

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Локтионова Оксана Геннадьевна
Должность: проректор по учебной работе
Дата подписания: 10.11.2022 16:40:56
Уникальный программный ключ:
0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра вычислительной техники

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
О.Г. Локтионова
«15» 02 2021 г.



ТРАНСКРИТИЧЕСКАЯ И СУБКРИТИЧЕСКАЯ ВИЛООБРАЗНАЯ БИФУРКАЦИИ

Методические указания для студентов направлений
подготовки 09.03.01 и 09.04.01

Курск 2021

УДК 534.1

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент *Ю. А. Халин*

Транскритическая и субкритическая вилообразная бифуркации: методические указания для студентов направлений подготовки 09.03.01 и 09.04.01 / Юго-Зап. гос. ун-т; сост. Ж.Т. Жусубалиев. – Курск, 2021. – 13 с.: ил.5. – Библиогр.: с. 13.

Описываются транскритическая и субкритическая вилообразная бифуркации. Предназначены для студентов направлений подготовки 09.03.01, 09.04.01 очной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать2021. Формат 60 × 84^{1/16}.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 50 экз. Заказ 463. Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Цель работы

Изучить транскритическую и субкритическую вилообразную бифуркации в одномерных отображениях.

2. Транскритическая бифуркация

Транскритическая бифуркация связана с обращением мультипликатора в $+1$, т.е. в критический точке существует негиперболическая неподвижная точка с мультипликатором $+1$.

3. Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма)

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = (1 + a)x - x^2. \quad (1)$$

Уравнение для неподвижных точек

$$F(a, x) - x = 0, \quad \text{где} \quad F(a, x) = (1 + a)x - x^2$$

или

$$x + ax - x^2 - x = 0 \Rightarrow ax - x^2 = 0.$$

Отсюда отображение имеет две неподвижные точки:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = a.$$

Найдем первую производную функции $F(a, x)$ по x :

$$\frac{\partial F(a, x)}{\partial x} = 1 + a - 2x.$$

Подставив в выражение для $\frac{\partial F(a, x)}{\partial x}$ координаты неподвижных точек $x_{1,2}^*$, получим мультипликаторы:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = a - 2x_1^* = 1 + a, \quad \frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} = a - 2x_2^* = 1 - a.$$

Условие устойчивости гиперболической неподвижной точки x_1^* определяется неравенством

$$-1 < \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 + a < +1.$$

Решив это неравенство относительно параметра a , получим область устойчивости неподвижной точки x_1^* :

$$-2 < a < 0.$$

$$\text{Если } a > 0 \text{ то } \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} > +1;$$

$$\text{Если } a < -2 \text{ то } \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} < -1;$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором $+1$ при $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 + a = +1 \Rightarrow a = 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором -1 при $a = -2$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2.$$

Устойчивость неподвижной точки $x_2^* = a$:

$$-1 < \frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 - a < +1 \quad \text{при } 0 < a < 2.$$

$$\text{Если } a < 0 \text{ то } \frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} > +1;$$

$$\text{Если } a > 2 \text{ то } \frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} < -1.$$

Неподвижная точка $x_2^* = a$ становится негиперболической с мультипликатором $+1$, когда $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 - a = 1 \quad \text{при } a = 0.$$

Неподвижная точка $x_2^* = a$ становится негиперболической с мультипликатором -1 , когда $a = 2$:

$$\frac{\partial F(a, x_2^*)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow 1 - a = -1 \quad \text{при } a = 2.$$

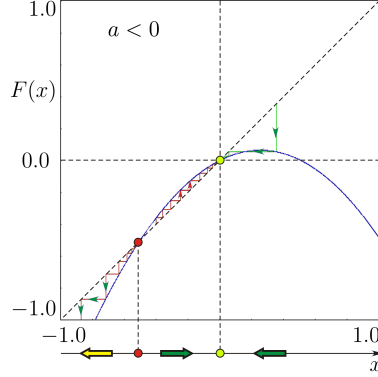


Рис. 1. До бифуркации $a < 0.0$.

