

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна

Должность: проректор по учебной работе

Дата подписания: 27.01.2021 11:46:32

Уникальный программный ключ:

0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabb673e943df4a4851fda56d089

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Юго-Западный государственный университет»  
(ЮЗГУ)

Кафедра экономической безопасности и налогообложения

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе

О.Г. Локтионова

«27» 01 2021 г.



## **ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В СИСТЕМЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ РЕГИОНА**

Методические указания по выполнению  
лабораторных работ студентов  
очной и заочной форм обучения  
специальности 38.05.01 Экономическая безопасность

Курск 2021

УДК 338(075.8)

Составитель: Л.В. Афанасьева

Рецензент

Кандидат экономических наук, доцент *Белоусова С.Н.*

Экономико-математические методы в системе экономической безопасности региона: методические указания по выполнению лабораторных работ студентов очной и заочной форм обучения специальности 38.05.01 Экономическая безопасность/ Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Л.В. Афанасьева. Курск. 2021. 51 с.

Методические указания по выполнению лабораторных работ содержат индивидуальные задания и пошаговые рекомендации по их выполнению.

Предназначены для студентов специальности 38.05.01 Экономическая безопасность очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать 15.01. 2021. Формат 60x84 1/16. .  
Усл.печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 100 экз. Заказ 40. Бесплатно.  
Юго-Западный государственный университет.  
305040, г.Курск, ул.50 лет Октября, 94.

## СОДЕРЖАНИЕ

Лабораторная работа № 1	4
Лабораторная работа № 2	11
Лабораторная работа № 3	17
Лабораторная работа № 4	27
Лабораторная работа № 5	30
Лабораторная работа № 6	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	51

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

### Экономико-математическая модель управления запасами хозяйствующих субъектов региона

Цель лабораторной работы – приобретение навыков использования модели Уилсона для управления запасами хозяйствующих субъектов региона в целях обеспечения экономической безопасности.

#### *Теоретические сведения: основные понятия*

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования любой организации необходимо создание запасов, например, в производственном процессе, торговле, медицинском обслуживании и т.д. В зависимости от ситуации под запасами могут подразумеваться: готовая продукция, сырье, полуфабрикаты, станки, инструмент, транспортные средства, наличные деньги и др. Неверный расчет необходимых запасов может привести как к незначительному ущербу (потеря части дохода от дефицита товара), так и к катастрофическим последствиям (при ошибочной оценке запасов топлива на самолете).

К экономическому ущербу приводит как чрезмерное наличие запасов, так и их недостаточность. Так, если некоторая компания имеет товарные запасы, то капитал, овеществленный в этих товарах, замораживается. Этот капитал, который нельзя использовать, представляет для компании потерянную стоимость в форме невыплаченных процентов или неиспользуемых возможностей инвестирования. Кроме того, запасы, особенно скоропортящиеся продукты, требуют создания специальных условий для хранения. Для этого необходимо выделить определенные площади, нанять персонал, застраховать запасы. Все это влечет определенные издержки. С другой стороны, чем меньше уровень запаса, тем больше вероятность возникновения дефицита, что может принести убытки вследствие потери клиентов, остановки производственного процесса и т.д. Кроме того, при малом уровне запасов приходится часто поставлять новые партии товара, что приводит к большим затратам на доставку заказов.

Отсюда следует важность разработки и использования математических моделей, позволяющих найти оптимальный уровень запасов, минимизирующий сумму различных видов издержек.

Любая модель управления запасами (УЗ) в конечном счете, должна давать ответ на два вопроса:

- 1) Какое количество продукции заказывать?
- 2) Когда заказывать?

Ответ на первый вопрос дается с помощью понятия размера заказа, т.е. количества ресурсов, которое необходимо поставлять для пополнения запасов.

Ответ на второй вопрос связан с понятием точки заказа, т.е. критический уровень запасов, при котором следует подавать заказ на поставку очередной партии ресурса.

Большое значение имеют различные виды затрат на УЗ. Затраты на приобретение ресурса являются важным фактором в тех случаях, когда действует система оптовых скидок, зависящих от размера заказа. Затраты на осуществление заказа

включают в себя затраты на оформление заказа и затраты на доставку заказа. При частой подаче заказов на мелкие партии товара сумма этих затрат возрастает по сравнению со случаем более редкой подачи заказов на крупные партии. Если запас пополняется не готовым ресурсом со склада, а производится, то затраты на осуществление заказа идут на организацию производственного процесса по выпуску партии ресурса. В этом случае затраты на приобретение ресурса эквивалентны издержкам производства ресурса.

Затраты на хранение запаса представляют собой расходы на физическое содержание запаса на складе и возрастают с увеличением уровня запасов.

Потери от дефицита представляют собой расходы, обусловленные отсутствием запаса необходимой продукции. Они могут быть вызваны более высокой платой за срочную доставку товара, ухудшением репутации у потребителя, потенциальной потерей прибыли.

Модель УЗ не обязательно должна включать все перечисленные виды затрат, т.к. некоторые из них могут быть незначительными или отсутствовать.

Существует множество моделей УЗ той или иной степени сложности. Наиболее простой является так называемая основная модель управления запасами (модель Уилсона, система с фиксированным размером заказа). Эта модель несколько оторвана от действительности, но является полезной для понимания существа предмета, проблем, основных закономерностей и подходов в области УЗ.

#### *1. Входные параметры:*

- 1)  $v$  – интенсивность потребления запаса, [ед. товара / ед. времени];
- 2)  $s$  – затраты на хранение запаса, [ден. ед. / ед. товара · ед. времени];
- 3)  $K$  – затраты на осуществление заказа, [ден. ед.].

#### *2. Выходные параметры:*

- 1)  $Q$  – размер заказа, [ед. тов.];
- 2)  $\tau$  – период поставки, [ед. времени];
- 3)  $L$  – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [ден.ед./ ед. времени].

#### *Допущения модели Уилсона*

1. Интенсивность потребления является априорно известной и постоянной величиной,  $v = \text{const}$ .

2. Время поставки заказа  $T$  является известной и постоянной величиной.

3. Каждый заказ поставляется в виде одной партии.

4. Затраты на осуществление заказа  $K$  не зависят от размера заказа.

5. Отсутствие запаса является недопустимым.

Эта модель наиболее близка к следующим реальным ситуациям:

- 1) потребление основных продуктов питания, например, хлеба, молока, в санатории (оно в течение смены остается постоянным);
- 2) использование осветительных ламп в здании;
- 3) использование канцелярских товаров (бумага, блокноты, карандаши) крупной фирмой;

4) использование в производственном процессе для сборки изделий покупных комплектующих, например, гаек и болтов.

Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона графически представлены на рисунке 1.1. Все циклы изменения запасов являются одинаковыми, максимальное количество продукции, которая находится в запасе, совпадает с размером заказа  $Q$ .

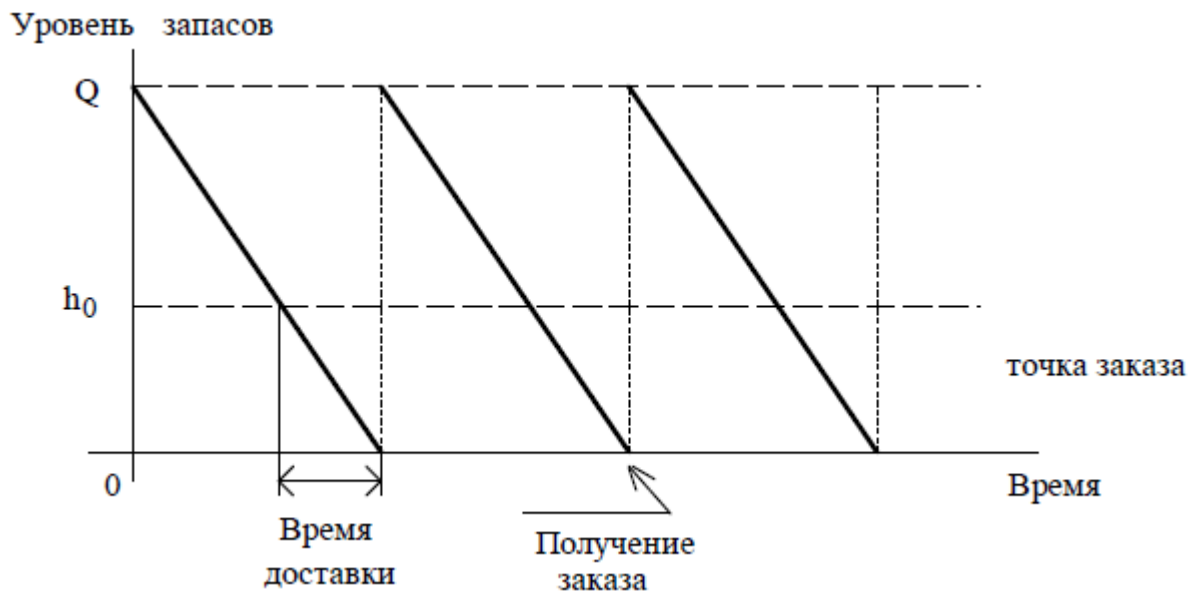


Рис.1.1. Циклы изменения уровня запаса в модели Уилсона

Формулы модели Уилсона

$$Q_w^* = \sqrt{\frac{2Kv}{s}}$$

$$L = K \cdot \frac{v}{Q} + s \cdot \frac{Q}{2}$$

$$h_0 = vT_d$$

$$\tau = \frac{Q}{v}$$

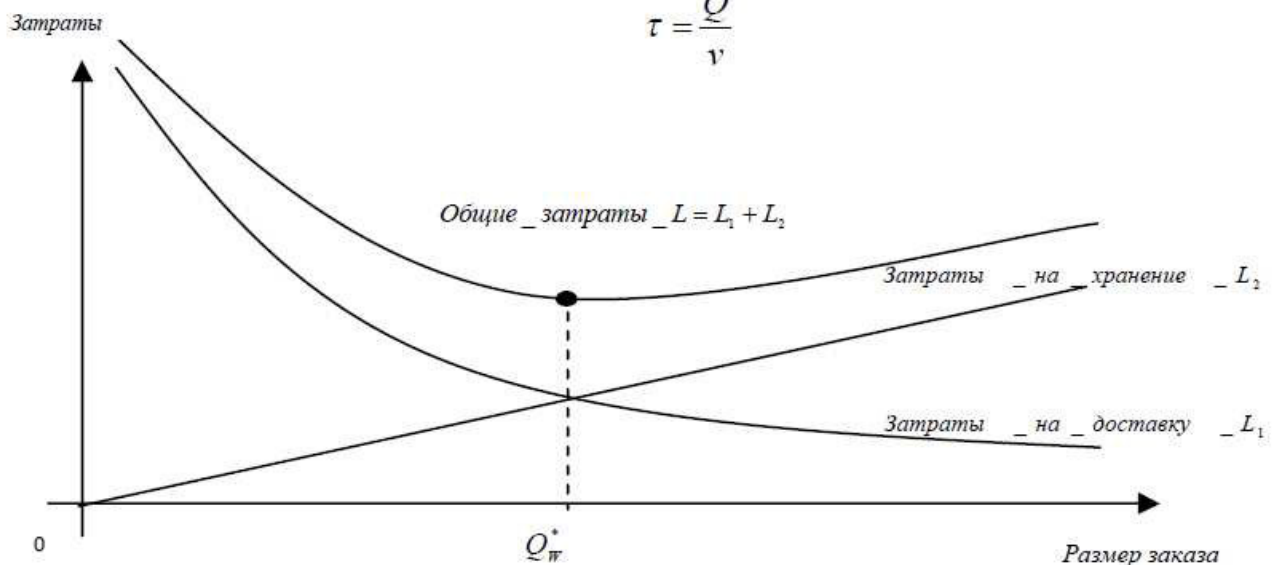


Рис.1.2. График затрат на управление запасами



Существуют следующие разновидности модели управления запасами (построенные на основе модели Уилсона):

- модели, учитывающие скидки (учитывает вариант, когда на заказы большого объема предоставляются скидки);
- модели планирования экономичного размера партии (последовательной производство: один станок производит детали с интенсивностью  $\alpha$ , следующий станок использует продукцию первого с интенсивностью  $\beta$ );
- модели планирования дефицита (в случаях, когда издержки хранения продукции являются гораздо более высокими, чем издержки, связанные с отсутствием запаса в течение небольшого промежутка времени. Такие модели предусматривают два вида ситуаций: «при наличии дефицита заказы покупателей не выполняются и никак не учитываются на будущее» и «заказы покупателей «задаживаются», т.е. выполняются после получения очередного заказа»).

### **Пример расчета модели Уилсона в MS Excel**

Хозяйственный отдел крупного больничного комплекса использует 900 шт упаковок моющего средства «Comet» весом 400 г в год. Стоимость заказа – 200 руб.(стоимость оформления - 8 руб. затраты на доставку 192 руб.), стоимость хранения – 2 руб. 60 коп. за упаковку в год. Доставка заказа осуществляется в течение 3-х дней. Хозяйственный отдел работает 300 дней в году.

Рассчитать: оптимальный объем заказа, годовые расходы на хранение запасов, период поставок и точку заказа.

*Решение:*

Экранная форма для расчета параметров модели Уилсона должна состоять из двух частей: блока исходных данных и расчетных формул (см. рисунок 1.3).

	A	B	C	D
1	<b>Исходные данные</b>			
2	<b>Параметры</b>	<b>Значения</b>	<b>Единицы измерения</b>	
3	Количество рабочих дней	300	дней в году	
4	Интенсивность потребления ( $v$ )	900	шт/год	
5	Затраты на оформление заказа ( $K_1$ )	8	руб.	
6	Затраты на доставку товара ( $K_2$ )	192	руб.	
7	Затраты на хранение запаса ( $s$ )	2,6	руб/(шт*год)	
8	Время доставки ( $T_d$ )	3	дн	
9	Принятый размер заказа ( $Q \cdot w$ )	372	шт.	
10				
11	<b>Расчетные параметры</b>			
12	<b>Параметры</b>	<b>Значения</b>	<b>Единицы измерения</b>	
13	Размер заказа ( $Q$ )	372	шт.	
14	Затраты на управление запасами ( $L$ )	967,471	руб./год	
15	Период поставки ( $\tau$ )	0,413	года	
16	Точка заказа ( $h$ )	9	шт.	
17				

Рис. 1.3. Экранная форма расчета параметров модели Уилсона

Размер реально подаваемого заказа  $Q$  может не совпадать с  $Q_w^*$ , вычисленным по формуле Уилсона. Поэтому в блок исходных данных помимо параметров, заданных в условии задачи, необходимо ввести Принятый размер заказа, который будет использоваться при вычислении расчетных параметров.

Формулы, вводимые в блок расчетных параметров, представлены на рисунке 1.4.

	A	B	C
1	<b>Исходные данные</b>		
2	<b>Параметры</b>	<b>Значения</b>	<b>Единицы измерения</b>
3	Количество рабочих дней	300	дней в году
4	Интенсивность потребления (v)	900	шт/год
5	Затраты на оформление заказа (K1)	8	руб.
6	Затраты на доставку товара (K2)	192	руб.
7	Затраты на хранение запаса (s)	2,6	руб/(шт*год)
8	Время доставки (Td)	3	дн
9	Принятый размер заказа (Q*w)	=B13	шт.
10			
11	<b>Расчетные параметры</b>		
12	<b>Параметры</b>	<b>Значения</b>	<b>Единицы измерения</b>
13	Размер заказа (Q)	=КОРЕНЬ(2*(B5+B6)*B4/B7)	шт.
14	Затраты на управление запасами (L)	=(B5+B6)*B4/B9+B7*B9/2	руб./год
15	Период поставки (tau)	=(B9/B4)	года
16	Точка заказа (h)	=(B4*B8/B3)	шт.
17			
18			

Рис. 1.4. Формулы блока расчетных параметров модели Уилсона

Для рассмотрения различных вариантов управления запасами удобно использовать несколько листов, содержащих одну и ту же экранную форму, но различные значения исходных данных. Для этого необходимо скопировать Лист1 с помощью контекстного меню, вызываемого правой клавишей мыши на названии листа.

