МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра высшей математики

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«18» 01 2021 г.

МАТЕМАТИКА

Методические указания к выполнению лабораторных работ
по дисциплине «Математика»
для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Курск 2021

УДК 51

Составитель: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова

Рецензент
Доктор физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой высшей математики
Н.А. Хохлов

Математика: методические указания к выполнению лабораторных работ по дисциплине «Математика» для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: О.А. Бредихина, С.В. Фильчакова. – Курск, 2021. – 22 с.

Излагаются методические рекомендации по выполнению и защите лабораторных работ. Содержатся краткие описания применяемых при решении задач математики методов, задания и вопросы для контроля знаний.

Методические указания соответствуют требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования для специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность». Материал предназначен для студентов очной и заочной форм обучения по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», а также будет полезен студентам всех других направлений подготовки, изучающих дисциплину «Математика».

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.01.21. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. .Тираж ____экз. Заказ 22. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040 Курск, ул. 50 лет Октября, 94

Цель работ: освоить необходимый математический аппарат, помогающий анализировать, моделировать и решать прикладные задачи по темам запланированных лабораторных работ.

Задания для защит лабораторных работ

1 семестр

1. Лабораторная работа по теме «Элементы линейной алгебры».

Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

2. Лабораторная работа по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия».

Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5 \cdot (P_3 + 2); P_3{}^2 + 3P_3 + 4; P_8 - 2 \cdot (P_3 + 1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Составить различные виды прямой, проходящей через точки $A(6;\,4)$, $B(-3;\,-8)$.

3. Лабораторная работа по теме «Комплексные числа».

Представить комплексное число $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ в тригонометрической форме.

4. Лабораторная работа по теме «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Найти предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x^3 + 4x^2 - 1}{3x^3 + 6x + 2}$.

Найти производную функции $y = 5^{\frac{arctgx}{4x}}$.

2 семестр

5. ***Лабораторная работа по теме «Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения».***

Найти интеграл: $\int \frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$. Сделать проверку.

Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $xy^2dx+ydy=xdx$.

6. ***Лабораторная работа по теме «Функции нескольких переменных».***

Для функции $z=\cos x\cdot\log_5 y$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x = $\frac{\pi}{6}$, y = 25.

7. ***Лабораторная работа по теме «Теория вероятностей».***

В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

8. ***Лабораторная работа по теме «Математическая статистика».***

Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma=0{,}95$, зная выборочное среднее $\bar{x}=2{,}3$, объём выборки $n=49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma=1{,}4$.

Примеры выполнения заданий с кратким описанием применяемых методов

1 семестр

1. ***Лабораторная работа по теме «Элементы линейной алгебры».***

Пример. Решить СЛУ методом Крамера, матричным методом и методом Гаусса $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6; \\ 4x_2-5x_3=-7; \\ 6x_1-7x_2+8x_3=16. \end{cases}$

Решение.

Метод Крамера

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – определитель квадратной системы,
а Δ_j – определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, то СЛУ имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, $j = 1,2,\dots,n$.

Решить СЛУ методом Крамера: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -7 & 4 & -5 \\ 16 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 192 + 160 + 147 - (192 + 112 + 210) = -15;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -7 & -5 \\ 6 & 16 & 8 \end{vmatrix} = -56 + 0 - 180 - (-126 + 0 - 80) = -236 + 206 = -30;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & -7 \\ 6 & -7 & 16 \end{vmatrix} = 64 + 0 + 84 - (144 + 0 + 49) = 148 - 193 = -45;$$

$$x_1 = \frac{-15}{-15} = 1; \quad x_2 = \frac{-30}{-15} = 2; \quad x_3 = \frac{-45}{-15} = 3.$$

Матричный метод

В матричной форме СЛУ имеет вид: $A \cdot X = B$. Умножив обе части этого уравнения слева на A^{-1}, получаем решение этого уравнения в матричной форме: $X = A^{-1} \cdot B$.

Решить СЛУ матричным методом $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Введём матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Найдём A^{-1}.

1. $\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \\ 6 & -7 & 8 \end{vmatrix} = 32 + 0 + 60 - (72 + 0 + 35) = 92 - 107 = -15$.

2. $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -3$; $\quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -5$;

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -30$; $\quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -2$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} = -24$; $\quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 5$;

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -7 & 8 \end{vmatrix} = -5$; $\quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$.

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -10$;

3. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -3 & -30 & -24 \\ -5 & -10 & -5 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

5. $A^{-1} = \dfrac{1}{-15} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -30 & -10 & 5 \\ -24 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix}$.

