1. *Величины скачков в точках разрыва $t = t_k$ определяются выражением*

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Доказательство. В области $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ уравнение (3) записывается в форме

$$\dot{x} = -\lambda\, x + b_k \delta(t - t_k). \tag{4}$$

Решение уравнения (4) в промежутке $t_{k-1} < t < t_{k+1}$ будем искать в виде

$$x(t) = x_-(t) + [x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k), \tag{5}$$

где $x_\pm(t)$ — непрерывные функции, определенные соответственно в областях $t_{k-1} < t < t_k$ и $t_k < t < t_{k+1}$ и удовлетворяющие уравнению $\dot{x} = -\lambda\, x$.

Подставляя (5) в (4) и учитывая что $\eta'(t - t_k) = \delta(t - t_k)$, имеем

$$\dot{x}_-(t) + [\dot{x}_+(t) - \dot{x}_-(t)]\eta(t - t_k) + [x_+(t) - x_-(t)]\delta(t - t_k) =$$
$$= -\lambda\, x_-(t) - \lambda[x_+(t) - x_-(t)]\eta(t - t_k) + b_k \delta(t - t_k).$$

Поскольку $\dot{x}_\pm(t) = -\lambda x_\pm(t)$, то

$$\{x(t_k^+) - x(t_k^-) - b_k\}\delta(t - t_k) = 0, \quad x(t_k^\pm) = \lim_{t \to t_k \pm 0} x_\pm(t).$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках, найдем

$$x(t_k^+) - x(t_k^-) = b_k.$$

Прежде чем продолжить, сделаем небольшое отступление. Трехмерный вариант математической модели (3) был предложен в [2] для описания регуляции тестостерона в мужском организме.

Известно, что в регуляции уровня *тестостерона* (Te) в мужском организме основную роль играют *лютеинизирующий гормон* (LH, luteinizing hormone) и *гонадотропин релизинг гормон* (GnRH, gonadotropin-releasing hormone). В отличие от Te, который генерируется в мужских половых органах (тестикулах), LH и GnRH генерируются в отделах головного мозга, соответственно в гипофизе и гипоталамусе. Поэтому динамика LH и GnRH тесно связана с динамикой нейронов мозга. При этом GnRH стимулирует секрецию LH, в свою очередь LH стимулирует секрецию Te, а Te подавляет секрецию GnRH и LH [3].

Как отмечается в [3], с точки зрения импульсной теории управления клетки гипоталамуса, генерирующие GnRH, можно рассматривать как импульсный элемент (импульсный модулятор), осуществляющий амплитудно-частотную модуляцию. При этом уровень Te выступает в качестве модулирующего сигнала, а уровень GnRH — в качестве модулированного импульсного сигнала. С увеличением уровня Te импульсы появляются реже, а их их амплитуда (или площадь) уменьшается Что касается наблюдаемого импульсного процесса секреции LH, то его можно рассматривать как реакцию непрерывной части системы на импульсный сигнал, поступающий от гипоталамуса [3].

В работах [2-5] исследуется трехмерная модель

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = -b_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b_2 x_2 + g_1 x_1, \\ &\qquad\qquad \frac{dx_3}{dt} = -b_3 x_3 + g_2 x_2. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь x_1 — концентрация GnRH; x_2, x_3 — концентрации LH и Te, соответственно. Переменная $x_1(t)$ претерпевает скачки в моменты времени t_k, $k \geqslant 0$

$$x_1(t_k^+) = x_1(t_k^-) + \lambda_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad \lambda_k = F(x_3(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x_3(t_k^-)).$$

Уравнение(3) является скалярной версией модели (6).

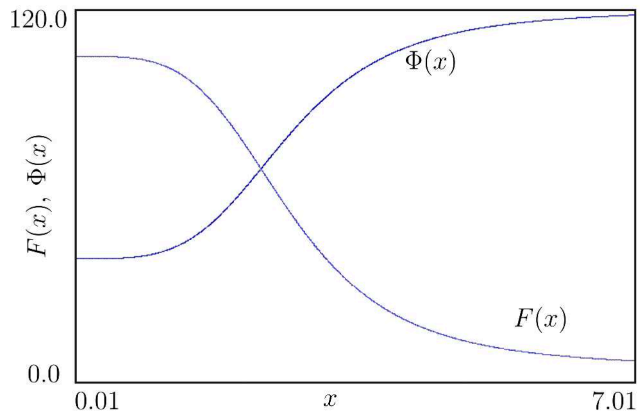


Рис. 1. Модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$: $\Phi(x)$ – частотная характеристика; $F(x)$ – амплитудная характеристика

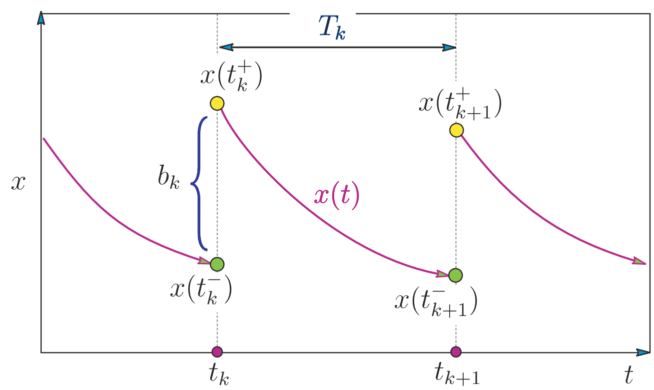


Рис. 2. Решение уравнения (7), где t_k и t_{k+1} — точки разрывов

3.2. Дискретная модель гибридной системы

Запишем уравнение (3) в эквивалентной форме [6]

$$\dot{x} = -\lambda x. \tag{7}$$

Здесь $x(t)$ имеют скачки в моменты времени t_k, $k \geqslant 0$:

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad t_{k+1} = t_k + T_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)).$$

В дальнейшем будем предполагать непрерывность $x(t)$ слева от точек разрыва $t = t_k$. В промежутках между точками разрыва (в интервалах непрерывности)

$$t_k < t < t_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

уравнение (7) имеет вид

$$\dot{x} = -\lambda x,$$

решение которого с начальным условием $x(t_k) = x(t_k^+)$ находится

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_k^+)}\, x(t_k^+).$$

Отсюда для $t = t_{k+1}^+$

$$x(t_{k+1}^-) = \mathrm{e}^{-\lambda(t_{k+1}-t_k^+)}\, x(t_k^+) \tag{8}$$

или

$$x(t_{k+1}^-) = \mathrm{e}^{-\lambda T_k}\, x(t_k^+), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)),$$

