МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
________ О.Г. Локтионова
«15» 02 2021 г.

КАСАТЕЛЬНАЯ И ВИЛООБРАЗНАЯ БИФУРКАЦИИ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1
Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Касательная и вилообразная бифуркации: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 14 с.: ил.6. – Библиогр.: с. 14.

Описываются касательная и вилообразная бифуркации. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . .2021. Формат $\mathbf{60 \times 84}\ {}^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ 459. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучить касательную и вилообразную бифуркацию.

2. КАСАТЕЛЬНАЯ БИФУРКАЦИЯ

Касательная бифуркация связана с обращением мультипликатора в $+1$, т.е. в критический точке (точке бифуркации или бифуркационном значении параметра) существует негиперболическая неподвижная точка с мультипликатором $+1$.

3. Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма)

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = a + x + x^2. \qquad (1)$$

Уравнение для неподвижных точек

$$F(a, x) - x = 0, \quad \text{где} \quad F(a, x) = a + x + x^2$$

или

$$a + x + x^2 - x = 0 \Rightarrow x^2 = -a.$$

Отсюда при отрицательных значениях параметра a отображение имеет две неподвижные точки:

$$x_1^* = -\sqrt{-a}, \quad x_2^* = +\sqrt{-a}, \quad a < 0.$$

Найдем первую производную функции $F(a, x)$ по x:

$$\frac{\partial F(a, x)}{\partial x} = 1 + 2x.$$

Подставив в выражение для $\dfrac{\partial F(a, x)}{\partial x}$ координаты неподвижных точек $x_{1,2}^*$, получим мультипликаторы:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = 1 + 2x_1^* = 1 - 2\sqrt{-a}, \quad \frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} = 1 + 2x_2^* = 1 + 2\sqrt{-a}.$$

Условие устойчивости гиперболической неподвижной точки x_1^* определяется неравенством

$$-1 < \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = 1 + 2x_1^* < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2\sqrt{-a} < +1.$$

Решив это неравенство относительно параметра a, получим область устойчивости неподвижной точки x_1^*:

$$-1 < a < 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* - \sqrt{-a}$ становится негиперболической с мультипликатором $+1$ при $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{-a} = +1 \Rightarrow a = 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* = -\sqrt{-a}$ становится негиперболической с мультипликатором -1 при $a = -1$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{-a} = -1 \Rightarrow a = -1.$$

Неподвижная точка $x_2^* = +\sqrt{-a}$ неустойчива для всех $a < 0$ так как:

$$\frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} > +1 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{-a} > 1 \quad \text{при} \quad a < 0.$$

Неподвижная точка $x_2^* = +\sqrt{-a}$ становится негиперболической только в одном случае, когда $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{-a} = 1 \quad \text{при} \quad a = 0.$$

Таким образом, касательная бифуркация связана с нарушением условия гиперболичности неподвижных точек $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-a}$ при $a = 0$, когда мультипликаторы обращаются в $+1$:

$$\frac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 \pm 2\sqrt{-a} = +1 \quad \text{при} \quad a = 0.$$

Следовательно точка касательной бифуркации – это значение параметра

$$a = 0.0,$$

когда когда мультипликаторы неподвижных точек $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-a}$ обращаются в $+1$. Это только необходимое условие.

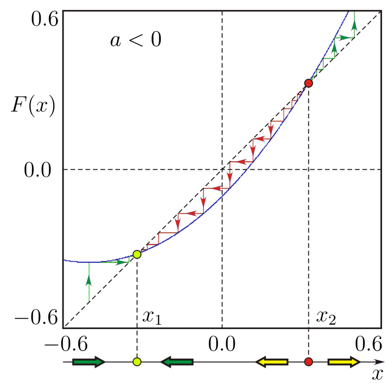


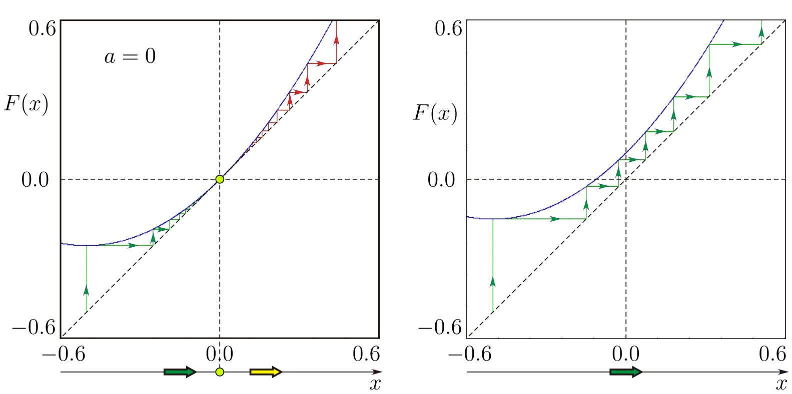
Рис. 1. До бифуркации $a < 0.0$.