Таким образом, транскритическая бифуркация связана с нарушением условия гиперболичности неподвижных точек $x_{1,2}$ при $a = 0$, когда мультипликаторы обращаются в $+1$:

$$\frac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 \pm a = +1 \quad \text{при} \quad a = 0.$$

4. Описание бифуркации

Будем увеличивать параметр a , следя за положением $x_{1,2}^*$, а также за мультипликаторами $\frac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = 1 \pm a$.

При $-2 < a < 0$ отображение имеет две гиперболические неподвижные точки, одна из которых устойчивая $x_1^* = 0$, а другая $x_2^* = a$ – неустойчивая.

При увеличении параметра a обе неподвижные точки $x_{1,2}^*$ сближаются.

При этом оба мультипликатора $\frac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = 1 \pm a$ стремятся к $+1$. В точке $a = 0.0$, где $\frac{\partial F(a, x_{1,2}^*)}{\partial x} = 1 \pm a = +1$ неподвижные точки $x_{1,2}^*$ сливаются, а график функции $F(a, x)$ касается биссектрисы $y = x$.

При $a = 0.0$ неподвижные точки $x_{1,2}^* = 0$ становятся негиперболическими с мультипликатором $+1$, причем

$$\frac{\partial F(0, 0)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial F^2(0, 0)}{\partial x^2} = -2 < 0.$$

Следовательно, в точке бифуркации $a = 0.0$ существует полуустойчивая справа негиперболическая неподвижная точка $x_1^* = x_2^* = 0$. При переходе через точку бифуркации $a = 0.0$, т.е. при смене знака параметра с

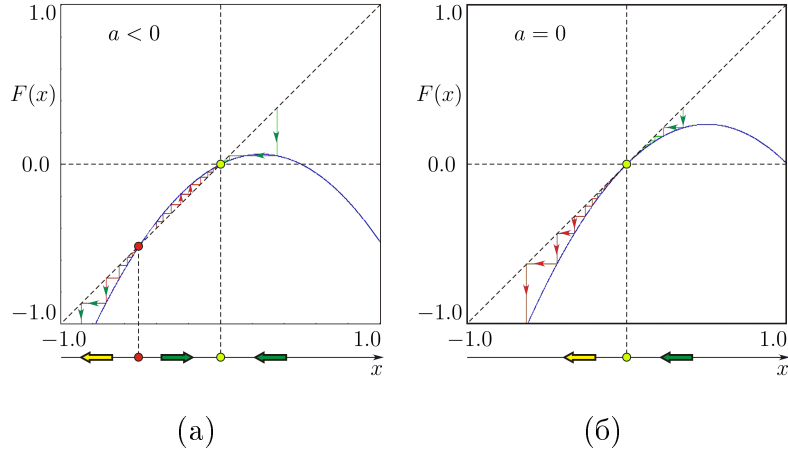


Рис. 2. (а) До бифуркации $a < 0.0$. (б) В точке бифуркации $a = 0.0$.

