МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
__________ О.Г. Локтионова
«15» 02 2021 г.

АЛГОРИТМЫ РАСЧЕТА «COBWEB» (ИТЕРАЦИОННОЙ), БИФУРКАЦИОННОЙ ДИАГРАММ И ДИАГРАММЫ ПЕРИОДОВ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Алгоритмы расчета «cobweb» (итерационной), бифуркационной диаграмм и диаграммы периодов: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 8 с.: ил.5. – Библиогр.: с. 8.

Описывается алгоритмы расчета «cobweb» (итерационной), бифуркационной диаграмм и диаграммы периодов. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . .2021. Формат **60 × 84** $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ 456 . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучить и создать алгоритмы расчета «cobweb» (итерационной), бифуркационной диаграмм и диаграммы периодов.

1.1. Основные определения и понятия

Рассмотрим одномерное отображение

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad x, F \in I, \quad I \subseteq \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $F(x)$ — гладкая или кусочно-гладкая непрерывныя функция.

При каждом $x_0 \in I$ отображение (1) определяет некоторую последовательность точек x_k, которую назовем положительной полутраекторией.

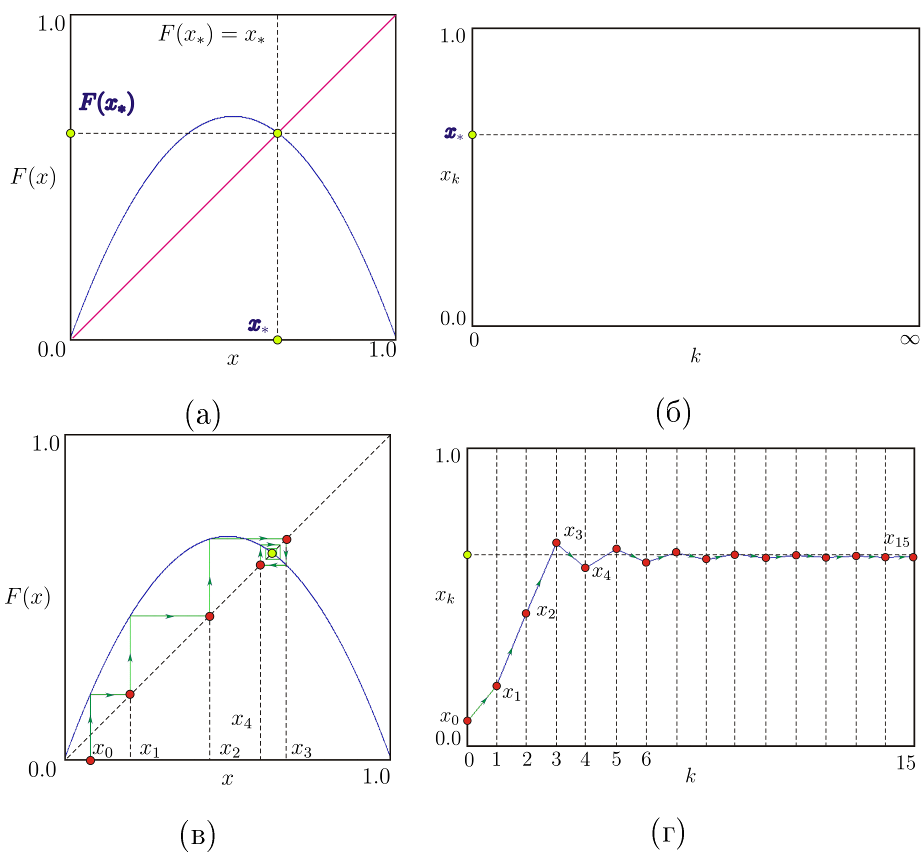


Рис. 1. Процедура графического итерирования отображения. (а) График функции $F(x)$. (б) Плоскость (k, x_k) для временной диаграммы. (в) «Cobweb» диаграмма. (г) Временная диаграмма

Положительной полутраекторией (или орбитой) $\mathcal{O}^+(x_0)$ точки x_0 называется бесконечная последовательность

$$\mathcal{O}^+(x_0) = \{x_k = F^k(x_0), \quad k = 0, 1, ...\}, \quad F^{(k)}(x_0) = \underbrace{F\left(F(F \ldots F(x_0)...)\right)}_{k}.$$