4. Описание бифуркации

Будем увеличивать параметр a, следя за положением $x^*_{1,2}$, а также за мультпликаторами $\dfrac{\partial F(a, x^*_{1,2})}{\partial x} = 1 \pm 2\sqrt{-a}$.

При $-1 < a < 0$ отображение имеет две гиперболические неподвижные точки, одна из которых устойчивая $x^*_1 = -\sqrt{-a}$, а другая $x^*_2 = \sqrt{-a}$ – неустойчивая.

При увеличении параметра a обе неподвижные точки $x^*_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$ сближаются. При этом оба мультипликатора $\dfrac{\partial F(a, x^*_{1,2})}{\partial x} = 1 \pm 2\sqrt{-a}$ стремятся к $+1$. В точке $a = 0.0$, где $\dfrac{\partial F(a, x^*_{1,2})}{\partial x} = 1 \pm 2\sqrt{-a} = +1$ неподвижные точки $x^*_{1,2} = \pm\sqrt{-a}$ сливаются, а график функции $F(a, x)$ касается биссектрисы $y = x$.



(а) (б)

Рис. 2. (а) В точке бифуркации $a = 0.0$. (б) После бифуркации $a > 0.0$

При $a = 0.0$ неподвижные точки $x^*_{1,2} = \pm\sqrt{-a} = 0$ становятся негипер-