Ответ:

- оптимальный объем заказа 372 упаковки
- годовые расходы на хранение запасов 967,47 руб
- длительность цикла повторения заказа (период поставок) 0,413 года или  $0,413 \times 300 = 124$  рабочих дня
- точка заказа: поскольку среднесуточный спрос равен  $900/300 = 3$  упаковки, тогда точка восстановления запаса (уровень запасов, при котором делается новый заказ) составит  $3 \times 3 = 9$  упаковок (среднесуточный спрос \* время доставки заказа).

Также в Excel могут быть построены графики, представленные на рисунках 1.5 и 1.6.



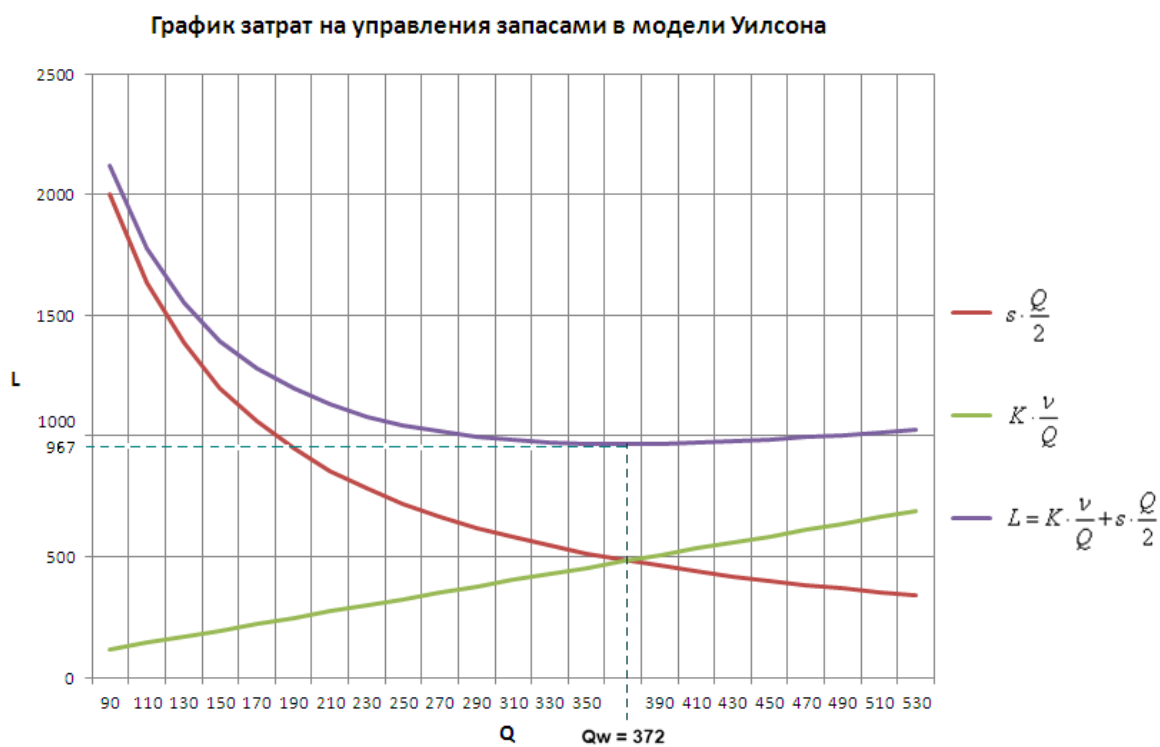


Рис.1.5. Затраты на управление запасами в модели Уилсона

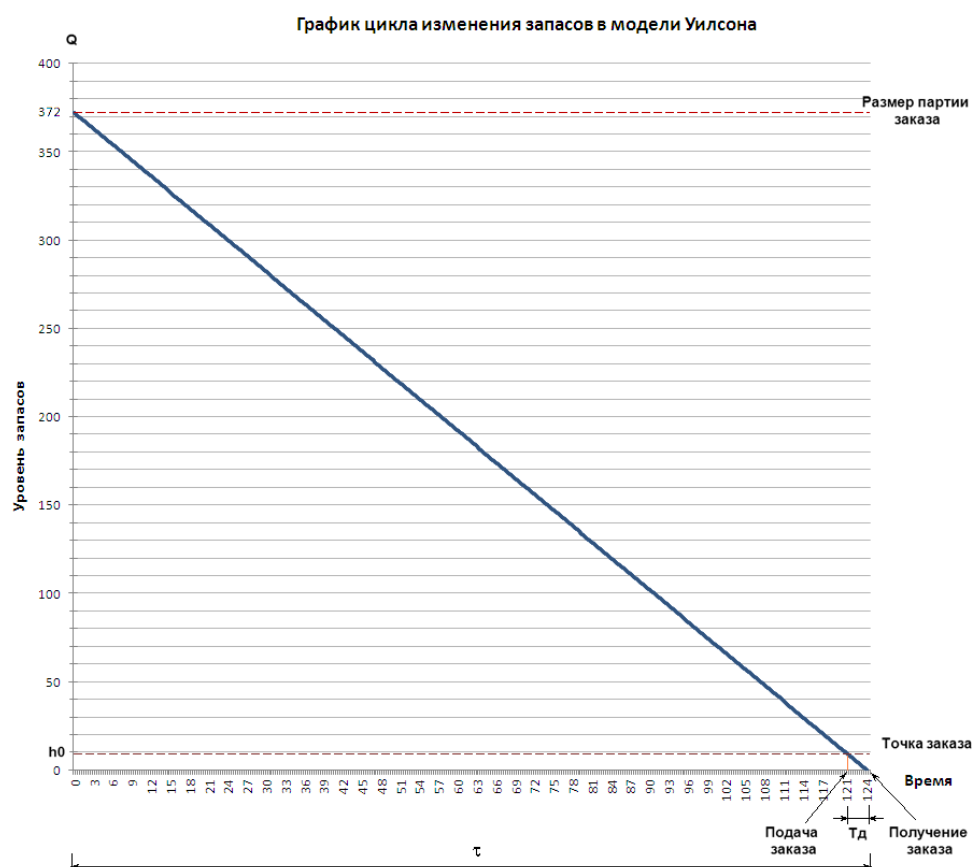


Рис.1.6. Изменение уровня запасов в модели Уилсона

## Индивидуальные задания на лабораторную работу № 1

Номер варианта	$v$	$s$	$K_1$	$K_2$	$T_d$
1	1000	2	5	100	3
2	1100	3	6	200	4
3	1200	4	7	300	5
4	1300	5	8	400	6
5	1400	6	9	500	7
6	1500	7	10	100	8
7	1600	8	11	200	9
8	1700	9	12	300	3
9	1800	10	13	400	4
10	1900	3	14	500	5
11	2000	4	15	100	6
12	2100	5	16	200	7
13	2200	6	17	300	8
14	2300	7	18	400	9
15	2400	8	19	500	3

*Рассчитать выходные параметры, используя формулу управления запасами Уилсона:*

- 1)  $Q$  – размер заказа, [ед. тов.];
- 2)  $\tau$  – период поставки, [ед. времени];
- 3)  $L$  – общие затраты на управление запасами в единицу времени, [ден.ед./ ед. времени].

Построить графики :

- 1) затраты на управление запасами в модели Уилсона;
- 2) изменение уровня запасов в модели Уилсона

Лабораторная работа выполняется в программной среде MS Office с поэтапным описанием выполненных действий со скриншотами.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

### Финансовый анализ в MS Excel и построение отчетных таблиц

Цель лабораторной работы – приобретение навыков использования функций финансового анализа MS Excel в целях обеспечения экономической безопасности.

#### Задание 1. Финансовая функция ПЛТ

Рассмотрим пример расчета с помощью финансовой функции ПЛТ 30-летней ипотечной ссуды со ставкой 8% годовых при начальном взносе 20% суммы и ежемесячной (ежегодной) выплате.

Для приведенного на рис. 2.1 ипотечного расчета в ячейку введите формулу, показанную на рис 2.2.

	A	B	C	D	E
1	<b>Расчет ипотечной ссуды</b>				
2					
3	<b>Исходные данные</b>				
4	Цена	201 900,00			
5	Первый взнос	20%			
6	Годовая ставка	8%			
7	Размер ссуды	161 520,00			
8		<b>Ежемесячные платежи</b>		<b>Ежегодные выплаты</b>	
9	Срок погашения ссуды	360 месяцев		30 лет	
10	<b>Результаты расчета</b>				
11	Периодические выплаты	1 185,18р.		14 347,41р.	
12	Общая сумма выплат	426 663,55р.		430 422,21р.	
13	Общая сумма комиссионных	265 143,55р.		268 902,21р.	
14					
15					
16					
17					

Рис. 2.1. Результат расчета ипотечной ссуды

	A	B	C	D	E
1	<b>Расчет ипотечной ссуды</b>				
2					
3	<b>Исходные данные</b>				
4	Цена	201900			
5	Первый взнос	0,2			
6	Годовая ставка	0,08			
7	Размер ссуды	=B4*(1-B5)			
8		<b>Ежемесячные платежи</b>		<b>Ежегодные выплаты</b>	
9	Срок погашения ссуды	=D9*12	месяцев	30	лет
10	<b>Результаты расчета</b>				
11	Периодические выплаты	=ПЛТ(B6/12;B9;-B7)		=ПЛТ(B6;D9;-B7)	
12	Общая сумма выплат	=B9*B11		=D9*D11	
13	Общая сумма комиссионных	=B12-B7		=D12-B7	
14					
15					

Рис. 2.2 Формулы для расчета ипотечной ссуды

### Задание 2. Пример расчета эффективности неравномерных капиталовложений с помощью функций ЧПС, ВСД и подбора параметра

Рассмотрим следующую задачу. Вас просят дать в долг 10 000 руб. и обещали вернуть через год 2 000 руб., а через два — 4 000 руб., а через 3— 7 000 руб. при какой годовой процентной ставке эта сделка имеет смысл?

На рисунке 2.3 в ячейку **B8** введена формула, зависящая от функции ЧПС, разговор о которой пойдет ниже в данном задании:

= ЧПС(B7;B3:B5)

кроме того, для автоматизации составления таблицы в ячейку **C6** введена формула:

= ЕСЛИ (B6=1; "год"; ЕСЛИ (B6<=4; "года"; "лет"))

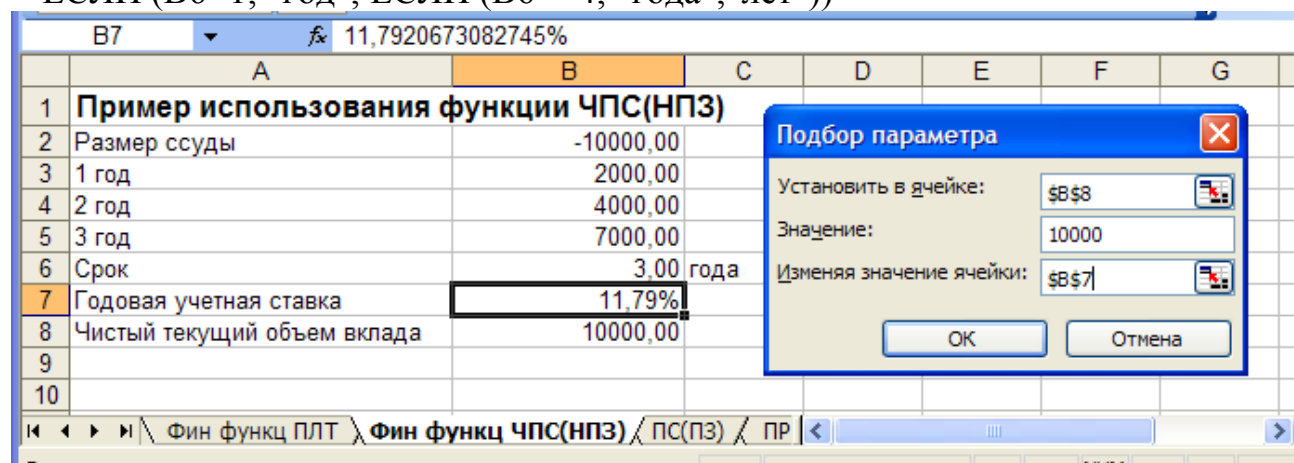


Рис. 2.3. Исходные данные по расчету годовой процентной ставки и диалог

#### Подбор параметра

Для решения задачи выполните следующие действия:

1. Первоначально в ячейку **B7** введите произвольный процент например, 0%
2. Выберите команду **Сервис**→**Подбор параметра** и заполните поля ввода, отобразившегося на экране диалогового окна Подбор параметра, как показано на рис.2.3.

В поле **Установить** в ячейке дается ссылка на ячейку **B8**, в которой вычисляется

чистый текущий объем вклада по формуле = ЧПС(B7;B3:B5). В поле **Значение** введите размер ссуды, равный 10 000.

3. Нажмите кнопку **ОК**. Средство **Подбор параметра** рассчитает, при какой годовой процентной ставке текущий объем вклада равен 10 000 руб.

Искомая процентная ставка выводится в ячейку **B7**. В нашем случае годовая учетная ставка равна 11,79% . Можно сделать вывод: если банки предлагают большую годовую процентную ставку, то предлагаемая сделка не выгодна.

Функция **ЧПС (NPV)** возвращает чистый текущий объем вклада, вычисляемый на основе ряда последовательных поступлений наличных и нормы амортизации. Текущий объем вклада — это сегодняшний объем будущих платежей (отрицательные значения) и поступлений (положительные значения).

Функция **ВСД (IRR)** возвращает внутреннюю скорость оборота для ряда последовательных операций с наличными, представленными числовыми значениями.

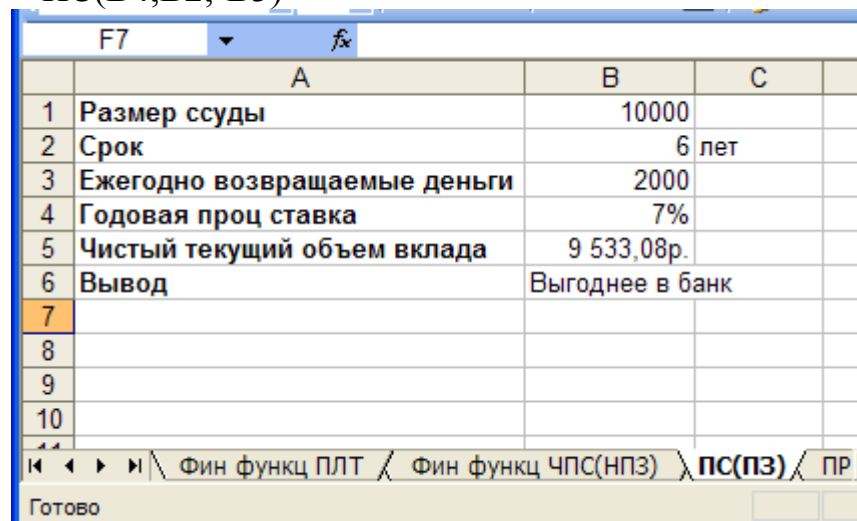
Объемы операций не обязаны быть регулярными, как в случае ренты. Внутренняя скорость оборота - это процентная ставка дохода, получаемая от инвестиций, состоящих из выплат (отрицательные значения) и поступлений (положительные значения), которые происходят в регулярные периоды времени.

