0b817ca911e6668abb13a5d426d39e5f1c11eabbf73e943df4a4851fda56d089

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Юго-Западный государственный университет»
(ЮЗГУ)

Кафедра Вычислительная техника

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
___________ О.Г. Локтионова
«30» 06 2017 г.

МНОГОМЕРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ МЕТОДАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Методические указания к лабораторным занятиям
по дисциплине «Методы оптимизации» для студентов
направления подготовки 09.04.01

Курск 2017

УДК 519.8

Составитель Ж.Т. Жусубалиев

Рецензент
Доктор технических наук, профессор *С.А. Филист*

Многомерная оптимизация методами второго порядка: методические указания к лабораторным занятиям по дисциплине «Методы оптимизации» / Юго-Зап. гос. ун-т; сост.: Ж.Т. Жусубалиев. Курск, 2017. – 12 с.: табл. 1.– Библиограф.: с. 12.

Рассматриваются алгоритмы безусловной минимизации функции многих переменных методами второго порядка, а также вопросы их численной реализации с помощью ЭВМ.

Методические указания соответствуют требованиям программы, утвержденной учебно-методическим объединением по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника».

Предназначены для студентов направления подготовки 09.04.01 дневной и заочной форм обучения.

Текст печатается в авторской редакции

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. . Уч.-изд. л. . Тираж 30 экз. Заказ . Бесплатно.
Юго-Западный государственный университет.
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94.

1. Постановка задачи

Пусть дана функция $f(X)$, ограниченная снизу на множестве R^n и имеющая непрерывные частные производные во всех его точках.

Требуется найти локальный минимум функции $f(X)$ на множестве допустимых решений $X = R^n$, т.е. найти такую точку $X_* \in R^n$, что $f(X_*) = \min\limits_{X \in R^n} f(X),\ f(X) \in C^2$

2. Метод Ньютона

Если функция $f(X)$ является дважды дифференцируемой в R^n, то эффективность процесса поиска точки $X_* \in R^n$ ее минимума можно повысить, используя информацию не только о градиенте $\nabla f(X)$ этой функции, но и о матрице Гессе $H(X)$. Алгоритмы такого поиска обычно относят к *методу Ньютона*. В простейшем варианте алгоритма на каждой k-ой итерации целевая функция аппроксимируется в окрестности точки X_{k-1} (на первой итерации в окрестности начальной точки X_0) квадратичной функцией $\varphi_k(X)$ и затем определяется точка X_k минимума функции $\varphi_k(X)$. На следующей, $(k+1)$-й итерации строится новая квадратичная аппроксимация уже в окрестности точки X_k [1, 2, 3].

При помощи формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано представим функцию $f(X)$ в окрестности точки X_{k-1} в виде:

$$f(X) = f(X_{k-1}) + (\nabla f(X_{k-1}),\ X - X_{k-1}) +$$
$$+\frac{1}{2}(H(X_{k-1})(X - X_{k-1}),\ X - X_{k-1}) + o\left(|X - X_{k-1}|^2\right).$$

Пренебрегая последним слагаемым в правой части, получаем квадратичную функцию:

$$\varphi_k(X) = f(X_{k-1}) + (\nabla f(X_{k-1}),\ X - X_{k-1}) +$$
$$+\frac{1}{2}(H(X_{k-1})(X - X_{k-1},\ X - X_{k-1})).$$

Если матрица Гессе $H\left(X_{k-1}\right)$ функции $f(X)$, вычисленная в точке X_{k-1}, является положительно определенной, то точка X_k минимума функции $\varphi_k\left(X\right)$ единственна и может быть найдена из условия, что ее градиент равен нулевому вектору:
$\nabla\varphi_k\left(X\right)=\nabla f\left(X_{k-1}\right)+H\left(X_{k-1}\right)\left(X-X_{k-1}\right)=0_n$.
Отсюда получаем:
$X_k=X_{k-1}-H^{-1}\left(X_{k-1}\right)\nabla f\left(X_{k-1}\right),\ k=1,2,\ldots$.

Полученное соотношение можно трактовать как рекуррентное соотношение итерационной процедуры метода Ньютона, предназначенного для решения системы $\nabla f\left(X\right)=0_n$ нелинейных уравнений.

Построение последовательности $\left\{X_k\right\}$ заканчивается в точке X_k, для которой $\left\|\nabla f(X_k)\right\|<\varepsilon_1$, где ε_1 – заданное малое положительное число, или при $k\geq M$ (M – предельное число итераций), или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств $\left\|X_{k+1}-X_k\right\|<\varepsilon_2$, $\left|f(X_{k+1})-f(X_k)\right|<\varepsilon_2$, где ε_2 – малое положительное число.