Вычислим X: $X = \dfrac{1}{15} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 30 & 10 & -5 \\ 24 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Метод Гаусса

Сущность его состоит в том, что посредством элементарных преобразований система приводится к треугольному (система имеет единственное решение) или трапецеидальному (система имеет бесконечное множество решений), из которого все решения системы усматриваются непосредственно.

Элементарные преобразования для СЛУ

1. Перестановка уравнений в системе.
2. Умножение любого уравнения системы на число, не равное нулю.
3. Прибавление к одному уравнению системы другого уравнения, умноженного на некоторое число.
4. Вычёркивание из системы уравнения вида: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$.
5. Перенумерация неизвестных.

Решить СЛУ методом Гаусса $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6; \\ 4x_2 - 5x_3 = -7; \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 16. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 6 & -7 & 8 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 5 & -10 & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$3стр - 6 \cdot 1стр$ $\qquad 3стр : 5$ $\qquad 2стр \leftrightarrow 3стр$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 4 & -5 & -7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 3 & 9\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$3стр-4\cdot 2стр$ $\quad$ $3стр:3$

Полученные преобразования характеризуют «прямой» ход метода Гаусса. «Обратный» ход метода Гаусса заключается в получении нулей выше главной диагонали.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 6\\ 0 & 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$1стр-3\cdot 3стр$ $\quad$ $1стр+2\cdot 2стр$

$1стр+2\cdot 3стр$

Отсюда получаем решение системы: $\begin{cases}x_1=1;\\ x_2=2;\\ x_3=3.\end{cases}$

2. Лабораторная работа по теме «Векторная алгебра и аналитическая геометрия».

Пример. Даны точки $A(-1;-P_3;2)$, $B(P_5;2;0)$ и $C\left(P_5\cdot(P_3+2);P_3^{\ 2}+3P_3+4;P_8-2\cdot(P_3+1)\right)$. Образуют ли эти точки треугольник? Если да, то чему равна его площадь? Если нет, то запишите формулу для нахождения площади треугольника средствами векторной алгебры.

Решение. Пусть n=101. Тогда $P_3=2$, $P_4=1$, $P_5=1$, $P_7=3$, $P_8=5$.

Точки A, B, C образуют треугольник тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, то есть когда их векторное произведение не равно нулю.

Векторное произведение векторов рассчитывается по формуле:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_{AB} & y_{AB} & z_{AB}\\ x_{AC} & y_{AC} & z_{AC}\end{vmatrix}.$$

Тогда $\overrightarrow{AB}=(1+1;2+2;0-2)$, $\overrightarrow{AC}=(4+1;14+2;-1-2)$.

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -2\\ 5 & 16 & -3\end{vmatrix}=20\vec{i}-4\vec{j}-12\vec{k}$, следовательно, точки A, B, C образуют треугольник. Площадь этого треугольника можно рассчитать по формуле: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$, где $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{20^2+(-4)^2+12^2}=4\sqrt{35}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{35}=2\sqrt{35}$.

Пример. Составить различные виды прямой, проходящей через точки $A(6;4)$, $B(-3;-8)$.

Решение.

1) Подставим координаты точек A и B в уравнение прямой, проходящей через две точки: $\frac{x-6}{-3-6}=\frac{y-4}{-8-4}$. Получим уравнение $\frac{x-6}{-9}=\frac{y-4}{-12}$ или $\frac{x-6}{3}=\frac{y-4}{4}$ – уравнение искомой прямой в каноническом виде. Тогда направляющий вектор прямой равен $\vec{q}\,(3;4)$.

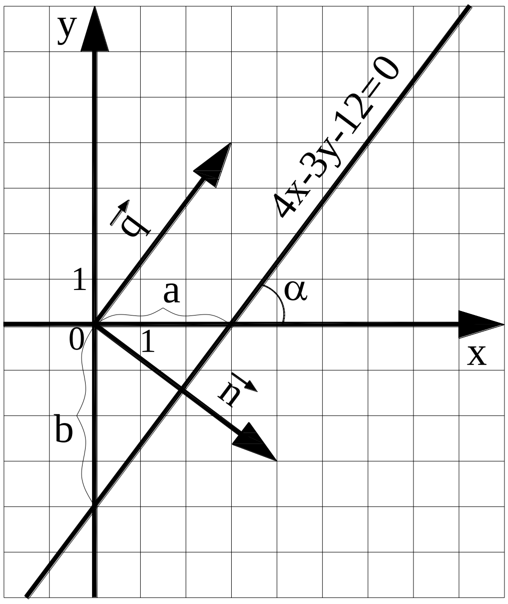
2) Воспользуемся свойством пропорции для уравнения прямой в каноническом виде: $4(x-6)=3(y-4)$ или $4x-3y-12=0$ – уравнение искомой прямой в общем виде. Тогда нормальный вектор прямой равен $\vec{n}\,(4;-3)$.

