МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«18» 02 2021 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Устойчивость инвариантных множеств дискретных моделей: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 12 с.: ил.6. – Библиогр.: с. 12.

Описывается теория устойчивости простейших инвариантных множеств дискретных моделей. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . .2021. Формат $\mathbf{60 \times 84\, {}^1/_{16}}$.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучитение теории локальной устойчивости одномерных отображений.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дискретную динамическую систему, заданную непрерывным отображением

$$x_{k+1} = f(x_k). \tag{1}$$

Пусть x_* – неподвижная точка отображения (1), т.е. корень уравнения

$$f(x) - x = 0.$$

Устойчивость x_* определяется мультипликатором $f'(x_*)$ неподвижной точки. Неподвижные точки делятся на два класса: *гиперболические* ини *негиперболические*.

Определение: Неподвижная точка x_* называется *гиперболической*, если

$$|f'(x_*)| \neq 1,$$

иначе, x_* – *негиперболическая*.

3. Устойчивость гиперболических неподвижных точек

Теорема 1. Пусть x_* – гиперболическая неподвижная точка отображения f, где f непрерывно дифференцируемая функция в x_*. Тогда справедливы следующие утверждения:

- Если

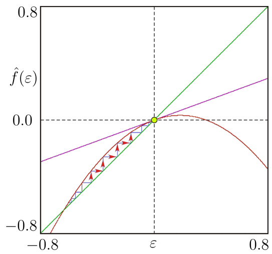
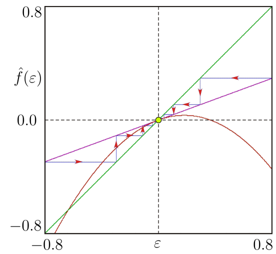
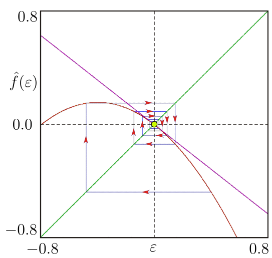
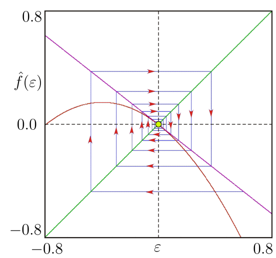
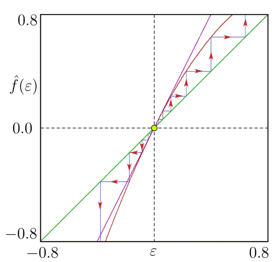
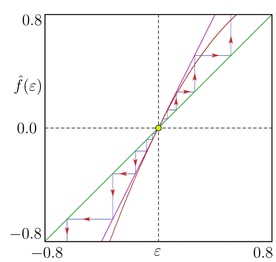
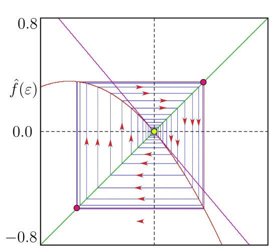
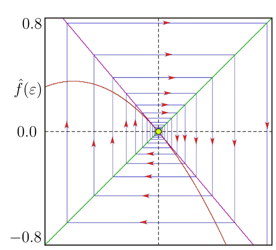
  $$|f'(x_*)| < 1 \quad \text{т.е.} \quad -1 < f'(x_*) < 1,$$

  то x_* асимптотически устойчива.

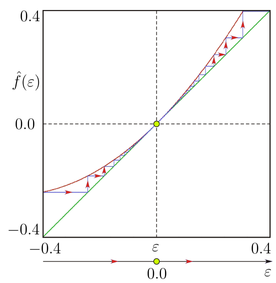
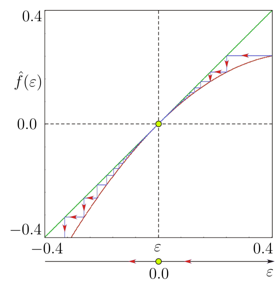
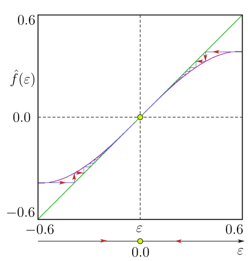
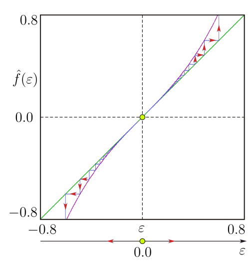
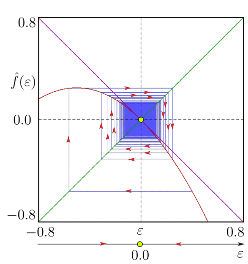
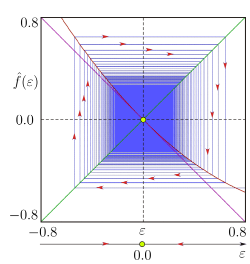
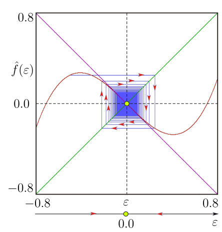
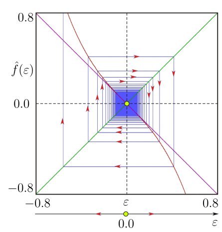
- Если