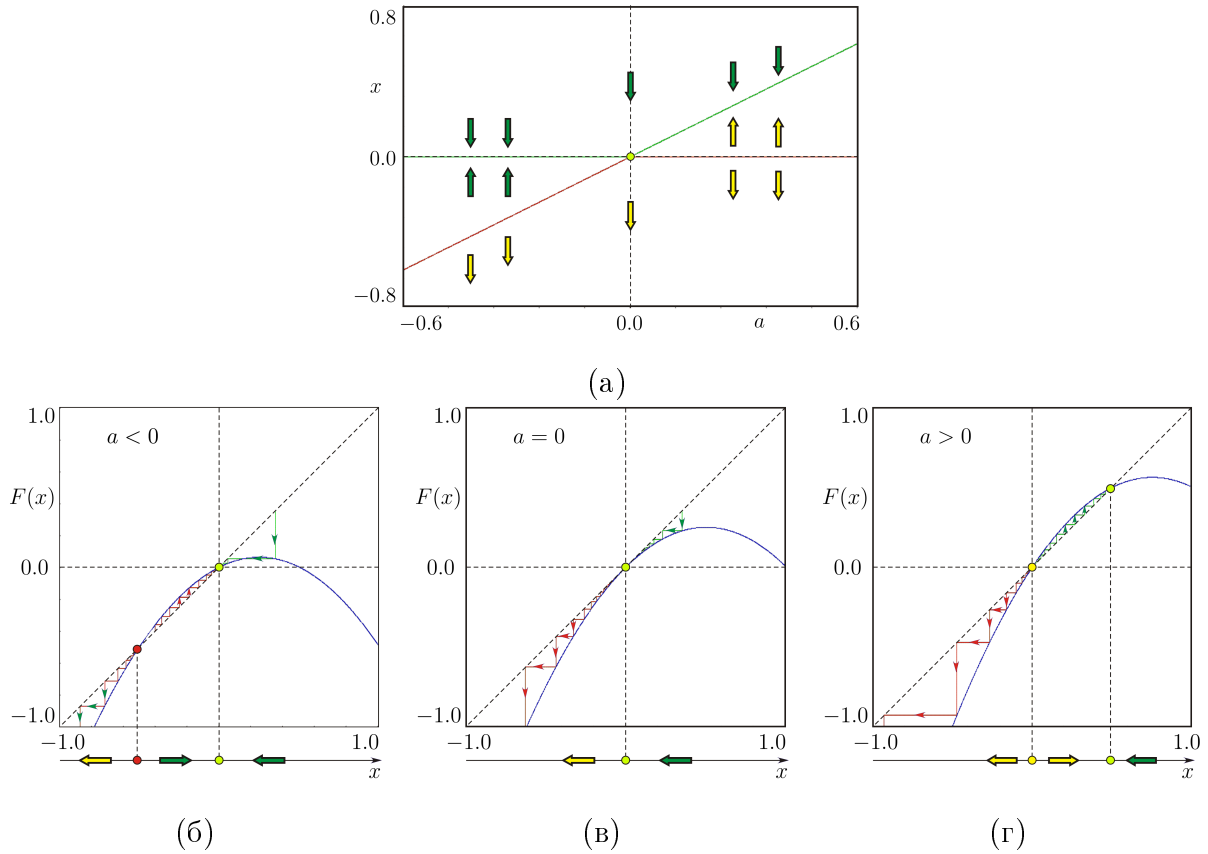


Рис. 3. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

«минуса» на «плюс», неподвижные точки $x_{1,2}^*$ «обмениваются» (“exchange of stability”) устойчивостью: $x_1^* = 0$ становится неустойчивой, а $x_2^* = a$ — устойчивой (рис. 3).

5. Субкритическая вилообразная бифуркация

Как мы говорили ранее, существуют две модификации: субкритическая и суперкритическая. Рассмотрим теперь субкритическую бифуркацию. Вилообразная бифуркация также связана с обращением мультипликатора в $+1$.

Модельное отображения для описания бифуркации (нормальная форма):

$$x_{k+1} = F(a, x_k), \quad F(a, x) = (1 + a)x + x^3. \quad (2)$$

Уравнение для неподвижных точек

$$F(a, x) - x = 0, \quad \text{где} \quad F(a, x) = (1 + a)x + x^3$$

или

$$(1 + a)x - x^3 - x = 0 \Rightarrow x^3 + ax = 0.$$

Отсюда при отрицательных значениях параметра a отображение три неподвижные точки $x_1^* = 0$, $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$, а при $a > 0$ – одну: $x_1^* = 0$.