где $x(t_k^+)$ (см. рис. 2):

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + b_k, \quad b_k = F(x(t_k^-)).$$

Подставляя выражение для $x(t_k^+)$ в (8), получим

$$x(t_{k+1}^-) = \mathrm{e}^{-\lambda T_k}\, (x(t_k^-) + b_k), \quad T_k = \Phi(x(t_k^-)), \quad b_k = F(x(t_k^-)). \tag{9}$$

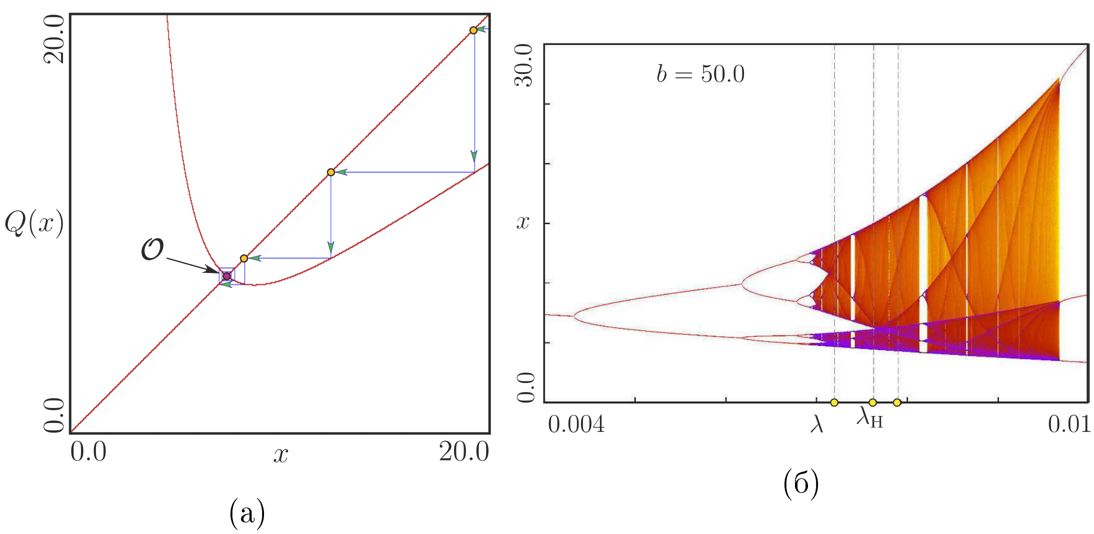


Рис. 3. (а) Отображение (10). (б) Бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход к хаосу через бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода

Обозначим $x_k = x(t_k^-)$. Тогда отображение , порождаемое уравнением (7), записывается [6]

$$x_{k+1} = Q(x_k), \tag{10}$$

$$Q(x) = \mathrm{e}^{-\lambda\Phi(x)}\, (x + F(x)),$$

$$\Phi(x) = k_1 + k_2\frac{(x/r)^p}{1+(x/r)^p}, \quad F(x) = k_3 + \frac{k_4}{1+(x/r)^p}.$$

Параметры: $k_1 = 40$, $k_2 = 80$, $k_3 = 0.0001b$, $k_4 = 5b$, где $2 < b < 100$, $r = 2.7$, $p = 4$, $0.003 < \lambda < 0.038$. В качестве варьируемых выберем λ и b. Таким образом, дифференциальное уравнение (3) с разрывным решением сводится к гладкому отображению (10).

4. Математическая модель импульсной системы

В этом разделе рассмотрим дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями (системы Филиппова) [1]. Изучим методику построения отображения [7,8] для изучения динамики систем управления с широтно-импульсной модуляцией, структурная схема которых приведена на рис. 4. Пример конкретной системы изображен на рис. 5. Как показано на рис. 6 в зависимости от параметров возможны разные типы колебательных режимов: периодические (рис. 6(а)-(в)) и нерегулярные (непериодические) (см. рис. 6(г)).

4.1. Математическая модель с непрерывным временем

Состояние системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{1}{T \cdot s + 1}.$$

описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dx}{dt} + x = \mathrm{K_F}, \tag{11}$$

где T – постоянная времени объекта; $\mathrm{K_F}$ – выходной модулятора.

Импульсы $\mathrm{K_F}$ формируются методом широтно-импульсной модуляции первого рода (ШИМ-1) (см. рис. 7). Уравнение (11) можно записать в форме

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \lambda(x - \mathrm{K_F}), \quad \mathrm{K_F} = \frac{1}{2}[1 + \mathrm{sign}(\sigma(t)|_{t=\lfloor t \rfloor} - \eta(t))], \qquad (12)\\
&\lfloor t \rfloor = k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad \sigma(t) = q - x(t),\\
&\eta(t) = \frac{P}{\alpha}(t - \lfloor t \rfloor), \quad \lambda = -\frac{1}{T}.
\end{aligned}$$

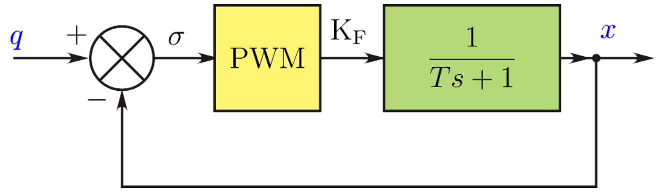
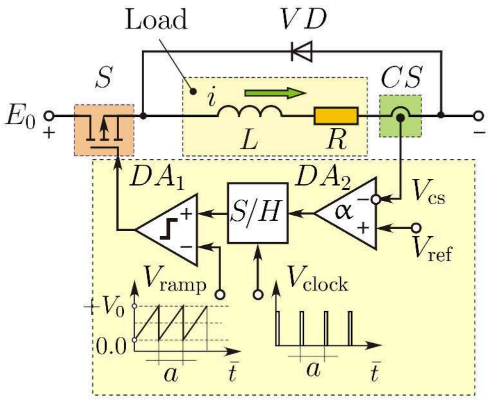
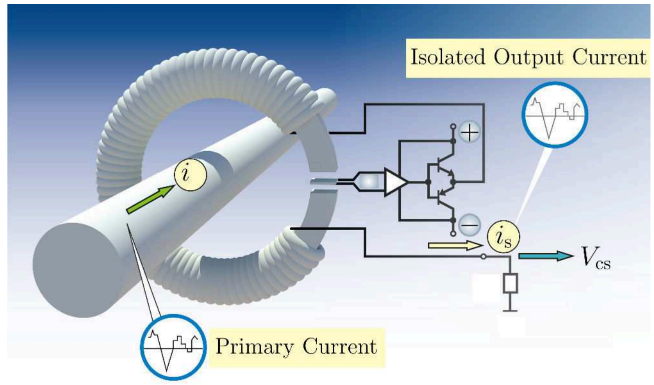