### **Задание 3. Пример расчета эффективности капиталовложений с помощью функции ПС**

Рассмотрим следующий пример. Вас просят дать в долг 10000 руб. и обещают возвратить по 2 000 в течение 6 лет. Будет ли выгодна сделка при годовой ставке 7%?

В расчете, приведенном на рис.2.4 в ячейку **B5** введена формула функция с функцией **ПС**, о которой речь пойдет ниже в данном разделе:

= ПС(B4;B2;-B3)



	A	B	C
1	Размер ссуды	10000	
2	Срок	6 лет	
3	Ежегодно возвращаемые деньги	2000	
4	Годовая проц ставка	7%	
5	Чистый текущий объем вклада	9 533,08р.	
6	Вывод	Выгоднее в банк	
7			
8			
9			
10			

Рис. 2.4. Расчет эффективности капиталовложений

### **Задание 4. Финансовые функции ПРПЛТ и ОСПЛТ**

Рассмотрим пример вычисления основных платежей, платы по процентам, общей ежегодно платы и остатка долга на примере ссуды 100000 руб. на срок 5 лет при годовой ставке 2% (рис. 2.5).

Если в ячейку **D7** ввести формулу =D6—B7, то из-за денежного формата при условии что в ячейках **D6** и **C7** введены нули, в ячейку **D&** будет введен **-р.**, а не **0р.** Для избежания этой ситуации в ячейку **D7** вводится формула с функцией **ЕСЛИ**.

В остальные годы эти платы определяются перемещением маркера заполнения диапазона **A7:D7** вниз по столбцам до тех пор, пока в столбец остатка долга не появится ноль.

Отметим, что основную плату по процентам можно было непосредственно найти при помощи функций **ОСПЛТ(РРМТ)** и **ПЛПРОЦ(РМТ)**, соответственно.

Функция **ПРПЛТ** возвращает платежи по процентам за данный период на основе периодических постоянных выплат и постоянной процентной ставки.

Функция **ОСПЛТ** возвращает величину выплаты за данный период на основе периодически постоянных платежей и постоянной процентной ставки.

	A	B	C	D	E	F
1	Процент	20%				
2	Срок	5 лет				
3	Ежегодная плата	33 437,97р.				
4	Размер ссуды	100 000,00				
5	Год	Плата по процентам	Основная плата	Остаток долга		
6	0			100000		
7	1	20000	13 438р.	86562		
8	2	17312	16 126р.	70436		
9	3	14087	19 351р.	51086		
10	4	10217	23 221р.	27865		
11	5	5573	27 865р.	0		
12						
13						
14	Год	Плата по процентам	Основная плата	Остаток долга		
15	0			100000		
16	1	20 000,00	13 438р.	86 562,03р.		
17	2	17 312,41	16 126р.	70 436,47р.		
18	3	14 087,29	19 351р.	51 085,79р.		
19	4	10 217,16	23 221р.	27 864,98р.		
20	5	5 573,00	27 865р.	0,00р.		
21						
22						

Рис. 2.5. Вычисление основных платежей и платы по процентам

## Индивидуальные задания на лабораторную работу № 2

### Задание 1:

Рассмотрим пример расчета с помощью финансовой функции ПЛТ \_\_\_\_-летней ипотечной ссуды со ставкой \_\_\_\_% годовых при начальном взносе \_\_\_\_% суммы и ежемесячной (ежегодной) выплате.

Номер варианта	Ставка	Общее число периодов, лет	Первоначальный взнос, % от суммы
1	6	15	15
2	7	16	15
3	8	17	20
4	9	18	20
5	10	19	20
6	11	20	10
7	6	21	10
8	7	22	10



9	8	23	15
10	9	24	15
11	10	25	15
12	11	26	20
13	12	27	20
14	13	28	20
15	14	29	20

**Задание 2:**

Вас просят дать в долг \_\_\_\_\_ тыс. руб. и обещали вернуть через год \_\_\_\_\_ тыс.руб., а через два \_\_\_\_\_ тыс.руб., а через 3 \_\_\_\_\_ тыс. руб. при какой годовой процентной ставке эта сделка имеет смысл?

Номер варианта	Ссуда	1 год	2 год	3 год
1	100	10	30	80
2	100	10	30	60
3	100	10	30	70
4	100	10	30	80
5	100	10	20	90
6	100	20	40	60
7	100	20	40	50
8	100	20	40	70
9	100	20	45	80
10	100	20	45	60
11	100	20	45	50
12	100	5	40	70
13	100	5	40	65
14	100	5	40	80
15	100	5	40	85

**Задание 3:**

Вас просят дать в долг \_\_\_\_\_ тыс. руб. и обещают вернуть по \_\_\_\_\_ тыс. руб. в течение 5 лет. Будет ли выгодна сделка при годовой ставке 5%?

Номер варианта	Ссуда	1 год
1	100	25
2	100	23
3	100	22
4	100	21
5	50	11
6	50	12
7	50	13
8	80	17
9	80	18

<b>10</b>	80	19
<b>11</b>	90	18
<b>12</b>	90	19
<b>13</b>	90	20
<b>14</b>	110	24
<b>15</b>	110	25

**Задание 4:**

Вычислить основные платежи, плата по процентам, общей ежегодно платы и остатка долга на примере ссуды \_\_\_\_\_ руб. на срок 5 лет при годовой ставке 5%

Данные взять из задание 3.

Лабораторная работа выполняется в программной среде MS Office с поэтапным описанием выполненных действий со скриншотами.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### Метод многокритериальной оценки альтернатив

Цель лабораторной работы – приобретение навыков получения оценки по отдельным критериям и их объединения, агрегирования в общую оценку полезности альтернативы.

#### *Теоретические сведения: основные понятия*

Во многих случаях объект экспертизы не может быть охарактеризован только одним критерием и возникает необходимость формирования нескольких критериев. При применении большинства методов возникают две основные проблемы: как получить оценки по отдельным критериям и как объединить, агрегировать эти оценки в общую оценку полезности альтернативы. Поэтому решение многих стратегических задач определения наиболее важных направлений деятельности организации, установление приоритетности финансирования проектов и работ, оценка перспективности проектов и т.д. невозможны без использования систем *многокритериального экспертного оценивания*.

Известно множество методов оценивания альтернатив: аналитические и статистические, оценивание альтернатив сложным критерием одного и нескольких измерений, графические методы и другие.

Сначала разрабатывают перечень критериев. При этом определяется, как измерять уровень качества по каждому критерию, т. е. как строить шкалу измерений. Чаще всего используют балльные шкалы (от 1 до 10 или от 0 до 1). Далее на сцену выступают эксперты, которые рассматривают обычно в качестве «измерительных приборов». Эксперты оценивают каждую из альтернатив по шкале из критериев. Если экспертов несколько, то их оценки сводятся к единой. При наличии оценок каждой из альтернатив по каждому из критериев возможен переход к получению общей ценности альтернативы. Такой переход осуществляется обычно на основании формулы, агрегирующей (т. е. объединяющей) оценки по отдельным критериям в общую оценку полезности альтернативы. Существует масса подобных формул. На этом этапе иногда (при большом числе альтернатив и критериев) используется ЭВМ, в которую вводятся общий вид формулы, оценки альтернатив по критериям, а получают на выходе общие оценки альтернатив.

Разные методы принятия решения при многих критериях отличаются способом перехода к единой оценке полезности альтернатив. Можно выделить ряд групп таких методов. Рассмотрим метод «таблица оценок».

*Метод “таблицы оценок”.* Сущность метода состоит в следующем<sup>1</sup>:

- 1) формируются критерии оценки альтернатив;
- 2) диапазон значений каждого критерия увязывается с безразмерной шкалой;
- 3) на субъективной основе каждому критерию присваивается коэффициент значимости (веса) в случаях, когда критерии неравноценны;
- 4) определяются результаты оценки по безразмерной шкале во взаимосвязи с коэффициентом значимости (весом);

<sup>1</sup> Краткий курс практического менеджмента/ Рук. авт. колл., общ. ред. д-р экон. наук, проф. Э.Н. Кузьбожев. – Курск: изд-во КГТУ, 2001. - 245с.

- 5) по каждой альтернативе результаты суммируются;
- 6) выбирается альтернатива с наибольшей или наименьшей (в зависимости от выбранной шкалы) суммой результатов.

Рассмотрим алгоритм применения данного метода. Допустим, разработаны проекты  $A_1, A_2 \dots A_i$ , где  $i$  принимает значения от 1 до  $n$ . Каждый из них оценивается по критериям  $K_1, K_2 \dots K_j$ , где  $j$  изменяется от 1 до  $m$ . Значимость каждого критерия оценивается соответственно  $B_{k1}, B_{k2} \dots B_{kj}$ . Оценка  $i$ -ой альтернативы по  $j$ -ому критерию по безразмерной шкале равняется  $P_{ij}$ . В табличной форме это имеет вид:

Таблица 3.1 - Оценка альтернатив по сумме безразмерных единиц при неравноценных критериях

Альтернативы	Критерии				
	$K_1$	$K_2$	$K_3$	...	$K_m$
$A_1$	$P_{11}$	$P_{12}$	$P_{13}$	...	$P_{1m}$
$A_2$	$P_{21}$	$P_{22}$	$P_{23}$	...	$P_{2m}$
...	...	...	...	...	...
$A_n$	$P_{n1}$	$P_{n2}$	$P_{n3}$	...	$P_{nm}$
Коэффициенты значимости	$B_{k1}$	$B_{k2}$	$B_{k3}$	...	$B_{km}$

Для альтернативы  $A_i$  общая оценка по всем критериям с учетом их коэффициентов значимости (весов) составит:

$$P_i = P_{ij} \times B_{kj}.$$

Оптимальным считают вариант с максимальной или минимальной суммой результатов:

$$\begin{aligned} \max P_i &= \max P_{ij} \times B_{kj}, \\ \min P_i &= \min P_{ij} \times B_{kj}. \end{aligned}$$

*Пример выбора одного из поставщиков ООО “Сельхозсервиспродукт”<sup>2</sup>*

*Диагностика проблемы и формирование критериев оценки.*  
 ООО “СельхозСервисПродукт” – малое предприятие мукомольной промышленности, созданное на базе хлебоприемного предприятия.

Оборудование, используемое предприятием, предназначено для выработки пищевой муки по сортам: высший и первый, а также отрубей из мягкой краснозерной озимой пшеницы IY типа; 1,2 и 3 подтипов, 1,2 и 3 класса по ГОСТ 9353 с натуральным весом не менее 750 грамм в литре, а также из мягкой озимой пшеницы с примесью твердой не более 20%. Исходная влажность зерна должна быть не менее 12% и не более 14%.

В условиях перехода материально-технического снабжения на оптовую торговлю материальными средствами производства по прямым договорам со свободно выбираемыми поставщиками для слаженной работы предприятия большую значимость приобретает решение о выборе поставщика.

Для выбора оптимального поставщика ООО “СельхозСервисПродукт” значимыми являются следующие критерии:

- 1) качество зерна;

<sup>2</sup> Краткий курс практического менеджмента/ Рук. авт. колл., общ. ред. д-р экон. наук, проф. Э.Н. Кузьбожев. – Курск: изд-во КГТУ, 2001. - 245с.

- 2) цена зерна;
- 3) транспортные расходы;
- 4) форма оплаты;
- 5) минимальный размер поставляемой партии;
- 6) срок доставки;
- 7) ритмичность поставок;
- 8) надежность поставщика.

Очевидно, что цена и качество являются важнейшими критериями, влияющими как на производственный процесс, так и на конечный результат производства (рентабельность, объем реализации, долю рынка и так далее).

Также необходимо учитывать расстояние до поставщика, что в первую очередь выражается в транспортных расходах, непосредственно влияющих на цену. Так как помимо переменных транспортных затрат, зависящих от количества перевезенного груза, имеются и постоянные расходы, зависящие только от места оформления груза, рекомендуется рассматривать транспортные расходы как отдельный критерий.

Немаловажным критерием является форма оплаты, характеризующаяся различными сроками отвлечения средств из оборота и степенью риска для предприятия.

Следующим использованным критерием является минимальная партия, объем которой непосредственно связан с объемом производства и размером свободных оборотных средств и обусловлен способом доставки (железнодорожным или автомобильным транспортом) и регионом отправки. Минимальная партия не должна превышать установленных потребностей в сырье, чтобы не допустить сверхнормативных остатков, что в свою очередь уменьшает сроки оборачиваемости оборотных средств и соответственно повышает уровень рентабельности.

Срок доставки и ритмичность поставок, как и размер минимальной партии, оказывают влияние на сроки оборачиваемости оборотных средств, а также на быстроту адаптации производственного процесса к изменению объемов потребительского спроса.

Надежность поставщика - один из важнейших критериев оценки, включающий в себя возможность обеспечения бесперебойных поставок, необходимых для непрерывного функционирования производства, вероятность точного соблюдения условий поставок, а также имидж поставщика, имеющий большое значение при предварительных формах расчетов за поставляемую продукцию.

Описанные выше критерии между собой не равнозначны. Для оценки их сравнительной предпочтительности генеральному директору ООО “СельхозСервисПродукт” было предложено воспользоваться методом Черчмена-Акоффа.

Критерии упорядочили по убыванию их важности: О1 - наиболее важный критерий; ... ; О8 - наименее важный критерий. Наиболее важному критерию присвоили значение 1, остальным критериям оценки: V1, V2, V3, V4, V5, V6, V7, V8 (табл. 3.2).

Таблица 3.2 - Ранжирование критериев по степени их важности

Критерии	Ранг	Оценка
Качество	1	1
Цена	3	0,6
Транспортные расходы	6	0,4
Форма оплаты	4	0,55
Минимальная партия	7	0,2
Срок доставки	5	0,5
Регулярность поставок	8	0,1
Надежность поставщика	2	0,95
Сумма		4,3

Оценка наиболее важного критерия сравнивается с суммой оценок остальных

критериев:  $V1$  и  $V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8$ . При этом должно соблюдаться условие:

- если критерий  $O1$  предпочтительнее, чем сумма остальных критериев, то  $V1 > V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8$ ,

-если менее предпочтителен - то

$$V1 < V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8,$$

-если равнозначен - то

$$V1 = V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7 + V8.$$

Далее сравниваются  $V1$  и  $V2 + V3 + V4 + V5 + V6 + V7$ . Сравнение продолжается, пока не сопоставятся  $V6$  и  $V7 + V8$  (табл. 3.3).