Найдем первую производную функции $F(a, x)$ по x :

$$\frac{\partial F(a, x)}{\partial x} = 1 + a + 3x^2.$$

Подставив в выражение для $\frac{\partial F(a, x)}{\partial x}$ координаты неподвижных точек $x_1^* = 0$, $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$, получим мультипликаторы:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = 1 + a, \quad \frac{\partial F(a, x_{2,3}^*)}{\partial x} = 1 - 2a.$$

Условие устойчивости гиперболической неподвижной точки $x_1^* = 0$ определяется неравенством

$$-1 < \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} < +1 \Leftrightarrow -1 < 1 + a < 1.$$

Решив это неравенство относительно параметра a , получим область устойчивости неподвижной точки $x_1^* = 0$:

$$-2 < a < 0.$$

$$\text{Если } a > 0 \text{ то } \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} > +1;$$

$$\text{Если } a < -2 \text{ то } \frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} < -1.$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором $+1$ при $a = 0$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = +1 \Leftrightarrow 1 + a = +1 \Rightarrow a = 0.$$

Неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической с мультипликатором -1 при $a = -2$:

$$\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = -1 \Leftrightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2.$$

Симметричные гиперболических неподвижные точки $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$ при $a < 0$ неустойчивы

$$1 - 2a > +1 \quad \text{при} \quad a < 0.$$

При $a = 0$ симметричные неподвижные точки сливаются с $x_1^* = 0$:

$$x_{1,2,3}^* = 0$$

и становятся негиперболическими с мультипликатором $+1$.

6. Описание бифуркации

Условие устойчивости $x_1^* = 0$ не изменилось. Неподвижная точка, как и ранее становится неустойчивой при $a > 0$. Однако неустойчивые $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$, $a < 0$ при увеличении a «влипают» в $x_1^* = 0$ и исчезают при смене знака a с «минуса» на «плюс».

При $a < 0$ отображение три неподвижные точки: $x_1^* = 0$, которая устойчива при $-2 < a < 0$ и две неустойчивые симметричные неподвижные точки $x_{2,3}^* \pm \sqrt{-a}$.

При увеличении параметра a мультипликатор $\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = 1 + a$ стремятся к $+1$. При $a = 0.0$, где $\frac{\partial F(a, x_1^*)}{\partial x} = +1$, неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится негиперболической.

Причем, как можно видеть из графика функции $F(a, x)$, производные в точке бифуркации $a = 0.0$ равны $\frac{\partial F(0, 0)}{\partial x} = +1$, $\frac{\partial F^2(0, 0)}{\partial x^2} = 0$.

Поскольку $\frac{\partial F^3(0, 0)}{\partial x^3} = 6 > 0$, то при $a = 0.0$ негиперболическая неподвижная точка $x_1^* = 0$ неустойчива.

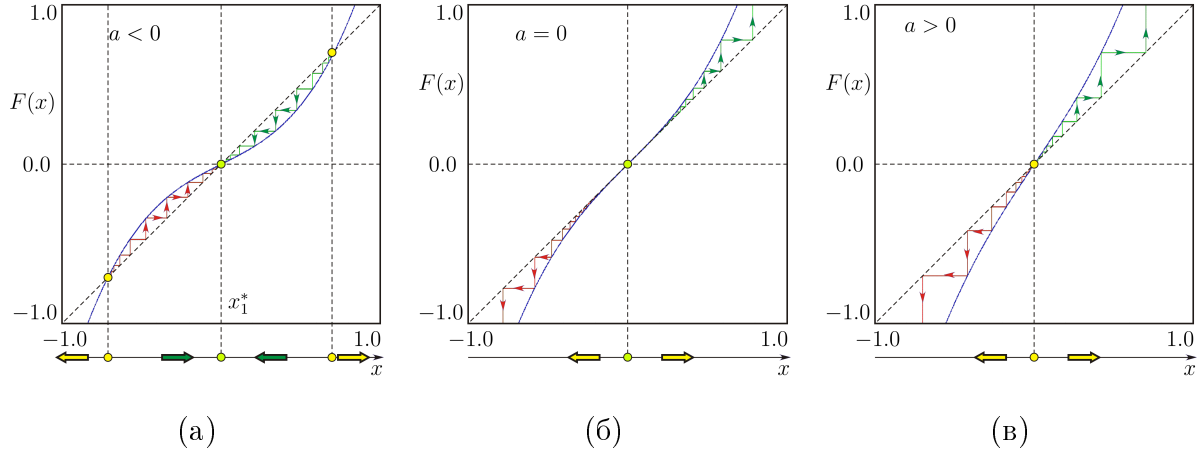


Рис. 4. (а) До бифуркации $a < 0.0$. (б) В точке бифуркации $a = 0.0$. (в) После бифуркации $a > 0.0$