Рис. 4. Структурная схема системы управления с широтно-импульсной модуляцией

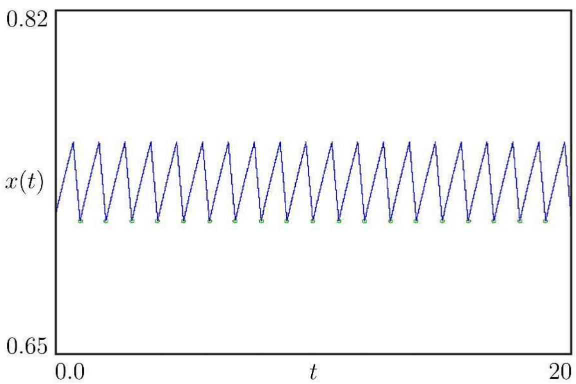


(а)

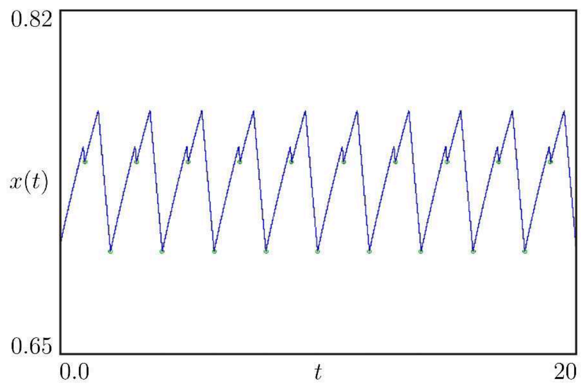


(б)

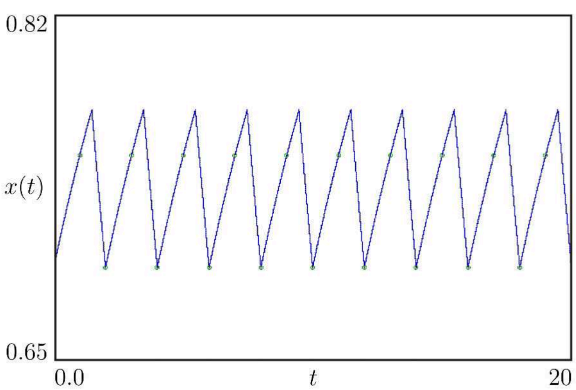
Рис. 5. Пример. (а) Схема замещения понижающего стабилизатора постоянного напряжения с широтно-импульсным управлением. (б) Датчик тока нагрузки



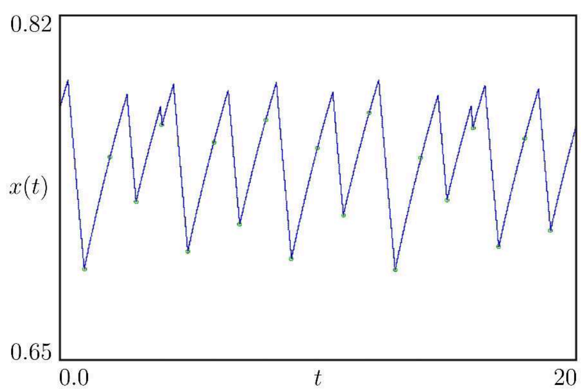
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 6. Разные типы колебаний

Для системы, изображенной на рис. 5, введем безразмерную динамическую переменную $x = \dfrac{Ri}{E_0}$ и безразмерное время $t = \bar{t}/a$, а также безразмер-

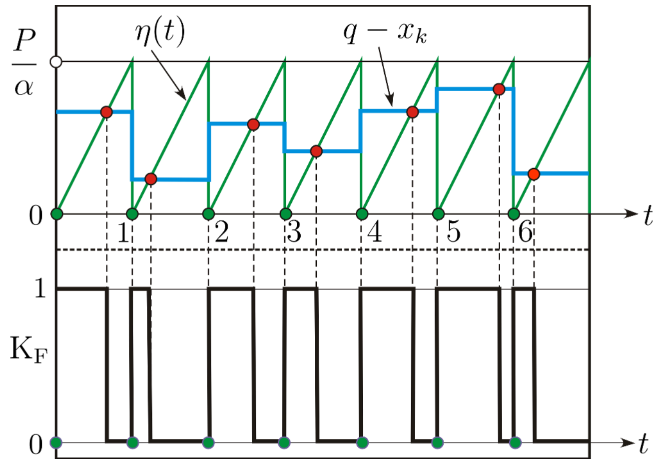


Рис. 7. Формирование управляющих импульсов методом ШИМ-1

ные параметры

$$P = \frac{RV_0}{\beta E_0}, \quad q = \frac{V_{\text{ref}}}{V_0}\,P, \quad \lambda = -\frac{R}{L}\,a.$$

Здесь E_0 – напряжение питания; V_{ref} – задающий сигнал; V_0 – опорный сигнал модулятора; a – период модуляции (вынуждающей силы); $V_{\text{cs}} = \beta\, i$, где β – чувствительность датчика тока в цепи обратной связи; L, R – индуктивносить и сопротивление нагрузки; $\bar{t}$ – время. Тогда уравнение движения принимает вид (12) (см. [7]).

4.2. Получение дискретной модели (отображения)

Исследование динамической системы (12) можно свести к стробоскопическому отображению Пуанкаре [7,8].