Таблица 3.3 - Сравнение оценок по методу Черчмена-Акоффа

$1 < 0.95+0.6+0.55+0.5+0.4+0.2+0.1$	согласен
$1 < 0.95+0.6+0.55+0.5+0.4+0.2$	согласен
$1 < 0.95+0.6+0.55+0.5+0.4$	согласен
$1 < 0.95+0.6+0.55+0.5$	согласен
$1 < 0.95+0.6+0.55$	согласен
$1 < 0.95+0.6$	согласен
$0.95 < 0.6+0.55+0.5+0.4+0.2+0.1$	согласен
$0.95 < 0.6+0.55+0.5+0.4+0.2$	согласен
$0.95 < 0.6+0.55+0.5+0.4$	согласен
$0.95 < 0.6+0.55+0.5$	согласен
$0.95 < 0.6+0.55$	согласен
$0.6 < 0.55+0.5+0.4+0.2+0.1$	согласен
$0.6 < 0.55+0.5+0.4+0.2$	согласен
$0.6 < 0.55+0.5+0.4$	согласен
$0.6 < 0.55+0.5$	согласен
$0.55 < 0.5+0.4+0.2+0.1$	согласен
$0.55 < 0.5+0.4+0.2$	согласен
$0.55 < 0.5+0.4$	согласен
$0.5 < 0.4+0.2+0.1$	согласен
$0.5 < 0.4+0.2$	согласен
$0.4 < 0.2+0.1$	согласен

Описанное выше условие соблюдалось во всех неравенствах, поэтому необходимости в корректировке оценок не возникло.

Полученные результаты нормировали и получили следующие веса критериев: качество –  $1/4,3 = 0,23$ ; цена  $0,6/4,3 = 0,14$ ; транспортные расходы –  $0,09$ ; форма оплаты –  $0,13$ ; минимальная партия –  $0,05$ ; срок доставки –  $0,12$ ; ритмичность поставок –  $0,02$ ; надежность –  $0,22$ .

Выбор оптимального поставщика методом “таблицы оценок”. ООО “СельхозСервисПродукт” имеет возможность закупать сырье у трех поставщиков, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Сравнительная характеристика каждого из вариантов представлена в табл. 3.4.

Таблица 3.4 - Характеристика поставщиков ООО “СельхозСервисПродукт”



Критерии оценки	Поставщики		
	Колх. “Свобода”, Курская область	Колх. “Прогресс”, Урал	Колх. “Светлый путь”, Сибирь
1. Качество зерна	Низкое	Высокое	Высокое
2. Цена , руб./т	2700	2500	2350
3.Транспортные расходы, руб.	50	350	650
4. Форма оплаты	Давальческая система	Предоплата (100%)	По факту отправки сырья
5. Минимальный размер партии, т	65	130	130
6. Срок доставки, дней	1	8	10
7. Ритмичность поставок, дн.	1	3	2
8. Надежность поставщи- ка, %	средняя надежность	ненадежен	надежен

Агрегированный коэффициент качества зерна рассчитывается по формуле:

$$K_{agr} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{K_i - \Xi_i}{\Xi_i}}$$

где  $K_i$  - частные показатели качества зерна;

$\Xi_i$  - эталонные значения показателей, субъективно определенные генеральным директором ООО “ССП”.

Качество зерна определяется такими показателями, как натура, содержание клейковины и индекс деформации клейковины (ИДК).

Их допустимые значения:

натура	720-790 г/литр;
клейковина	21-32%;
ИДК	40-90.

За эталонные принимаются верхние допустимые значения клейковины, натуры и индекса деформации клейковины (32%, 790 г/литр и 60 соответственно), т.к. продукция, произведенная из сырья с такими характеристиками, пользуется наибольшим спросом.

Действительные значения показателей:

Курское зерно: натура-763 г/литр;

клейковина-23 %;

ИДК - 91.

Уральское зерно: натура-772 г/литр;

клейковина-28 %;

ИДК-68.

Сибирское зерно: натура-781 г/литр;

клейковина-27 %;

ИДК-55.

Возможные варианты оплаты сырья с точки зрения выгоды для предприятия (срока отвлечения средств из оборота, степени риска и т. д. ) можно охарактеризовать следующим образом:

давальческая система - очень выгодно,  
 предоплата 100% - очень невыгодно,  
 по факту отгрузки - выгодно.

Для количественной оценки удобства формы оплаты воспользуемся балльной шкалой Харрингтона:

очень невыгодно 1,  
 невыгодно 2,  
 средняя степень выгоды 3,  
 выгодно 4,  
 очень выгодно 5.

Надежность поставщиков оценим аналогичным образом:

очень ненадежен 1,  
 ненадежен 2,  
 сред. надежность 3,  
 надежен 4,  
 очень надежен 5.

Сопоставим полученные результаты с безразмерной шкалой. Диапазон изменения отвлеченных единиц зададим от 1 до 10. В качестве оптимальной примем наибольшую сумму безразмерных единиц. Для получения округленных значений по безразмерной шкале несколько расширим диапазоны табличных значений (табл. 3.5).

Таблица 3.5 - Соответствие размерных и безразмерных характеристик

Безразмерная шкала	Качество, безр.	Цена, руб./т	Транспортные расходы, руб./т	Форма оплаты безр.	Минимальная партия, т	Срок доставки, дн.	Ритмичность поставок, дн.	Надежность поставщика, безр.
1	0,45	3000	900	1	325	10	10	1
2	0,40	2900	800	1	292,5	9	9	1
3	0,35	2800	700	1-2	260	8	8	1-2
4	0,30	2700	600	2	227,5	7	7	2
5	0,25	2600	500	2-3	195	6	6	2-3
6	0,20	2500	400	3	162,5	5	5	3
7	0,15	2400	300	3-4	130	4	4	3-4
8	0,10	2300	200	4	92,5	3	3	4
9	0,05	2200	100	4-5	65	2	2	4-5
10	0	2100	0	5	32,5	1	1	5

Теперь вместо заданных характеристик подставим безразмерные единицы, умножим их на соответствующие весовые коэффициенты, посчитаем суммы этих произведений и найдем максимум (табл. 3.6).

Таблица 3.6 - Оценка альтернатив по сумме безразмерных единиц при неравноценных критериях

Критерии	Вес. коэф.	Альтернативы		
		“Свобода”	“Прогресс”	“Светлый путь”

	Вк	Р	ВкР	Р	ВкР	Р	ВкР
Качество	0,23	4	0,92	6	1,38	7	1,61
Цена	0,14	4	0,56	6	0,84	7,5	1,05
Транспортные расходы	0,09	9,5	0,855	6,5	0,585	3,5	0,315
Форма оплаты	0,13	10	1,3	1	0,13	9	1,17
Минимальная партия	0,05	9	0,45	7	0,35	7	0,35
Срок доставки	0,12	10	1,2	3	0,36	1	0,12
Ритмичность поставок	0,02	10	0,2	8	0,16	9	0,18
Надежность поставщика	0,22	6	1,32	4	0,88	10	2,2
Сумма	1		6,805		4,685		6,995

Вывод: Максимальная сумма произведений соответствует третьей альтернативе, то есть при выборе альтернативы методом “Таблица оценок” оптимальным вариантом является закупка зерна в Сибири у колхоза “Светлый путь”.

**Выбор оптимального поставщика методом “Полигон альтернатив”.** На основании принятых критериев и установленных безразмерных оценок в пределах критерия представим графически каждую из предложенных альтернатив и осуществим выбор наилучшего решения (рис. 3.1).

Наилучшие безразмерные значения критериев расположим дальше от центра окружности. Следовательно, оптимальным будем считать вариант, которому соответствует многоугольник, очертивший наибольшую площадь.

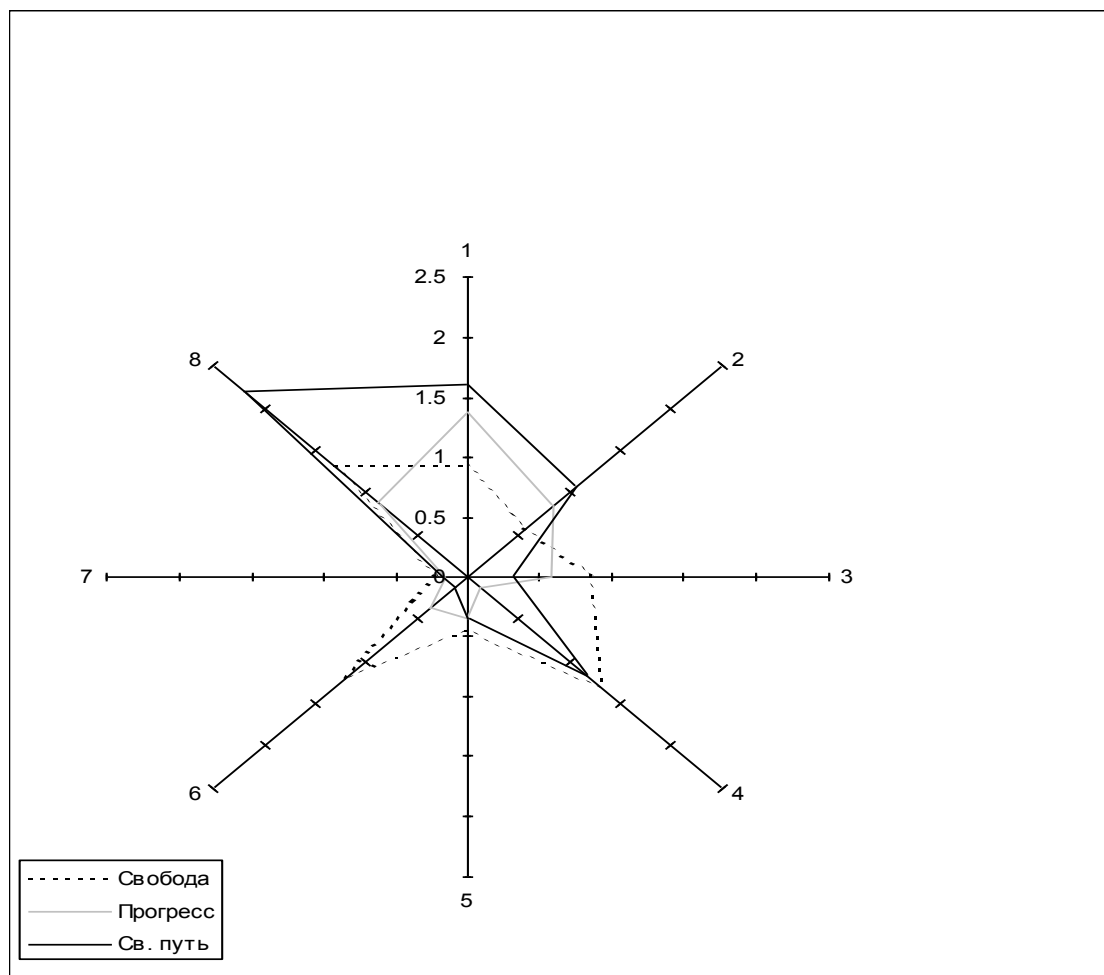


Рисунок 3.1 - Сравнение альтернатив выбора поставщика методом "Полигон альтернатив"

Рис. 3.1. позволяет визуально оценить, что наибольшая площадь соответствует третьей альтернативе. Значения критериев соизмерены, оси - промасштабированы, поэтому для ранжирования альтернатив надо рассчитать площади многоугольников.

Угол между осями равен  $45^\circ$  ( $360^\circ/8$ ). Следовательно, площадь многоугольников определится формулой:

$$S_{\text{общ}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8$$

$$S_n = 1/2 \times A \times B \times \sin 45^\circ \quad \sin 45^\circ = 0.7071$$

Результаты расчетов приведены в табл. 7.

Таблица 3.7 - Расчет площадей многоугольников для выбора наилучшей альтернативы

“Свобода”			“Прогресс”			“Светлый путь”		
A	B	Sn	A	B	Sn	A	B	Sn
0.92	0.56	0.1822	1.38	0.84	0.4099	1.61	1.05	0.5978
0.56	0.855	0.1693	0.84	0.585	0.1738	1.05	0.315	0.117

0.855	1.3	0.393	0.585	0.13	0.0269	0.315	1.17	0.1303
1.3	0.45	0.2069	0.13	0.35	0.0161	1.17	0.35	0.1448
0.45	1.2	0.1909	0.35	0.36	0.0446	0.35	0.12	0.0149
1.2	0.2	0.0849	0.36	0.16	0.0204	0.12	0.18	0.0076
0.2	1.32	0.0934	0.16	0.88	0.0498	0.18	2.2	0.14
1.32	0.92	0.4294	0.88	1.38	0.4294	2.2	1.61	1.2525
Собщ ко =1.7499			Собщ у =1.1708			Собщ с =2.4048		

Согласно данным табл. 1.7 наибольшую площадь занимает многоугольник, соответствующий третьей альтернативе (закупка зерна у колхоза “Светлый путь”). Результаты расчетов совпали с выводами, сделанными визуальным и полученными методом “Таблица оценок”.

### Индивидуальные задания на лабораторную работу № 3

**Дано условие:** ОАО «Электроагрегат» выбирает одну из четырех систем управления запасами (табл. 1.8).

Таблица 1.8 - Сравнительная характеристика систем управления запасами

Критерии оценки	Система управления запасами			
	Система управления с фиксированным размером заказа	Система управления с фиксированным интервалом времени между заказами	Система с установленной периодичностью пополнения запасов до установленного уровня	Система «Максимум-минимум»
Затраты на хранение	<b>a1</b>	<b>a2</b>	<b>a3</b>	<b>a4</b>
Издержки выполнения заказа	<b>b1</b>	<b>b2</b>	<b>b3</b>	<b>b4</b>
Реагирование системы на задержку поставки	Быстро реагирует	Реагирует	Реагирует	Средняя степень
Наличие страхового запаса	<b>Z</b>	<b>Z</b>	<b>Z</b>	<b>Z</b>
Вид контроля за товарно-материальными ценностями	Высокая степень контроля	Отсутствует постоянный контроль	Высокая степень контроля	Отсутствует постоянный контроль
Размер максимального желательного запаса	<b>c1</b>	<b>c2</b>	<b>c3</b>	<b>c4</b>
Реагирование системы на дефицит	Быстро реагирует	Реагирует	Быстро реагирует	Медленно реагирует

Реакция системы на изменение темпов потребления	Медленно реагирует	Реагирует	Быстро реагирует	Медленно реагирует
---	--------------------	-----------	------------------	--------------------

Номер варианта	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	Z	c1	c2	c3	c4
1	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	2377	1408	2288	2288
2	2000	2500	2400	2450	405	288	473	350	500	1700	1800	1400	1200
3	4000	4500	4400	4450	605	688	873	750	900	1700	1800	1400	1200
4	4000	4500	4400	4450	505	588	473	650	800	1100	1200	1100	1000
5	5000	5500	5400	5450	505	588	473	650	700	1100	1200	1100	1000
6	5000	5500	5400	5450	500	600	470	650	600	1100	1200	1100	1000
7	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	1700	1800	1400	1200
8	2000	2500	2400	2450	405	288	473	350	500	1700	1800	1400	1200
9	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	2377	1408	2288	2288
10	2000	2500	2400	2450	405	288	473	350	500	1700	1800	1400	1200
11	4000	4500	4400	4450	605	688	873	750	900	1700	1800	1400	1200
12	4000	4500	4400	4450	505	588	473	650	800	1100	1200	1100	1000
13	5000	5500	5400	5450	505	588	473	650	700	1100	1200	1100	1000
14	5000	5500	5400	5450	500	600	470	650	600	1100	1200	1100	1000
15	3526	3382	4992	3381	405	388	573	388	440	1700	1800	1400	1200

**Задание:** Используя методы «таблицы оценок» и «полигон альтернатив» предложить наилучший вариант.



## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### Решение поставленной задачи в условиях полной неопределенности и в условиях риска

Цель лабораторной работы – приобретение навыков решения поставленной задачи в условиях полной неопределенности и в условиях риска.