3) Выразим y из уравнения в общем виде, то есть $-3y=-4x+12$ или $y=\frac{4}{3}x-4$ – уравнение с угловым коэффициентом. Тогда $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $\alpha=arctg\frac{4}{3}$, то есть угол α острый и график прямой возрастает при всех $x\in R$.

4) Из уравнения прямой в общем виде перенесём свободный член в правую часть: $4x-3y=12$, после чего, разделив обе части уравнения

на 12, получим $\frac{4x}{12}-\frac{3y}{12}=1$ или $\frac{x}{3}+\frac{y}{-4}=1$ – уравнение прямой «в отрезках». Отсюда получим значения отрезков, отсекаемых прямой от осей координат: $a=3,\ b=-4$.

5) Уравнение прямой в параметрическом виде находится исходя



из условия: $\begin{cases}\dfrac{x-6}{3}=t,\\ \dfrac{y-4}{4}=t,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3t+6,\\ y=4t+4.\end{cases}$

Изобразим в декартовой системе координат искомую прямую и отметим на графике все данные, полученные при исследовании различных видов этой прямой.

3. Лабораторная работа по теме «Комплексные числа».

Пример. Представить комплексное число $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ в тригонометрической форме.

Решение. $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, то есть действительная часть $a=\frac{1}{2}$, а мнимая часть $b=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Вычислим модуль комплексного числа

$$\rho=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1.$$

Тогда $\begin{cases}\sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}:1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\varphi=\dfrac{1}{2}:1=\dfrac{1}{2},\end{cases} \Rightarrow \quad \varphi=-\frac{\pi}{3}$, т.к. если $\sin\varphi<0$, а $\cos\varphi>0$, то φ принадлежит IV четверти, то есть $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа имеет вид: $z=1\cdot\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

4. Лабораторная работа по теме «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной».

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x^2-1}{3x^3+6x+2}$.

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+4x^2-1}{3x^3+6x+2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l}\textit{старшая степень числителя}\ \ 3\\ \textit{старшая степень знаменателя}\ \ 3\\ \textit{делим на}\ x^3\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{6x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}{3+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}=\frac{5+\frac{4}{\infty}^{\to 0}-\frac{1}{\infty}^{\to 0}}{3+\frac{6}{\infty}^{\to 0}+\frac{2}{\infty}^{\to 0}}=\frac{5}{3}.$$

Пример. Найти производную функции $y=5^{\frac{arctgx}{4x}}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\left(a^u\right)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$.

Тогда $\left(5^{\frac{arctgx}{4x}}\right)'=5^{\frac{arctgx}{4x}}\cdot\ln 5\cdot\left(\frac{arctgx}{4x}\right)'=$

$$=5^{\frac{arctgx}{4x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{(arctgx)'\cdot 4x-arctgx\cdot(4x)'}{16x^2}=5^{\frac{arctgx}{4x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 4x-arctgx\cdot 4}{16x^2}=$$

$$=5^{\frac{arctgx}{4x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{\frac{x}{1+x^2}-arctgx}{4x^2}=5^{\frac{arctgx}{4x}}\cdot\ln 5\cdot\frac{x-\left(1+x^2\right)\cdot arctgx}{4x^2\cdot\left(1+x^2\right)}.$$

4. Тема «Функции нескольких переменных».

Для функции $z=\cos x\cdot\log_5 y$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x = $\frac{\pi}{6}$, y = 25.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\log_5 y\cdot(-\sin x)\text{, тогда } \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)}=-\log_5 25\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-2\cdot\frac{1}{2}=-1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cdot\frac{1}{y\cdot\ln 5}\text{, тогда } \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)}=\cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{25\cdot\ln 5}=\frac{\sqrt{3}}{50\cdot\ln 5}.$$

5. Лабораторная работа по теме «Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения».

Пример. Найти интеграл: $\int\frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx$. Сделать проверку.