В пределах интервала $k < t < k+1$

$$\mathrm{K_F} = \begin{cases} 1, & k < t < \tau_k; \\ 0, & t_k < \tau < k+1, \end{cases}$$

где t_k – момент переключения, который при ШИМ-1 определяется как (рис. 7):

$$t_k = \begin{cases} k, & q - x_k < 0; \\ k+1, & q - x_k > \dfrac{P}{\alpha}; \\ \dfrac{\alpha(q - x_k)}{P} + k, & 0 < q - x_k < \dfrac{P}{\alpha}. \end{cases} \tag{13}$$

Пусть $k < t < t_k$, тогда $\mathrm{K_F} = 1$ и уравнение (12) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda\,(x - 1)\,.$$

Решение этого уравнения с условием $x(k) = x_k$:

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-k)} \left(x_k - \lambda \int\limits_k^t \mathrm{e}^{-\lambda(s-k)} ds \right). \tag{14}$$

Найдем

$$\int\limits_k^t \mathrm{e}^{-\lambda(s-k)} ds = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda(t-k)}}{\lambda}. \tag{15}$$

Подставив (15) в (14), получим

$$x(t) = 1 + \mathrm{e}^{\lambda(t-k)}(x_k - 1).$$

Отсюда для $t = t_k$ имеем:

$$x(t_k) = 1 + \mathrm{e}^{\lambda(t_k-k)}(x_k - 1).$$

В интервале $t_k < t < k + 1$ сигнал на выходе модулятора $\mathrm{K_F} = 0$ и уравнение (12) принимает вид

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(t_k) = 1 + \mathrm{e}^{\lambda(t_k-k)}(x_k - 1), \tag{16}$$

решение которого

$$x(t) = x(t_k)\mathrm{e}^{\lambda(t-t_k)}.$$

Подставляя выражение для $x(t_k)$, получаем

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-k)}(x_k - 1) + \mathrm{e}^{\lambda(t-t_k)}.$$

Для момента времени $t = k + 1$ имеем:

$$x_{k+1} = \mathrm{e}^{\lambda}(x_k - 1) + \mathrm{e}^{\lambda(k+1-t_k)}. \tag{17}$$

Введем обозначение

$$z_k = t_k - k,$$

где z_k – относительная длительность импульса (коэффициент заполнения).

Покажем, что $0 \leqslant z_k \leqslant 1$.

Действительно, из неравенства $k \leqslant t_k \leqslant k+1$ следует, что

$$k \leqslant t_k \leqslant k+1.$$

Отсюда

$$0 \leqslant t_k - k \leqslant (k+1) - k$$

и

$$0 \leqslant t_k - k \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant z_k \leqslant 1.$$

Окончательно отображение, порождаемое уравнением движения (12), принимает вид [7,8]:

$$x_{k+1} = \mathrm{e}^{\lambda}(x_k - 1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z_k)} \equiv Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{18}$$

Коэффициент заполнения импульсов z_k определяется в соответствии с алгоритмом (см. рис. 8, а также (13)):

$$z_k = \begin{cases} 0, \quad x_k > q, \\ 1, \quad x_k < q - P/\alpha, \\ \dfrac{\alpha(q - x_k)}{P}, \quad q - P/\alpha \leqslant x_k \leqslant q. \end{cases} \tag{19}$$

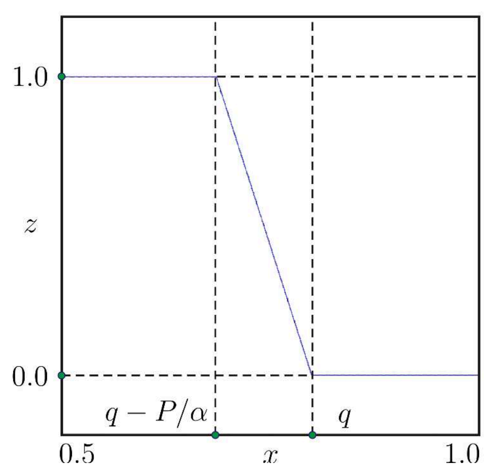


Рис. 8. Модуляционная характеристика

Итерация отображения (18) осуществляется в два шага [7,8]:

- сначала по x_k вычисляется z_k в соответствии с алгоритмом (19);

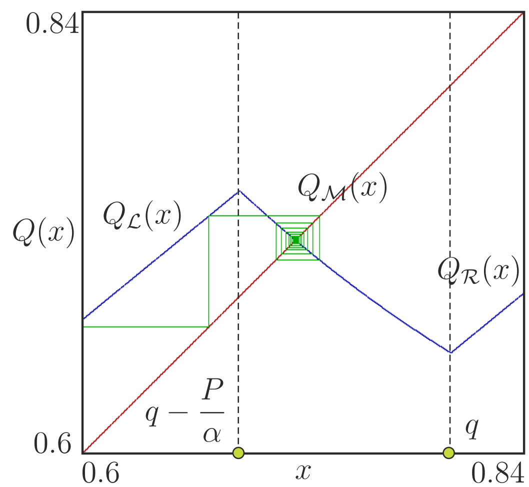


Рис. 9. Отображение (18) при коэффициенте усиления $\alpha = 3.5$

- затем полученный z_k подставляется в (18) для расчета x_{k+1}.

Отображение (18) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = Q(x_k), \tag{20}$$

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda}\, x + 1 - \mathrm{e}^{\lambda}, & x \leqslant q - P/\alpha, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda}\, x - \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, & q - P/\alpha < x < q, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda}\, x, & x \geqslant q, \end{cases}$$

где $z = \dfrac{\alpha}{P} \cdot (q - x)$. Параметры: $\lambda = -0.2$, $P = 0.4$, $q = 0.8$, $\alpha > 0$.

Как мы видим, в отличие от (10) отображение (20) является кусочно-гладким и непрерывным (рис. 9).

4.3. Кусочно-гладкая дискретная модель (отображение) гибридной системы

В этом разделе покажем, что математическую модель гибридной системы (3) также можно свести к кусочно-гладкому непрерывному отображению, если модуляционные характеристики, изображенные на рис. 1, аппроксимировать кусочно-линейными функциями (см. рис. 10).