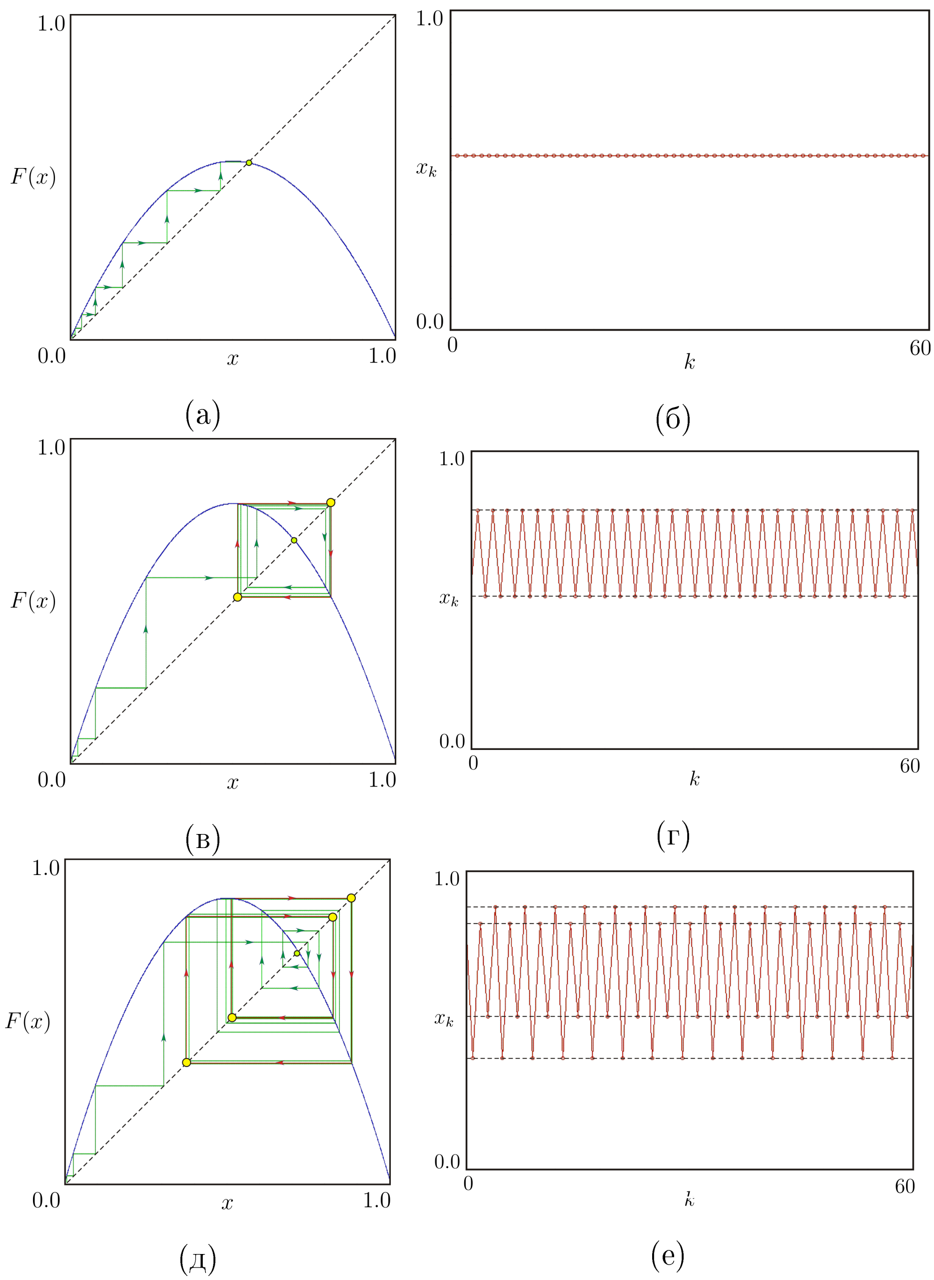


Рис. 2. (а),(б) «Cobweb» и временные диаграммы для устойчивой неподвижной точки. (в), (г) Цикл периода 2. (д), (е) 4-цикл