Алгоритм метода включает следующие шаги:

Шаг 1. Задать X_0, $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$, M – предельное число итераций. Найти градиент $\nabla f(X)$ и матрицу Гессе $H(X)$.

Шаг 2. Положить $k=0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(X_k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение критерия окончания $\left\|\nabla f(X_k)\right\|\leq\varepsilon_1$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен и $X_*=X_k$,

б) в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение неравенства $k\geq M$:

а) если неравенство выполнено, расчет окончен и $X_*=X_k$,

б) если нет, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить матрицу $H(X_k)$.

Шаг 7. Вычислить матрицу $H^{-1}(X_k)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия $H^{-1}(X_k)>0$:

а) если $H^{-1}(X_k)>0$, то перейти к шагу 9;

б) если нет, то перейти к шагу 10, положив $S_k=-\nabla f(X_k)$

Шаг 9. Определить шаг спуска $S_k = -H^{-1}(X_k)\nabla f(X_k)$.

Шаг 10. Найти точку $X_{k+1} = X_k + S_k$.

Шаг 11. Проверить выполнение условий:

$\|X_{k+1} - X_k\| < \varepsilon_2$, $|f(X_{k+1}) - f(X_k)| < \varepsilon_2$:

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k = k-1$, то расчет окончен, $X_* = X_{k+1}$,

б) в противном случае положить $k = k+1$ и перейти к шагу 3.

Пример. Найти локальный минимум квадратичной функции $f(X) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ методом Ньютона.

Решение.

Определение точки, в которой выполняется по крайней мере один критерий окончания расчетов.

Шаг 1. Зададим X_0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M: $X_0 = (10;\,10)^T$; $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}15$; $M = 10$. Найдем градиент функции $\nabla f(X) = (16x_1 + 4x_2;\; 4x_1 + 10x_2)^T$ и матрицу Гессе $H(X) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Положим $k = 0$.

Шаг 3. Вычислим $\nabla f(X_0)$: $\nabla f(X_0) = (200;\,140)^T$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия окончания $\|\nabla f(X_0)\| < \varepsilon_1$:

$\|\nabla f(X_0)\| = 244{,}13 > 0{,}1$ Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Проверим выполнение неравенства $k \ge M$: $0 < 10$. Переходим к шагу 6.

Шаг 6. Вычислим матрицу Гессе в точке X_0: $H(X_0) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Шаг 7. Вычислим матрицу $H^{-1}(X_0)$: $H^{-1}(X_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{10}{144} & -\dfrac{4}{144} \\ -\dfrac{4}{144} & \dfrac{16}{144} \end{pmatrix}$.

Шаг 8. Проверим выполнение условия $H^{-1}(X_0)>0$. Так как $\Delta_1=\dfrac{10}{144}>0$, $\Delta_2=\dfrac{4}{144}>0$, то согласно критерию Сильвестра $H^{-1}(X_0)>0$.

Шаг 9. Определим

$$S_0=-H^{-1}(X_0)\nabla f(X_0)=-\begin{pmatrix}\dfrac{10}{144} & -\dfrac{4}{144}\\ -\dfrac{4}{144} & \dfrac{16}{144}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200\\140\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10\\-10\end{pmatrix}.$$

Шаг 10. Вычислим точку

$X_1=X_0+S_0=(10,10)^T+(-10,-10)^T=(0,0)^T$.

Шаг 11. Проверим выполнение условий:

$\|X_1-X_0\|<\varepsilon_2$, $f(X_1)-f(X_0)<\varepsilon_2$: $\|X_1-X_0\|=14{,}14<0{,}15=\varepsilon_2$;

$f(X_1)-f(X_0)=1700>0{,}15=\varepsilon_2$.

Полагаем $k=1$ и переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычислим $\nabla f(X_1)$: $\nabla f(X_1)=(0;0)^T$.

Шаг 4. Проверим выполнение критерия окончания $\|\nabla f(X_1)\|<\varepsilon_1$:

$\|\nabla f(X_0)\|=0<0{,}1$. Расчет окончен. В точке X_1 выполняется необходимое условие первого порядка, поэтому она является стационарной точкой.

Анализ точки X_1.