  $$|f'(x_*)| > 1 \quad \text{т.е.} \quad f'(x_*) < -1 \quad \text{or} \quad f'(x_*) > 1,$$

  то неустойчива.

$f'(x_*)$	$\varepsilon_{k+1} = f(x_* + \varepsilon_k) - f(x_*) \equiv \hat{f}(\varepsilon_k)$	$\varepsilon_{k+1} = f'(x_*)\varepsilon_k \equiv \hat{f}(\varepsilon_k)$	$x_{k+1} = ax_k \equiv f(x_k)$
$0 < f'(x_*) < 1$			Траектория монотонно сходится к неподвижной точке $x_* = 0.0$: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(x_0) = x_*$, $x_* = 0$. x_* – устойчивая неподвижная точка ($0.0 < f'(x_*) < 1.0$). Здесь $f^k(x_0) = f(f(...f(x_0)...))$ – k-я итерация функции f. Для линейного отображения $f^k(x_0) = a^k x_0$.
$-1 < f'(x_*) < 0$			Траектория колебательно сходится к неподвижной точке $x_* = 0.0$. Переменная x_k меняет знак на каждой итерации: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(x_0) = x_*$, $x_* = 0.0$. x_* – устойчивая неподвижная точка ($-1.0 < f'(x_*) < 0.0$).
$f'(x_*) > 1$			Траектория монотонно удаляется от неподвижной точки $x_* = 0.0$: $\lim\limits_{k\to\infty} f^k(x_0) = \pm\infty$. x_* – неустойчивая неподвижная точка ($f'(x_*) > 1.0$).
$f'(x_*) < -1$			Траектория колебательно удаляется от неподвижной точки $x_* = 0.0$. Переменная x_k меняет знак на каждой итерации: $\lim\limits_{k\to\infty} \lvert f^k(x_0)\rvert = \infty$, $x_* = 0$. x_* – неустойчивая неподвижная точка ($f'(x_*) < -1.0$).

4. Устойчивость негиперболических неподвижных точек

Мультпликатор $f'(x_*)$	$\varepsilon_{k+1} = f(x_* + \varepsilon_k) - f(x_*) \equiv \hat{f}(\varepsilon_k)$		Условия устойчивости
$f'(x_*) = 1$	 (а) $f''(x_*) \neq 0$	 (б) $f''(x_*) \neq 0$	**Теорема** 2. Пусть x_* – неподвижная точка $f(x)$, такая, что $f'(x_*) = 1$. Если производные $f'(x)$, $f''(x)$ и $f'''(x)$ непрерывны в x_*, тогда справедливы следующие утверждения: Если $f''(x_*) \neq 0$, то x_* асимптотически полуустойчива слева, если $f''(x_*) > 0$ и асимптотически полуустойчива справа если $f''(x_*) < 0$. Если $f''(x_*) = 0$ и $f'''(x_*) > 0$, то x_* неустойчива. Если $f''(x_*) = 0$ и $f'''(x_*) < 0$, то x_* асимптотически устойчива.
$f'(x_*) = 1$	 (а)	 (б)	• (а) $f''(x_*) = 0$, $f'''(x_*) < 0$; • (б) $f''(x_*) = 0$, $f'''(x_*) > 0$.
$f'(x_*) = -1$	 (а) $Sf(x_*) < 0$	 (б) $Sf(x_*) < 0$	**Теорема** 3. Пусть x_* – неподвижная точка $f(x)$, такая что $f'(x_*) = -1$. Если производные $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ непрерывны в x_*, тогда следует различать два случая: (1) Если $Sf(x_*) < 0$, то x_* асимптотически устойчива. (2) Если $Sf(x_*) > 0$, то x_* неустойчива. Здесь $Sf(x)$ – производная Шварца.
$f'(x_*) = -1$	 (а) $Sf(x_*) < 0$	 (б) $Sf(x_*) > 0$	