Решение.

$$\int\frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}dx=\int\left(\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{25-x^4}}-\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}\right)dx=\int\left(\frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{\left(5-x^2\right)\left(5+x^2\right)}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{\left(5-x^2\right)\left(5+x^2\right)}}\right)dx=\int\left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}\right)dx=\int\frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}+\int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}=$$

$$=\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C.$$

Проверка

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}-\ln\left|x+\sqrt{5+x^2}\right|+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{x+\sqrt{5+x^2}}\cdot\left(1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\sqrt{5+x^2}}\cdot 2x\right)=\frac{1}{\sqrt{5-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{5+x^2}}=\frac{\sqrt{5+x^2}-\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{25-x^4}}=f(x).$$

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными $xy^2dx + ydy = xdx$.

Решение. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными имеют вид $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0$ или $y' = f(x)\cdot g(y)$.

Алгоритм решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

1) Если в уравнении присутствует y', то заменим $y' = \dfrac{dy}{dx}$.
2) Разделим переменные, используя свойство пропорции.
3) Проинтегрируем левую и правую части уравнения.

$$xy^2dx + ydy = xdx,$$

$$xy^2dx - xdx = -ydy,$$

$$(y^2 - 1)xdx = -ydy,$$

$$xdx = -\frac{y}{y^2 - 1}dy,$$

$$\int xdx = -\int \frac{y}{y^2 - 1}dy.$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

$$-\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{1}{y^2-1}\cdot ydy = \left[\begin{array}{l} t = y^2 - 1 \\ dt = \left(y^2-1\right)' dy = 2ydy \\ ydy = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right] = -\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} == -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + C.$$

Вернёмся к нашему уравнению: $\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + C$.

Заменим $C = \dfrac{C_1}{2}$, получим $\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2 - 1\right| + \dfrac{C_1}{2}$.

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $x^2 = C_1 - \ln\left|y^2 - 1\right|$.

6. ***Лабораторная работа по теме «Функции нескольких переменных».***

Пример. Для функции $z = \cos x \cdot \log_5 y$ найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ и их значения в точке x = $\frac{\pi}{6}$, y = 25.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \log_5 y \cdot (-\sin x),\ \text{тогда}\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)} = -\log_5 25 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cdot \frac{1}{y \cdot \ln 5},\ \text{тогда}\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\left(\frac{\pi}{6};\,25\right)} = \cos\frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{25 \cdot \ln 5} = \frac{\sqrt{3}}{50 \cdot \ln 5}.$$

7. Лабораторная работа по теме «Теория вероятностей».

Пример. В урне 4 белых и 3 чёрных шара. Из неё вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что они разного цвета. Рассмотреть выборки: а) без возвращения; б) с возвращением.

Решение. Фраза «шары разного цвета» подразумевает два исхода: белый и чёрный шары или чёрный и белый шары.

а) $P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{7}$;

б) $P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}$.

8. Лабораторная работа по теме «Математическая статистика».

Пример. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надёжностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочное среднее $\bar{x} = 2{,}3$, объём выборки $n = 49$ и генеральное среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1{,}4$.

Решение. Пусть количественный признак X генеральной совокупности распределён нормально, среднеквадратическое отклонение σ известно. Требуется оценить неизвестное математическое ожидание a по выборочной средней $\bar{x}$.

В данном случае в качестве случайной величины $Y(\Theta)$ берётся величина $Y(\Theta) = \dfrac{\overline{X} - \overline{x}}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, которая при достаточно больших объёмах выборки приближённо распределена по нормальному закону $N(0,1)$. Поэтому с заданной надёжностью γ доверительный интервал имеет вид $\left(\overline{x} - \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}; \overline{x} + \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Таким образом, если исследуемая случайная величина распределена по нормальному закону с известным среднеквадратическим отклонением σ, то доверительный интервал для математического ожидания определяется неравенством:

$$\overline{x} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\widetilde{\Theta} = \overline{x}$ – точечная оценка математического ожидания ($\overline{x}$ – выборочное среднее);

$\varepsilon = \dfrac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}}$ – точность оценки;

n – объём выборки;

t – квантиль нормального распределения или значение аргумента функции Лапласа (приложение 2 [5]), при котором $2\Phi(t) = \gamma \Rightarrow \Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$.

Воспользуемся формулой: $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{0{,}95}{2} = 0{,}475$, далее по таблице приложения 2 [5] находим $t = 1{,}96$. Искомый доверительный интервал:

$$2{,}3 - \frac{1{,}96 \cdot 1{,}4}{\sqrt{49}} < a < 2{,}3 + \frac{1{,}96 \cdot 1{,}4}{\sqrt{49}} \text{ или } 1{,}908 < a < 2{,}692.$$

Смысл полученного результата: если произведено достаточно большое количество выборок по 49 элементов в каждой, то 95% из них определяют такие доверительные интервалы, в которых a заключено, и лишь в 5% случаев значение a может выйти за границы доверительного интервала.