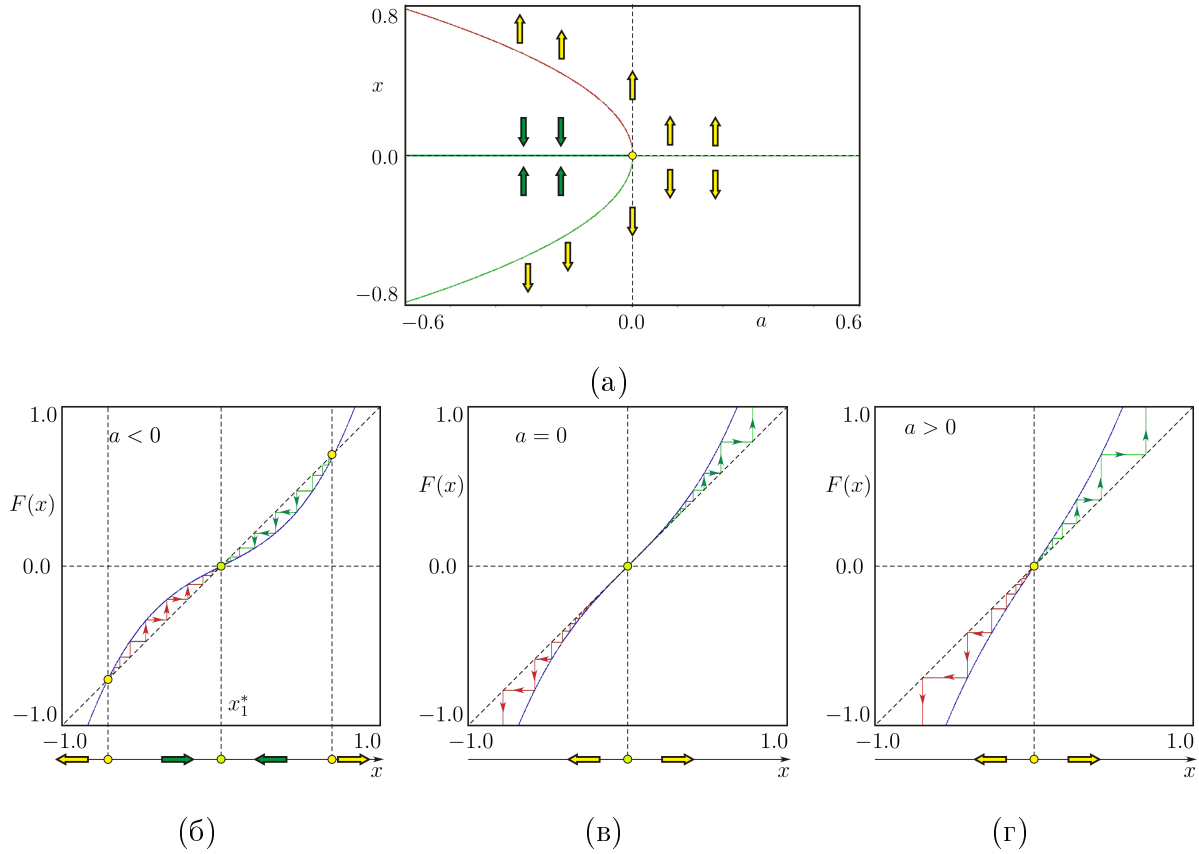


Рис. 5. (а) Бифуркационная диаграмма. (б) До бифуркации $a < 0.0$. (в) В точке бифуркации $a = 0.0$. (г) После бифуркации $a > 0.0$

При $a = 0.0$ неподвижные точки $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a} = 0$ также становятся негиперболическими с мультипликаторами $+1$, причем

$$\frac{\partial F(0,0)}{\partial x} = +1, \quad \frac{\partial F^2(0,0)}{\partial x^2} = 0.$$

Поскольку $\frac{\partial F^3(0,0)}{\partial x^3} = 6 > 0$, то при $a = 0.0$ негиперболические неподвижные точки $x_{2,3}^* = 0$ также неустойчивы.