#### *Теоретические сведения: основные понятия*

Критерий максимакса

$$M = \max_i \max_j a_{ij}$$

Максимальный критерий Вальда

$$W = \max_i \min_j a_{ij}$$

Критерий минимального риска Сэвиджа

$$S = \min_i \max_j r_{ij}$$

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

$$G_i = \lambda \cdot \min_j a_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \max_j a_{ij}$$

Критерий среднего выигрыша

$$K_{\text{опт}} = \max_i \sum_{j=1}^N p_j k_{ij}$$

Критерий Лапласа

$$K_{\text{опт}} = \max_i \left( \frac{1}{n} \sum_{j=1}^N k_{ij} \right)$$

### Индивидуальные задания на лабораторную работу № 4

Дано условие:

Рудное месторождение разведано редкой сетью скважин (в основном по категории С1). В связи с нехваткой сырья требуется принять решение о мощности рудника, не ожидая завершения детальной разведки. Разведанные запасы месторождения (точнее их математическое ожидание) составляют 40 млн.т. Так как верность подсчета запасов по категории С1 составляет 100%, реально резервы сырья могут изменяться от 20 до 80 млн. т. Обозреваются 5 возможных вариантов запасов 20, 30, 40, 60 и 80 млн.т. (которые соответствуют П1-П5 состояниям природы).

В свою очередь рассматриваются 4 варианта строительства рудника мощностью 2,3,4 или 5 тыс.т.(которые соответствуют стратегиям А1-А4). Для каждой вариации мощности при рассматриваемых состояниях природы (вариантов запасов месторождения) рассчитаны вероятные значения суммарной приведенной прибыли (таблица 1).

Отрицательное значение прибыли, существующие в ряде случаев, демонстрирует, что в связи с не подтверждением запасов и крупными капиталовложениями эксплуатация месторождения убыточна.

Для утверждения окончательного решения о мощности рудника **необходимо рассчитать критерии** Вальда, Сэвиджа, Лапласа и среднего выигрыша (математическое ожидание прибыли), задаваясь вероятностями состояний природы (по аналогии с другими месторождениями). Для критерия среднего выигрыша предполагаем, что наблюдается стандартный закон распределения погрешности подсчета запасов, вследствие этого примем вероятности состояния равными соответственно ( $p_1 ; p_2 ; p_3 ; p_4 ; p_5$ ) = (0,12; 0,25; 0,3; 0,25; 0,08). Для критерия Гурвица зададимся тремя значениями коэффициента  $\lambda$ , выражающим долю оптимизма  $\lambda = 0,5; 0,3$  и  $0,7$ .

Вариант мощности	Прибыль, млн руб. для вариантов запасов (состояний природы), млн. т				
	20( $\Pi_1$ )	30( $\Pi_2$ )	40( $\Pi_3$ )	60( $\Pi_4$ )	80( $\Pi_5$ )
2 ( $A_1$ )	$a_1$	$b_1$	$c_1$	$d_1$	$e_1$
3 ( $A_2$ )	$a_2$	$b_2$	$c_2$	$d_2$	$e_2$
4 ( $A_3$ )	$a_3$	$b_3$	$c_3$	$d_3$	$e_3$
5 ( $A_4$ )	$a_4$	$b_4$	$c_4$	$d_4$	$e_4$

Номер варианта	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	c1	c2	c3	c4
1	-10	-40	-65	-85	50	-20	-45	-65	70	100	120	130
2	-15	-10	-45	-70	60	10	-20	60	50	110	90	70
3	-20	-30	-45	-75	40	-10	-35	-25	60	90	100	110
4	-30	-50	-80	-70	30	-80	-40	-45	80	60	90	100
5	-10	-30	-45	-15	50	-50	-15	-45	80	90	100	80
6	-80	-40	-65	-45	50	-80	-45	-10	70	50	120	100
7	-90	-40	-65	-85	90	-20	-45	-70	120	100	90	130
8	-70	-20	-65	-40	70	-50	-15	-45	90	100	80	70
9	-110	-90	-65	-50	50	120	-45	-65	170	100	120	130
10	-100	-50	-50	-30	80	-60	-50	-70	70	110	100	80
11	-40	-50	-70	-40	50	-20	-45	-65	70	100	120	130
12	-10	-50	-60	-80	70	-20	-45	-60	90	90	100	70
13	-80	-40	-65	-50	80	-70	-40	-50	70	100	110	140
14	-10	-60	-80	-90	50	-20	-45	-65	70	100	120	130
15	-100	-40	-60	-80	50	-40	-80	-30	70	100	120	130

Номер варианта	d1	d2	d3	d4	e1	e2	e3	e4
1	70	100	120	130	72	105	150	165
2	80	90	170	100	80	100	140	180
3	50	80	180	180	90	180	190	220
4	90	50	140	90	70	100	140	180
5	80	100	150	190	80	180	140	210
6	80	70	120	60	80	100	140	180
7	100	90	110	100	80	190	140	180
8	180	50	100	140	80	100	110	40
9	60	90	110	100	50	150	70	110
10	80	50	170	100	80	100	120	180
11	70	90	140	110	80	180	140	90

<b>12</b>	80	50	90	100	90	100	190	150
<b>13</b>	50	90	150	100	80	100	140	110
<b>14</b>	90	150	100	40	80	90	170	150
<b>15</b>	60	90	140	100	180	100	140	210

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### Решение задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel

Цель лабораторной работы – приобретение навыков решения задач линейного программирования (ЛП) в табличном редакторе Microsoft Excel.

#### *Инструкция по использованию Microsoft Excel для решения ЗЛП*

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия.

1. Ввести условие задачи:

- а) создать экранную форму для ввода условия задачи:
  - переменных,
  - целевой функции (ЦФ),
  - ограничений,
  - граничных условий;
- б) ввести исходные данные в экранную форму:
  - коэффициенты ЦФ,
  - коэффициенты при переменных в ограничениях,
  - правые части ограничений;
- с) ввести зависимости из математической модели в экранную форму:
  - формулу для расчета ЦФ,
  - формулы для расчета значений левых частей ограничений;
- д) задать ЦФ (в окне «Поиск решения»):
  - целевую ячейку,
  - направление оптимизации ЦФ;
- е) ввести ограничения и граничные условия (в окне «Поиск решения»):
  - ячейки со значениями переменных,
  - граничные условия для допустимых значений переменных,
  - соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

2. Решить задачу:

- а) установить параметры решения задачи (в окне «Поиск решения»);
- б) запустить задачу на решение (в окне «Поиск решения»);
- с) выбрать формат вывода решения (в окне «Результаты поиска решения»).

#### *Пример*

Рассмотрим пример нахождения решения для следующей одноиндексной задачи ЛП:

$$\begin{aligned}
 Z(X) &= 130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4 \rightarrow \max; \\
 \begin{cases}
 -1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 756, \\
 -6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \geq 450, \\
 4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4 \leq 89, \\
 x_j \geq 0; j = \overline{1,4}.
 \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

#### *1. Ввод исходных данных*

Создание экранной формы и ввод в нее условия задачи

Экранная форма для ввода условий задачи (1) вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рисунке 5.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Переменные					
2	Имя	x1	x2	x3	x4				
3	Значение								
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Коеф. ЦФ	130,5	20	56	87,8		max		
7									
8		Ограничения							
9	Вид					Лев.часть	Знак	Прав.часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4		=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1		>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13		<=	89	
13									
14									

Рис. 5.1. Экранная форма задачи (1) (курсор в ячейке F6)

В экранной форме на рисунке 1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка в Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи (1) соответствуют ячейки **B3** ( $x_1$ ), **C3** ( $x_2$ ), **D3** ( $x_3$ ), **E3** ( $x_4$ ), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ( $c_1 = 130,5$ ), **C6** ( $c_2 = 20$ ), **D6** ( $c_3 = 56$ ), **E6** ( $c_4 = 87,8$ ), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ( $b_1 = 756$ ), **H11** ( $b_2 = 450$ ), **H12** ( $b_3 = 89$ ) и т.д.

## 2. Ввод зависимостей из математической модели в экранную форму

### Зависимость для ЦФ

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно (1) значение ЦФ определяется выражением

$$130,5x_1 + 20x_2 + 56x_3 + 87,8x_4. \quad (2)$$

Используя обозначения соответствующих ячеек в Excel (см. рисунок 1), формулу для расчета ЦФ (2) можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3**, **C3**, **D3**, **E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6**, **C6**, **D6**, **E6**), то есть

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3. \quad (3)$$

Чтобы задать формулу (1.3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу «Enter»

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6). \quad (4)$$

где символ \$ перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится;

символ: означает, что в формуле будут использованы все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6 и E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рисунок 5.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Переменные					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение								
4	Нижн.гр.	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max		
7									
8		Ограничения							
9	Вид					Лев.часть	Знак	Прав.часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	0	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	0	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89	
13									
14									
15									

Рис. 5.2. Экранная форма задачи (1) после ввода всех необходимых формул (курсор в ячейке F6)

*Примечание.* Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима «Вставка функций», который можно вызвать из вкладки «Формулы» или при нажатии кнопки « $f_x$ » на стандартной панели инструментов. Так, например, формулу (4) можно задать следующим образом:

- курсор в поле **F6**;
- нажав кнопку « $f_x$ », вызовите окно «**Мастер функций – шаг 1 из 2**»;
- выберите в окне «**Категория**» категорию «**Математические**»;
- в окне «**Функция**» выберите функцию **СУММПРОИЗВ**;
- в появившемся окне «**СУММПРОИЗВ**» в строку «**Массив 1**» введите выражение **B\$3:E\$3**, а в строку «**Массив 2**» – выражение **B6:E6** (рис. 3);
- после ввода ячеек в строки «**Массив 1**» и «**Массив 2**» в окне «**СУММПРОИЗВ**» появятся числовые значения введенных массивов (см. рисунок 5.3), а в экранной форме в ячейке F6 появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).



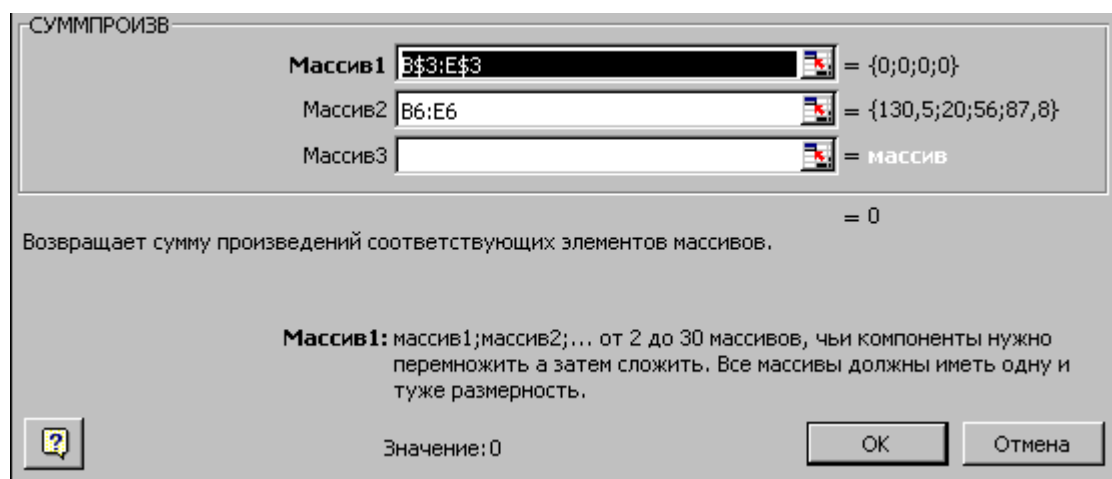


Рис. 5.3. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно «Мастер функций»

### 3. Зависимости для левых частей ограничений

Левые части ограничений задачи (1) представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (B3, C3, D3, E3), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (B10, C10, D10, E10 – 1-е ограничение; B11, C11, D11, E11 – 2-е ограничение и B12, C12, D12, E12 – 3-е ограничение). Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице 5.1.

Таблица 5.1 - Формулы, описывающие ограничения модели (1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1,8x_1 + 2x_2 + x_3 - 4x_4$ или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B10:E10)</b>
$-6x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4$ или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B11:E11)</b>
$4x_1 - 1,5x_2 + 10,4x_3 + 13x_4$ или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	<b>=СУММПРОИЗВ(BS3:ES3;B12:E12)</b>

Как видно из таблицы 5.1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1), отличаются друг от друга и от формулы (4) в целевой ячейке **F6** только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки F6 и протянуть за маркер автозаполнения (черный крестик в правом нижнем углу ячейки);
- на экране в полях F10, F11 и F12 появится 0 (нулевое значение) (см. рисунок 2).

### 4. Проверка правильности введения формул

Для проверки правильности введенных формул производите поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле (рисунки 5.4 и 5.5).