Контрольные вопросы

1. Дать определения операций сложения, умножения матриц, умножения матрицы на число.

2. Каким условиям должны удовлетворять размеры матриц при сложении, умножении?

3. В чём заключаются свойства алгебраических операций: коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность? Какие из них выполняются для матриц при сложении, умножении, а какие нет?

4. Дать общее определение определителя квадратной матрицы.

5. В чём заключается правило треугольников?

6. Перечислить свойства определителей.

7. Что такое единичная матрица, каковы её свойства?

8. Что такое алгебраическое дополнение элемента матрицы?

9. Что такое обратная матрица? Для каких матриц она определена?

10. Сформулировать теорему о существовании и единственности обратной матрицы.

11. Какие системы называются совместными, несовместными, определёнными, неопределёнными, однородными, неоднородными?

12. Как записать и решить систему в матричной форме?

13. Что такое ранг матрицы? Сформулировать теорему Кронекера-Капелли.

14. Написать формулы Крамера.

15. Что такое элементарные преобразования матрицы?

16. В чем заключается метод Гаусса для решения систем линейных уравнений?

17. Какими свойствами обладают решения однородной системы линейных уравнений?

18. Может ли однородная система линейных уравнений быть несовместной? При каком условии она имеет более одного решения?

19. Определения коллинеарных, ортогональных и компланарных векторов. Необходимые и достаточные условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов (в векторной и координатной формах.

20. Декартовы координаты на прямой, на плоскости и в пространстве (декартова система координат, разложение вектора по базису системы координат, координаты точек). Доказать соотношения между координатами вектора и координатами точек «начала» и «конца» вектора.

21. Прямоугольные проекции вектора на ось и их свойства.

22. Скалярное произведение векторов и его свойства. Необходимое и достаточное условие ортогональности векторов.

23. Выражение скалярного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Нахождение модуля вектора и угла между векторами.

24. Ориентация тройки векторов в пространстве. Векторное произведение векторов и его свойства. Выражение векторного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление площади параллелограмма и треугольника.

25. Смешанное произведение векторов и его свойства. Выражение смешанного произведения векторов через декартовы координаты этих векторов. Вычисление объёма параллелепипеда и треугольной пирамиды.

26. Понятие об уравнении линии на плоскости.

27. Нормальный вектор прямой. Общее уравнение прямой на плоскости. Угол между прямыми на плоскости, условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости.

28. Уравнение прямой «с угловым коэффициентом» (уравнение прямой, разрешённое относительно координат). Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных уравнениями «с угловым коэффициентом»).

29. Направляющий вектор прямой. Каноническое и параметрические уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности прямых (заданных каноническими уравнениями).

30. Расстояние от точки до: прямой на плоскости; прямой в пространстве; плоскости в пространстве.

31. Нормальный вектор плоскости. Общее уравнение плоскости в пространстве. Угол между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

32. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не принадлежащие одной прямой.

33. Уравнение прямой в пространстве: общее, каноническое, параметрические. Угол между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве (заданных каноническими уравнениям).

34. Уравнение прямой, проходящей через две заданные, различные точки (на плоскости; в пространстве).

35. Угол между прямой и плоскостью в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

36. Какие числа называются комплексными?

37. Запишите тригонометрическую и показательную формы комплексного числа

38. Сформулируйте теоремы о пределах.

39. Запишите формулу первого замечательного предела. Перечислите следствия.

40. Запишите формулу второго замечательного предела. Перечислите следствия.

41. Дайте определение производной функции.

42. Приведите уравнения касательной и нормали к кривой в данной точке.

43. Дайте определение дифференциала функции. Приведите связь между дифференциалом и производной функции.

44. Сформулируйте лемму Ферма.

45. Сформулируйте теорему Лагранжа о среднем.

46. Сформулируйте теорему Коши о среднем.

47. Сформулируйте правило Лопиталя.

48. Что называется функцией нескольких переменных?

49. Что такое частная производная?

50. Сколько различных частных производных 4-го порядка имеет функция от трёх переменных?

51. Что такое полный дифференциал? Его геометрический смысл.

52. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности.

53. В чём заключается геометрический и функциональный смысл градиента?

54. Дайте определение первообразной функции.

55. Что называется неопределенным интегралом?