Функция $f(X)=8x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$ является строго выпуклой, так как ее матрица вторых производных $\begin{pmatrix}16 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}>0$ в силу того, что $\Delta_1=16>0$, $\Delta_2=4>0$. Найденная точка $X_1=(0,0)^T$ есть точка локального и одновременно глобального минимума $f(X)$.

Сходимость метода Ньютона существенно зависит от выбора начального приближения. Если функция сильно выпуклая и для любых точек $X,Y\in R^n$ относительно матрицы Гессе $H(X)$ целевой функции выполнено неравенство $\|H(X)-H(Y)\|\le L|X-Y|$, $L>0$, а начальное приближение выбрано удачно (точка X_0 расположена достаточно близко к точке X_* минимума), то алгоритм метода Ньютона обладает квадратичной скоростью сходимости, т.е. справедлива оценка

$|X_k - X_*| \le C|X_{k-1} - X_*|^2$, $k = 1, 2, ..., C = const$ [1, 2, 3].

Это позволяет для такой функции использовать в качестве условия прекращения итераций выполнение неравенства $|X_k - X_{k-1}| < \varepsilon$, где ε - заданное достаточно малое положительное число. Но в случае, когда функция не является сильно выпуклой или же начальное приближение находится далеко от искомой точки X_*, метод Ньютона может расходиться.

Квадратичная скорость сходимости, а также возможность контроля за соблюдением достаточного условия минимума функции $f(X)$ на каждой k-ой итерации при помощи матрицы Гессе $H(X_{k-1})$ этой функции способствуют высокой эффективности рассматриваемого алгоритма.

Одним из условий применения метода Ньютона является сохранение положительной определенности матрицы Гессе $H(X_{k-1})$ функции $f(X)$ на каждой k-ой итерации, так как иначе вектор $S_k = -H^{-1}(X_k)\nabla f(X_k)$ может не соответствовать направлению спуска, вдоль которого эта функция убывает. Более того, матрица $H(X_{k-1})$ может быть вырожденной и не иметь обратной матрицы [1, 2].

3. Метод Ньютона-Рафсона

Если начальное приближение X_0 находится на значительном расстоянии от точки минимума X_*, шаг по методу Ньютона может оказаться чрезмерно большим. Вследствие этого метод может не сходиться. Метод Ньютона можно модифицировать с тем, чтобы обеспечить уменьшение значения минимизируемой функции от итерации к итерации. Последовательность итераций строится в соответствии с формулой:

$X_{k+1} = X_k + \alpha_k S_k$.

Заметим, что в методе Ньютона $\alpha_k = 1$.

Выбор шага α_k осуществляется таким образом, чтобы $\varphi(\alpha_k) = f\left(X_{k+1}\right) \to \min$.

Построение последовательности $\{X_k\}$ заканчивается в точке X_k, для которой $\left\|\nabla f\left(X_k\right)\right\| < \varepsilon_1$, где ε_1 – заданное число, или при $k \ge M$ (M – предельное число итераций), или при двукратном одновременном выполнении двух неравенств $\left\|X_{k+1} - X_k\right\| < \varepsilon_2$, $\left|f(X_{k+1}) - f(X_k)\right| < \varepsilon_2$, где ε_2 – малое положительное число.

Алгоритм модифицированного метода Ньютона включает следующие шаги:

Шаг 1. Задать X_0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M – предельное число итераций. Найти градиент $\nabla f(X)$ и матрицу Гессе $H(X)$.

Шаг 2. Положить $k = 0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(X_k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $\left\|\nabla f(X_k)\right\| \le \varepsilon_1$:

а) если неравенство выполнено, то расчет закончен, $X_* = X_k$;

б) если нет, перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение условия $k \ge M$:

а) если неравенство выполнено, расчет окончен, $X_* = X_k$;

б) если нет, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить матрицу $H(X_k)$.

Шаг 7. Вычислить матрицу $H^{-1}(X_k)$.

Шаг 8. Проверить выполнение условия $H^{-1}(X_k) > 0$:

а) если условие выполняется, то найти $S_k = -H^{-1}(X_k)\nabla f(X_k)$;

б) если нет, то положить $S_k = -\nabla f(X_k)$.

Шаг 9. Определить $X_{k+1} = X_k + \alpha_k S_k$.

Шаг 10. Найти шаг α_k из условия $\varphi(\alpha) = f(X_k + \alpha S_k) \to \min\limits_{\alpha}$, т.е. путем решения задачи одномерной минимизации.

Шаг 11. Вычислить $X_{k+1} = X_k + \alpha_k S_k$.