Действительно

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x, \tag{21}$$

где

$$x(t_k^+) = x(t_k^-) + F(x(t_k^-)), \quad t_{k+1} = t_k + \Phi(x(t_k^-)), \quad k = 0, 1, \ldots$$

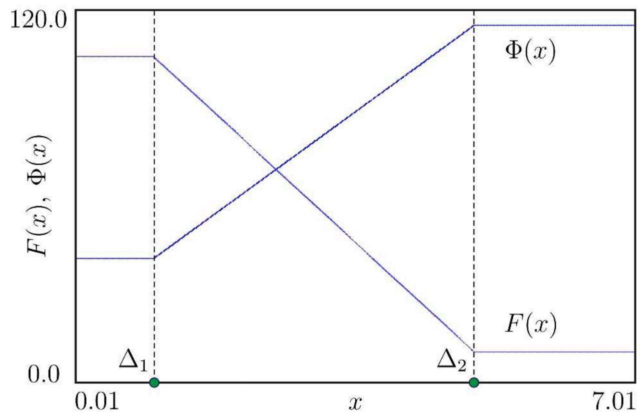


Рис. 10. Кусочно-линейные модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$

Здесь модуляционные характеристики $\Phi(x)$, $F(x)$ есть кусочно-линейные функции (рис. 10):

$$F(x) = \begin{cases} F_2, & 0 \leqslant x \leqslant \Delta_1; \\ -a_{\mathrm{F}} \cdot x + b_{\mathrm{F}}, & \Delta_1 < x < \Delta_2; \\ F_1, & x \geqslant \Delta_2, \end{cases}$$

и

$$\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1, & 0 \leqslant x \leqslant \Delta_1; \\ a_\Phi \cdot x + b_\Phi, & \Delta_1 < x < \Delta_2; \\ \Phi_2, & x \geqslant \Delta_2. \end{cases}$$

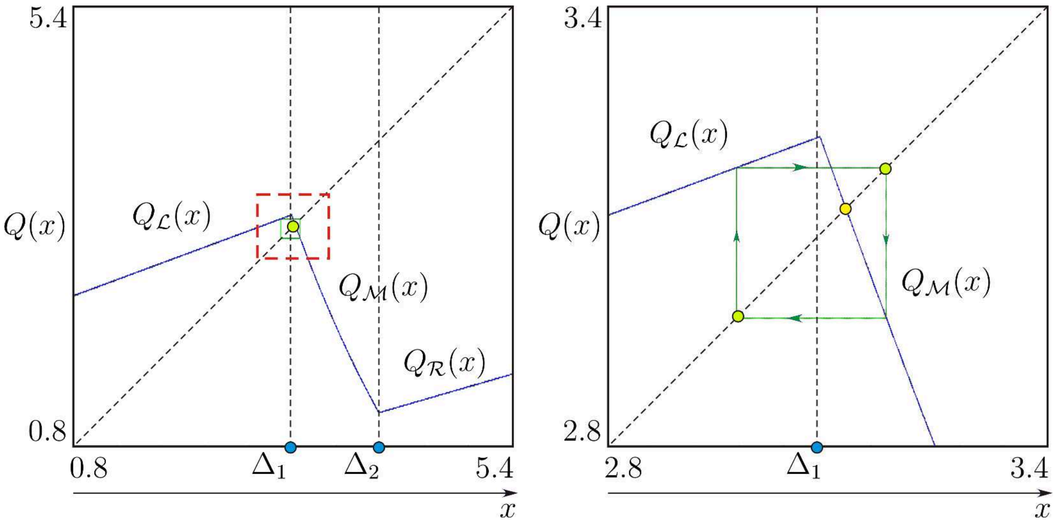
Здесь

$$a_{\mathrm{F}} = \frac{F_2 - F_1}{\Delta_2 - \Delta_1},\ b_{\mathrm{F}} = \frac{F_2\Delta_2 - F_1\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}\ a_\Phi = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{\Delta_2 - \Delta_1},\ b_\Phi = \frac{\Phi_1\Delta_2 - \Phi_2\Delta_1}{\Delta_2 - \Delta_1}.$$

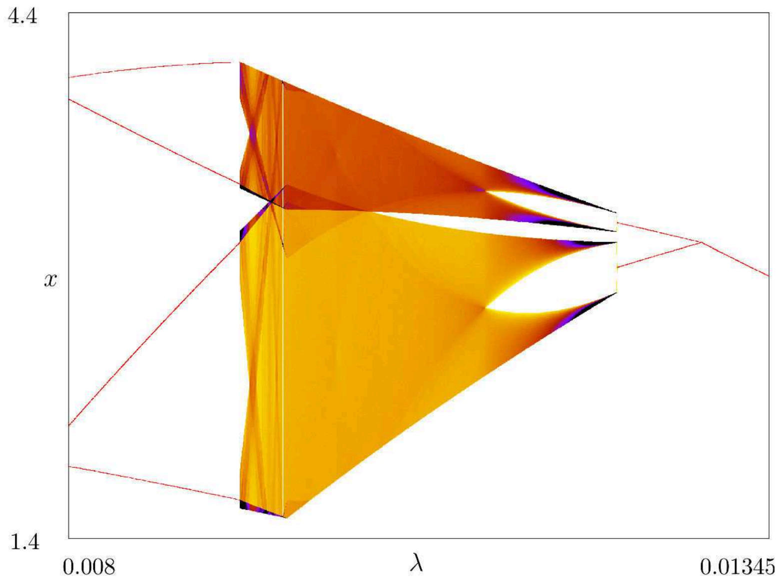
Тогда отображение (10) становится кусочно-гладким и непрерывным:

$$x_{k+1} = Q(x_k),$$
$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda\Phi_1}(x + F_2), & 0 \leqslant x \leqslant \Delta_1; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda(a_\Phi \cdot x + b_\Phi)}(x - a_{\mathrm{F}} \cdot x + b_{\mathrm{F}}), & \Delta_1 < x < \Delta_2; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{e}^{-\lambda\Phi_2}(x + F_1), & x \geqslant \Delta_2. \end{cases}$$

Пераметры: $\Delta_1 = 3.09$, $\Delta_2 = 4.0$, $F_1 = 0.0002$, $F_2 = 5.6$, $\Phi_1 = 80.0$, $\Phi_2 = 100.0$, $0.007 < \lambda < 0.014$.