Заметим, что производная Шварца $Sf(x)$

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left[\frac{f''(x)}{f'(x)}\right]^2.$$

Если $f'(x_*) = -1$, то
$Sf(x_*) = -f'''(x_*) - \dfrac{3}{2}\left[f''(x_*)\right]^2.$

5. Задачи к лабораторной работе

1. Найдите неподвижную точку x_* и отвечающий ей мультипликатор $f'(x_*)$. Используя этот результат, определите значения параметра a при которых неподвижная точка асимптотически устойчива или неустойчива (неустойчива либо полу-устойчива слева или справа). Напишите программу расчета итерационных диаграмм (cobweb diagrams) (см. лаб. раб. №1). Проиллюстрируйте решение задачи на итерационных диаграммах.

1. $x_{k+1} = \dfrac{a \cdot x_k^2}{1 + x_k^2} \equiv f(x_k), a > 0.$
2. $x_{k+1} = \dfrac{(1 + a) \cdot x_k}{1 + a \cdot x_k} \equiv f(x_k).$
3. $x_{k+1} = 1 - a \cdot x_k^2 \equiv f(x_k).$
4. $x_{k+1} = (1 + a) \cdot x_k - x_k^3 \equiv f(x_k).$
5. $x_{k+1} = (1 + a) \cdot x_k + x_k^3 \equiv f(x_k).$

УКАЗАНИЯ: Порядок выполнения работы

- 1. Изучить материалы лекции и методических указаний.
- 2. Дано отображение (взять свой вариант)

$$x_{k+1} = f(x_k). \qquad (1)$$

- 3. Найти корни уравнения

$$f(x) - x = 0. \qquad (2)$$

Пусть x_* — неподвижная точка отображения (1), т.е. корень уравнения (2).

- 4. Найти производную $f'(x)$.
- 5. Вычислить мультипликатор неподвижной точки:

$$f'(x_*) = f(x)|_{x=x_*}$$

- 6. Проверить условие гиперболичности неподвижной точки x_*:

$$|f'(x_*)| \neq 1.$$

- 7. Если неподвижная точка x_* гиперболическая, то устойчивость определяется теоремой 1, иначе — теоремами 2 и 3 (см. пример решения задачи).
- 8. Провертье результаты решения задач численно путем построения итерационных диаграмм и сформулируйте выводы.
- 9. Оформите отчет по лабораторной работе.

6. Пример выполнения работы

- (a) Find the fixed points of the map

$$x_{k+1} = a - \frac{1}{4} - x_k^2 \equiv f(a, x_k).$$

  (b) Then determine the values of the parameter a for which a fixed point is asymptotically stable or unstable (unstable or semiasymptotically stable from the left or from the right).

- (a) Найдите неподвижные точки отображения

$$x_{k+1} = a - \frac{1}{4} - x_k^2 \equiv f(a, x_k).$$

- (б) Затем определите значения параметра a при которых неподвижная точка асисптотически устойчива или неустойчива (неустойчива либо полу-устойчива слева или справа).
- **Замечание:** численные расчеты итерационных диаграмм в этой работе не делать (будет отдельная лаб. работа).

6.1. Решение

- 1. Для заданного отображения

$$x_{k+1} = a - \frac{1}{4} - x_k^2 \equiv f(a, x_k)$$

выпишем функцию $f(a, x)$:

$$f(a, x) = a - \frac{1}{4} - x^2.$$

- 2. Найдем неподвижные точки. Вспомним определение неподвижной точки. Неподвижная точка — есть корень уравнения

$$f(a, x) - x = 0 \quad \text{или} \quad x = f(a, x),$$

т.е. абсцисса точки пересечения графиков двух функций: биссектрисы $y = x$ и $y = f(a, x)$.