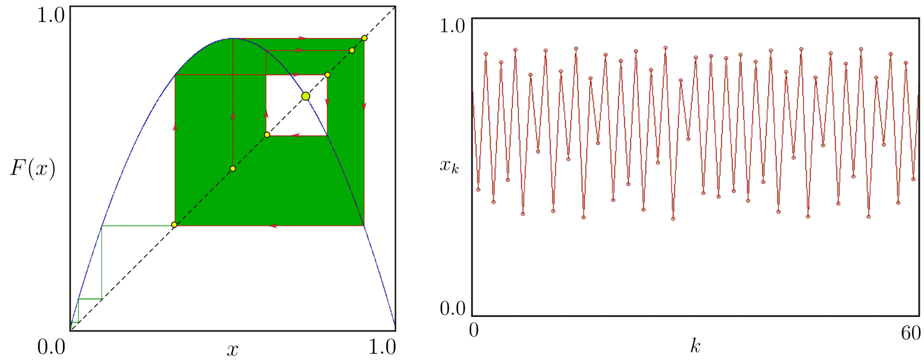
Отрицательной полутраекторией называется

$$\mathcal{O}^-(x_0) = \{x \in I : \ F^k(x) = x_0, \quad k = 0, 1, 2, ...\}.$$

Если

$$F^m(x_0) = x_0 \tag{2}$$

в $\mathcal{O}^+(x_0)$ при некотором m, то говорят, что x_0 – *периодическая точка*. В этом случае $\mathcal{O}^+(x_0)$ называют *периодической траекторией (орбитой) или циклом*,



(а) (б)

Рис. 3. (а),(б) Хаотический аттрактор

который мы будем обозначать

$$\mathcal{O} = \{x_0, F(x_0), F^2(x_0), ..., F^{m-1}(x_0)\}, \quad F^m(x_0) = x_0,$$

Если m – наименьшее натуральное целое число, обладающее свойством (2), то m называют *периодом периодической траектории или цикла.*

В случае, когда $m = 1$, то

$$F(x_0) - x_0 = 0,$$

тогда x_0 – неподвижная точка функции F. Траектория неподвижной точки состоит из одной точки

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0\}.$$

Если x_0 – m-периодическая точка или периодическая точка периода m, т.е.

$$F^m(x_0) - x_0 = 0,$$

то x_0 является неподвижной точкой функции F^m.

Если x_0 есть m-периодическая точка, то она является km -периодической для любого положительного целого k. Поэтому под m, как мы отмечали ранее, понимается наименьший период.

Пусть x_0 – m-периодическая точка, такая что порождает орбиту периода m (m-цикл или цикла периода m)

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, \quad x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F^2(x_0), \quad ..., \quad x_{m-1} = F^{m-1}(x_0)\}, \quad F^m(x_0) = x_0.$$

Здесь x_0 – любой корень уравнения

$$F^m(x) - x = 0.$$

Периодическая точка x_0 периода m устойчива, если

$$|\rho_m| < 1, \quad \rho_m = F'(x_1) \cdot F'(x_2) \cdot \ldots \cdot F'(x_m) = \prod_{k=1}^{m} F'(x_k)$$

Величина ρ_m называется *мультипликатором m-периодической точки.* Из правила дифференцирования сложной функции легко показать, что ρ_m есть одно и то же число для любой точки цикла. Если $m = 1$, то ρ_m называется *мультипликатором неподвижной точки.*

2. Алгоритм расчета «cobweb» диаграммы

Существует наглядный способ графического итерирования одномерных отображений (расчета орбиты).

Проиллюстрируем на примере логистического отображения

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = \lambda x(1-x).$$

Здесь λ – параметр.

- Построим график функции $F(x)$ для заданного значения параметра λ и прямую $y = x$ (биссектрису) (рис. 1(а)).

- Выполним одну итерацию из выбранной начальной точки x_0

  $$x_1 = F(x_0)$$

  и проведем вертикаль из точки с абсциссой x_0 до пересечения с кривой $Q(x)$. Точка пересечения вертикали с кривой $F(x)$ имеет координаты $(x_0, F(x_0))$ (рис. 1(в)).

- Из точки $(x_0, F(x_0))$ проведем горизонталь до пересечения с биссектрисой $y = x$. Точка пересечения горизонтали с биссектрисой имеет координаты $(F(x_0), F(x_0))$, абсцисса которой есть x_1.

- Далее, взяв абсциссу точки $(F(x_0), F(x_0))$ за начальную и повторив все те же операции, получим точки $x_2 = F^2(x_0)$, $x_3 = F^3(x_0)$ и т.д $x_k = F^k(x_0)$, $k \to \infty$. Построенная таким образом диаграмма представляет ломаную (см. рис. 1(в),(г)). Эта процедура называется «плетением паутины» («cobweb»).

На рис. 2, 3 приведены «cobweb» и временные диаграммы для различных значений λ, иллюстрирующие устойчивые циклы разных периодов и хаотический аттрактор.