Шаг 12. Проверить выполнение неравенств:

$\left\|X_{k+1} - X_k\right\| < \varepsilon_2$, $\left|f(X_{k+1}) - f(X_k)\right| < \varepsilon_2$:

а) если оба условия выполнены при текущем значении k и $k = k-1$, то расчет окончен, $X_* = X_k$;

б) в противном случае положить $k = k + 1$ и перейти к шагу 3.

Пример. Найти локальный минимум квадратичной функции $f(X) = 8x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ методом Ньютона-Рафсона.

Решение.

Определение точки, в которой выполняется по крайней мере один критерий окончания расчетов.

Шаг 1. Зададим X_0, $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$, M: $X_0 = (10; 10)^T$; $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}15$; $M = 10$. Найдем градиент функции $\nabla f(X) = (16x_1 + 4x_2;\ 4x_1 + 10x_2)^T$ и матрицу Гессе $H(X) = \begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.

Шаг 2. Положим $k = 0$.

Дальнейшие вычисления представлены в таблице 1.

Таблица 1

k	X_k	$\nabla f(X_k)$	$H(X_k)$	$H^{-1}(X_k)$	S_k	α_k	X_{k+1}
0	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 200 \\ 140 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{144}\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 16 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix}$	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$					

$\|\nabla f(X_1)\| = 0 < 0{,}1$, следовательно, расчет окончен: $X_* = X_1$.

Метод Ньютона-Рафсона менее чувствителен к выбору начальной точки X_0 по сравнению с «классическим» методом Ньютона. Последовательность $\{X_k\}$ сходится к точке минимума X_* с квадратичной скоростью [1, 2].

4. Метод Марквардта

Метод является комбинацией градиентного метода и метода Ньютона, в котором сочетаются положительные свойства обоих методов. Вместе с тем при использовании метода Марквардта требуется информация о значениях вторых производных функции. Градиент указывает направление наибольшего локального увеличения функции, а движение в направлении, противоположном градиенту, из точки X_0, расположенной на значительном расстоянии от точки минимума X_*, приводит к существенному уменьшению функции. Направления эффективного поиска в окрестности точки минимума определяются по методу Ньютона. Простая идея объединения градиентного метода и метода Ньютона была положена в основу алгоритма, разработанного Марквардтом в 1963 г. В соответствии с этим методом направление поиска определяется равенством:

$$S_k = -[H(X_k) + \mu_k E]^{-1} \nabla f(X_k),\ k = 0, 1, \ldots .$$

Здесь μ_k позволяет не только изменять направление поиска, но и регулировать длину шага. На начальном шаге параметру μ_0 назначается большое значение (например, $\mu_0 = 10^4$).

Если $f(X_k - (H(X_k) + \mu_k E)^{-1} \nabla f(X_k)) < f(X_k)$, то $\mu_{k+1} = \dfrac{\mu_k}{2}$. В противном случае $\mu_{k+1} = 2\mu_k$. Легко видеть, что алгоритм Марквардта в зависимости от величины μ_k на каждом шаге по своим свойствам либо приближается к алгоритму Ньютона, либо к алгоритму градиентного спуска.

Построение последовательности $\{X_k\}$ заканчивается, когда либо выполняется условие $\|\nabla f(X_k)\| < \varepsilon_1$, либо число итераций $k \ge M$, где ε_1 – малое положительное число, а M – предельное число итераций.

Шаги алгоритма Марквардта:

Шаг 1. Задать X_0, $\varepsilon_1 > 0$, M – предельное число итераций. Найти градиент $\nabla f(X)$ и матрицу Гессе $H(X)$.

Шаг 2. Положить $k = 0$, $\mu_k = \mu_0$.

Шаг 3. Вычислить $\nabla f(X_k)$.

Шаг 4. Проверить выполнение условия $\|\nabla f(X_k)\| \le \varepsilon_1$:

а) если неравенство выполнено, то расчет окончен, $X_* = X_k$;

б) если нет, перейти к шагу 5.

Шаг 5. Проверить выполнение условия $k \ge M$:

а) если неравенство выполнено, расчет окончен, $X_* = X_k$;

б) если нет, перейти к шагу 6.

Шаг 6. Вычислить $H(X_k)$.

Шаг 7. Вычислить $H(X_k) + \mu_k E$.

Шаг 8. Вычислить $[H(X_k)+\mu_k E]^{-1}$.

Шаг 9. Вычислить $S_k = -[H(X_k)+\mu_k E]^{-1}\nabla f(X_k)$.