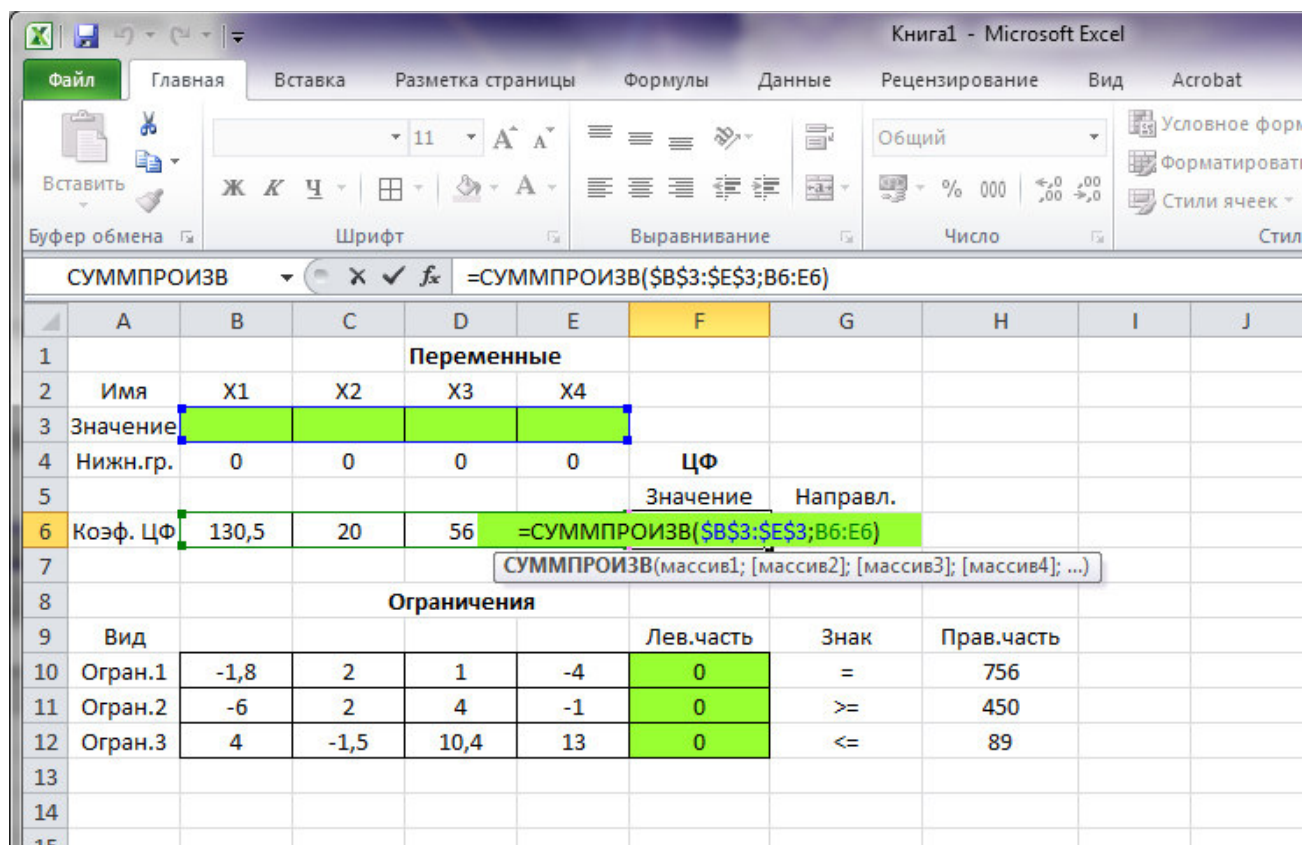


Рис. 5.4. Проверка правильности введения формулы в целевую ячейку F6

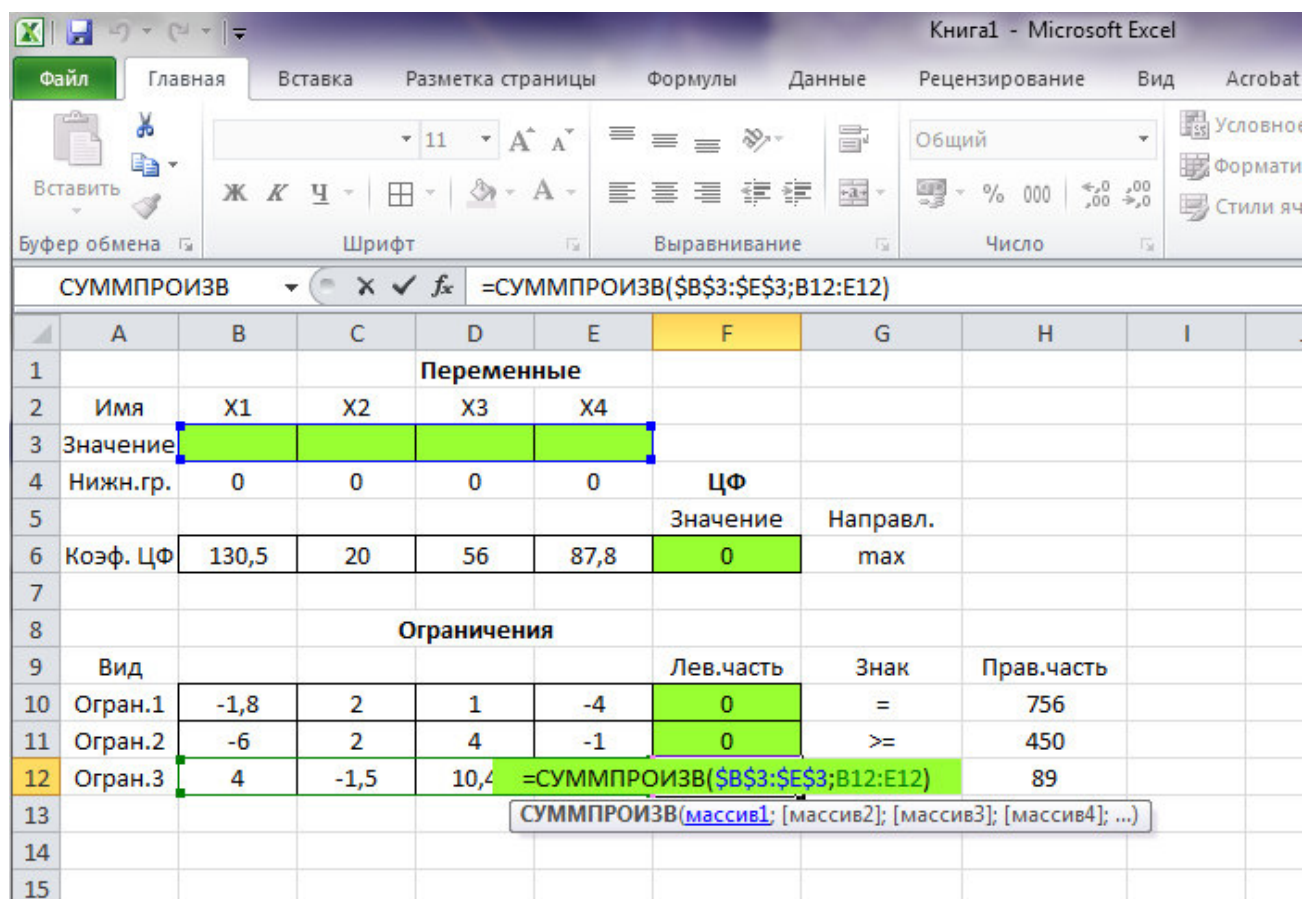


Рис. 5.5. Проверка правильности введения формулы в ячейку F12 для левой



части ограничения 3

### 5.3. Задание ЦФ

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из вкладки «Данные» (рисунок 5.6):

**!!!** Проверьте, если у вас установлена надстройка «Поиск решения» (рис. 6), пропустите этот пункт.

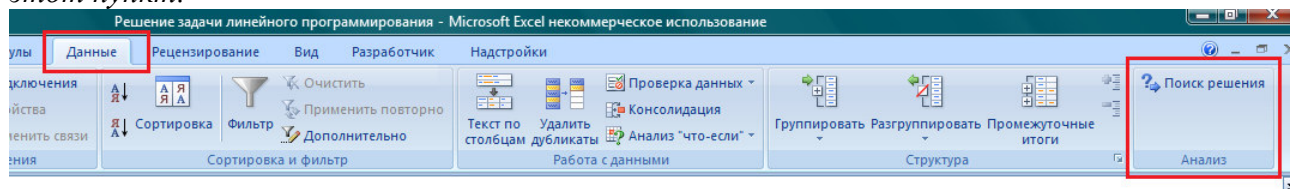


Рис. 5.6. Надстройка Поиск решения установлена; вкладка «Данные», группа «Анализ»

Если надстройки «Поиск решения» вы на ленте Excel не обнаружили, щелкните на кнопку Microsoft Office, а затем Параметры Excel (рис. 5.7).

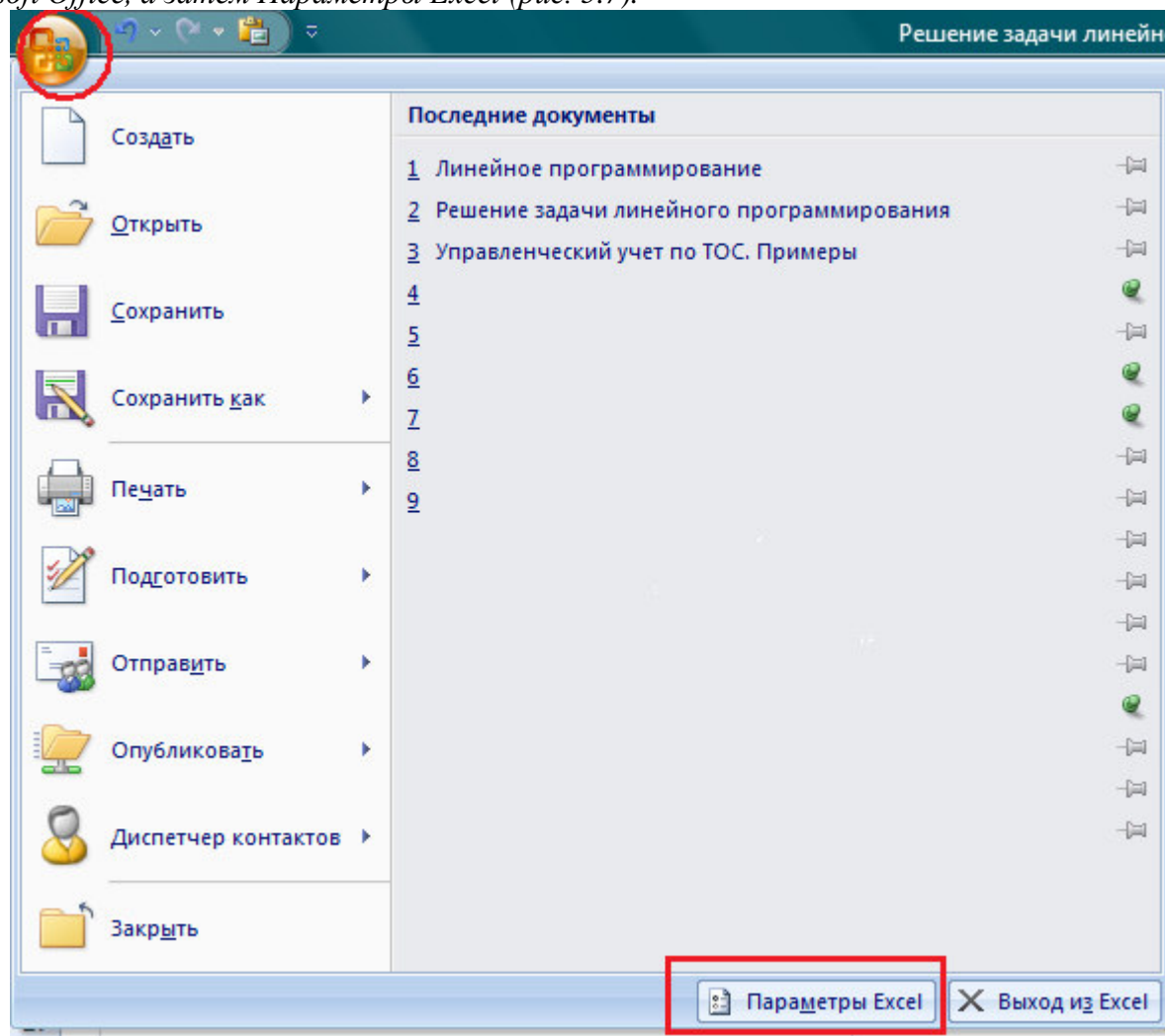


Рис. 5.7. Параметры Excel

Выберите строку Надстройки, а затем в самом низу окна «Управление надстройками Microsoft Excel» выберите «Перейти» (рис. 5.8).

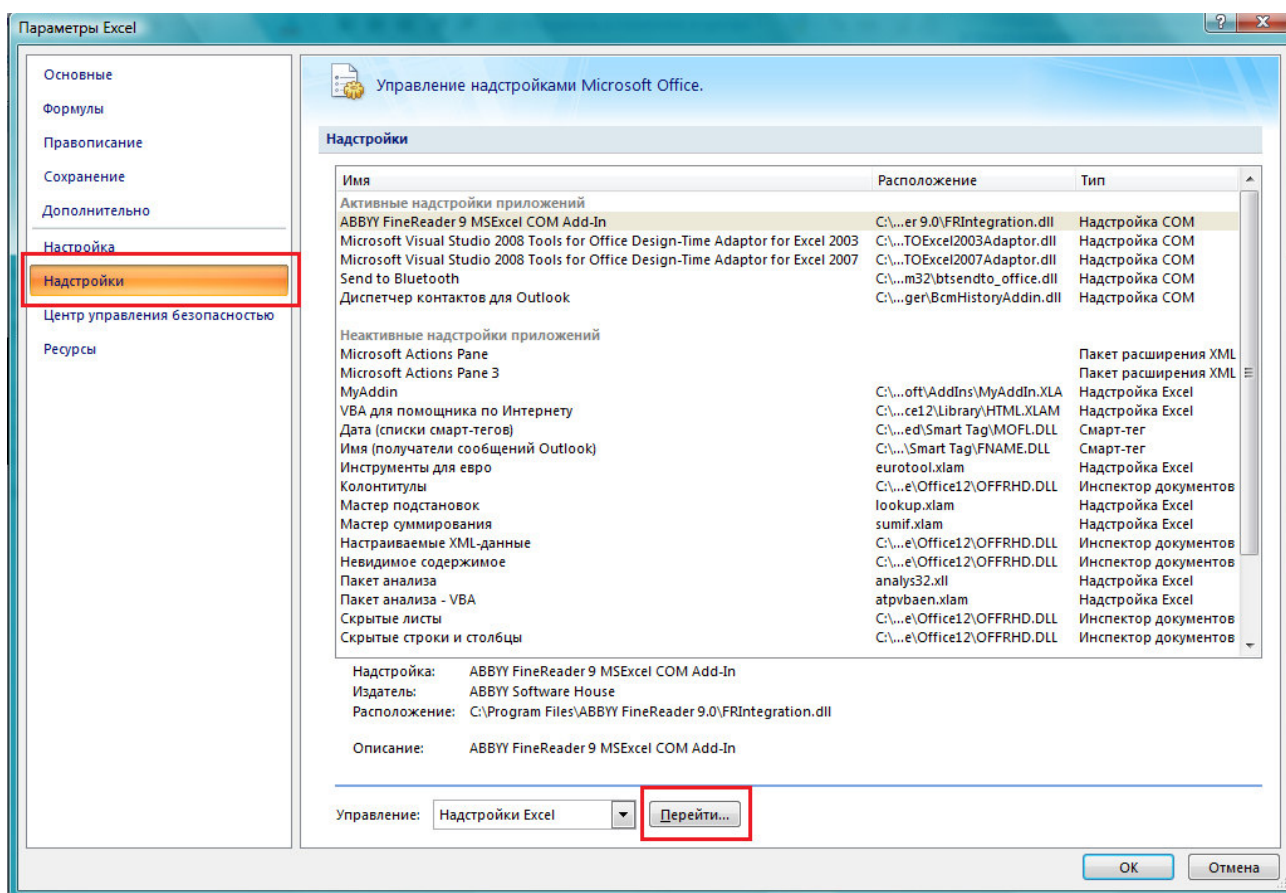


Рис. 5.8. Надстройки Excel

В окне «Надстройки» установите флажок «Поиск решения» и нажмите Ок (рис. 5.9). (Если «Поиск решения» отсутствует в списке поля «Надстройки», чтобы найти надстройку, нажмите кнопку Обзор. В случае появления сообщения о том, что надстройка для поиска решения не установлена на компьютере, нажмите кнопку Да, чтобы установить ее.)

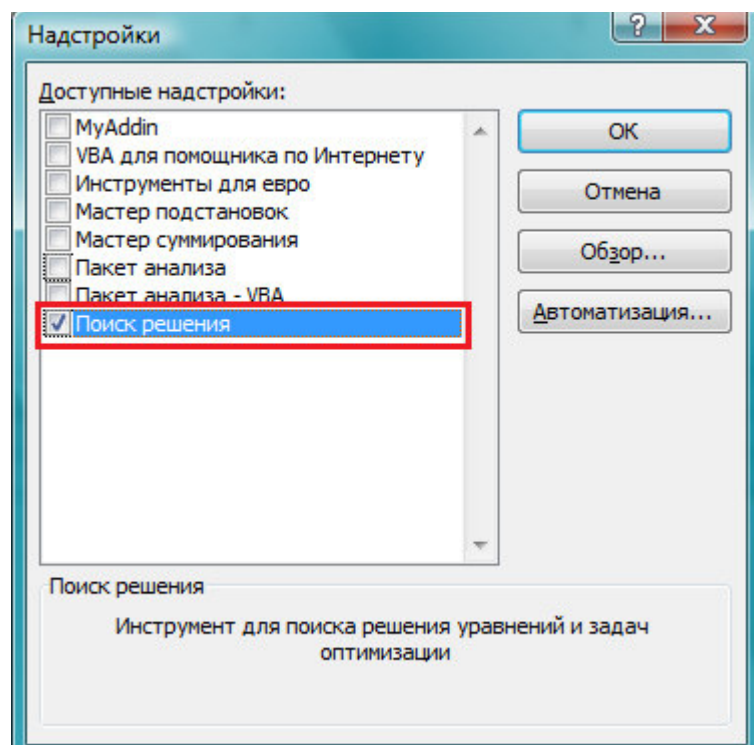


Рис. 5.9. Активация надстройки «Поиск решения»

После загрузки надстройки для поиска решения в группе Анализ на вкладке Данные становится доступна команда Поиск решения (рис. 5.6).