3. Алгоритм расчета диаграммы периодов

- Выполнить $\mathcal{N}$ итераций отображения для того, чтобы система вышла на «аттрактор». Запомнить точку $\mathcal{N}$-ой итерации:

  $$x_{\mathcal{N}} = Q^{\mathcal{N}}(x_0).$$

  .

- Выполнить несколько итераций уже непосредственно на «аттракторе», взяв $x_{\mathcal{N}}$ в качестве начальной точки:

  $$x_{k+1} = Q(x_k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \quad x_0 = x_{\mathcal{N}}.$$

  .

  Причем на каждой итерации производится сравнение полученного значения x_{k+1} с запомненной точкой $x_{\mathcal{N}}$. Если два из них совпадают с заданной точностью ε, например, $|x_{k+1} - x_{\mathcal{N}}| < \varepsilon$, то разделяющее их число итераций m принимается за период цикла .

- Таким образом, алгоритм определения периода цикла выглядит так:

  Алгоритм

  $x \leftarrow x_{\mathcal{N}}$;

  $k \leftarrow 0$

  REPEAT

  $x_0 \leftarrow x$;

  $x \leftarrow Q(x_0)$;

  $k \leftarrow k + 1$

  UNTIL $|x - x_{\mathcal{N}}| < \varepsilon$;

  $m \leftarrow k$

- Если же $k > \mathcal{N}$, то аттрактор идентифицируется как непериодический. В этом случае итерации на «аттракторе» надо прекратить и $m \leftarrow 0$. Может, оказаться, что при некоторых значениях параметров значения x_k начнут неограниченно расти. Такая ситуация, часто называемая «убеганием орбиты в бесконечность», приводит к аварийной остановке программы. Чтобы этого избежать, необходимо на каждой итерации проверять, не превышает ли значение $x_k = Q^k(x_k)$ заранее заданного большого числа.

4. Алгоритм расчета бифуркационной диаграммы (бифуркационного дерева)

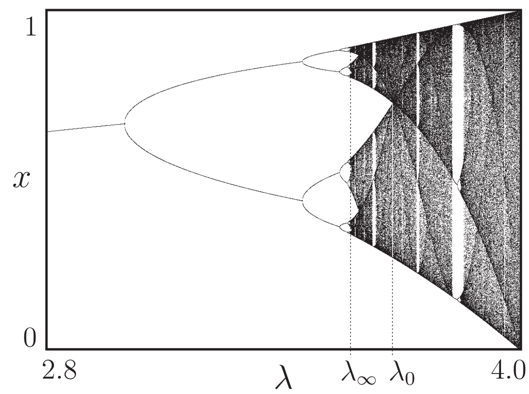


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма логистического отображения

- Для каждого значения варьируемого параметра a выполнить большое итераций, например, $\mathcal{N} = 5000$

  $$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \mathcal{N}.$$

  .

- Первые $\mathcal{N} - \mathcal{P}$ (например $\mathcal{P} = 2000$) значений x_k оставить в «тени» с тем, чтобы исключить переходный процесс, а остальные $\mathcal{P}$ значения x_k, отложить на плоскости $(a.x_k)$, $k = \overline{0, \mathcal{P}}$. Циклу периода 1, т.е. неподвижной точке будет соответствовать одна точка, 2-циклу две точки на одной вертикали, 4-циклу – четыре и т.д.

На рис. 4 приведена бифуркационная диаграмма логистического отображения.

5. Задачи к лабораторной работе

- 1. Составьте программу расчета итерационной диаграммы, взяв в качестве тестовой модели логистическое отображение

  $$x_{k+1} = F(x_k), \quad F(x) = a \cdot (x - x^2), \quad 0.0 < x < 1.0,$$

  где a – параметр. Рассчитайте итерационные диаграммы («Cobweb diagram») при следующих значениях параметра: $a = 2.8$; $a = 3.2$; $a = 3.5$; $a = 3.55$, $a = 3.98$. Определите, какой режим (неподвижная точка, m-цикл, нерегулярные колебания) устанавливается после завершения переходного процесса.

- 2. Составьте программу расчета бифуркационной диаграммы, взяв в качестве тестовой задачи логистическое отображение. Параметр a варьировать в пределах $a_{\min} < a < a_{\max}$, где $a_{\min} > 0$, $a_{\max} < 4.0$.

- 3. Составьте программу расчета диаграммы периодов, взяв в качестве тестовой задачи логистическое отображение. Параметр a варьировать в пределах $a_{\min} < a < a_{\max}$, где $a_{\min} > 0$, $a_{\max} < 4.0$.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.

2. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.