Шаг 10. Вычислить $X_{k+1} = X_k + S_k$.

Шаг 11. Проверить выполнение условия $f(X_{k+1}) < f(X_k)$:

а) если неравенство выполняется, то перейти к шагу 12;

б) если нет, перейти к шагу 13.

Шаг 12. Положить $k = k+1$, $\mu_{k+1} = \dfrac{\mu_k}{2}$ и перейти к шагу 3.

Шаг 13. Положить $\mu_k = 2\mu_k$ и перейти к шагу 7.

Метод Марквардта характеризуется относительной простотой, свойством убывания целевой функции при переходе от итерации к итерации, высокой скоростью сходимости в окрестности точки минимума X_*. Главный недостаток метода заключается в необходимости вычисления матрицы Гессе и последующего решения системы линейных уравнений для определения шага спуска.

5. Задачи для упражнений

1. Найти минимум функции $f(X) = \left[x_1^2 + (x_2+1)^2\right]\cdot\left[x_1^2 + (x_2-1)^2\right]$ из начальной точки $X_0 = (4,\ 3)^T$.

2. Для функции $f(X) = 100\cdot\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + (1-x_1)^2$ и начальной точки $X_0 = (-1{,}2;\ 0)^T$ найдите точку, которой соответствует минимальное значение $f(X)$.

3. Найдите координаты точек минимума функции Химмельблау $f(X) = \left(x_1^2 + x_2 - 11\right)^2 + \left(x_1 + x_2^2 - 7\right)^2$ из начальных точек: $X_0 = (5;\ 5)^T$; $X_0 = (5;\ -5)^T$; $X_0 = (0;\ 0)^T$; $X_0 = (-5;\ -5)^T$; $X_0 = (5;\ 0)^T$.

4. Задана функция $f(X)$ и начальная точка X_0. Найдите минимум функции $f(X)$:

   1) $f(X) = x_1^3 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 - 4$, $X_0 = (-1;\ 1)^T$;

   2) $f(X) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 4x_2$, $X_0 = (0;\ 0)^T$;

3) $f(X) = x_1^2 + 10(x_2 - \sin x_1)^2,\ X_0 = (1;\ 1)^T$;

4) $f(X) = e^{x_1^2} + x_2 + (x_1 - x_2)^2,\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

5) $f(X) = e^{x_2^2 - x_1} + e^{x_1},\ X_0 = (-1;\ -1)^T$;

6) $f(X) = e^{-x_1} + x_1^2 + x_2^2,\ X_0 = (0{,}5;\ 0{,}5)^T$;

7) $f(X) = e^{-x_2} + \cos(x_1^2 + x_2),\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

8) $f(X) = e^{x_1} + x_2^2 - 2x_1,\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

9) $f(X) = x_1^2 - \cos(x_2 - 1),\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

10) $f(X) = x_2^2 + e^{x_1} - 3x_1,\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

11) $f(X) = e^{x_1 - x_2} + x_1^2 + x_2^2,\ X_0 = (1;\ 1)^T$;

12) $f(X) = e^{x_1^2 - x_2} + e^{x_2},\ X_0 = (-1;\ -1)^T$;

13) $f(X) = e^{x_1} + (x_1 - x_2^2)^2,\ X_0 = (0{,}5;\ 0{,}5)^T$;

14) $f(X) = e^{x_1} + x_1^2 + x_2^2,\ X_0 = (-1;\ -1)^T$;

15) $f(X) = e^{-x_2} + (x_2 + x_1^2)^2,\ X_0 = (0{,}5;\ 0{,}5)^T$;

16) $f(X) = x_2^2 - \cos(x_1 - 1),\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

17) $f(X) = x_1^2 + e^{x_2} - 3x_2,\ X_0 = (0;\ 0)^T$;

18) $f(X) = e^{x_2} + x_1^2 + x_2^2,\ X_0 = (1;\ 1)^T$;

---

1. Пантелеев, А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учеб. пособие / А.В. Пантелеев, Т.А. Летова; 2-е изд., исправл. – М.: Высш. шк., 2005. – 544 с.: ил.

2. Аттетков, А.В. Методы оптимизации: учебник для вузов / А.В. Аттетков, С.В. Галкин, В.С. Зарубин / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко; 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. – 440 с.

3. Marquardt, D.W. An Algorithm for Least Squares Estimation of Non-Linear Parameters / D.W. Marquardt; SIAM J., 11. Pp. 431 – 441.