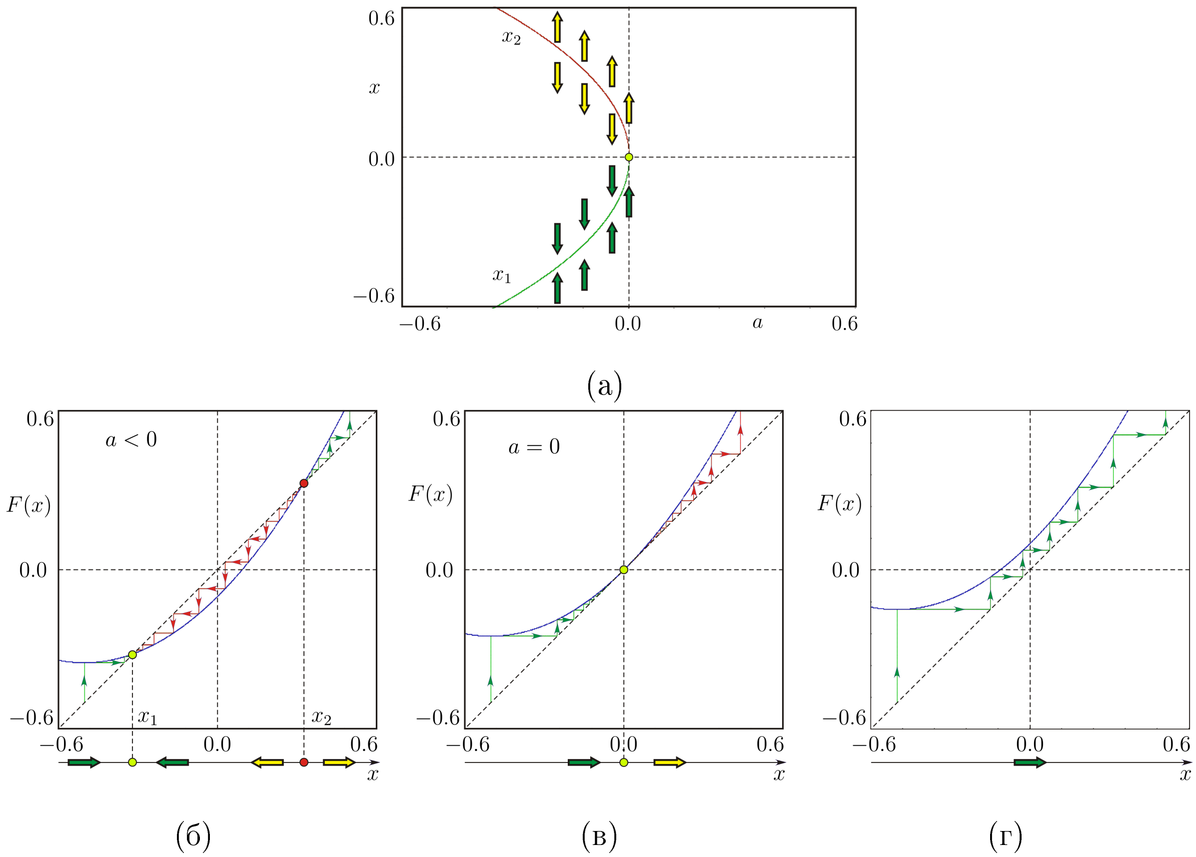


Рис. 3. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

болическими с мультипликатором $+1$, причем

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial F^2(0,0)}{\partial x^2} = 2 > 0.$$

Следовательно, в точке бифуркации $a = 0.0$ существует полуустойчивая слева негиперболическая неподвижная точка $x_1^* = x_2^* = 0$.

При переходе через точку бифуркации $a = 0.0$, т.е. при смене знака параметра с «минуса» на «плюс», неподвижные точки $x_{1,2}^* = \pm\sqrt{-a}$ исчезают, сливаясь при $a = 0.0$ (см. Fig. 6).

5. Суперкритическая вилообразная бифуркация

Существуют две модификации: субкритическая и суперкритическая. Начнем с суперкритической. Вилообразная бифуркация также связана с обращением мультипликатора в $+1$.

Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма):

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a,x) = (1+a)x - x^3. \qquad (2)$$

Уравнение для неподвижных точек

$$F(a,x) - x = 0, \quad \text{где} \quad F(a,x) = (1+a)x - x^3$$

или

$$(1+a)x - x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 - ax = 0.$$

$x_1^* = 0$, а при $a > 0$ появляются еще две: $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{a}, \quad a > 0$. Найдем первую производную функции $F(a,x)$ по x:

$$\frac{\partial F(a,x)}{\partial x} = 1 + a - 3x^2.$$

Подставив в выражение для $\dfrac{\partial F(a,x)}{\partial x}$ координаты неподвижных точек $x_1^* = 0$, $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{a}$, получим мультипликаторы:

$$\frac{\partial F(a,x_1^*)}{\partial x} = 1 + a, \quad \frac{\partial F(a,x_{2,3}^*)}{\partial x} = 1 - 2a.$$

Условие устойчивости гиперболической неподвижной точки $x_1^* = 0$ определяется неравенством

$$-1 < \frac{\partial F(a,x_1^*)}{\partial x} < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 + a < 1.$$

Решив это неравенство относительно параметра a, получим область устойчивости неподвижной точки $x_1^* = 0$:

$$-2 < a < 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором $+1$ при $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a,x_1^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 + a = +1 \Rightarrow a = 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором -1 при $a = -2$:

$$\frac{\partial F(a,x_1^*)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2.$$

Условие устойчивости симметричных гиперболических неподвижных точек $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{a}$, $a > 0$ определяется неравенством

$$-1 < \frac{\partial F(a, x^*_{2,3})}{\partial x} < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 - 2a < +1.$$

Решив это неравенство относительно параметра a, получим область устойчивости:

$$0 < a < 1.$$

Неподвижные точки $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{a}$ становятся негиперболическими с мультипликатором $+1$ при $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a, x^*_{1,2})}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 - 2a = +1 \Rightarrow a = 0.$$

Неподвижные точки $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{a}$ становятся негиперболическими с мультипликатором -1 при $a = 1.0$:

$$\frac{\partial F(a, x^*_1)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow 1 - 2a = -1 \Rightarrow a = 1.0.$$

Таким образом, вилообразная бифуркация связана с нарушением условия гиперболичности неподвижных точек $x^*_1 = 0$, $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{-a}$ при $a = 0.0$, когда мультипликаторы обращаются в $+1$.