(а) (б)



(в)

Рис. 11. (а)-(б) Кусочно-гладкое бимодальное отображение. (в) Бифуркационная диаграмма при $\Delta_1 = 3.09$; $\Delta_2 = 4.0$; $F_1 = 0.0002$; $F_2 = 5.6$; $\Phi_1 = 80.0$; $\Phi_2 = 100.0$; $0.0088 < \lambda < 0.01345$.

5. Орбиты, неподвижные точки и циклы

Рассмотрим одномерное отображение $F : I \to R$, $I \subseteq \mathbb{R}$

$$F : x \mapsto F(x) \tag{22}$$

или в эквивалентной форме

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где $F(x)$ — гладкая или кусочно-гладкая непрерывныя функция.

- Точка $x_0 \in I$, $I \subseteq \mathbb{R}$, которая отображается за одну итерацию F в точку $x_1 = F(x_0)$, называется образом ранга один точки x_0.

- Любая точка x_0, такая что $F(x_0) = x_1$, называется прообразом ранга один точки x_1 или $x_1 = F^{-1}(x_0)$, где $F^{-1}(x)$ – обратная функция. Образы и прообразы ранга k точки x определяются как $F^k(x) = F \circ F \circ \ldots \circ F(x)$ и $F^{-k}(x) = F^{-1} \circ F^{-1} \circ \ldots \circ F^{-1}(x)$, $k = 1, 2, ...$

- Для каждого $x_0 \in I$ отображение $x_{k+1} = F(x_k)$ определяет некоторую конечную или бесконечную последовательность точек (орбиту или траекторию):

  $$x_0,\ F(x_0),\ F^2(x_0),\ ...,\ F^k(x_0), ...\ .$$

  Эта последовательность называется положительной полутраекторией точки x_0 и обозначают $\mathcal{O}^+(x_0)$:

  $$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_0 \in I : x_0, F^k(x_0), \quad k = 1, 2, ...\}.$$

- При определении отрицательной $\mathcal{O}^-(x_0)$ полутраектории могут возникнут сложности из-за необратимости отображения. Но если взять все прообразы x_0, то

  $$\mathcal{O}^-(x_0) = \{x \in I : F^k(x) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, ...\}.$$

- Если

  $$F^m(x_0) - x_0 = 0$$

  в $\mathcal{O}^+(x_0)$ при некотором $m > 0$, то x_0 – периодическая точка. Заметим, что если x_0 есть m-периодическая точка, то она является $k\,m$-периодической для любого положительного целого k. Поэтому под m понимается наименьший период. Таким образом, если m – наименьшее положительное целое число, обладающее таким свойством, то m называют периодом цикла.

- Пусть x_0 периодическая точка. Тогда конечная последовательность различных точек

  $$\mathcal{O}_m(x_0) = \{x_0 \in I : x_0,\ F^k(x_0),\ k = 1, 2,\ ...,\ m-1\},$$
  $$F^m(x_0) = x_0,\ F^k(x_0) \neq x_0$$

называется периодической орбитой периода m или m-циклом. В случае $m=1$ имеем

$$F(x_0)-x_0=0.$$

Тогда говорят, что x_0 есть неподвижная точка или 1-цикл отображения.

Очевидно что орбита неподвижной точки состоит из одной точки $\mathcal{O}(x_0)=\{x_0\}$.

- Если x_0 – периодическая точка периода m, то она является неподвижной точкой функции $F^m(x)$.

6. Анализ устойчивости неподвижных точек методом уравнений периодов

Решим задачу анализа локальной устойчивости неподвижных точек для кусочно-гладкого отображения (20):

$$x_{k+1}=Q(x_k),$$
$$Q(x)=\begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x)= & \mathrm{e}^{\lambda}\,x+1-\mathrm{e}^{\lambda}, \quad x\leqslant q-P/\alpha,\\ Q_{\mathcal{M}}(x)= & \mathrm{e}^{\lambda}\,x-\mathrm{e}^{\lambda}+\mathrm{e}^{\lambda(1-z)}, \quad q-P/\alpha<x<q,\\ Q_{\mathcal{R}}(x)= & \mathrm{e}^{\lambda}\,x, \quad x\geqslant q,\end{cases}$$

где $z=\dfrac{\alpha}{P}\cdot(q-x)$. Параметры: $P=0.4$; $q=0.8$; $\lambda=-0.2$; $\alpha>0$.

В (20) возможны разные типы неподвижных точек [7]. Неподвижные точки, удовлетворяющие линейным уравнениям

$$Q_{\mathcal{L}}(x)-x=0 \quad \text{или} \quad Q_{\mathcal{R}}(x)-x=0,$$

соответствуют состояниям равновесия (12), а неподвижная точка, удовлетворяющая

$$Q_{\mathcal{M}}(x)-x=0$$

или

$$\begin{cases} b(x-1)+\ b^{1-z}-x=0;\\ q-x-\dfrac{P}{\alpha}z=0,\end{cases} \tag{23}$$
$$b=\mathrm{e}^{\lambda},$$

отвечает периодическому решению (12) с периодом модуляции.

Исключим из (23) переменную x. Для этого из первого уравнения системы (23) выразим x

$$x = \frac{b^{1-z} - b}{1-b}, \tag{24}$$

а затем подставим (24) во второе уравнение системы (23). В результате получим трансцендентное уравнение относительно переменной z

$$\psi(z) = q - \frac{b^{1-z} - b}{1-b} - \frac{P}{\alpha}z = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1. \tag{25}$$

Это уравнение называется *уравнением периода* [8].

Для существования решения уравнения (25) достаточно выполнения условия

$$\psi(0)\psi(1) < 0, \quad \text{или} \quad q \cdot \left(q - 1 - \frac{P}{\alpha}\right) < 0 \Leftrightarrow \quad q - 1 - \frac{P}{\alpha} < 0.$$

Уравнение (25) может быть решено только численно.