При переходе через точку бифуркации $a = 0.0$ в область $a > 0$ неподвижная точка $x_1^* = 0$ становится неустойчивой, а $x_{2,3}^* = \pm\sqrt{-a}$ исчезают (см. рис. 5).

7. Задание на лабораторную работу

Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы отображения $x_{k+1} = F(a, x_k)$. Здесь a – параметр. Используя этот результат, выполните качественный анализ транскритической и вилообразной бифуркаций.

7.1. Варианты заданий

Вариант 1.

$$(a) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = a(x - x^2).$$

$$(b) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = 0.2x + ax + x^3.$$

Вариант 2.

$$(a) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = (0.25 + a)x - x^2.$$

$$(b) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = ax + x^3.$$

Вариант 3.

$$(a) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F(a, x) = x + ax + x^2.$$

$$(b) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = x + 0.5ax + x^3.$$

Вариант 4.

$$(a) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F(a, x) = (a + 1/2)x + x^2.$$

$$(b) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = (0.5 + 1.25a)x + x^3.$$

Вариант 5.

$$(a) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$F(a, x) = 0.25ax + x^3.$$

$$(b) \quad x_{k+1} = F(a, x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$F(a, x) = ax + x^2 - 0.5x.$$

7.2. Порядок выполнения работы

- 1. Изучите теоретический материал по транскритической и субкритической вилообразной бифуркациям и методику качественного анализа.
- 2. Найдите неподвижные точки и отвечающие им мультипликаторы. Для этого:
 - (a) Выписать уравнение для нахождения неподвижных точек:

$$F(a, x) - x = 0.$$

Решить это уравнение относительно x .

(б) Найти первую производную функции $F(a, x)$ по x : $F'(a, x) = \frac{\partial F(a, x)}{\partial x}$.

(в) Пусть x_* – действительный корень уравнения $F(a, x) - x = 0$, т.е. $F(a, x_*) - x_* = 0$. Найти мультипликатор неподвижной точки $F'(a, x_*)$, подставив корень уравнения $F(a, x) - x = 0$ в выражение для производной $F'(a, x)$.

Замечание: Число действительных корней уравнения $F(a, x) - x = 0$ есть число неподвижных точек.

- 3. Для каждой неподвижной точки найти область устойчивости. Для этого:

(а) Выписать условие устойчивости гиперболической неподвижной точки:

$$-1 < \frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x} < +1.$$

Решить это неравенство относительно параметра a . Это и есть область устойчивости неподвижной точки по параметру a (диапазон значений a).

(б) Если

$$\left| \frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x} \right| > 1,$$

то неподвижная точка неустойчива.

(в) Выписать условие нарушения гиперболичности неподвижной точки:

$$\frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x} = +1 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F(a, x_*)}{\partial x} = -1.$$

Решить эти уравнения относительно параметра a , тем самым рассчитать значения a , при которых неподвижная точка становится негиперболической с мультипликатором $+1$ или -1 , соответственно.

(г) Определить устойчивость негиперболической неподвижной точки с мультипликатором $+1$.

- 4. Напишите программу построения бифуркационной диаграммы и итерационных диаграмм. Выполните качественный анализ бифуркационного перехода, рассчитав бифуркационную диаграмму и итерационные диаграммы до бифуркации, в точке бифуркации и после бифуркации (см., например, Fig. 5). Сформулируйте выводы.

- 5. Оформите отчет по лабораторной работе.

Библиографический список

1. *Kuznetsov Yu. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory.— New York: Springer–Verlag, 2004.
2. *Zhusubaliyev Zh.T., Mosekilde E.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems. — Singapore: World Scientific, 2003.
3. *Жусубалиев Ж. Т.* Хаотическая динамика в импульсных системах: учебное пособие/ Ж. Т. Жусубалиев, В. Г. Рубанов, В. С. Титов, О. О. Яночкина. — Курск; Белгород: Изд-во БГТУ, 2018. - 143 с.