Вернемся к задаче:

- поставьте курсор в поле «Установить целевую ячейку»;
- введите адрес целевой ячейки **\$F\$6** или сделайте одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме – это будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;
- введите направление оптимизации ЦФ, щелкнув один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «максимальному значению».

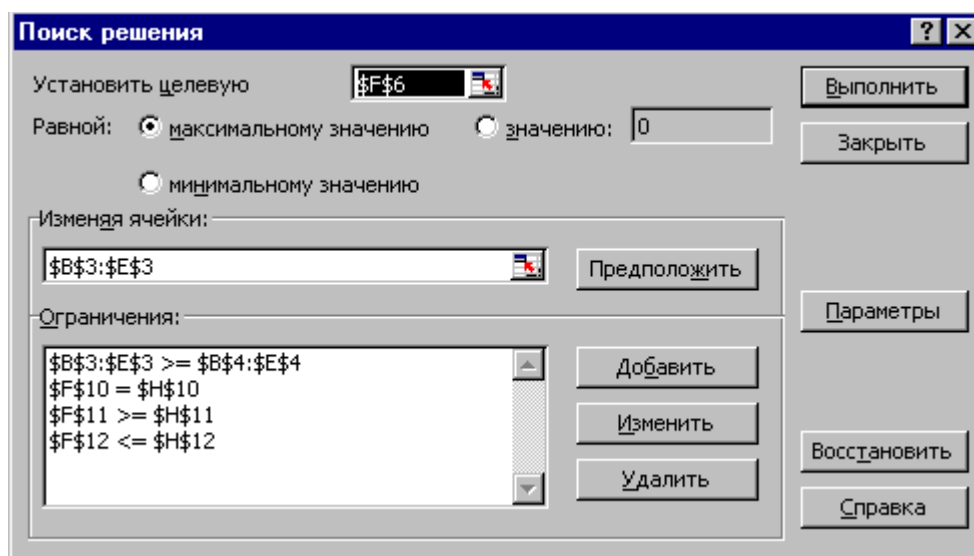


Рис. 5.10. Окно «Поиск решения» задачи (1)  
Ввод ограничений и граничных условий

#### 6. Задание ячеек переменных

В окно «Поиск решения» в поле «Изменяя ячейки» впишите адреса **\$B\$3:\$E\$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле «Изменяя ячейки» и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

#### 7. Задание граничных условий для допустимых значений переменных

В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (см. рисунок 5.1).

- Нажмите кнопку «Добавить», после чего появится окно «Добавление ограничения» (рисунок 5.11).

- В поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных **\$B\$3:\$E\$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

- В поле знака откройте список предлагаемых знаков и выберите.

- В поле «Ограничение» введите адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **\$B\$4:\$E\$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

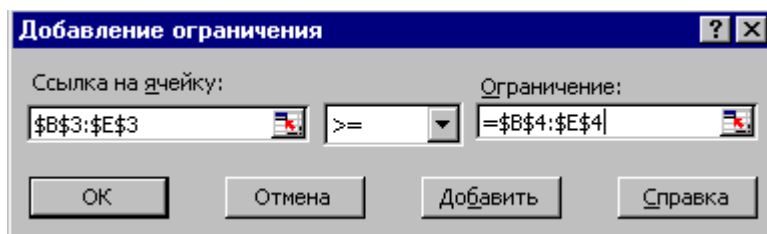


Рис. 5.11. Добавление условия неотрицательности переменных задачи (1)

#### 8. Задание знаков ограничений $\leq$ , $\geq$ , $=$

В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Параметр «Относительная погрешность» служит для задания точности, с которой определяется соответствие ячейки целевому значению или приближение к указанным границам. Поле должно содержать число из интервала от 0 до 1. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность. Высокая точность увеличит время, которое требуется для того, чтобы сошелся процесс оптимизации.

Параметр «Допустимое отклонение» служит для задания допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.

Параметр «Сходимость» применяется только при решении нелинейных задач.

Установка флажка «**Линейная модель**» обеспечивает ускорение поиска решения линейной задачи за счет применения симплекс-метода.

Подтвердите установленные параметры нажатием кнопки «ОК».

#### 9. Запуск задачи на решение

Запуск задачи на решение производится из окна «Поиск решения» путем нажатия кнопки «**Выполнить**».

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно «**Результаты поиска решения**» с одним из сообщений, представленных на рисунках 5.13, 5.14 и 5.15.

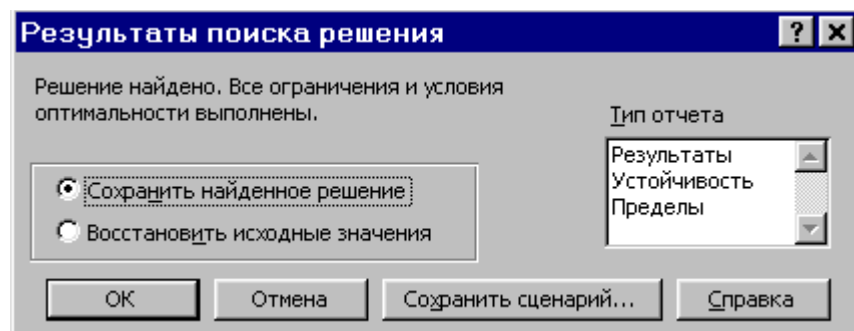


Рис. 5.13. Сообщение об успешном решении задачи

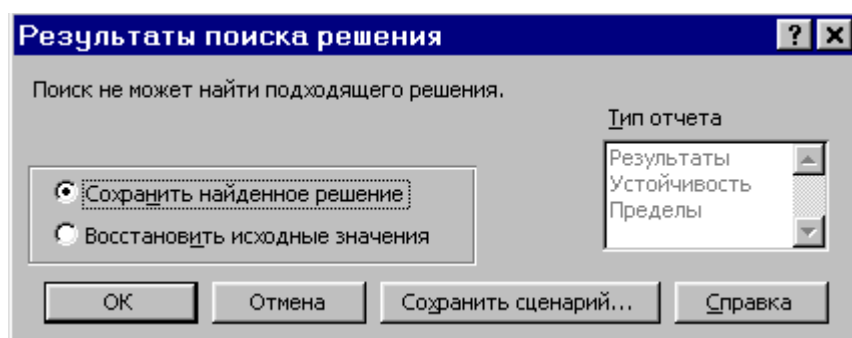


Рис. 5.14. Сообщение при несовместной системе ограничений задачи

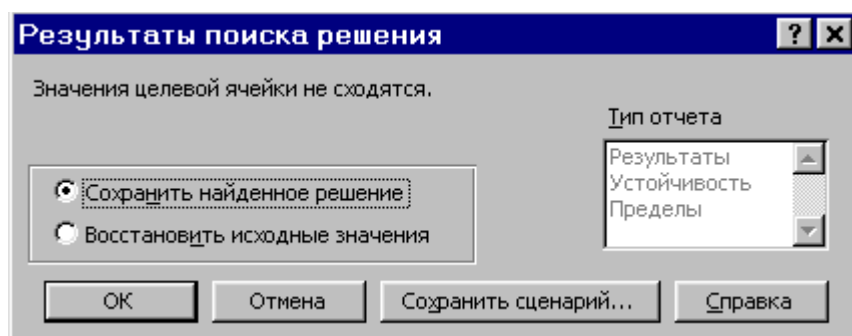


Рис. 5.15. Сообщение при неограниченности ЦФ в требуемом направлении

Иногда сообщения, представленные на рисунках 5.14 и 5.15, свидетельствуют не о характере оптимального решения задачи, а о том, что при вводе условий задачи в Excel были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

Если при заполнении полей окна «**Поиск решения**» были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено. Иногда слишком малое значение параметра «**Относительная погрешность**» не позволяет найти оптимальное решение.

Для исправления этой ситуации увеличивайте погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне «**Результаты поиска решения**» представлены названия трех типов отчетов: «**Результаты**», «**Устойчивость**», «**Пределы**». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность. Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нажмите кнопку «**ОК**». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи (рисунок 5.16).



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	Имя	X1	X2	X3	X4					
3	Значение	100,6607	546,4444	0	38,92492					
4	Нижн.гр.	0	0	0	0					
5						ЦФ				
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27482,7135	Направл.			
7										
8										
9	Вид					Лев.часть	Знак	Прав.часть		
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756		
11	Огран.2	-6	2	4	-1	450	>=	450		
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	89	<=	89		
13										

Рис. 5.16. Экранная форма задачи (1) после получения решения

### Целочисленное программирование

Допустим, что к условию задачи (1) добавилось требование целочисленности значений всех переменных. В этом случае описанный выше процесс ввода условия задачи необходимо дополнить следующими шагами.

- В экранной форме укажите, на какие переменные накладывается требование целочисленности (этот шаг делается для наглядности восприятия условия задачи) (рисунок 5.17).

- В окне «Поиск решения» (вкладка «Данные» «Поиск решения»), нажмите кнопку «Добавить» и в появившемся окне «Добавление ограничений» введите ограничения следующим образом (рисунок 5.18):

- в поле «Ссылка на ячейку» введите адреса ячеек переменных задачи, то есть **\$B\$3:\$E\$3**;
- в поле ввода знака ограничения установите «целое»;
- подтвердите ввод ограничения нажатием кнопки «ОК».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1				Переменные					
2	Имя	X1	X2	X3	X4				
3	Значение	100	546	0	39				
4	Нижн.гр.	0	0	0	0				
5						ЦФ			
6	Кэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	27394,2	Направл.		
7							max		
8		Ограничения							
9	Вид					Лев.часть	Знак	Прав.часть	
10	Огран.1	-1,8	2	1	-4	756	=	756	
11	Огран.2	-6	2	4	-1	453	>=	450	
12	Огран.3	4	-1,5	10,4	13	88	<=	89	
13									

Рис. 5.17. Решение задачи (1) при условии целочисленности ее переменных

**Добавление ограничения**

Ссылка на ячейку:  Ограничение:

OK Отмена Добавить Справка

Рис. 5.18. Ввод условия целочисленности переменных задачи (1)

На рисунке 5.17 представлено решение задачи (1), к ограничениям которой добавлено условие целочисленности значений ее переменных.

## Индивидуальные задания на лабораторную работу № 5

**Дано условие:**

ООО «Радость» рекламирует свою продукцию с использованием четырех средств: телевидение, Вконтакте, Instagram и Facebook. Из различных рекламных экспериментов, которые проводились в прошлом, известно, что эти средства приводят к увеличению прибыли соответственно на  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ , и  $a_4$  руб. в расчете 1 руб., затраченный на рекламу.

Распределение рекламного бюджета по различным средствам, подчинено следующим ограничениям:

а) полный бюджет не должен превосходить  $B$  тыс.руб.;

б) следует расходовать не более  $C_1$  % бюджета на телевидение и не более  $C_2$  % бюджета на Facebook;

в) вследствие привлекательности для подростков Вконтакте на него следует расходовать, по крайней мере, половину того, что планируется на телевидение.

Сформируйте задачу распределения средств по различным источникам как задачу линейного программирования и решите ее.

Составлена экономико-математическую модель

Переменные:  $X_1$  - расходы на рекламу на телевидении,  $X_2$ - Вконтакте,  $X_3$ - Instagram,  $X_4$ - Facebook.

Целевая функция:  $f(X) = 10 X_1 + 3 X_2 + 7 X_3 + 4 X_4 \rightarrow \max$

Целевая функция - это математическая запись критерия оптимальности, т.е. выражение, которое необходимо максимизировать

$f(x) = 10X_1 + 3 X_2 + 7X_3 + 4 X_4 \rightarrow \max$

Ограничения по бюджету:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \leq B$ ;

$X_1 \leq C_1$ ;

$X_4 \leq C_2$ ;

$-0,5 \cdot X_1 + X_2 \geq 0$ ; (минимум расходов Вконтакте - 50% от того, что планируется на телевидение)

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ .

Решить задачу с помощью надстройки «Поиск решения» Microsoft Excel.

Номер варианта	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$B$	$C_1$	$C_2$
1	7	2	5	4	500	35	20
2	12	4	8	5	600	40	20
3	11	3	7	4	650	40	15
4	10	2	5	4	700	35	25
5	9	2	6	3	750	35	20
6	7	2	5	4	600	35	20
7	12	4	8	5	650	40	20
8	11	3	7	4	750	40	15
9	10	2	5	4	800	35	25
10	9	2	6	3	850	35	20
11	7	2	5	4	400	35	20
12	12	4	8	5	500	40	20



<b>13</b>	11	3	7	4	550	40	15
<b>14</b>	10	2	5	4	600	35	25
<b>15</b>	9	2	6	3	800	35	20

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

### Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель В. Леонтьева)

Цель лабораторной работы – приобретение навыков применения модели межотраслевого баланса.

#### Теоретические сведения

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, называемую еще моделью Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на  $n$  отраслей (энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.д.).

Рассмотрим отрасль  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Она выпускает некую продукцию за данный промежуток времени (например, за год) в объеме  $x_i$ , который еще называют валовым выпуском. Часть объема продукции  $x_i$ , произведенная  $i$ -ой отраслью используется для собственного производства в объеме  $x_{ii}$ , часть – поступает в остальные отрасли  $j = 1, 2, \dots, n$  для потребления при производстве в объемах  $x_{ij}$ , и некоторая часть объемом  $y_i$  – для потребления в непроизводственной сфере, так называемый объем конечного потребления. Перечисленные сферы распределения валового продукта  $i$ -ой отрасли приводят к соотношению баланса

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Введем коэффициенты прямых затрат  $a_{ij}$ , которые показывают, сколько единиц продукции  $i$ -ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли  $j$ . Тогда можно записать, что количество продукции, произведенной в отрасли  $i$  в объеме  $x_{ij}$  и поступающей для производственных нужд в отрасль  $j$ , равно

$$x_{ij} = a_{ij} x_j$$

Считаем сложившуюся технологию производства во всех отраслях неизменной (за рассматриваемый период времени), означающую, что коэффициенты прямых затрат  $a_{ij}$  постоянны. Тогда получаем следующее соотношение баланса, называемого моделью Леонтьева

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Введя вектор валового выпуска  $X$ , матрицу прямых затрат  $A$  и вектор конечного потребления  $Y$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

модель Леонтьева (1) можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y. \quad (2)$$

Матрица  $A \geq 0$ , у которой все элементы  $a_{ij} \geq 0$  (неотрицательны), называется  $X \geq 0$ , для которого выполняется неравенство

$$X > AX.$$

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором продукции выпускается больше,

чем затрачивается на ее производство. Другими словами, при этом режиме создается конечный (прибавочный) продукт  $Y = X - AX > 0$ .

Модель Леонтьева с продуктивной матрицей  $A$  называется продуктивной моделью.