Пусть z_* — корень уравнения (25). Тогда неподвижная точка x_* определяется по формуле

$$x_* = \frac{b^{1-z_*} - b}{1-b}.$$

Линеаризуя отображение (20) в окрестности неподвижной точки x_*, получим уравнение в вариациях

$$\varepsilon_{k+1} = Q'_{\mathcal{M}}(x_*)\varepsilon_k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

где

$$Q'_{\mathcal{M}}(x_*) = b + \frac{\lambda\alpha}{P}b^{1-z_*}.$$

Неподвижная точка устойчива, если

$$|Q'_{\mathcal{M}}(x_*)| < 1, \quad \text{или} \quad \left|b + \frac{\lambda\alpha}{P}b^{1-z_*}\right| < 1.$$

Таким образом, алгоритм анализа локальной устойчивости состоит из следующих шагов:

- Получить уравнение периодов

$$\psi(z) = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1.0. \tag{26}$$

- Решить численно уравнение (26), например, методом деления отрезка пополам:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \leftarrow 10^{-15}\\
&z_L \leftarrow 0, \quad z_R \leftarrow 1.0;\\
&\psi_L \leftarrow \psi(z_L);\\
&\text{REPEAT}\\
&z \leftarrow \frac{z_L + z_R}{2};\\
&\varphi \leftarrow \psi(z);\\
&\text{If} \quad \varphi \cdot \psi_L < 0 \quad \text{Then} \quad z_R \leftarrow z\\
&\text{Else}\\
&\text{Begin}\\
&z_L \leftarrow z;\\
&\psi_L \leftarrow \varphi;\\
&\text{End;}\\
&\text{UNTIL} \quad |z_R - z_L| > \varepsilon;
\end{aligned}
$$

- Найти первую производную

$$Q'_{\mathcal{M}}(x) = \frac{\partial Q_{\mathcal{M}}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\mathcal{M}}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

- Пусть z_* – корень уравнения (26). Вычислить мультипликатор:

$$Q'(x_*) = \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{x=x_*}$$

- Проверить условие локальной устойчивости $|Q'_{\mathcal{M}}(x_*)| < 1$.

7. Задания к лабораторной работе

1. Рассмотрите кусочно-гладкое отображение:

$x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & b \cdot x - b + 1, \\ & x < q - P/\alpha; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & b \cdot x, \\ & x > q; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & b \cdot x - b + b^{1-z}, \\ & q - P/\alpha \leqslant x \leqslant q, \end{cases}$$

$z = \dfrac{q - x}{P}\alpha, \quad b = \mathrm{e}^{\lambda}, \quad 0 < b < 1.$

Параметры: $\lambda = -0.2$, $P = 0.4$, $q = 0.8$, $\alpha > 0$.

Задание

- Воспроизведите диаграммы, изображенные на рис. 9 (а),(б). Объясните бифуркационные переходы, изображенные на рис. 9 (б) с помощью итерационных диаграмм.
- Рассчитайте итерационные диаграммы отображения (20) для значений коэффициента усиления $\alpha = 2.6$, $\alpha = 3.6$, $\alpha = 3.8$, $\alpha = 4.0$, $a = 4.5$, $\alpha = 5.0$, $\alpha = 6.0$. Обсудите наблюдаемую динамику. Какой режим (неподвижная точка, цикл, нерегулярные колебания) устанавливается в каждом случае после переходного процесса?
- Найдите неподвижные точки и исследуйте их устойчивость при: $\alpha = 2.6$, $\alpha = 3.6$, $\alpha = 3.8$, $\alpha = 4.0$, $a = 4.5$, $\alpha = 4.6$.

7.1. Варианты индивидуальных заданий

Вариант **1**. $x_{k+1} = Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot (x-1) + 1, & \text{если} \quad x < \dfrac{q - 1 - P/\alpha}{\mathrm{e}^{\lambda}} + 1; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot (x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))}, & \text{если} \quad \dfrac{q - 1 - P/\alpha}{\mathrm{e}^{\lambda}} + 1 \leqslant x \leqslant q; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} x, & \text{если} \quad x > q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением

$$\varphi(z,x) = q - 1 - (x-1)\mathrm{e}^{\lambda z} - \frac{P}{\alpha} z = 0.$$

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **2**. $x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$$F(x) = \begin{cases} F_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot (x-1) + 1, & \text{если} \quad x < \dfrac{q-1}{\mathrm{e}^{\lambda}} + 1; \\ F_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot (x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))}, & \text{если} \quad \dfrac{q-1}{\mathrm{e}^{\lambda}} + 1 \leqslant x \leqslant q; \\ F_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} x, & \text{если} \quad x > q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением

$$\varphi(z,x) = q - 1 - (x-1)\mathrm{e}^{\lambda z} = 0.$$

Параметры: $\lambda = -0.2$; $0.4 < q < 0.8$.

Вариант **3** $x_{k+1} = Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot (x-1) + 1, & \text{если} \quad x < q - \dfrac{P}{\alpha}; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} \cdot (x-1) + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))}, & \text{если} \quad q - \dfrac{P}{\alpha} \leqslant x \leqslant q; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{e}^{\lambda} x, & \text{если} \quad x > q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением

$$\varphi(z,x) = q - x - \frac{P}{\alpha} z = 0.$$

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **4**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & a \cdot x - a + 1, \quad \text{если} \quad x < q - P/\alpha; \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & a \cdot x, \quad \text{если} \quad x > q; \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & a \cdot x - a + a^{1-z(x)}, \quad \text{если} \quad q - P/\alpha \leqslant x \leqslant q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением

$$\varphi(z, x) = q - x - \frac{P}{\alpha} z = 0, \quad a = \mathrm{e}^{\lambda}, \quad 0 < a < 1.$$

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **5**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x + 1 - \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \text{если} \quad x \leqslant q - P/\alpha, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, (x - 1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1 - z(x))} - 1, \quad \text{если} \quad q - P/\alpha < x < q + P/\alpha, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x - 1 + \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \text{если} \quad x \geqslant q + P/\alpha, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением

$$\varphi(z, x) = q - x - \frac{2P}{\alpha}(z - 1/2) = 0.$$

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **6**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x + 1 - \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \text{если} \quad x \leqslant 1 + \dfrac{q - 1 - P/\alpha}{\mathrm{e}^{\lambda}}, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, (x - 1) + 2\mathrm{e}^{\lambda(1 - z(x))} - 1, \\ & \text{если} \quad 1 + \dfrac{q - 1 - P/\alpha}{\mathrm{e}^{\lambda}} < x < q + P/\alpha, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x - 1 + \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \text{если} \quad x \geqslant q + P/\alpha, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением $q - 1 - (x - 1)\mathrm{e}^{\lambda z} - \dfrac{2P}{\alpha}(z - 1/2) = 0$.