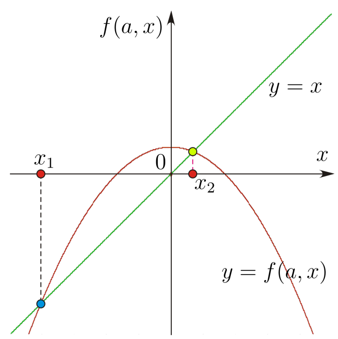


Рис. 1.

На графике (рис 1) x_1, x_2 – неподвижные точки отображения $x_{k+1} = f(a, x_k)$, т.е. корни уравнения $f(a, x) - x = 0$:

$$f(a, x_1) - x_1 = 0 \quad \text{и} \quad f(a, x_2) - x_2 = 0.$$

- 3. Подставив выражение для $f(a, x)$ в

$$f(a, x) - x = 0, \quad f(a, x) = a - 1/4 - x^2,$$

получим уравнение для неподвижных точек:

$$a - 1/4 - x^2 - x = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + x - a + \frac{1}{4} = 0.$$

- 4. Это уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a} \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a},$$

если $\quad a > 0,$

отвечающие двум неподвижным точкам. Если $a = 0$, то отображение имеет единственную неподвижную точку $x_* = -1/2$.

- 5. Найдем производную $f'(a, x) = \dfrac{\partial f(a, x)}{\partial x}$.

  Так как $f(a, x) = a - 1/4 - x^2$, то

  $$f'(a, x) = \frac{\partial f(a, x)}{\partial x} = -2x$$

- 6. Вычислим мультипликаторы

  $$f'(a, x_{1,2}) = f'(a, x)|_{x=x_{1,2}}$$

  неподвижных точек, подставив выражения $x_1 = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{a}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{2} + \sqrt{a}$ в формулу для $f'(a, x)$:

  $$f'(a, x_1) = -2 \cdot x_1 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{a}\right) = 1 + 2\sqrt{a};$$
  $$f'(a, x_2) = -2 \cdot x_2 = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{a}\right) = 1 - 2\sqrt{a}.$$

- 7. Определим устойчивость первой неподвижной точки x_1:

  $$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a}, \quad f'(a, x_1) = 1 + 2\sqrt{a}.$$

- Проверим условие гиперболичности x_1:

  $$|f'(a, x_1)| \neq 1 \Rightarrow |1 + 2\sqrt{a}| \neq 1.$$

- Отсюда

  $$1 + 2\sqrt{a} > 1$$

  для всех $a > 0$. Следовательно, $x_1 = -\dfrac{1}{2} - \sqrt{a}$ – неустойчивая гиперболическая неподвижная точка, если $a > 0$. Если $a = 0$, то x_1 – негиперболическая неподвижная точка с мультипликатором $f'(0, x_1) = +1$.

- 8. Определим устойчивость негиперболической точки

$$x_1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{a}, \quad a = 0 \Rightarrow$$
$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

с мультипликатором $f'(0, x_1) = +1$.

- Так как $f'(a, x_1) = +1$ при $a = 0$, то устойчивость $x_1 = -1/2$ определяется теоремой 2.

- Найдем вторую производную $f''(a, x_1)$, при $a = 0$:

$$f''(a, x_1) = \frac{\partial^2 f(a, x_2)}{\partial x^2} = -2 < 0.$$

- Поскольку

$$f''(a, x_1)\big|_{a=0} = -2 < 0,$$

то x_1 — полу-асимптотически устойчива справа.

- 9. На графике (рис. 2) x_1 – неустойчивая гиперболическая точка, $f'(a, x_1) > 1$, $a > 0$.

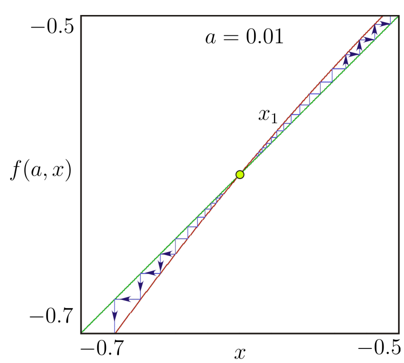


Рис. 2.