Для проверки продуктивности матрицы  $A$  достаточно существования обратной матрицы  $B = (E - A)^{-1}$  с неотрицательными элементами, где матрица  $E$  – единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью модели Леонтьева (2) можно выполнить три вида плановых расчетов, при условии соблюдения условия продуктивности матрицы  $A$ :

1) Зная (или задавая) объемы валовой продукции всех отраслей  $X$  можно определить объемы конечной продукции всех отраслей  $Y$

$$Y = (E - A)X.$$

2) Задавая величины конечной продукции всех отраслей  $Y$  можно определить величины валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1}Y. \quad (3)$$

3) Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей – объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Матрица

$$B = (E - A)^{-1}$$

называется матрицей полных материальных затрат. Ее смысл следует из матричного равенства (3), которое можно записать в виде  $X = BY$ . Элементы матрицы  $B$  показывают, сколько всего необходимо произвести продукции в  $i$ -ой отрасли, для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции отрасли  $j$ .

Рассмотрим пример.

### **Пример**

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат  $A$  и вектор конечного продукта  $Y$  известны:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Определить:

- 1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат  $B$ .
- 2) Проверить продуктивность матрицы  $A$ .
- 2) Вектор валового выпуска  $X$ .
- 3) Межотраслевые поставки продукции  $x_{ij}$ .

### **Математическая модель и последовательность расчетов**

Модель Леонтьева имеет вид

$$X = AX + Y.$$

Матрица полных материальных затрат  $B$  равна

$$B = (E - A)^{-1}.$$

Продуктивность матрицы  $A$  проверяется, по вычисленной матрице  $B$ . Если эта матрица существует и все ее элементы неотрицательны, то матрица  $A$  продуктивна.

Вектор валового выпуска  $X$  рассчитывается по формуле

$$X = BY.$$

Межотраслевые поставки продукции  $x_{ij}$  вычисляются по формуле

$$x_{ij} = a_{ij}x_j.$$

### **Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel**

Для решения задачи межотраслевого баланса необходимо уметь выполнять с помощью Excel следующие операции над матрицами:

- Умножение матрицы на вектор;
- Умножение двух матриц;
- Транспонирование матрицы или вектора;
- Сложение двух матриц.

#### **1. Задание Исходных данных задачи**

Вызовите Microsoft Excel.

Введите матрицу  $A$  в ячейки с адресами **A2:C4** и вектор  $Y$  в ячейки с адресами **E2:E4** (рисунок 6.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	<b>Матрица A</b>				<b>Вектор Y</b>				
2	0,3	0,1	0,4		200				
3	0,2	0,5	0		100				
4	0,3	0,1	0,2		300				
5									
6	<b>Матрица E</b>				<b>Вектор X</b>				
7	1	0	0		775,510				
8	0	1	0		510,204				
9	0	0	1		729,592				
10									
11	<b>Матрица E-A</b>				<b>Транспонированный вектор X</b>				
12	0,7	-0,1	-0,4		775,51	510,20	729,59		
13	-0,2	0,5	0						
14	-0,3	-0,1	0,8						
15									
16	<b>Матрица B</b>								
17	2,0408	0,6122	1,0204						
18	0,8163	2,2449	0,4082						
19	0,8673	0,5102	1,6837						
20									
21	<b>Межотраслевые поставки</b>								
22	232,653	51,020	291,837						
23	155,102	255,102	0,000						
24	232,653	51,020	145,918						
25									

Рис. 6.1. Задание исходных данных и последовательное выполнение плановых расчетов

## 2. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат В.

2.1. Введите единичную матрицу Е в ячейки с номерами **A7:C9**.

2.2. Вычислите матрицу  $E - A$ . Матрица  $E - A$  является разностью двух матриц Е и А. Для вычисления разности двух матриц необходимо проделать следующее:

- установите курсор мыши в левый верхний угол (это ячейка с адресом **A12**) результирующей матрицы  $E - A$ , которая будет расположена в ячейках с адресами **A12:C14**;

- введите формулу **=A7-A2** для вычисления первого элемента результирующей матрицы  $E - A$ , предварительно установив английскую раскладку клавиатуры;

- введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки результирующей матрицы. Для этого, установите курсор мыши в ячейку **A12**; наведите указатель мыши на точку в правом нижнем углу ячейки, так чтобы указатель мыши принял вид крестика; при нажатой левой кнопке мыши протяните указатель до ячейки **C12**, а затем так же протяните указатель мыши до ячейки **C14**.

В результате в ячейках **A12:C14** появится искомая матрица, равная разности двух исходных матриц Е и А.

2.3. Вычислите матрицу  $B = (E - A)^{-1}$ , являющейся обратной по отношению к матрице  $E - A$ . Матрица  $E - A$  расположена в ячейках с адресами **A12:C14**. Для вычисления матрицы В необходимо проделать следующее:

- выделите диапазон ячеек **A17:C19** для размещения матрицы В;

- нажмите на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле Категория выберите Математические, а в поле Выберите функцию – **имя функции МОБР**. Щелкните на кнопке ОК;

- появившееся диалоговое окно МОБР мышью отодвиньте в сторону от исходной матрицы  $E - A$  и введите диапазон матрицы  $E - A$  (диапазон ячеек **A12:C14**) в рабочее поле Массив (протащив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки **A12** до ячейки **C14**);

- нажмите комбинацию клавиш **Ctrl+Shift+Enter**. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу ОК(!), а именно комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter.

В диапазоне ячеек **A17:C19** появится искомая обратная матрица  $(E - A)^{-1}$ , равная матрице В.

## 3. Проверка продуктивности матрицы А.

Поскольку матрица В найдена, следовательно она существует. Все элементы матрицы В неотрицательны, поэтому матрица В – продуктивна.

## 4. Вычисление вектора валового выпуска Х.

Вычисление вектора валового выпуска Х находим по матричной формуле  $X = BY$ , в которой матрица В вычислена, а вектор Y задан.

Вычисление вектора  $X = BY$  производится с помощью операции умножения матриц, а в данном случае – умножения матрицы В на вектор Y. Для этого необходимо:

- выделить диапазон ячеек **E7:E9**, где будет расположен вектор Х. Обратите внимание, что по правилам умножения матриц, размерность результирующей матрицы Х должна быть равна количеству строк матрицы В на количество столбцов матрицы Y. В нашем случае, размерность вектора Х равна: три строки на один столбец;

- нажать на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле Категория выберите Математические, а в поле Выберите функцию – имя функции **МУМНОЖ**. Щелкните на кнопке ОК;-

- появившееся диалоговое окно **МУМНОЖ** мышью отодвиньте в сторону от исходных матриц В и Y и введите диапазон матрицы В (диапазон ячеек **A17:C19**) в рабочее поле Массив 1 (протаскив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки **A17** до ячейки **C19**), а диапазон вектора Y (ячейки **E2:E4**) в рабочее поле **Массив 2** (рисунок 6.2);

- нажмите комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter. Обратите внимание, что нажимать надо не клавишу ОК(!), а именно комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter.

В диапазоне ячеек **E7:E9** появится искомый вектор X.

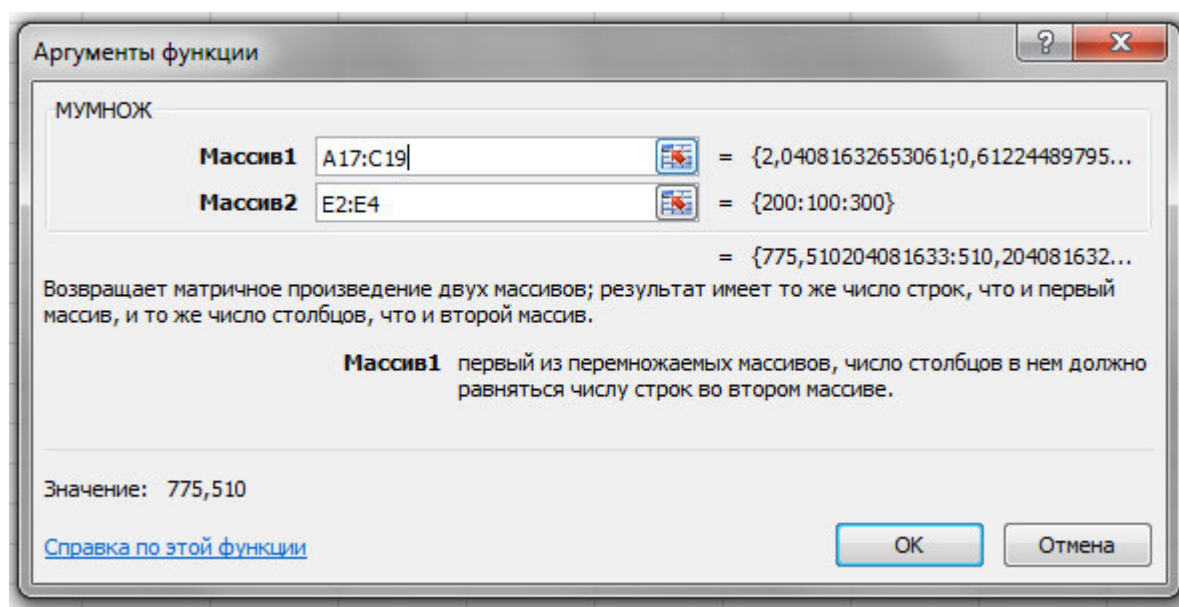


Рис. 6.2. Диалоговое окно умножения матриц МУМНОЖ

### 5. Вычисление межотраслевых поставок продукции $x_{ij}$

Межотраслевые поставки продукции  $x_{ij}$  вычисляются по формуле

$$x_{ij} = a_{ij}x_j,$$

где  $a_{ij}$  – элементы исходной матрицы A, расположенной в ячейках **A2:C4**,

$x_j$  – элементы вектора X, найденного выше в п. 4 и расположенные в ячейках **E7:E9**.

Для проведения вычислений  $x_{ij}$  необходимо проделать следующее.

#### 5.1. Вычислить транспонированный вектор $X^T$ относительно вектора X.

При этом вектор-столбец X станет вектором-строкой  $X^T$ . Это необходимо для согласования размерностей дальнейшего умножения элементов векторов.

С этой целью:

- выделить указателем мыши при нажатой левой кнопке ячейки **E12:G12**, которых будет располагаться транспонированный вектор  $X^T$ ;

- нажать на панели инструментов кнопку **Вставка**, а затем кнопку **Функция**. В появившемся окне в поле Категория выберите **Ссылки и массивы**, а в поле Выберите функцию – имя функции **ТРАНСП**. Щелкните на кнопке ОК;

- появившееся диалоговое окно **ТРАНСП** мышью отодвиньте в сторону от исходного вектора X и введите диапазон вектора X (диапазон ячеек **E7:E9**) в рабочее

поле Массив (протаскив указатель мыши при нажатой левой кнопке от ячейки **E7** до ячейки **E9**);

- нажмите сочетание клавиш Ctrl+Shift+Enter.

В результате в поле ячеек **E12:G12** расположится транспонированный вектор  $X^T$ .

5.2. Вычислить межотраслевые поставки продукции  $x_{ij}$ . Для этого проделать следующие операции:

- поставить курсор мыши в ячейку **A22**, в которой будет расположено значение  $x_{11}$ . В этой ячейке набрать формулу **=A2\*E\$12**, которая означает, что  $x_{11} = a_{11}x_1$ .

- введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки (в ячейки **A22:C24**, протаскив мышью крестик в правом нижнем углу от ячейки **A22** при нажатой левой кнопке мыши, до ячейки **C24**). При этом будут вычислены  $x_{12} = a_{12}x_2, \dots, x_{22} = a_{22}x_2$  и т.д.

В результате все межотраслевые поставки продукции будут найдены и расположатся в матрице с ячейками **A22:C24**.

## Индивидуальные задания на лабораторную работу № 6

**Дано условие:**

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат **A** и вектор конечного продукта **Y** известны.

**Определить:**

- 1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат **B**.
- 2) Проверить продуктивность матрицы **A**.
- 3) Вектор валового выпуска **X**.
- 4) Межотраслевые поставки продукции  $x_{ij}$ .

Номер варианта	Матрица прямых затрат <b>A</b> и вектор конечного продукта <b>Y</b>
1	$A = \begin{pmatrix} 0,31 & 0,33 & 0,2 \\ 0,22 & 0,32 & 0,14 \\ 0,10 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 210 \\ 140 \\ 250 \end{pmatrix}$
2	$A = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,33 & 0,2 \\ 0,13 & 0,32 & 0,14 \\ 0,2 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 140 \\ 250 \end{pmatrix}$
3	$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,23 & 0,3 \\ 0,22 & 0,32 & 0,14 \\ 0,10 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,23 & 0,3 \\ 0,15 & 0,32 & 0,14 \\ 0,20 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}$
5	$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,20 & 0,3 \\ 0,22 & 0,32 & 0,15 \\ 0,10 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$



<b>6</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,32 & 0,14 \\ 0,33 & 0,24 & 0,3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>7</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,20 & 0,3 \\ 0,22 & 0,35 & 0,14 \\ 0,10 & 0,0 & 0,45 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 250 \end{pmatrix}$
<b>8</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,32 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>9</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,32 & 0,15 \\ 0,35 & 0,0 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>10</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,0 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 320 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>11</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,4 & 0,32 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>12</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,0 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,32 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>13</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,32 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>14</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,3 \\ 0,25 & 0,22 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 450 \end{pmatrix}$
<b>15</b>	$A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,23 & 0,0 \\ 0,25 & 0,32 & 0,15 \\ 0,35 & 0,14 & 0,4 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 112 \\ 450 \end{pmatrix}$



## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Бурда А. Г. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие (курс лекций) / А. Г. Бурда, Г. П. Бурда; Кубан. гос. аграр. ун-т. – Краснодар, 2015. – 178 с.
2. Вотякова, Л.Р. Экономико-математические методы: лабораторный практикум / Л.Р.Вотякова. – Нижнекамск : Нижнекамский химико-технологический институт(филиал) ФБГОУ ВПО «КНИТУ», 2014. – 120 с.
3. Карасева Р.Б. Экономико-математические методы и модели в социально-экономических исследованиях: учебное пособие/Р.Б.Карасева.–Омск: СибАДИ, 2012.–107 с.
4. Краткий курс практического менеджмента/ Рук. авт. колл., общ. ред. д-р экон. наук, проф. Э.Н. Кузьбожев. – Курск: изд-во КГТУ , 2001. - 245с.
5. Кремлев, А. Г. Основные понятия теории игр : учебное пособие / А. Г. Кремлев. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2016. — 144 с.
6. Максимова Н.Н. Теория игр: учебно-методическое пособие / Н.Н. Максимова. – Благовещенск: Изд-во АмГУ, 2015. – 94 с.
7. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика: Учебник. – 6-е изд., испр. и доп. — М.: Высшее образование, 2006. — 654 с.
8. Тема 11. Общее равновесие и экономическая эффективность. Режим доступа: <https://mgimo.ru/upload/iblock/50f/malova.pdf>
9. Щерба, В.Н.Экономико-математические методы и моделирование в землеустройстве : учеб.-методич. пособие / В.Н. Щерба, Т.В. Ноженко,Е.В. Некрасова. – Омск : Изд-во ФГБОУ ВПО ОмГАУ им. П.А. Столыпина, 2012. – 92 с.
10. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учеб. пособие для вузов/ В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др.; Под ред. В.В. Федосеева. — М.:ЮНИТИ, 1999. - 391 с.
11. Экономико-математические методы: методические рекомендации для лабораторной работы по дисциплине для студентов специальности 38.05.01 Экономическая безопасность / Юго-Зап. гос. ун-т.; сост.: И.Ф. Мальцева. - Курск, 2016. - 38 с.
12. Яроцкая Е. В. Экономико-математические методы и моделирование : учеб. пособие / Е. В. Яроцкая. – Краснодар : КубГАУ, 2017. – 176 с.