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **7**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x + 1 - \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \text{если} \quad x \leqslant q - P/\alpha, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x - \mathrm{e}^{\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))/2} - \mathrm{e}^{\lambda(1+z(x))/2}, \\ & \text{если} \quad q - P/\alpha < x < q + P/\alpha, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}\, x - 1 + \mathrm{e}^{\lambda}, \quad \text{если} \quad x \geqslant q + P/\alpha, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением $\varphi(z,x) = q - x - \dfrac{P}{\alpha} z = 0$.

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **8**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu + 1, \quad \text{если} \quad x \leqslant 1 - \mu + \dfrac{q - 1 + \mu}{\mathrm{e}^{\lambda}}, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))}, \\ & \quad \text{если} \quad 1 - \mu + \dfrac{q - 1 + \mu}{\mathrm{e}^{\lambda}} < x < q, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x + \mu) - \mu, \quad \text{если} \quad x \geqslant q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением $\varphi(z,x) = q - 1 + \mu - (x - 1 + \mu)\mathrm{e}^{\lambda z} = 0$.

Параметры: $\mu = 0.2$; $\lambda = -0.2$; $0.5 < q < 0.8$.

Вариант **9**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu + 1, \quad \text{если} \quad x \leqslant 1 - \mu + \dfrac{q - 1 + \mu - P/\alpha}{\mathrm{e}^{\lambda}}, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \mu) - \mu + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))}, \\ & \quad \text{если} \quad 1 - \mu + \dfrac{q - 1 + \mu - P/\alpha}{\mathrm{e}^{\lambda}} < x < q, \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x + \mu) - \mu, \quad \text{если} \quad x \geqslant q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением $\varphi(z,x) = q - 1 + \mu - (x - 1 + \mu)\mathrm{e}^{\lambda z} - \dfrac{P}{\alpha} z = 0$.

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\mu = 0.2$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

Вариант **10**. $x_{k+1} = Q(x_k)$,

$$Q(x) = \begin{cases} Q_{\mathcal{L}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x - 1 + \gamma_0) - \gamma_0 + 1, \quad \text{если} \quad x \leqslant q - \dfrac{P}{\alpha}, \\ Q_{\mathcal{M}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x_k - 1 + \gamma_0) - \gamma_0 + \mathrm{e}^{\lambda(1-z(x))}, \\ & \qquad \text{если} \quad q - \dfrac{P}{\alpha} < x < q. \\ Q_{\mathcal{R}}(x) = & \mathrm{e}^{\lambda}(x + \gamma_0) - \gamma_0, \quad \text{если} \quad x \geqslant q, \end{cases}$$

где $z(x)$– функция, заданная уравнением $\varphi(z, x) = q - x - \dfrac{P}{\alpha} z = 0$.

Параметры: $P = 0.4$; $q = 0.8$; $\gamma_0 = 0.25$; $\lambda = -0.2$; $\alpha > 0$.

7.2. Порядок выполнения работы

- 1. Изучите алгоритм поиска неподвижной точки методом уравнений периодов.
- 2. Получите уравнение периодов
$$\psi(z) = 0.$$
- 3. Постройте график функции $\psi(z)$, $0 < z < 1.0$ для выбранного значения α (см. пункт 8).
- 4. Найдите производную
$$Q'_{\mathcal{M}}(x) = \frac{\partial Q_{\mathcal{M}}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{\mathcal{M}}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$
где $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ находится дифференцированием неявной функции $z(x)$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$
- 5. Разработайте блок-схему алгоритма численного решения уравнения периодов
$$\psi(z) = 0.$$

- 6. Напишите программу численного решения уравнения периодов

$$\psi(z) = 0$$

методом деления отрезка пополам.

- 7. Найдите неподвижную точку и отвечающий ей мультипликатор, подставив корень уравнения $\psi(z) = 0$ в выражение для x_* и

$$Q'_{\mathcal{M}}(x_*).$$

- 8 Проверить условие устойчивости: $|Q'(x_*)| < 1$.

- 9. (а) Исследуйте устойчивость численно для значений параметра α: $\alpha = 2.6$, $\alpha = 3.6$, $\alpha = 3.8$, $\alpha = 4.0$, $a = 4.5$, $\alpha = 5.0$, $\alpha = 6.0$ в вариантах 1,3,4,5,6,7,9,10. (б) Исследуйте устойчивость численно для значений параметра q: $q = 0.8$, $q = 0.6$ $q = 0.4$ в вариантах 2, 8.

- 10. Подтвердите результаты анализа устойчивости расчетом итерационных диаграмм и сформулируйте выводы.

Библиографический список

1. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М.: Наука.

2. *Churilov A., Medvedev A., Shepeljavyi A.* Mathematical model of non-basal testosterone regulation in the male by pulse modulated feedback//Automatica. 2008. Vol. 45(1). P. 78 – 85.

3. *Медведев А.В., Чурилов А.Н., Шепелявый* А.И. Математические модели регуляции тестостерона// Стохастическая оптимизация в информатике. 2006. Том 2. С. 147 – 158.

4. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Bifurcation phenomena in an impulsive model of non-basal testosterone regulation//Chaos. 2012. Vol. 22(1). P. 013121-1 – 013121-11.

5. *Churilov A.N., Medvedev F. Zhusubaliyev Zh.T.* Impulsive Goodwin oscillator with large delay: Periodic oscillations, bistability, and attractors// Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2016. Vol. 21. P. 171 – 183.

6. *Zhusubaliyev Zh.T., Churilov A.N., Medvedev F.* Complex dynamics and chaos in a scalar linear continuous system with impulsive feedback//Proceedings of the American Control Conference (ACC2012). 2012. P.2419 – 2424.

7. *Avrutin V., Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Cascades of alternating pitchfork and flip bifurcations in H-bridge inverters//Physica D. 2017. Vol. 345. P. 27–39.

8. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

9. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика импульсных систем: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.

10. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.