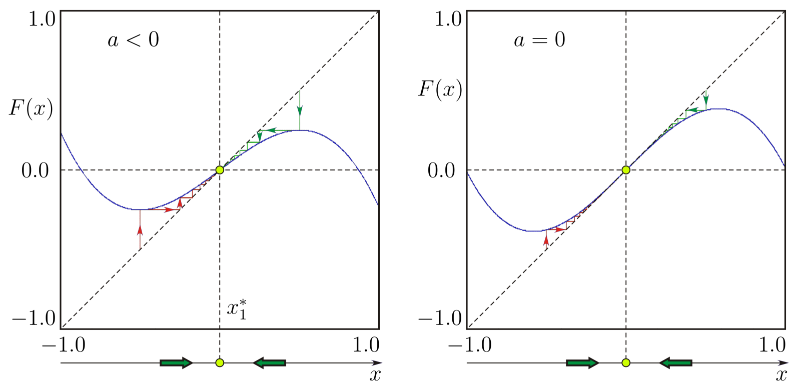
6. Описание бифуркации

Будем увеличивать параметр a, следя за положением $x^*_1 = 0$, $x^*_{2,3} = \pm\sqrt{a}$, а также за мультипликаторами $\dfrac{\partial F(a, x^*_1)}{\partial x} = 1 + a$, $\dfrac{\partial F(a, x^*_{2,3})}{\partial x} = 1 - 2a$.

При $-2 < a < 0$ отображение имеет единственную гиперболическую устойчивую неподвижную точку $x^*_1 = 0$.

При увеличении параметра a мультипликатор $\dfrac{\partial F(a, x^*_1)}{\partial x} = 1 + a$ стремится к $+1$. При $a = 0.0$, где $\dfrac{\partial F(a, x^*_1)}{\partial x} = +1$, неподвижная точка $x^*_1 = 0$ становится негиперболической.

Причем, как можно видеть из графика функции $F(a, x)$, производные в точке бифуркации $a = 0.0$ равны $\dfrac{\partial F(0, 0}{\partial x} = +1$, $\quad \dfrac{\partial F^2(0, 0}{\partial x^2} = 0$. Поскольку



(а) (б)

Рис. 4. (а) До бифуркации $a < 0.0$. (б) В точке бифуркации $a = 0.0$

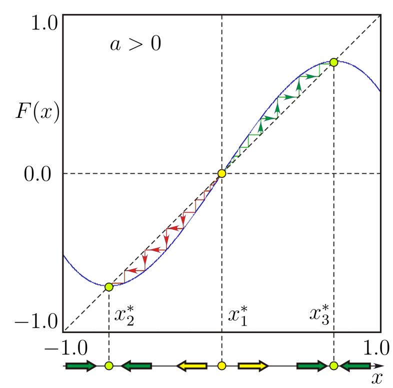


Рис. 5. После бифуркации $a > 0.0$.

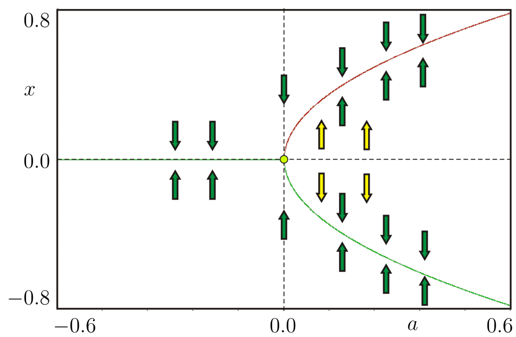
$\dfrac{\partial F^3(0,0}{\partial x^3} = -6 < 0$, то при $a = 0.0$ негиперболическая неподвижная точка $x_1^* = 0$ асиптотически устойчива.

При $a = 0.0$ неподвижные точки $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a} = 0$ также становятся негиперболическими с мультипликатором $+1$, причем

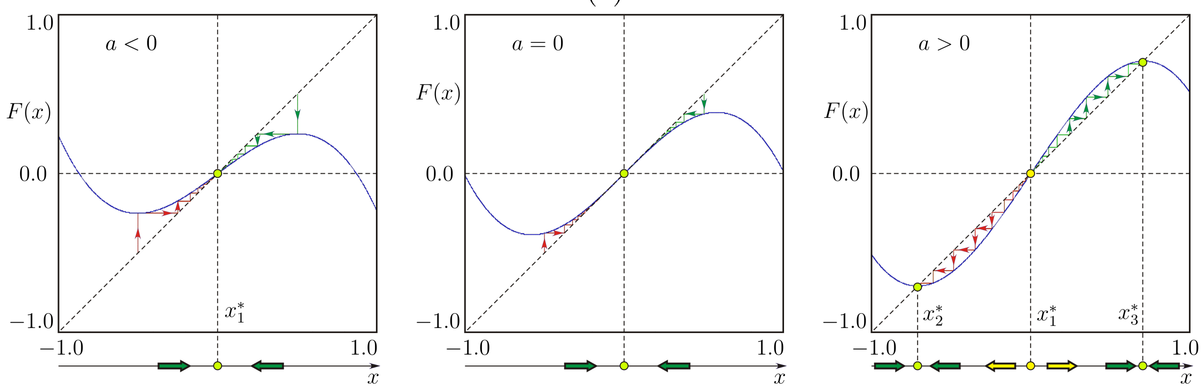
$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial F^2(0,0)}{\partial x^2} = 0.$$

Поскольку $\dfrac{\partial F^3(0,0}{\partial x^3} = -6 < 0$, то при $a = 0.0$ негиперболические неподвижные точки $x_{2,3}^* = 0$ также асиптотически устойчивы.