56. Дайте определение операции интегрирования. Запишите соотношения, устанавливающие связи между интегрированием и дифференцированием.

57. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.

58. В чем суть способа интегрирования, введением множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала? Запишите соответствующую формулу.

59. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла.

60. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.

61. Понятие определенного интеграла.

62. Какова формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла?

63. Перечислите свойства определенного интеграла.

64. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными уравнениями в декартовой системе координат, или в полярной системе координат, или заданной параметрически.

65. Дайте определение дифференциального уравнения. Что называется решением дифференциального уравнения?

66. Дайте определение порядка дифференциального уравнения.

67. Что называется общим решением дифференциального уравнения, частным решением?
68. Укажите общий вид дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными, а также алгоритм их решения.
69. Укажите общий вид линейных дифференциальных уравнений. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
70. Укажите общий вид дифференциальных уравнений Бернулли. При помощи какой замены решается тип данных уравнений?
71. Дайте определение дифференциальных уравнений высших порядков.
72. Укажите общий вид линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и методы его решения.
73. Сформулируйте классическое определение вероятностей. Укажите недостатки этого определения.
74. Какое событие называется достоверным, невозможным, случайным?
75. Дайте определение полной группы событий.
76. Какие события называются несовместными, совместными, противоположными, независимыми?
77. Сформулируйте статистическое определение вероятностей. Назовите условия существования статистической вероятности.
78. Сформулируйте теорему умножения вероятностей.
79. Сформулируйте теорему о формуле полной вероятности.
80. Какие виды случайных величин вы знаете?
81. Перечислите важнейшие характеристики случайных величин.
82. Какие важнейшие распределения случайных величин вы знаете?
83. Какие виды вариационных рядов вы знаете?
84. Какие графики используются для изображения дискретных вариационных рядов?
85. Перечислите важнейшие точечные характеристики выборки.
86. Дайте понятие доверительного интервала.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Куркина А.В. Высшая математика [Текст]: учебник. - М.: Проспект, 2011. -608 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления [Текст]: учебное пособие. Т.1, М.: Интеграл-Пресс, 2007. -416 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия [Текст]: учебник. -М.: Физматлит, 2009.-224 с.
4. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2012.-479 с.
5. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике [Текст]: учебное пособие. -М.: ЮРАЙТ, 2011.-404 с.
6. Бойцова Е.А. Практикум по математике [Текст]: учебное пособие. - Старый Оскол: ТНТ, 2014. -160 с.
7. Бойцова Е.А. Практикум по математике. Спецглавы [Текст]: учебное пособие/ Е.А.Бойцова. -Старый Оскол: ТНТ, 2014. -156 с.
8. Теория вероятностей [Текст]: учебное пособие / Е.В.Журавлева и др. −Курск: ЮЗГУ, 2015. -175, [3] с.
9. Сборник задач по математике для втузов. Ч.1 [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова -М.: Физматлит. 2009. -288 с.
10. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2 [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -432 с.
11. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3 [Текст] / Под ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова – М.: Физматлит. 2009. -544 с.
12. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии [Текст]: учебное пособие / Д. В. Клетеник. - 17-е изд. - СПб. : Профессия, 2010. -224 с.
13. Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений [Электронный ресурс]: индивидуальные задания к модулю / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойцова Е.А., Шевцова Т.В. − Курск: ЮЗГУ, 2016. -26 с.
14. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бойков А.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -30с.
15. Векторная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс]: методические указания по выполнению М-2 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2013. -18 с.

16. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной [Электронный ресурс]: индивидуальные задания / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Скрипкина. –Курск: ЮЗГУ, 2014.-52 с.
17. Функции нескольких переменных [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания к выполнению модуля 6.1 для студентов технических специальностей / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Бредихина О.А., Шеставина С.В. –Курск: ЮЗГУ, 2014. -15 с.
18. Метод наименьших квадратов [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания по выполнению лабораторной работы №15 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.И. Студеникина, Т.В. Шевцова. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
19. Расчёт вероятностей случайных событий [Электронный ресурс]: индивидуальные задания и методические указания по выполнению модуля 13 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Е.В. Журавлёва, Е.А. Панина. –Курск: ЮЗГУ, 2011. -50 с.
20. Элементы математической статистики и корреляционного анализа [Электронный ресурс]: методические указания и индивидуальные задания к модулю 15 / Курск. гос. техн. ун-т; сост.: Е.В. Журавлева, Е.А. Панина. –Курск: КурскГТУ, 2012. -35 с.