- 10. На графике (рис. 3) x_1 – негиперболическая точка с $f'(a, x_1) = +1$ при $a = 0$; x_1 – полу- асимптотически устойчивая справа, т.к. $f''(a, x_1) < 0$ при $a = 0$

- 11. Вторая неподвижная точка x_2

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{a}$$

с мультипликатором

$$f'(a, x_2) = 1 - 2\sqrt{a}.$$

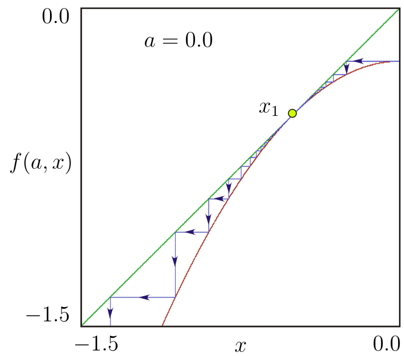


Рис. 3.

- 12. Если

$$|f'(a, x_2)| < 1, \quad f'(a, x_2) = 1 - 2\sqrt{a}$$

то x_2 – устойчивая гиперболическая неподкижная точка. Отсюда условие устойчивости согласно теореме 2

$$-1 < f'(a, x_2) < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2\sqrt{a} < +1.$$

Решив это неравенство относительно параметра a, получим область устойчивости

$$0 < a < 1.$$

Неподвижная точка x_2 неустойчива, если $|f'(a, x_2)| > 1$. Поскольку $a \geqslant 0$, то x_2 неустойчива, если $a > 1$ с $f'(a, x_2) < -1$.

- 13. На графике (рис. 4) x_2 – устойчивая гиперболическая точка, $-1 < f'(a, x_1) < 1$, $a = 0.8$.

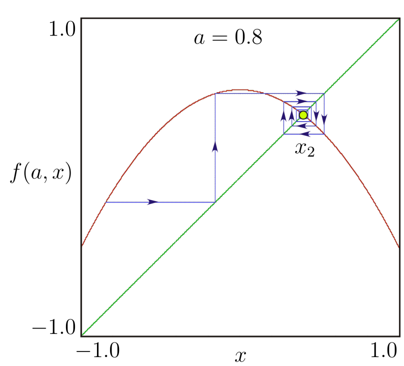


Рис. 4.

- 14. На графике (рис. 5) x_2 – неустойчивая гиперболическая точка с $f'(a, x_1) < -1$ при $a > 1$.

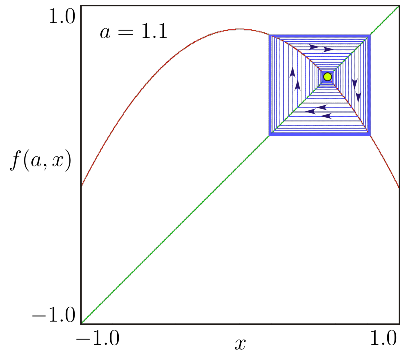
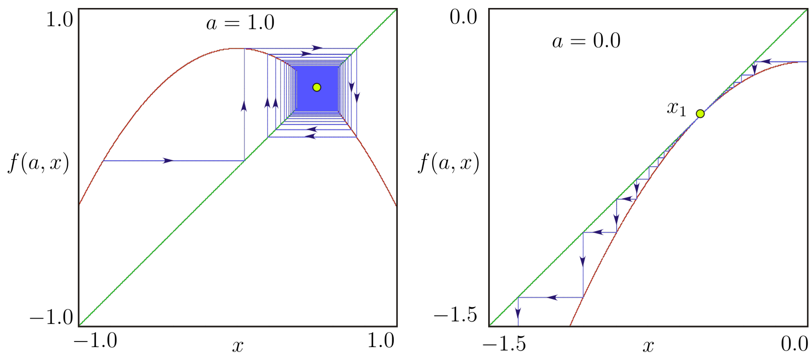


Рис. 5.



(а) (б)

Рис. 6.

- 15. На графике (рис. 6(а)) x_2 – асимптотически устойчивая негиперболическая точка с $f'(a, x_2) = -1$ при $a = 1$ т.к. согласно теореме 3: $Sf(a, x_2) < 0$ при $a = 1.0$.

- 16.

  На графике (рис. 6(б)) $x_2 = x_1$ – негиперболическая точка с $f'(a, x_2) = f'(a, x_1) = +1$ при $a = 0$; x_2 – полу- асимптотически устойчивая справа, т.к. $f''(a, x_2) < 0$ при $a = 0.0$.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.

2. *Zhusubaliyev Zh. T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.