При переходе через точку бифуркации $a = 0.0$, т.е. при смене знака параметра с «минуса» на «плюс», неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится гиперболической неустойчивой с $\dfrac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} > +1$. При этом возникают две новые гиперболические неподвижные точки $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{a}$, которые устойчивы в диапазоне изменения параметра $0 < a < 1$.



(а)



(б) (в) (г)

Рис. 6. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

7. Задание на лабораторную работу

Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы отображения $x_{k+1} = F(a, x_k)$. Здесь a – параметр. Используя этот результат, выполните качественный анализ касательной и вилообразной бифуркаций.

7.1. Варианты заданий

Вариант **1**.

(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$F(a, x) = a - x^2.$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$F(a, x) = 0.2x + ax - x^3.$

Вариант **2**.

(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$$F(a, x) = 1 - ax^2.$$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$
$F(a, x) = ax - x^3.$

Вариант **3**.

(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$$F(a, x) = \frac{ax}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$
$F(a, x) = -x - ax + x^2.$

Вариант **4**.

(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$$F(a, x) = x + a - x^2.$$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$
$F(a, x) = x + 0.5ax - x^3.$

Вариант **5**.

(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$F(a,x) = a - 0.25 - x^2.$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$
$F(a,x) = (0.5 + 1.25a)x - x^3.$

Вариант **6**.
(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$F(a,x) = a - 0.5 - x^2.$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$
$F(a,x) = \dfrac{ax}{1+x^2}.$

Вариант **7**.
(a) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$

$F(a,x) = 0.25ax - x^3.$

(b) $x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, ...,$
$F(a,x) = -\dfrac{1}{ax} - x + 1.$

7.2. Порядок выполнения работы

- 1. Изучите теоретический материал по касательной и суперкритической вилообразной бифуркациям и методику качественного анализа.
- 2. Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы. Для этого:

  (a) Выписать уравнение для нахождения неподвижных точек:

  $$F(a,x) - x = 0.$$

  Решить это уравнение относительно x.

(б) Найти первую производную функции $F(a,x)$ по x: $F'(a,x) = \dfrac{\partial F(a,x)}{\partial x}$.

(в) Пусть x_* – действительный корень уравнения $F(a,x) - x = 0$, т.е. $F(a,x_*) - x_* = 0$. Найти мультипликатор неподвижной точки $F'(a,x_*)$, подставив корень уравнения $F(a,x) - x = 0$ в выражение для производной $F'(a,x)$.

Замечание: Число действительных корней уравнения $F(a,x) - x = 0$ есть число неподвижных точек.

- 3. Для каждой неподвижной точки найти область устойчивости. Для этого:

  (а) Выписать условие устойчивости гиперболической неподвижной точки:
  $$-1 < \frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x} < +1.$$
  Решить это неравенство относительно параметра a. Это и есть область устойчивости неподвижной точки по параметру a (диапазон значений a).

  (б) Если
  $$\left|\frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x}\right| > 1,$$
  то неподвижная точка неустойчива.

  (в) Выписать условие нарушения гиперболичности неподвижной точки:
  $$\frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x} = +1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(a,x_*)}{\partial x} = -1.$$
  Решить эти уравнения относительно параметра a, тем самым рассчитать значения a, при которых неподвижная точка становится негиперболической с мультипликатором $+1$ или -1, соответственно.

  (г) Определить устойчивость негиперболической неподвижной точки с мультипликатором $+1$.

- 4. Напишите программу построения бифуркационной диаграммы и итерационных диаграмм. Выполните качественный анализ бифуркационного перехода, рассчитав бифуркационную диаграмму и итерационные диаграммы до бифуркации, в точке бифуркации и после бифуркации (см., например, Fig. 6). Сформулируйте выводы.

- 5. Оформите отчет по лабораторной работе.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.

2. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.

3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. – Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.